GENERALIZATION OF MULTIPLIER THEORY

M. Montazer-Zohour

Abstract

If the notion of the multiplier owed its fame to the work of J.-M. Keynes, it is in no manner limited to this very simple type of schematisation. Any forecasting model can be directly derived from it, whether it is static or dynamic.It is the same with the decision models, if the enterprise is concerned, the industrial branch or the regional or national economy.

The multiplier is an instrument for economic forecasting and decision-making, generally more perfected and more and more employed in the U.S. A.

The conceptional researches (R.S.Q.E. model or so-called Michigan Model, Brookings Model , Klein-Goldberger Model, M.I.T. Model etc.) and the belgian-Dutch works on economic forecasting and policy (Kirschen-Theil-Tinbergen) and their cybernetic generalisation (Fox-Thorbecke) are the recent illustrations of a notion of which the historical origin is much former to Keynes.

The urban multiplier of basic economy dates back to Aurousseau (1921) ; the multiplier of Foreign trade was conceived and calculated twice by the Danish Johanssen ; the American R.-F. Haig , had imagined the employment multiplier at the occasion of an urban study on the city of New-York in 1928, which was resumed and developed more methodically by A.-F. Kahn (1931). The first generalizations of this notion had existed for a long time before the multi-sectional multiplier was imagined by W. W. Léontief (1947) and J.-S. Chipman (1948).

Unfortunately, this notion of fundamental and practical interest for economic forecasting and decision is still very often understood in a limited sense. The point is to define it, to indicate its dynamic extensions, to show finally its utility in a number of examples of practical applications.

This is effectively the aim of the following study.

The generalized notion of multiplier can be defined as a set of marginal relationships indicating isolated variations of one or more exogeneous variables in a system of linear equations and in a simplified form.

In general, this is the differential quotient, i.e. Partial differential ; a linear equation of a simplified form, or the set of partial derivatives (Coefficient matrix or functional determinants or Jacobian) in a simplified model.

The process of generalization is not yet completed. In fact the variations of the values or the signs of the endogeneous variables with respect to the variation of the exogeneous variables are not envisaged. So far the values of the solution or the signs of the multipliers only indicate the impact of the exogeneous variables on the endogeneous ones in equilibrieum. The moment we consider it as a process in time we cannot be sure of success of multiplier before it is dynamized.

When it is dynamized it will permit the mesurement of the impact of the exogeneous variables in the successive periods. It will make it possible to describe or to forecast quantitatively the reaction of the endogeneous variables along the transitory path, separating final from the initial equilibrieum.

The dynamisation of the multiplier theory is achieved with help of Leontief's notion of dynamic invarsion (1968).

GENERALISATION DE LA THEORIE DU MULTIPICATEUR

M. Montazer-Zohour

Si la notion du multiplicateur[1] a dû sa notoriété à l'oeuvre de J.-M. Keynes, elle n'est en aucune facon limitée à ce type très simpliste de schématisation. Tout modèle de prévision en relève directement, qu'il soit statique ou dynamique. Il en est de même des modèles de décision, qu'il s'agisse de l'entreprise, de la branche industrielle ou de l'économie nationale - ou régionale - prise dans son ensemble.

Les recherches conceptuelles (R.S.Q.E. Model ou dit Michigan Model, Brookings Model, Klein-Goldberger Model, M.I.T. Model, etc.[2]), et les travaux belgo-hollandais sur la prévision et la politique économiques (Kirschen-Theil-Tinbergen[3]) et leur généralisation cybernétique (Fox - Thorbecke[4]), sont les illustrations récentes d'une notion dont l'origine historique est bien antérieure à Keynes.

Le multiplicateur urbain de l'économie de base remonte à M. Aurousseau (1921)[5] ; le multiplicateur du commerce extérieur fut conçu et calculé à deux reprises par le Danois Johanssen[6] ; l'Américain R.-F. Haig avait imaginé le multiplicateur d'emploi à l'occasion d'une étude urbaine sur la ville de New-York en 1928[7], ce qui fut repris et développé plus méthodiquement par

A.-F. Kahn (1931)[8].

