

فصلنامه مهندسی مدیریت نوین  
سال دهم، شماره سوم، پاییز ۱۴۰۳

کنترل بهینه پویایی مشتری از روش یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای

سید حمید عمادی<sup>۱</sup>، ابوالفضل صادقیان<sup>۲</sup>، مژده ربانی<sup>۳</sup>، حسن دهقان دهنوی<sup>۴</sup>

چکیده

این پژوهش به توسعه‌ی یک مدل کنترل بهینه برای بررسی پویایی مشتریان با تمرکز بر استراتژی‌های بازاریابی پرداخته است. به کارگیری معادلات دیفرانسیل نشان‌دهنده این واقعیت است که مدل یک سیستم غیرخودکار را مورد مطالعه قرار می‌دهد. هدف اصلی، تحلیل روی رفتار و تغییرات گروه‌های مختلف مشتریان، از جمله دائمی، ارجاعی، و بالقوه است. این تحقیق بر اهمیت اجرای استراتژی‌های بازاریابی موثر برای افزایش کلی تعداد مشتریان و بهبود پویایی آن‌ها تاکید دارد. برای دستیابی به این اهداف، ما از یک الگوریتم یادگیری ماشین نظارتی جدید که بر پایه هسته‌های چندجمله‌ای فعالیت می‌کند، استفاده شده است. این هسته‌ها

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، مدیریت صنعتی (تولید و عملیات)، گروه مدیریت، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران.

hamid.emadi7@gmail.com

<sup>۲</sup> استادیار، گروه مدیریت صنعتی، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران. (نویسنده مسئول)

sadeghian@iauyazd.ac.ir

<sup>۳</sup> استادیار، گروه مدیریت صنعتی، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران.

moz.rabbani@iau.ac.ir

<sup>۴</sup> دانشیار، گروه مدیریت صنعتی، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران.

denavi2000@yahoo.com

تاریخ پذیرش ۱۴۰۳/۳/۱۷

تاریخ وصول ۱۴۰۲/۱۲/۱۹

امکان مدل‌سازی دقیق توابع پیچیده از داده‌ها را فراهم می‌آورند، به این ترتیب به ما کمک می‌کنند که درک بهتری از پویایی‌های مشتریان حاصل شود. همچنین، با استفاده از رگرسیون بردار پشتیبان کمترین مربعات، یک روش بهینه‌سازی ساده و مؤثر برای استراتژی‌های بازاریابی عرضه می‌گردد. این رویکرد امکان بهینه‌سازی استراتژی‌های بازاریابی را به شکلی فراگیر به اثر کلی این استراتژی‌ها بر مجموعه مشتریان می‌پردازد. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که در بازه‌ی زمانی یک سال، تعداد مشتریان دائمی در حال افزایش می‌باشد، درحالی‌که جمعیت مشتریان بالقوه نشان از کاهش دارد. اما تعداد مشتریان ارجاعی در ابتدای دوره مورد بررسی شاهد رشدی چشمگیر بوده و سپس الگویی نوسانی اما مثبت را تجربه می‌کند. این تحقیق، چگونگی کمک تکنیک‌های پیشرفته‌ی یادگیری ماشین به حل چالش‌های مختلف در حوزه‌های مدیریت و بازاریابی را به اثبات می‌رساند، نشان داده‌شده است که چگونه این فناوری‌ها می‌توانند در فهم و به‌کارگیری استراتژی‌های بهینه در گستره‌ای از سازمان‌ها و صنایع تاثیرگذار باشند.

**واژگان کلیدی:** کنترل بهینه، پویایی مشتری، یادگیری ماشین، هسته چندجمله‌ای

JEL: C02,C61,M31

## مقدمه

کنترل بهینه پویایی مشتری، بهینه‌سازی و مدیریت بهتر تعاملات و رفتارهای مشتریان در طول زمان را برعهده دارد. این مفهوم در بازاریابی به کار می‌رود تا بهترین راه‌ها برای جلب، حفظ و تشویق مشتریان به خرید و ارتباط مداوم با شرکت را تعیین کند. با استفاده از کنترل بهینه پویایی مشتری، شرکت‌ها قادرند تا با تحلیل داده‌ها و رفتارهای مشتریان، استراتژی‌هایی را تدوین کنند که بهترین نتایج را در بلندمدت به آن‌ها ارائه دهند. این شامل ارائه پیشنهادهای شخصی‌سازی شده، ایجاد تجربه کاربری

بهرتر، و ارتقاء ارتباط با مشتریان می‌شود. کنترل بهینه پویایی مشتری اهمیت زیادی در بازاریابی دارد زیرا به شرکت‌ها کمک می‌کند تا با تعامل موثر با مشتریان، روابط مستدام و پربارتری را برقرار کنند و در نتیجه، عملکرد و سودآوری خود را بهبود بخشند (Castillo et al,2021).

به گزارش CMO که در سال ۲۰۱۷ توسط دانشکده بازرگانی فوکوا، انجمن بازاریابی آمریکا انجام شد، نشان می‌دهد که شرکت‌ها به طور کلی بین ۱۰ تا ۲۰ درصد از درآمد خود را بسته به بخشی که در آن فعالیت می‌کنند، به بودجه بازاریابی اختصاص می‌دهند. با توجه به مقادیر بالا، بهینه سازی آن تخصیص بسیار مهم است (Rosa et al,2018).

از طرفی دیگر ریزش مشتریان به یکی از چالش‌های اساسی تبدیل شده است که شرکت‌ها با آن مواجه می‌شوند. این ریزش نه تنها منجر به از دست دادن درآمد می‌شود، بلکه همچنین هزینه‌های اضافی برای جلب مشتریان جدید را به همراه دارد (Ortakci & Seker,2024).

با این حال، همانطور که گوپتا و استینبرگ<sup>۱</sup> بیان کردند، تخصیص منابع بازاریابی یک تصمیم پیچیده است که تا همین اواخر بر اساس اکتشافی‌های بسیار ساده یا قوانین تصمیم‌گیری انجام می‌شد (Gupta & Steenburgh,2008).

از جمله تصمیمات و استراتژی بازاریابی، تصمیم به سرمایه‌گذاری در برنامه‌های ارجاع است. این برنامه‌ها مشتریان فعلی را تشویق می‌کند تا مشتریان جدید را بر اساس پاداش‌ها جذب کنند (Li et al,2019). برخلاف سایر برنامه‌های بازاریابی که صرفاً مبتنی بر تبلیغات دهان‌به‌دهان هستند، برنامه‌های ارجاع توسط بازاریاب هدایت می‌شوند و امکان کنترل

---

<sup>1</sup> Gupta &Steenburgh

محتوای پیام را دارند (Berman,2016). با این حال، مطالعاتی که به بازاریابان کمک می‌کند تا در مورد تخصیص منابع به برنامه‌های ارجاع تصمیم بگیرند، کمیاب هستند (Rosa et all,2018).

برای چندین دهه، شرکت‌ها به دنبال بهترین راه برای به حداکثر رساندن سود و کاهش هزینه بوده‌اند. مدل‌های کلاسیک معمولاً به دنبال راه‌هایی هستند که به شرکت‌ها در تخصیص منابع بازاریابی خود و در عین حال حداکثر کردن سود کمک می‌کنند (Shawky et all, 2020). با این حال، مدل‌های اخیر سعی کرده‌اند ارزش ویژه مشتری را به حداکثر برسانند (ارزش فعلی خالص جریان سود آتی در طول عمر مشتری از طریق تخصیص بهینه منابع بازاریابی). از این نظر، و بر اساس این فرض که تعداد مشتریان در یک بازار محدود است، مهم است که مشتریان جدید را در اسرع وقت جذب کنید، زیرا در غیر این صورت، می‌توانند توسط رقبا جذب شوند. در عین حال، جذب دیر هنگام مشتری، ارزش ویژه مشتری را نیز کاهش می‌دهد (Foroudi et all,2018).

فناوری‌های هوش مصنوعی می‌توانند به طور چشمگیری بر زمینه‌های کلیدی شرکت‌ها مثل پیش‌بینی، مدیریت عملکرد، افزایش فروش و بازاریابی متقابل تأثیر بگذارند. علاوه بر این یکپارچگی هوش مصنوعی در مدیریت ارتباط با مشتری دارای پیامدهای استراتژیک بلندمدت نیز است و به شرکت‌ها امکان می‌دهد که در یک چشم انداز پایدار و تطبیقی با بازار در حال تغییر اعمال نمایند و پیشرفت کنند (Ledro et all,2023).