Les premières généralisations de cette notion sont elles-mêmes anciennes, puisque les multiplicateurs multi-sectoriels furent l'oeuvre de W. W. Léontief et J.-S. Chipman[9].

Malheureusement, cette notion d'un intérêt pratique fondamental pour la prévision et la décision économiques est, trop souvent, encore entendue dans un sens étroit. Il importe donc de la définir, d'en indiquer les prolongements dynamiques, et d'illustrer enfin son utilité dans une série d'exemples d'application pratique[10].

SECTION I

Definition de la Theorie Generalisee du Multiplicateur

La notion généralisée du multiplicateur se définit comme un ensemble de rapports marginaux, exprimant la variation isolée d'une ou de plusieurs variables endogènes en fonction de la variation isolée d'une ou de plusieurs variables exogènes, dans un système d'équations linéaires et de forme réduite. D'une façon générale,c'est le quotient différentiel, c.-à-d. la dérivée partielle dans une équation linéaire de forme réduite, où, l'ensemble des dérivées partielles (matrices des coefficients dite encore, déterminant fonctionnel ou Jacobien), dans un modèle de forme réduite[11].

Une structure, se définit comme un ensemble des ensembles particuliers et interdépendants, dont l'intersection n'est pas vide.

Mathématiquement parlant, la définition ainsi admise aboutit à cette conclusion que la structure en question a au moins une solution . Nous verrons plus loin que cette notion de solution équivaut, dans l'économie, à celle d'équilibre.

On distingue, généralement, deux sortes de structures : structures dites fermées, et structures ouvertes.

Une structure est dite fermée (Self Contained Structure), lorsque le nombre des variables apparaissant dans les équations caractéristiques est égal au nombre des équations du système. Une structure est dite ouverte (Sectional Structure), si le nombre des variables figurant dans les équations du système est supérieur à celui des équations caractéristiques.

L'intérêt des structures ouvertes est très grand dans l'économie : en attribuant des valeurs différentes aux variables indépendantes ou exogènes, on pourrait obtenir autant de solutions pour les variables endogènes, pour leur valeur d'objectif, de prévision, et de faire donc différentes simulations. C'est là, à vrai dire, une véritable généralisation. Cependant, cette généralisation ne tient que si les systèmes d'équations sont linéaires, caractérisés par la stabilité et la continuité des relations; ce qui suppose des structures statiques et stables. Toutefois, il existe des méthodes par lesquelles on peut linéariser des systèmes d'équations discontinues et instables et donc non linéaires et dynamiques[12]. Tel est, par exemple, le cas du modèle de multiplicateur Klein-Goldberger[13], qui est construit à base d'un système d'équations souvent non linéaires, mais linéarisées en vue d'obtenir des formes réduites et donc des multiplicateurs.

B. Les Equations de Forme Reduite

Par la forme réduite on entend la solution générale d'une équation - ou d'un système d'équations - implicite et différenciable. La solution est, dans ce contexte une notion purement mathématique; dont le synonyme est, économiquement parlant, l'équilibre, lorsqu'il s'agit des équations linéaires.

Ainsi définie, elles indiquent l'influence directe et indirecte des variables exogènes sur les variables endogènes dans un système d'équations linéaire (statique).

Admettons un ensemble de variables exogènes, Z, soit : (1) $Z = (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$,

et un ensemble de variables endogènes, Y, soit:

$$(2)\quad Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k).$$

Maintenant, nous pouvons, à l'aide de la théorie des fonctions implicites, ramener les deux systèmes de valeur ci-dessus à un système implicite général et réduit, c.-à-d. :

$$(I)\quad F(y,z) = 0$$

Les équations génériques et de forme réduite de ce dernier système sont :

$$y_1 = g_I(z_1) \qquad \frac{dy_1}{dz_1}$$

$$y_2 = g_2(z_2) \qquad \frac{dy_2}{dz_2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Les équations génériques et de forme réduite de ce dernier système sont :

$$
(\mathrm{II}) \quad
\begin{array}{lll}
\overset{\circ}{y}_1 = g_1(\overset{\circ}{z}_1) & \Longrightarrow & \left(\dfrac{dy_1}{dz_1}\right)^{\circ} \\
\overset{\circ}{y}_2 = g_2(\overset{\circ}{z}_2) & \Longrightarrow & \left(\dfrac{dy_2}{dz_2}\right)^{\circ} \\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \\
\overset{\circ}{y} = g_k(\overset{\circ}{z}_n) & \Longrightarrow & \left(\dfrac{dy_k}{dz_n}\right)^{\circ}
\end{array}
$$

Et d'une façon générale, soit un système d'équations linéaires :

$$(\mathrm{I}') \quad F_i(z,y) = 0 \ , \ (i = 1, 2, \ldots, k);$$

Dans une telle structure, l'ensemble de solution est égal à :

$$(\mathrm{III}) \quad \overset{\circ}{X} = \left\{ (\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{y}) \mid \overset{\circ}{y}_i = g_i(\overset{\circ}{z}), \ (i = 1, 2, \ldots, k) \right\},$$

où $(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{y})$ est une solution et $[\overset{\circ}{y}_i = g_i(\overset{\circ}{z})]$ est la $i^{\text{ème}}$ équation de forme réduite.

Ainsi, le système d'équations de forme réduite est un système d'hypothèses ouvertes dont chacune donne, explicitement, la valeur de solution d'une variable endogène $(\overset{\circ}{y}_i)$ en fonction (g_i) d'une variable exogène $(\overset{\circ}{z})$; ces deux dernières étant prises parmi les variables de deux ensembles de variables (il s'agit ici des deux ensembles Y et Z) différents. A chaque attribution de valeur aux variables exogènes on n'obtiendra, dans les systèmes linéaires, qu'une solution générale et unique à chacune des variables endogènes correspondantes.

Dans le système (II), les dérivées partielles :

$\left(\frac{dy_1}{dz_1}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{dy_2}{dz_2}\right)^{\circ}$,....., $\left(\frac{dy_k}{dz_n}\right)^{\bullet}$, indiquent, toutes choses égales par ailleurs, l'impact direct et indirect de chacune des z_h variables exogènes sur chacune des y_k variables endogènes. Le signe "$\circ$" traduit le fait que :

$$\left(\frac{dy_k}{dz_n}\right)^{\circ} \equiv \left(\frac{dg_k(\overset{\circ}{z})}{d\overset{\circ}{z}_n}\right) .$$

Si, pour simplifier, nous admettons par convention, que :

$$\left(\frac{dy_k}{dz_n}\right)^{\circ} = V_{kj} ,$$

nous pouvons, en partant d'un point d'équilibre initial :

$$x = (y, z),$$

attribuer une valeur quelconque à la $j^{\text{ième}}$ variable exogène; et, partant, mesurer quantitativement (la valeur) ou qualitativement (le signe) , la variation induite de la $k^{\text{ième}}$ variable endogène dans le système linéaire (statique) ci-dessus donné. Ces dérivées partielles sont connues, en économie, sous le nom de "multiplicateur". Elles expriment la théorie généralisée du multiplicateur. Dans cet exemple, elles mesurent l'efficacité de l'instrument (politique ou conjoncturel), j, à l'égard de la variable dépendante, K. V_{kj} obtenue, est une grandeur dont la valeur est multiple de la valeur de j : c'est, plus précisément, la valeur de projection ou la valeur prise, à la suite d'une décision portant sur j, par k.

Il s'agit, bien entendu, de la valeur induite d'une variable endogène en fonction d'une variable exogène, dans ce système statique. Pour obtenir la valeur totale de toutes les variables endogènes en fonction de l'ensemble des variables exogènes, il suffit d'additionner les valeurs de l'ensemble des dérivées partielles. On obtiendra ainsi une valeur différentielle totale.