در دوران اخیر، شاهد افزایش قابل توجهی در تطبیق و توسعه الگوریتم‌های هوش مصنوعی، یادگیری ماشین و شبکه‌های عصبی بوده‌ایم

که برای رویارویی با چالش‌های مختلف در حوزه‌های علمی و فن‌آوری به کار گرفته شده‌اند. این الگوریتم‌ها در زمینه‌های گوناگونی مانند شناسایی الگوها، که شامل الگوی رفتار مشتریان به صورت داده‌های سری زمانی می‌شود، تحلیل تصاویر پزشکی، امنیت سایبری و دیگر موارد متعدد کاربرد دارند. علاوه بر این، در عرصه حل مسائل پیچیده عددی شامل معادلات دیفرانسیل و انتگرالی که به روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند، این تکنیک‌ها راهگشا هستند. مهرکانون و همکارانش پیشگام بهره‌گیری از تکنیک رگرسیون بردار پشتیبان برای شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیل معمولی<sup>۱</sup> بوده‌اند که در ادامه مطالعات، رویکرد مشابهی برای حل عددی معادلات جزئی و انتگرالی و معادلاتی در فضاها بی‌کران نیز توسعه یافته است (Mehrkanoon & Suykens, 2015).

### پیشینه‌ی پژوهش

جدول ۱ مروری کنترل بهینه پویایی مشتری را ارائه می‌دهد.

جدول (۱) پیشینه پژوهش

| ردیف | نام محقق                        | سال  | عنوان  | توضیحات  |
|------|---------------------------------|------|--|--|
| ۱    | <a href="#">اسلام و همکاران</a> | ۲۰۲۴ | چارچوب برنامه ریزی انتخاب تامین کننده و تخصیص سفارش با ادغام یادگیری عمیق، میانگین متحرک یکپارچه تجزیه و تحلیل | نتایج مدل‌های پیش‌بینی نشان می‌دهد که شبکه یادگیری عمیق توسعه یافته می‌تواند خطای پیش‌بینی را در مقایسه با روش میانگین متحرک یکپارچه بازگشتی فصلی ۵۵.۴۲ درصد و |

<sup>1</sup> ODEs

|   |  |      |   |   |
|---|--|------|---|---|
| <p>در مقایسه با روش ماشین تقویت‌شده با گرادیان ۱۳.۱ درصد کاهش دهد. همچنین مشاهده می‌شود که در نظر گرفتن توابع همبستگی بین محصول می‌تواند تامین کنندگان انتخاب شده و سفارشات مربوطه را تغییر دهد.</p>  | <p>اجزای اصلی و تکنیک های بهینه سازی</p>                                   |      |   |   |
| <p>در این مطالعه، روش‌های درخت تصمیم، جنگل تصادفی و ماشین بردار پشتیبان به‌عنوان طبقه‌بندی‌کننده برای پیش‌بینی ریزش تطبیق داده شده‌اند، و مدل‌های رگرسیونی از همان روش‌ها برای پیش‌بینی بهینه‌ترین هزینه خدمات «شخصی‌شده» برای بالقوه استفاده می‌شوند. ریزش مشتری علاوه بر این، برای کاهش هزینه جمع‌آوری داده‌ها برای شرکت‌ها، از روش انتخاب ویژگی برای تعیین بهینه‌ترین زیرمجموعه ویژگی در تحلیل ریزش و پیش‌بینی هزینه خدمات استفاده می‌شود. نتیجه این تحلیل جامع با استفاده از چهار روش هوش مصنوعی بر روی سه مجموعه داده مخابراتی</p> | <p>بهینه سازی حفظ مشتری: یک رویکرد قیمت گذاری شخصی مبتنی بر هوش مصنوعی</p> | ۲۰۲۴ | <p><a href="#">اورتاکچی</a><br/><a href="#">و سکر</a></p> | ۲ |

|   |   |             |  |          |
|---|---|-------------|--|----------|
| <p>متنوع، نشان می‌دهد که مدل قیمت‌گذاری «شخصی‌شده» پیشنهادی در بخش مخابرات می‌تواند از ریزش جلوگیری کرده و سودآوری را تا ۳۶ درصد افزایش دهد.</p>  |   |             |  |          |
| <p>در ای مقاله در مورد تعریف هوش مصنوعی و ML، تحول بخش بازاریابی توسط پلتفرم‌های دیجیتال و تجزیه و تحلیل داده، اکتشاف بازاریابی دقیق و ارتباط روزافزون آن در عصر دیجیتال، نقش هوش مصنوعی و محیط بازاریابی در داده‌کاوی برای هدف‌یابی دقیق، بحث می‌کند. سهم هوش مصنوعی در ایجاد بخش‌های دقیق‌تر مشتری و مطالعه‌ی محیط بازاریابی در تجزیه و تحلیل پیش‌بینی‌کننده برای پیش‌بینی رفتار مشتری.</p> | <p>نقش هوش مصنوعی و یادگیری ماشینی در هدف‌گیری دقیق: استراتژی‌های بازاریابی انقلابی</p>                       | <p>۲۰۲۴</p> | <p><a href="#">اکاساری و همکاران</a></p> | <p>۳</p> |
| <p>در این مقاله بر اندازه‌گیری ارزش مشتری و تقسیم‌بندی مشتری بر اساس تئوری ارزش چرخه عمر مشتری تمرکز می‌کند که ابتدا مهندسی ویژگی مانند انتخاب داده‌ها، پیش پردازش داده‌ها، تبدیل داده‌ها و کشف</p>   | <p>تحقیق در مورد ارزش طول عمر مشتری بر اساس الگوریتم‌های یادگیری ماشین و مدل تحلیل مدیریت ارتباط با مشتری</p> | <p>۲۰۲۳</p> | <p><a href="#">سان و همکاران</a></p>     | <p>۴</p> |

|   |   |             |   |          |
|---|---|-------------|---|----------|
| <p>دانش را انجام می دهد و سپس تقسیم‌بندی ارزش مشتری را براساس الگوریتم‌های یادگیری ماشین و مدل‌های تجزیه و تحلیل مدیریت ارتباط با مشتری انجام می‌دهد و یک مدل شناسایی تقسیم‌بندی ارزش مشتری را تحت این شرایط ایجاد می‌کند.</p>  |   |             |   |          |
| <p>این مطالعه پر کردن این شکاف با شناسایی چالش‌هایی است که کسب‌وکارها باید در فرآیند یکپارچه‌سازی هوش مصنوعی در زمینه‌ی ارتباط با مشتری، از اولین مرحله کشف تا مرحله پایدار نهایی، بر آن‌ها غلبه کنند. این یافته‌ها به درک تجربی ادغام AI-CRM کمک می‌کند و دیدگاهی بلندمدت در استفاده از هوش مصنوعی برای روابط با مشتری ارائه می‌دهد.</p> | <p>ادغام هوش مصنوعی در ارتباط با مشتری: چالش‌ها و دستورالعمل‌ها</p> | <p>۲۰۲۳</p> | <p><a href="#">لیدرو و همکاران</a></p>  | <p>۵</p> |
| <p>در این مقاله تحلیل مفاهیم اولیه هوش مصنوعی و شناسایی زمینه‌های مشتقات هوش مصنوعی است که می‌تواند در</p>  | <p>نقش هوش مصنوعی در نوآوری بازاریابی دیجیتال</p>                   | <p>۲۰۲۳</p> | <p><a href="#">تائوفیک و همکارش</a></p> | <p>۶</p> |



|  |  |             |   |          |
|--|--|-------------|---|----------|
| <p>نوآوری‌های بازاریابی دیجیتال به کار روند. این مقاله همچنین به بررسی کاربردهای مختلف هوش مصنوعی و تأثیر آنها بر اثربخشی و کارایی بازاریابی دیجیتال می‌پردازد. با ترکیب هوش ماشینی و تجزیه و تحلیل داده‌ها، شرکت‌ها می‌توانند هدف‌گذاری، شخصی‌سازی و اثربخشی تبلیغات خود را بهبود بخشند.</p>  |  |             |   |          |
| <p>در این مقاله از اطلاعات باکیفیت ذخیره شده در مدل‌های مشتری که با استفاده از تکنیک‌های هوش مصنوعی ساخته شده‌اند، بهره‌مند شوند و امکان تصمیم‌گیری آگاهانه در مورد نحوه شخصی‌سازی (تطبیق) برای مطابقت با نیازها و ترجیحات مشتری را فراهم کنند که کار بر روی موضوعات دستور کار می‌تواند به نفع ذینفعان مد متمایز باشد، نه فقط مشتریان و تصمیم‌گیری مناسبی را در زمینه‌ها و پویایی‌های مختلف ایجاد کند.</p> | <p>مدل‌های مشتری برای پشتیبانی تصمیم‌گیری مبتنی بر هوش مصنوعی در زنجیره‌های تامین خرده‌فروشی آنلاین مد</p> | <p>۲۰۲۲</p> | <p><a href="#">پری‌را و همکاران</a></p> | <p>۷</p> |
| <p>در مطالعه حاضر، پویایی مشتریان بانک را از طریق</p>  | <p>پویایی بخش‌های مشتری: پیش‌بینی</p>  | <p>۲۰۲۱</p> | <p><a href="#">مصدق و همکاران</a></p>   | <p>۸</p> |

|  |   |             |   |           |
|--|---|-------------|---|-----------|
| <p>بخش‌های ارزشی با استفاده از تجزیه و تحلیل داده‌های بزرگ مورد مطالعه قرار گرفته است. در نتیجه الگویی را توسط چند گروه از مبتکران روند بازار یافتیم که روند انتقال آنها با روندهای کلی بازار دنبال می‌شود که بیش‌تر نسبت به پویایی بازارهای آینده به دست می‌آورد.</p>                     | <p>کننده ارزش طول عمر مشتری</p>   |             |   |           |
| <p>در این مطالعه، روش‌هایی برای یک مسئله در حمل و نقل و لجستیک و بهینه‌سازی مسیریابی است که نتایج، راه‌های امیدوارکننده‌ای برای ترکیب یادگیری ماشین و مشکلات مسیریابی پیشنهاد می‌شود.</p>  | <p>یادگیری مسیر: یک رویکرد مبتنی بر یادگیری ماشین برای استنباط مشتریان محدود در مسیرهای تحویل</p> | <p>۲۰۲۰</p> | <p><a href="#">اسنوک و همکاران</a></p>  | <p>۹</p>  |
| <p>در این مقاله کل فرآیند مدیریت نیازمندی‌ها دارای دو گلوگاه عمده است که می‌توان آنها را خودکار کرد. اولین مورد، تشخیص تغییرات، می‌تواند از طریق یک ابزار مقایسه اسناد انجام شود. مورد دوم، شناخت مسئولیت‌ها و واگذاری آنها به بخش مناسب، با الگوریتم‌های یادگیری ماشین استاندارد قابل</p> | <p>مدیریت گردش کار نیازهای مشتری با استفاده از یادگیری ماشین</p>                                  | <p>۲۰۱۹</p> | <p><a href="#">لیوتوف و همکاران</a></p> | <p>۱۰</p> |

|   |  |      |                               |    |
|---|--|------|-------------------------------|----|
| حل است. در اینجا، چنین الگوریتم‌هایی برای مجموعه داده‌ای به دست آمده از یک تامین کننده جهانی صنعت خودرو اعمال می‌شوند. در نتایج نشان می‌دهد که چگونه چنین روش‌هایی می‌توانند برخی از مشکلات مدیریتی را حل کرده و گردش کار خود را بهبود بخشند.                   |  |      |                               |    |
| در این پژوهش مسئله کنترل بهینه را برای یک مدل غیر مستقل از ODE ها در نظر می‌گیریم که تکامل تعداد مشتریان را در برخی از شرکت‌ها توصیف می‌کند. در نتیجه اثربخشی استراتژی کنترل بهینه را در برابر سایر فرمول‌بندی‌های مسئله با کنترل‌های ساده‌تر نشان داده می‌شود. | کنترل بهینه پویایی مشتری بر اساس سیاست بازاریابی | ۲۰۱۸ | <a href="#">رزا و همکاران</a> | ۱۱ |

### روش پژوهش

در این مقاله، هدف این است که از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خودگردان غیرخطی به عنوان یک مسئله کنترل بهینه برای مطالعه و پیش‌بینی پویایی جمعیت مشتری و تصمیم‌گیری استراتژیک در رابطه با تخصیص بودجه تبلیغاتی بهره‌جوییم. مشتریان با انواع مختلفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند که شامل مشتریان عادی، بالقوه و معرفی شده می‌باشند. برای این

منظور، یک الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان با حداقل مربعات به عنوان روش یادگیری ماشینی تحت نظر استفاده شده است که در آن یک فرآیند آموزش برای پیدا کردن پارامترهای نامشخص تابع باقی مانده مربوط به مدل پیاده‌سازی می‌گردد. این فرمول‌بندی به یک تابع هدف درجه دوم منجر می‌شود که دارای چندین محدودیت غیرخطی است و در نهایت به یک سیستم جبری از معادلات تبدیل می‌شود که با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی مانند گرادیان مزدوج حل می‌شوند.

این مقاله متمرکز بر شبیه‌سازی رفتار پویای سه نوع مشتری مختلف با استفاده از یک الگوریتم یادگیری ماشینی جدید است، که مسئله مورد بررسی را به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخودکار بیان کرده است. فرآیند آموزش برگرفته از دیدگاه معکوس است و از تکنیک رگرسیون بردار پشتیبان با حداقل مربعات برای کمیته‌سازی تابع زبانی به کار می‌رود که با مسئله کنترل بهینه مرتبط است.

مقاله از این قسمت به بعد به شرح زیر چیدمان یافته است: بخش دوم به بررسی مفاهیم کلیدی در فرآیند تقریب تابع، مودل‌های رگرسیون، و رگرسیون بردار پشتیبان در یادگیری ماشین می‌پردازد، که زیربنای بخش‌های بعدی را تشکیل می‌دهد. بخش سوم به تشریح مدل‌های ریاضی مربوط به پویایی مشتری می‌پردازد. در بخش چهارم، یک روش شبیه‌سازی عددی برای مسئله کنترل بهینه پویایی مشتری، به صورت یک الگوریتم یادگیری ماشینی تحت نظر پیشنهاد می‌گردد. و در نهایت بخش پنجم به ارائه پیاده‌سازی عددی می‌پردازد.

## تخمین تابع با رگرسیون بردار پشتیبان

این بخش به ارائه مبانی و اصول مقدماتی در فرآیند تقریب‌زدایی از توابع و همچنین نحوه انطباق یک مدل روی داده‌های معین با استفاده از الگوریتم‌های یادگیری ماشینی تحت نظارت می‌پردازد. در مرحله بعدی، این فرآیند برازش را در بخش چهارم بسط خواهیم داد تا شامل حالت خاصی از سیستم دینامیکی پویایی مشتری باشد که به عنوان یک چالش کنترل بهینه شناخته می‌شود.

## توابع و مدل سازی در بازاریابی

در مدل‌سازی پویایی تکامل جمعیت مشتریان، از مشتق به عنوان شاخصی برای اندازه‌گیری سرعت تغییر نسبت به زمان استفاده می‌شود. هدف، توسعه سیستمی دینامیکی است که به وسیله آن بتوان ارتباط بین اقسام گوناگون مشتریان و نحوه تغییرات آن‌ها را توصیف کرد. این توصیف می‌تواند با استفاده از انواع معادلات دیفرانسیلی همچون معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی<sup>1</sup>، محاسبات تغییراتی، یا روش‌های کنترل بهینه انجام گیرد. الهام برای مدل‌های جدید بازاریابی می‌تواند از مسائل متداول فیزیکی مانند نشر ناهنجاری در فرایندهای انتقال، تغییرات مولکولی در بافت‌های زیستی، و گسترش بیماری‌ها و ویروس‌ها در مهندسی و علوم گرفته شود.