SECTION II

Determination de la Valeur et du Signe des Multiplicateurs

De l'ensemble des développements qui précèdent, il ressort que le multiplicateur n'est, en définitive, que le quotient différentiel ou dérivée partielle, qui mesure, dans une équation linéaire de forme réduite et différenciable, l'influence totale (directe et indirecte) d'une variable exogènement donnée sur une variable qui en dépend.

Ainsi précisés, et une fois généralisés, voyons maintenant comment on dérive la valeur de ces multiplicateurs.

A. Determination de la Valeur des Multiplicateurs

Illustrons, par un exemple, la façon dont on détermine la valeur des multiplicateurs.

Choisissons un modèle structurel simple[14], comportant 2 variables exogènes, 6 variables endogènes et un système linéaire de 6 équations, soit :

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} Y = C+I+\mathring{X}-H & (3)\ \text{équation de définition,} \\ C = C(Y,i) & (4)\ \text{fonction de consommation,} \\ I = I(Y,i) & (5)\ \text{fonction d'investissement,} \\ H = H(Y) & (6)\ \text{fonction d'importations,} \\ L = L(Y,i) & (7)\ \text{fonction de liquidités,} \\ L = \mathring{M} & (8)\ \text{condition d'équilibre.} \end{cases}$$

Ce modèle apparaît comme une structure sectionelle d'un modèle plus général. Deux variables exogènes : l'une de nature conjoncturelle, soit le volume des exportations, $\mathring{X}$, et l'autre considérée comme un instrument politique, soit la quantité de monnaie en circulation, $\mathring{M}$, commandent les 6 autres, soient les variables dépendant du système :

C = la consommation globale,

I = l'investissement total,

Y = le revenu national,

L = le volume des liquidités,

H = les importations,

et enfin, i = le taux d'intérêt en usage.

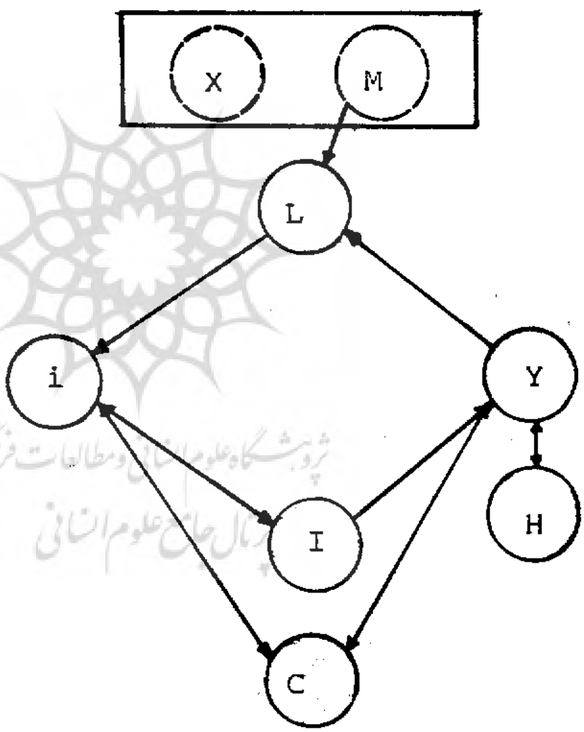
Ces 6 dernières variables sont interdépendantes entre elles :

- le revenu national et le taux d'intérêt influencent le niveau de la consommation, celui des investissements et des liquidités de l'économie;

- de son côté,le niveau des importations est influencé par l'évolution du revenu national;

- et ainsi de suite...