در پژوهش‌های بازاریابی، متغیرهایی نظیر تعداد مشتریان ارجاعی به صورت متغیرهای گسسته در نظر گرفته می‌شوند، با این حال در بازه‌های زمانی بلندتر می‌توان آن‌ها را به عنوان متغیرهای پیوسته تصور کرد. در اینجا ما  $C^2(\Omega)$  را به عنوان فضای توابع پیوسته با دو بار مشتق پذیری پیوسته

---

<sup>1</sup> PDEs

در دامنه  $\Omega$  در نظر می‌گیریم. نرم‌های موجود در این فضا در اصل از ضرب داخلی استاندارد بین دو تابع  $f$  و  $g$  به دست می‌آیند و تعریف آن به صورت زیر است:

$$(f, g) = \int f(x)g(x)dx$$

فضاهای توابع پیوسته بی‌نهایت بعدی هستند و به دلیل پیچیدگی‌های موجود، در آن‌ها به دست آوردن تقریب مناسب برای حل مسائل غیرخطی دشوار است. قضیه تقریب عمومی در هوش مصنوعی - که مانند قضیه تقریب ویرستراس است - تضمین می‌کند که برای هر تابع پیوسته‌ای روی یک دامنه محدود، می‌توان چندجمله‌ای را به عنوان تقریب دقیقی از تابع با دقت مطلوب یافت. بیان دیگر این قضیه این است که برای هر تابع  $f \in C[a, b]$  است و برای هر  $\epsilon$  مثبت و دلخواه در اعداد حقیقی، یک چندجمله‌ای  $p$  وجود دارد به طوری که  $\|f - p\| < \epsilon$  کمتر از  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  در دامنه  $[a, b]$  باشد. به این ترتیب، برای هر عدد صحیح  $N$ ، فضای چندجمله‌ای‌های دارای درجات حداکثر  $N$ ، یک فضای بعد محدود را تشکیل می‌دهد. این ویژگی استفاده از روش‌های یادگیری ماشین و هوش مصنوعی را برای پیدا کردن درون‌یابی و رگرسیون مناسب، حتی برای توابع نامعلوم با ضرایب نامشخص، عملی و قابل اجرا می‌سازد. با این حال، پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌های مختلف یک عامل کلیدی است که در انتخاب روش‌ها موثر خواهد بود. در حوزه پویایی مشتری‌ها، ما فرض می‌کنیم که توابع مد نظر در فضای  $L^2(\Omega)$  قرار دارند، جایی که توابع  $C(\Omega)$  در آن چگال هستند و به هر دقتی قابل تقریب می‌باشند.

رگرسیون بردار پشتیبانی با حداقل مربعات برای یک مجموعه داده معلوم به عنوان یک الگوریتم یادگیری ماشینی نظارت شده، رگرسیون بردار پشتیبانی برای یک مجموعه داده معین  $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$  دارای مدل ریاضی در قالب یک منحنی رگرسیون است که با حل مسئله بهینه‌سازی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min_{w, b, e} \quad & \frac{1}{2} w^T w + \frac{\gamma}{2} e^T e \\ \text{s.t} \quad & y_i - (w^T \phi(t_i) + b) = e_i, \quad i = 0, \dots, n, \end{aligned}$$

که در آن منحنی رگرسیون  $y(t) = w^T \phi(t) + b, \gamma \in \mathbb{R}^+$  است، و  $b \in \mathbb{R}$  پارامتر تنظیم است،  $w \in \mathbb{R}^d$  بردار وزن‌های است،  $\phi(\cdot): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  نگاشت فضای ویژگی‌ها است و  $d$  بعد فضا را نشان می‌دهد. شکل دوگان این مسئله آن را به یک سیستم معادلات جبری کارآمد محاسباتی به شرح زیر کاهش می‌دهد (Pakniyat et al, 2021).

$$\begin{bmatrix} M + \frac{1}{\gamma} I_N & 1_N \\ 1_N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در آن  $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$  یک ماتریس معین مثبت به صورت  $M_{ij} = k(x_i, x_j) = \phi(x_i)^T \phi(x_j)$  است،  $I_N$  ماتریس واحد است و  $1_N = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N, \alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$  معین مثبت بودن  $M$  و ساختار نواری ویژه ماتریس ضرایب در معادله (۱) منحصر به فرد بودن جواب را تضمین می‌کند. برای ارائه چارچوبی برای روش پیشنهادی خود، ابتدا ایده اصلی اثبات مسئله دوگانه (۱) را ارائه می‌شود. توابع لاگرانژی را به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} w^T w + \frac{\gamma}{2} \varepsilon^T \varepsilon + \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i - w^T \phi(x_i) - b - \varepsilon_i)$$

شرایط کاروش - کان - تاکر منجر به معادله‌های زیر می‌شود:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_k} = 0 \rightarrow w_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_k(x_i), \quad (۲)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_k} = 0 \rightarrow \varepsilon_k = \frac{1}{\gamma} \alpha_k \quad (۳)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_k} = 0 \rightarrow w^T \phi(x_k) + b + \varepsilon_k = y_k \quad (۴)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 0 \rightarrow \alpha^T \cdot \mathbf{1}_N = 0. \quad (۵)$$

با قرار دادن معادلات (۲) و (۳) در معادله (۴) داریم:

$$\sum_{i=1}^n \Omega_{k,i} \alpha_i + b + \frac{1}{\gamma} \alpha_k = 0, k = 1, \dots, n$$

لحاظ کردن معادله فوق با معادله (۵) به مسئله دوگان سیستم خطی معادله (۱) منجر می‌شود. جواب آن را می‌توان با استفاده از متغیرهای دوگان به شرح زیر نوشت:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i K(x, x_i) + b \quad (۶)$$

که در آن  $K(x, x_i) = \phi^T(x_i) \phi(x)$  تابع هسته است. این تابع، داده‌ها را به یک فضای ویژگی با ابعاد بالاتر تبدیل می‌کند. علاوه بر این، این هسته طبقه‌بندی و رگرسیون غیرخطی را با بزرگ‌تر کردن فضای در ماشین بردار پشتیبان و رگرسیون بردار پشتیبان تسهیل می‌کند. در اینجا، تابع هسته یک



چند جمله ای است که در تقریب تابع، هسته های چند جمله ای به دلیل سادگی این توابع به طور گسترده در درون یابی و رگرسیون استفاده می شوند (Parand et all,2021).

### متغیرها

در این پژوهش متغیرهای مدل و تفسیر آن ها در جداول ۲ و ۳ مشخص شده اند:

جدول (۲) متغیرهای مدل

| متغیر  | تعریف                        |
|--------|------------------------------|
| $R(t)$ | تعداد و وضعیت مشتریان ارجاعی |
| $C(t)$ | تعداد و وضعیت مشتریان دائمی  |
| $P(t)$ | تعداد و وضعیت مشتریان بالقوه |
| $u_1$  | متغیر کنترل                  |
| $u_2$  | متغیر کنترل                  |

جدول (۳) تفسیر پارامترهای مدل

| متغیر       | تعریف   |
|-------------|---|
| $\lambda_1$ | نرخ انتقال طبیعی بین مشتریان دائمی و مشتریان ارجاعی                       |
| $\lambda_2$ | نرخ انتقال طبیعی بین مشتریان ارجاعی و مشتریان دائمی                       |
| $\alpha_1$  | نرخ تبدیل از مشتریان ارجاعی به مشتریان بالقوه با متغیر کنترل $u_1$        |
| $\alpha_2$  | نرخ تبدیل از مشتریان ارجاعی به مشتریان دائمی با لحاظ کردن اثرات نوع مشتری |
| $\beta$     | نرخ جذب تبلیغاتی  |
| $\gamma$    | نرخ ریزش مشتری  |

## یافته های پژوهش

## مدل‌های ریاضی

همانطور که گفته شد، در سیاست‌های بازاریابی برای تکامل، مشتریان بالقوه، عادی و ارجاعی را به عنوان یک دستگاه غیرخطی به صورت زیر ارائه شده است مورد بحث قرار داده اند.

$$\dot{R} = -\lambda_2 R + \lambda_1 C - \gamma(t)R + \alpha_1 u_1 P + \alpha_2 (\beta(t) + u_2) PR/N \quad (7)$$

$$\dot{C} = -\lambda_1 C + \lambda_2 R - \gamma(t)C + (1 - \alpha_2) (\beta(t) + u_2) PR/N + u_1 (1 - \alpha_1) P \quad (8)$$

$$\dot{P} = -(\beta(t) + u_2) PR/N - u_1 P + \gamma(t)(R + C) \quad (9)$$

با شرایط اولیه زیر

$$R(0) = R_0, C(0) = C_0, P(0) = P_0, \quad (10)$$

معادلات فوق نشان دهنده تعداد مشتری‌های ارجاعی، دائمی و بالقوه در ابتدای فرایند شبیه‌سازی هستند. دستگاه معادلات را به می‌توان به شرح زیر بازنویسی کرد.

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (11)$$

که در آن  $x = [R, C, P]^T \in \mathbb{R}^3$  و  $f \in \mathbb{R}^3$  تابع غیرخطی با مولفه‌های داده شده در سمت راست معادلات است. این مدل‌ها ارتباط نزدیکی با مدل‌های اپیدمی متغیرها و پارامترهای حالت و کنترل در مدل (۷)–(۹) به ترتیب در جداول (۲)، (۳) و (۴) همراه با مقادیر عددی استفاده شده است. متغیرهای کنترل  $u_1$  و  $u_2$  به عنوان توابع محدود در نظر گرفته می‌شوند.

در اینجا کنترل بهینه مسئله را با به حداقل رساندن انتگرال در بازه  $[t_0, t_f]$

در نظر گرفته می شود:

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(t, x(t), u(t)) dt \quad (12)$$

که در آن  $\mathcal{L}(t, x(t), u(t)) = \kappa_1 P + \kappa_2 u_1^2 + \kappa_3 u_2^2$  یک تابع اسکالر با شرایط معادلات (۷) تا (۹) و همچنین شرایط اولیه (۱۰) است.

**روش رگرسیون بردار پشتیبانی با حداقل مربعات کنترل بهینه مشتریان**

در این بخش، قصد بر این است یک رگرسیون بردار پشتیبان با حداقل مربعات برای تصمیم گیری بهینه در سیاست های بازاریابی مشتری توسعه داده شود.

قضیه زیر وجود و منحصر به فرد بودن جواب مدل (۸)–(۹) را تضمین می کند.

**قضیه ۱:** متغیرهای حالت و کنترل را در  $AC[t_0, t_f]$ ، فضای توابع اکیداً پیوسته در نظر بگیرید. سپس کنترل بهینه (۱۲)، با محدودیت های داده شده توسط سیستم غیرخودگردان معادلات دیفرانسیل معمولی (۷)–(۹)، یک راه حل منحصر به فرد دارد.

برای بحث در مورد منحصر به فرد بودن راه حل بهینه (۷)–(۹) با تابع هدف (۱۲)، به بخش پیاده سازی عددی در مقاله مراجعه کنید.

در اینجا گام های اساسی برای یک رگرسیون بردار پشتیبان را برای شبیه سازی حل تقریبی یک معادله تابعی به صورت کلی ارائه می شود.

$$\mathcal{L}u = f$$

این معادله چند عملگر دیفرانسیل و احتمالاً انتگرال دارد. سپس، فرض

می کنیم یک تخمین تابع برای پدیده های مجهول به صورت زیر می باشد:

$$u(t) \approx u^M(t) = w^T \phi(t)$$

که در آن بردار وزن‌ها و توابع پایه به ترتیب هستند:

$$w = [w_0, \dots, w_M]^T, \phi(t) = [\phi_0(t), \dots, \phi_M(t)]^T$$

پارامتر تنظیم برابر است با  $b = w_0$  و توابع پایه به گونه‌ای فرض می‌شوند که تابع ثابت را تولید می‌کنند. بردار  $\phi$  به عنوان یک بردار پایه شناخته شده در نظر گرفته می‌شود که در این کار چند جمله‌ای فرض می‌شود. برای پیدا کردن وزن‌ها، تابع لاگرانژی به شرح زیر را معرفی می‌شود:

$$L = \frac{1}{2} w^T w + \frac{\gamma}{2} \varepsilon^T \varepsilon + \sum_{i=1}^n \alpha_i (w^T \mathcal{L} \phi(t_i) - \varepsilon_i)$$

با فرض خطی بودن اپراتور  $\mathcal{L}$  و شرایط کاروش - کان - تاکر در معادلات

زیر می‌توان سیستم معادلی در قالب ماتریس زیر به دست آورد:

$$\frac{\partial L}{\partial w_k} = 0 \rightarrow w_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{L} \phi_k(t_i), \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_k} = 0 \rightarrow \varepsilon_k = \frac{1}{\gamma} \alpha_k \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = 0 \rightarrow \mathcal{L} u(t_k) - \frac{1}{\gamma} \alpha_k = f_k \quad (15)$$

**قضیه ۲:** مسئله دوگان را می‌توان به صورت نوشت:

$$\Omega \alpha = f \quad (16)$$

که در آن  $\Omega_{i,j} = \sum_{r=1}^n \mathcal{L} \phi_r(t_j) \mathcal{L} \phi_r(t_i) + \frac{1}{\gamma} \delta_{ij}$ ,  $f_i = f(t_i)$  و

دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است.

**اثبات:** ماتریس (۱۶) حاصل روابط (۱۳) تا (۱۵) است. معین مثبت بودن

ماتریس ضرایب  $\Omega$  منحصر به فرد بودن جواب را نتیجه می‌دهد.

شایان ذکر است که  $\frac{1}{\gamma} \delta_{ij}$  یک ماتریس قطری به ماتریس ضرایب (۱۶) اضافه می‌کند. همچنین توجه داشته باشید که دستگاه به دست آمده برای معادله تابعی مشابه حالتی است که داده‌ها معلوم باشند، اما ساختار بلوکی به دلیل حذف پارامتر تنظیم و در نظر گرفتن آن به عنوان وزنی با شاخص صفر در اینجا ظاهر نمی‌شود.

توابع باقیمانده قیده‌های بهینه‌سازی برای رگرسیون بردار پشتیبانی برای سیر تکامل مشتریان را به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{res}_1^M(t) &= \dot{R}_M - (-\lambda_2 R_M + \lambda_1 C_M - \gamma(t) R_M + \alpha_1 u_1^M P_M \\ &\quad + \alpha_2 (\beta(t) + u_2^M) P_M R_M / N) \\ \text{res}_2^M(t) &= \dot{C}_M - (-\lambda_1 C_M + \lambda_2 R_M - \gamma(t) C_M \\ &\quad + (1 - \alpha_2) (\beta(t) + u_2^M) P_M R_M / N) \\ \text{res}_3^M(t) &= \dot{P}_M - \left( -(\beta(t) + u_2^M) P_M R_M / N - u_1^M P_M \right. \\ &\quad \left. + \gamma(t) (R_M + C_M) \right) \end{aligned}$$

تابع لاگرانژی را به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}_M(R, C, P, u_1, u_2; \lambda) = \mathcal{J}_M(x, u) + \sum_{j=1}^3 \lambda_j \text{res}_j^M$$

که در آن

$$\mathcal{J}_M(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(t, x_M, u_M) dt, x_M = [R_M, C_M, P_M]^T, u_M = [u_1^M, u_2^M]$$

و  $\lambda$  ضرایب لاگرانژی هستند. برای بهینه‌سازی عددی این اپراتور بر روی بازه‌ی زمانی  $[t_0, t_f]$  ابتدا باید عملگر انتگرال را گسسته شود.

$$\mathcal{J}_M \approx \sum_{j=0}^M w_{GL,j} (\kappa_1 P_j + \kappa_2 u_{1,j}^2 + \kappa_3 u_{2,j}^2) \quad (17)$$

با استفاده از انتگرال‌گیری عددی تقریب زده می‌شوند.

برای جلوگیری از هزینه محاسباتی اضافی در الگوریتم ارائه شده، نقاط ادغام با نقاط آموزشی منطبق است.

اکنون فرم رگرسیون بردار پشتیبان متغیرهای حالت و کنترل را بر حسب هسته چند جمله‌ای به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$x_i^M(t) = \sum_{j=0}^M w_{i,j} \phi_j(t) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}, i = 1, 2, 3$$

$$u_i^M(t) = \sum_{j=0}^M \tilde{w}_{i,j} \phi_j(t) = \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\phi}, i = 1, 2$$

که در آن توابع برداری  $\mathbf{x}^M = [R^M, C^M, P^M]$ ،  $\mathbf{u}^M = [u_1^M, u_2^M]$  تقریب‌هایی برای متغیرهای وضعیت و کنترل در سیستم حاکم معادلات دیفرانسیل معمولی هستند.

شکل اولیه رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات را به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\min_{w, w, b, e} \frac{1}{2} \mathbf{w}_u^T \mathbf{w}_u + \frac{\gamma}{2} \mathbf{e}_u^T \mathbf{e}_u + \tilde{J}_M^2 \quad (19)$$

با قیدهای:

$$\text{res}_1^M(t_i) = e_{R,i} \quad (20)$$

$$\text{res}_2^M(t_i) = e_{C,i} \quad (21)$$

$$\text{res}_3^M(t_i) = e_{P,i} \quad (22)$$

که در آن:

$$\mathbf{w}_u = [w_{R,j}, w_{C,j}, w_{P,j}; j = 0, \dots, M]^T$$

و

$$\mathbf{e}_u = [e_{R,j}, e_{C,j}, e_{P,j}; j = 0, \dots, M]^T$$

باید توجه داشت که شرایط اولیه به دلیل ویژگی‌های مدل جواب برای همه توابع ناشناخته، قبلاً در قیدها گنجانده شده‌اند. مسئله بهینه‌سازی با بعد متناهی (۱۹)–(۲۲) را می‌توان به عنوان مثال با برنامه نویسی درجه دوم متوالی و الگوریتم‌های کاهش با بیشترین شیب حل کرد. مراحل روش در الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات شرح داده شده است. حل‌کننده عددی ممکن است یک تکنیک گرادیان مبتنی بر نیوتن یا مزدوج باشد، با این حال، از دستور داخلی NLPSolve در نرم‌افزار میپل استفاده شده است.

### الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات

- نقاط آموزشی را انتخاب کنید.
  - هسته‌ی الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات را مشخص کنید.
  - تمام متغیرهای مجهول را بر پایه هسته بازنویسی کنید.
  - مسئله بهینه‌سازی را بنویسید
  - شرایط کاروش-کان-تاکر را اضافه کنید.
  - از حل‌کننده‌ی عددی استفاده کنید.
- اکنون، مدل اولیه مدنظر در قالب مجموعه‌ای از معادلات گسسته نوشته شده است که می‌توان آن را به راحتی به یک سیستم جبری از معادلات خطی که به شکل معین ارائه شده است تبدیل کرد. شرایط بهینه در فرآیند ساخت یک سیستم خطی در نظر گرفته می‌شود.
- برای بحث در مورد شرط بهینه بودن مسئله، فرض کنید  $\bar{H}$  لاگرانژی همیلتونی برای (۱۲) و (۷) – (۹) باشد که با معادله زیر داده شده است.

$$\bar{H} = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \lambda(t)^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mu^T \mathbf{q}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} + \lambda^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} + \mu^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

معادلات فوق در حقیقت شرایط لازم برای جواب بهینه هستند که می‌توان از آنها در الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات استفاده کرد.

جدول (۴) مقادیر پیشنهادی برای نرخ‌های تبدیل طبیعی بین انواع مختلف مشتری در مدل

| مقادیر پیشنهادی       | تعریف  | نرخ‌های تبدیل طبیعی |
|-----------------------|--|---------------------|
| ۰/۰۵                  | نرخ تبدیل از R به P با متغیر کنترل $u_1$               | $\alpha_1$          |
| ۰/۱۰                  | نرخ تبدیل از R به C با اثرات انواع دیگر مشتری‌ها       | $\alpha_2$          |
| ۰/۰۰۲                 | نرخ تبدیل از C به R بدون لحاظ کردن انواع دیگر مشتری‌ها | $\lambda_1$         |
| $\lambda_1 C_0 / R_0$ | نرخ تبدیل از C به R بدون لحاظ کردن انواع دیگر مشتری‌ها | $\lambda_2$         |

تکنیک یادگیری در الگوریتم پیشنهادی بر اساس مقادیر پیشنهادی شده در بازه زمانی مسئله (۲۰)–(۲۲) ارائه شده است. می‌توان برای اینکار از مجموعه جدیدی از هسته چند جمله‌ای است که یک دستگاه متعامد ایجاد می‌کند استفاده کرد. این کار را می‌توان با استفاده از چند جمله‌ای‌های دوگان برنشتاین معرفی شده انجام داد.

در قسمت بعد چند نمونه از ارائه می‌کنیم از شبیه‌سازی عددی برای تایید صحت و کارکرد روش رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات برای



کنترل بهینه پویایی مشتری.

## پیاده‌سازی عددی

در مثال‌های عددی زیر از جمله جداول و شکل‌ها، از میانگین مربعات خطا به شرح زیر استفاده می‌شود:

$$MSE_u = \frac{\sum_{i=0}^n (u_i - \hat{u}_i)^2}{n + 1}$$

که در آن  $u = C, P, R$  تعداد نقاط آموزشی است،  $u_i$  جواب دقیق یا بهینه با دقت دو رقم اعشار در شبیه‌سازی عددی است و  $\hat{u}_i$  جواب تقریبی است. توابع همگی در فضای  $L^2(\Omega)$  فرض شده‌اند تا نظریه تقریب جهانی قابل اتلاق باشد.

همانطور که قبلاً نیز ذکر شد، از میان توابع مختلف هسته، یک هسته چند جمله‌ای برای الگوریتم پیشنهادی انتخاب شده است، که دلیل این کار سادگی محاسبات، مشتقات و سیستم جبری حاصل می‌باشد. این انتخاب همچنین بر پیچیدگی محاسباتی تأثیر می‌گذارد که در آن زمان اجرا به عنوان یک تابع قابل قبول از نقاط آموزشی در هنگام افزایش داده‌های آموزشی رفتار می‌کند. از سوی دیگر، انتخاب شبیه‌سازی عددی بر اساس تکنیک هم‌سازی و نحوه آموزش تابع باقی‌مانده برای به حداقل رساندن منجر به همگرایی طیفی می‌شود. در مثال زیر، هدف ما بررسی اثرات تغییر نرخ‌ها بر سیستم است.

در ضمن، از آنجایی که یک هسته چند جمله‌ای برای شبیه‌سازی عددی تکامل پویایی مشتری استفاده شده است تعداد داده‌های آموزشی را به  $N = 10$  محدود می‌کنیم تا رفتارهای ناخواسته چند جمله‌ای‌های درجه بالا جلوگیری کنیم.

سیستم زیر را به عنوان یک نمونه موردی لحاظ می‌شود:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1, \kappa_2 = 1.5, \kappa_3 = 0.01 \\ \gamma &= 10^6, \\ \gamma_0 &= 0.1, \\ \gamma_1 &= \gamma_0, \\ \gamma_2 &= 0.01 + \frac{0.18}{1 + \exp(-2t + 7)} \\ \gamma_3 &= \gamma_0(1 - 0.9 \cos(2\pi t + 0.26)) \\ \beta_1 &= 0.01 + \frac{0.99}{1 + \exp(-2t + 8)} \\ \beta_2 &= 0.01 - 0.99 \left( 1 - \frac{0.99}{1 + \exp(-2t + 6)} \right), \\ \beta_3 &= 0.01 + 0.49(1 - 2 \cos(2\pi t + 0.26)), \\ \alpha_1 &= 0.05, \\ \alpha_2 &= 0.1, \\ \lambda_1 &= 0.002 \\ \lambda_2 &= \frac{\lambda_1 c_0}{r_0} \end{aligned}$$

در حل معادلات بالا نرخ‌های تبدیل به عنوان توابع در زمان در رابطه‌ی (۱) نشان داده شده است. این مقادیر به عنوان توابع تناوبی انتخاب می‌شوند. از آنجایی که راه حل دقیقی برای مسئله وجود ندارد، از بهترین سناریو برای مقایسه و اعتبارسنجی شبیه‌سازی عددی الگوریتم پیشنهادی استفاده می‌کنیم. الگوریتم پیشنهادی با نقاط آموزشی مساوی می‌تواند فراوانی، مشتریان ارجاعی، بالقوه و دائمی و همچنین متغیرهای کنترل را مشخص کند. مشاهده می‌شود که کل جمعیت به این سه قسمت تقسیم می‌شود، به عنوان مثال در وسط بازه زمانی که مجموع سه مقدار برابر می‌شود با ۱ می‌شود.

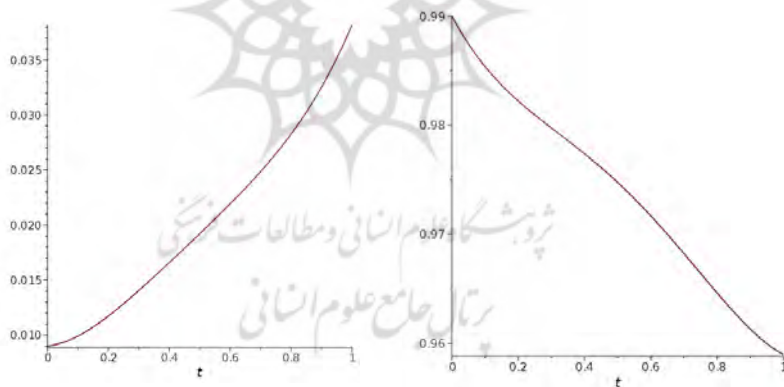
$$R(0.2) = 0.00605, P(0.2) = 0.98222, C(0.2) = 0.01173$$

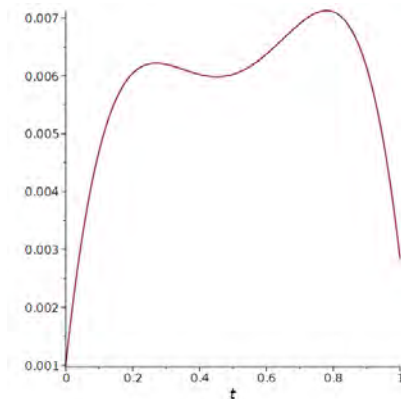
$$R(0.6) = 0.00638, P(0.6) = 0.97169, C(0.6) = 0.02193$$

$$R(0.8) = 0.00711, P(0.8) = 0.96463, C(0.8) = 0.02826$$

$$R(1.0) = 0.00282, P(1.0) = 0.95898, C(1.0) = 0.03818$$

شکل ۱ مقدار تکامل  $P, C$  و  $R$  را نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که با گذر زمان مشتریان دائمی افزایش پیدا می‌کند و مشتریان بالقوه کاهش پیدا می‌کند. با این حال، تعداد مشتریان ارجاعی حاکی از رشد سریع در ابتدای بازه‌ی زمانی و داشتن یک رویه‌ی افزایشی نوسانی در ادامه کار است و در پایان دوره کاهشی می‌شود. این توابع با استفاده از هسته‌های چندجمله‌ای ساده در شکل ۱ در فرآیند شبیه‌سازی به دست می‌آیند. یافته‌ها حاکی از هزینه محاسباتی قابل قبولی از نظر مرتبه پیچیدگی چند جمله‌ای می‌باشد.





شکل (۱) چپ: مشتریان دائمی، راست: مشتریان بالقوه و پایین: مشتریان ارجاعی

## بحث و نتیجه گیری

در این مطالعه، ما به بررسی عمیق یک مسئله کنترل بهینه پیشرونده پرداخته‌ایم که در آن پویایی‌های مشتری به کمک مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل غیرخطی و غیرخودکار توصیف شده‌اند. پیچیدگی‌های ناشی از خصوصیات غیرخطی بسیار قوی این معادلات، کاربرد روش‌های تحلیلی سنتی برای یافتن پاسخ‌های دقیق را عملاً بی‌نتیجه می‌سازد. با توجه به این چالش‌ها، ما استفاده از تکنیک‌های پیشرفته یادگیری ماشین را به عنوان یک راه‌حل، مطرح کرده‌ایم و به خصوص رویکرد رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات با استفاده از هسته چندجمله‌ای متناسب را تدوین نموده‌ایم. همانطور که در شکل (۱) مشخص است مشتریان دائمی افزایش پیدا می‌کند، تعداد مشتریان بالقوه رو به کاهش و مشتریان ارجاعی حاکی از رشد سریع در ابتدای بازه‌ی زمانی و داشتن یک رویه افزایشی در ادامه کار است که این نشانگر سیاست مناسب بازاریابی شرکت مذکور می‌باشد. در آخر برای اعتبارسنجی مدل پشتیبانی از نظر کارشناسی: مدل مورد

بررسی و تایید متخصصین و کارشناسان صنعت قرار گرفته است که این امر می‌تواند به عنوان یک نشانه‌ی قوی برای اعتبار مدل باشد.

و از طرفی دیگر تمام مراحل ساخت و تست مدل شفاف و مستند شده است و پشتوانه‌ی ریاضیات دارد که این خود بیانگر این است که مدل به خوبی قابل درک و قابل تجزیه و تحلیل است.

این فرآیند پیش‌بینی به تعیین پاسخ‌ها به شکل بردار در یک فضای محدود می‌پردازد که توسط فرآیند دیسکرتیزاسیون با پارامترهای نامعین مشخص می‌شود. تمرکز اصلی آموزش مدل بر روی کمینه‌سازی تابع باقی‌مانده در کل دامنه مسئله است که امکان پیش‌بینی دقیق‌تری از پارامترهای نامعلوم را فراهم آورده و در نتیجه، تقریب بهینه‌ای از راه‌حل واقعی را ارائه می‌دهد.

بر اساس نتایج به دست آمده، رویکرد آموزشی که بر مدل‌سازی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های با درجه‌ی کمتر یا مساوی ۱۰ تکیه دارد، به شکل قابل توجهی مؤثر بوده و توانسته است محدودیت نگهداری صد در صدی تعداد کل مشتریان را محقق سازد. جواب‌های تقریبی حاصل، به صورت مجموعه‌ای از معادلات جبری بیان می‌گردند که نه تنها سهولت و کارایی زمانی بالایی در پردازش‌های محاسباتی به ارمغان می‌آورند، بلکه با روش‌های کمینه‌سازی مربعاتی در هماهنگی هستند که در آن‌ها از چندجمله‌ای‌های درجه دوم استفاده شده است. این تطبیق پذیری بین راه‌حل‌های جبری و تکنیک‌های یادگیری ماشین به کار رفته در این تحقیق، نشان‌گر قدرت برجسته مدل‌سازی ما در مواجهه با پیچیدگی‌های پویایی‌های غیرخطی است.

کاربردی کردن این تحقیق در زمینه‌های مختلف کسب و کار، از جمله

در طراحی سیاست‌های بازاریابی مؤثر، تجزیه و تحلیل الگوهای رفتاری مشتریان، بهبود راهبردهای مدیریت ارتباط با مشتری و ارتقاء خدمات پس از فروش، امکان‌پذیر است. اعتبار و دقت این تحقیق توسط آزمایش‌های عددی گسترده‌ای که با بهره‌گیری از نرم‌افزار میپل انجام شده، تأیید گردیده است. این مطالعه پیش‌بینی می‌کند که استراتژی‌ها و تکنیک‌های معرفی شده می‌توانند به عنوان ابزارهای کاربردی و قدرتمندی در تصمیم‌گیری‌های استراتژیک و تاکتیکی عمل کنند، به ویژه در شرایطی که با محدودیت‌های اطلاعاتی و پیچیدگی‌های عملیاتی مواجه هستیم.

### محدودیت‌ها

پژوهش حاضر محدودیت‌هایی نیز دارد. در این تحقیق، تک‌تک عوامل کنترلی به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار نگرفته‌اند، که این خود بخشی از برنامه‌ریزی‌های ما برای تحقیقات آتی است. علاوه بر این، فرض بر این است که رفتارها در دامنه‌هایی با توابع صاف و بدون نوسانات ناگهانی قرار دارند، اما تجزیه و تحلیل نوسانات سریع و پیچیده‌تر زمانی نیز بخشی از دستورکار ما برای پژوهش‌های آینده به شمار می‌روند. در مورد کنترل بهینه پویایی مشتری با استفاده از روش یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای، بعضی از محدودیت‌های ممکن شامل موارد زیر می‌باشد:

۱. دسترسی به داده‌های کافی: برای اجرای الگوریتم‌های یادگیری ماشین به داده‌های بزرگ و کیفیت بالا نیاز باشد که محدودیت‌های مربوط به جمع‌آوری و پردازش این داده‌ها موجب مشکل شود.
۲. پیچیدگی محاسباتی: الگوریتم‌های یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای

نیازمند محاسبات پیچیده و زمان‌بر هست که نیاز به منابع محاسباتی قدرتمند دارد.

۳. نیاز به تنظیم پارامترها: برای بهینه‌سازی فرایند یادگیری و اجرای مدل، نیاز به تنظیم و بهینه‌سازی پارامترها و هایپرپارامترها وجود دارد که ممکن است زمان‌بر و دشوار باشد.

۴. حساسیت به نویز در داده‌ها: مدل‌های یادگیری ماشین، حساس به نویز در داده‌ها باشند که ممکن است منجر به بیش‌برازش<sup>۱</sup> شوند و عملکرد آنها را تضعیف کنند.

۵. تفسیرپذیری مدل: معمولاً از مدل‌های یادگیری ماشین پیچیده تفسیرپذیری پایینی داشته باشند که ممکن است مانع از درک دقیق عملکرد مدل شوند.

برای پیاده‌سازی این روش، لازم است محدودیت‌های فنی و محاسباتی مورد نیاز را به دقت در نظر گرفته و بررسی کرد.

## پیشنهادات آتی

در پایان، امیدواریم که نتایج ارائه شده در این مقاله بتواند به عنوان یک ابزار مفید در افزایش کارایی و بهبود تصمیم‌گیری‌های استراتژیک در زمینه بازاریابی و مدیریت مشتری عمل کند و زمینه‌ساز پیشرفت‌های بیشتر در حوزه‌های تحلیل پویایی سیستم‌ها و کنترل بهینه شود.

با توجه به موضوع کنترل بهینه پویایی مشتری با استفاده از روش یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای، پیشنهادات آتی برای پژوهش‌های آینده می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

---

<sup>۱</sup> Overfitting

## ۱. ارزیابی عمقی عملکرد مدل

\*انجام آزمایش‌های گسترده با داده‌های متنوع برای ارزیابی کارایی مدل‌های یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای در شرایط مختلف.

\*توسعه‌ی معیارهای برای مقایسه عملکرد این مدل‌ها نسبت به تکنیک‌های سنتی و جدید در کنترل پویایی مشتری.

\*بررسی اثربخشی مدل در حل مشکلات واقعی بازار، مانند افزایش نگهداشت مشتری و بهینه‌سازی سیاست‌های بازاریابی.

## ۲. بهره‌گیری از فناوری‌های پردازش موازی

\*آزمایش اجرای الگوریتم‌ها بر روی سخت‌افزارهای پیشرفته نظیر ناپردازشگرها و معماری‌های پردازش موازی برای کاهش زمان آموزش مدل‌ها.

\*ارزیابی تأثیر سرعت پردازش بر روی عملکرد و همچنین بر روی توانایی مدل برای پردازش داده‌های بزرگ و پیچیده.

## ۳. توسعه روش‌های بهینه‌سازی جدید

\*کاوش در استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی جدید و پیچیده مانند بهینه‌سازی ازدحام ذرات یا الگوریتم ژنتیک، برای بهبود عملکرد مدل‌های یادگیری ماشین.

\*تطبيق پارامترهای الگوریتم و مدل‌ها برای حل مشکلات خاص کنترل بهینه با استفاده از این روش‌های بهینه‌سازی.

## ۴. بررسی تأثیر پارامترها و هایپرپارامترها

\*اجرای آزمون‌های سیستماتیک برای درک تأثیر هایپرپارامترها، نظیر نرخ یادگیری یا تعداد درختان در مدل‌های به خصوص بر کارایی نهایی.



\*به کارگیری ابزارهای اتوماسیون برای تنظیم هایپرپارامترها، مانند جستجوی گرید یا بهینه‌سازی بیزی، به منظور یافتن بهترین تنظیمات برای هر مسئله به صورت خودکار.

۵. مقایسه عملکردی با روش‌های دیگر

\*سازماندهی مطالعه مقایسه‌ای برای ارزیابی نتایج حاصل از مدل‌های یادگیری ماشین با هسته چندجمله‌ای در مقایله با تکنولوژی‌های پیشرفته دیگر مانند شبکه‌های عصبی عمیق.

\*تجزیه و تحلیل نقاط قوت و ضعف هر تکنیک از دیدگاه‌های مختلف: دقت پیش‌بینی، زمان آموزش، نیازهای محاسباتی و سهولت پیاده‌سازی.

به‌طور خلاصه، این پیشنهادات کاربردی با هدف بهبود روش‌ها، افزایش دقت مدل‌ها و کاهش هزینه‌های عملیاتی در زمینه کنترل بهینه پویایی مشتری طراحی شده‌اند. اجرای این پیشنهادات می‌تواند به توسعه رویکردهای نوین و کارآمد در استفاده از یادگیری ماشین برای حل چالش‌های صنعتی منجر شود.

### تعارض و منافع

هیچ گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
پرتال جامع علوم انسانی

## منابع و مأخذ

- Bakshizadeh, Nastaran, Azimi, Parham. (2019). Optimization of a supply chain network using the simulation technique and Harmony Search algorithm. **Industrial Management Studies**, 17(54), 67-109. <https://doi.org/10.22054/jims.2019.2247.1069>.
- Berman, B. (2016). Referral marketing: Harnessing the power of your customers. **Business Horizons**, 59(1), 19-28. <https://doi.org/10.1016/j.bushor.2015.08.001>.
- Castillo, A., Benitez, J., Llorens, J., Luo, X. R. (2021). Social media-driven customer engagement and movie performance: Theory and empirical evidence. **Decision Support Systems**, 145:113516. <https://doi.org/10.1016/j.dss.2021.113516>.
- Ekasari, S., Judijanto, L., & Vandika, A. Y. (2024). The Role of Artificial Intelligence and Machine Learning in Precision Targeting Revolutionizing Marketing Strategies. *Jurnal Ekonomi dan Bisnis*, 2(3), 347-361.

- Foroudi, P., Gupta, S., Sivarajah, U., & Broderick, A. (2018). Investigating the effects of smart technology on customer dynamics and customer experience. **Computers in Human Behavior**, 80, 271-282. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2017.11.014>.
- Islam, S , Amin, S H , & Wardley, L J (2024) A supplier selection & order allocation planning framework by integrating deep learning, principal component analysis, and optimization techniques **Expert Systems with Applications**, 235, 121121. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121121>.
- Ledro, C., Nosella, A., & Dalla Pozza, I. (2023). Integration of AI in CRM: Challenges and guidelines. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*, 9(4), 100151. <https://doi.org/10.1016/j.joitmc.2023.100151>.
- Li, X., Zhuang, Y., Lu, B., & Chen, G. (2019). A multi-stage hidden Markov model of customer repurchase motivation in online shopping. **Decision Support Systems**, 120, 72-80. <https://doi.org/10.1016/j.dss.2021.113516>.
- Lyutov, A., Uygun, Y., & Hütt, M. T. (2019). Managing workflow of customer requirements using machine learning. **Computers in Industry**, 109, 215-225. <https://doi.org/10.1016/j.compind.2019.04.010>.
- Mehrkanoon, S., & Suykens, J. A. (2015). Learning solutions to partial differential equations using LS-SVM. **Neurocomputing**, 159, 105-116. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.02.013>.
- Mehrkanoon, S., Falck, T., & Suykens, J. A. (2012). Approximate solutions to ordinary differential equations using least squares support vector machines. **IEEE transactions on neural networks and learning systems**, 23(9), 1356-1367. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2012.2202126>.

- Mosaddegh, A., Albadvi, A., Sepehri, M. M., & Teimourpour, B. (2021). Dynamics of customer segments: A predictor of customer lifetime value. **Expert Systems with Applications**, 172, 114606. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.114606>.
- Ortakci, Y., & Seker, H. (2024). Optimising customer retention: An AI-driven personalised pricing approach. **Computers & Industrial Engineering**, 188, 109920. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.109920>.
- Pakniyat, A., Parand, K., & Jani, M. (2021). Least squares support vector regression for differential equations on unbounded domains. *Chaos, Solitons & Fractals*, 151, 111232. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111232>.
- Parand, K., Hasani, M., Jani, M., Yari, H. (2021). Numerical simulation of Volterra–Fredholm integral equations using least squares support vector regression. **Computational and Applied Mathematics**; 40:1-5. <https://doi.org/10.1007/s40314-021-01471-0>.
- Pereira, A M , Moura, J A B , Costa, E D B , Vieira, T , Landim, A R , Bazaki, E , & Wanick, V (2022). Customer models for artificial intelligence-based decision support in fashion online retail supply chains. **Decision Support Systems**, 158, 113795. <https://doi.org/10.1016/j.dss.2022.113795>.
- Rosa, S., Rebelo, P., Silva, C. M., Alves, H., & Carvalho, P. G. (2018). Optimal control of the customer dynamics based on marketing policy. **Applied Mathematics and Computation**, 330, 42-55. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.027>.
- Shawky, S., Kubacki, K., Dietrich, T., & Weaven, S. (2020). A dynamic framework for managing customer engagement on social media. **Journal of Business Research**, 121, 567-577. <https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2020.03.030>.

- Snoeck, A , Merchán, D , & Winkenbach, M (2020) Route learning: A machine learning-based approach to infer constrained customers in delivery routes  
**Transportation Research Procedia**, 46, 229-236.  
<https://doi.org/10.1016/j.trpro.2020.03.185>.
- Sun, Y., Liu, H., & Gao, Y. (2023). Research on customer lifetime value based on machine learning algorithms and customer relationship management analysis model.  
**Heliyon**, 9(2).  
<https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e13384>.
- Taboada, H., Davizón, Y. A., Espíritu, J. F., & Sánchez-Leal, J. (2022). Mathematical Modeling and Optimal Control for a Class of Dynamic Supply Chain: A Systems Theory Approach. **Applied Sciences**, 12(11), 5347.  
<https://doi.org/10.3390/app12115347>.
- Taufik, I., & Kurniawan, A. A. (2023). The Role of Artificial Intelligence in Digital Marketing Innovation. In Prosiding Seminar Nasional Ilmu Manajemen, Ekonomi, **Keuangan dan Bisnis**, 2(1), 29-40.  
<https://doi.org/10.55927/snimekb.v2i1.4602>.

---

#### COPYRIGHTS

© 2023 by the authors. Licensee Advances in Modern Management Engineering Journal. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