Ainsi, nous avons une structure séctionnelle et linéaire, hiérarchisée, suivant l'ordre causal des variables, comme suit :



Cela étant, comment exprimer maintenant la forme réduite du modèle pour en dériver les multiplicateurs ? Nous pouvons remplacer les 6 équations du système (IV) par un système réduit à 2 équations, soit implicitement :

$$
(V)\begin{cases}
(9)\quad Y-C(Y,i)-I(Y,i)+H(Y)-\overset{*}{X}=0 & \text{(équ.1,2,3,4)}\\
(10)\quad L(Y,i)\qquad \overset{*}{M}=0 & \text{(équ.5 et 6),}
\end{cases}
$$

où 2 inconnues : Y et i, sont exprimées en fonction de 2 variables exogènes: $\overset{*}{X}$ et $\overset{*}{M}$.

Appelons les dérivées partielles par rapport à Y et i, variables dépendantes :

$$
(VI)\begin{cases}
\dfrac{\partial C}{\partial Y}=C_y\\[2ex]
\dfrac{\partial C}{\partial i}=C_i\\[2ex]
\dfrac{\partial I}{\partial Y}=I_y\\[2ex]
\dfrac{\partial I}{\partial i}=I_i\\[2ex]
\dfrac{\partial H}{\partial Y}=H_y\\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial Y}=L_y\\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial i}=L_i
\end{cases}
$$

Pour expliciter les interdépendances. Et en remplaçant les variables par leur nouvelle valeur , le système (V) devient :

$$
(V')\begin{cases}
(11)\quad (1-C_y-I_y+H_y)dY-(C_i+I_i)di-d\overset{*}{X}=0\\
(12)\quad L_y dY+L_i di \qquad -d\overset{*}{M}=0
\end{cases}
$$

Dès lors, si nous prenons $d\overset{+}{M} = 0$, par rapport à la variable exogène $\overset{+}{X}$, nous obtenons un système réduit:

$$(V'') \begin{cases} (13)\quad A_y \dfrac{\partial Y}{\partial \overset{+}{X}} - (C_i + I_i)\dfrac{\partial i}{\partial \overset{+}{X}} = 1 \\ (14)\quad L_y \dfrac{\partial Y}{\partial \overset{+}{X}} + L_i \dfrac{\partial i}{\partial \overset{+}{X}} = 0, \end{cases}$$

ou, pour simplifier les écritures, nous avons admis que:

$$(1 - C_y - I_y + H_y) = A_y$$

Ainsi, nous obtenons, pour les 2 inconnues de ce système, c.-àd. $\dfrac{dY}{d\overset{+}{X}}$ et $\dfrac{di}{d\overset{+}{X}}$, les 2 solutions suivantes:

$$(15)\quad \left(\frac{dY}{d\overset{+}{X}}\right)^{\circ} = \frac{L_i}{A_y L_i + (C_i + I_i) L_y}$$

$$(16)\quad \left(\frac{di}{d\overset{+}{X}}\right)^{\circ} = \frac{-L_y}{A_y L_i + (C_i + I_i) L_y}$$

ou, plus brièvement:

$$(15')\quad \left(\frac{dY}{d\overset{+}{X}}\right)^{\circ} = \frac{L_i}{\Delta}$$

$$(16')\quad \left(\frac{di}{d\overset{+}{X}}\right)^{\circ} = \frac{-L_y}{\Delta}$$

où $A_y L_i + (C_i + I_i) L_y = \Delta$ = le déterminant du système.

De la même manière, nous pouvons obtenir les dérivées partielles par rapport à la variable exogène $\overset{+}{M}$, c.-à-d. considérer $d\overset{+}{X} = 0$, par rapport à $\overset{+}{M}$, nous obtenons pour les 2 inconnues du système, soient: $\frac{dY}{d\overset{+}{M}}$ et $\frac{di}{d\overset{+}{M}}$, les solutions:

$$(17)\quad \left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} = \frac{C_i + I_i}{\Delta}$$

$$(18)\quad \left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} = \frac{A_y}{\Delta}$$

Maintenant, nous pouvons, en considérant l'ensemble de ces interdépendances, déterminer la variation totale des Y et i par rapport à la variation globale des 2 variables exogènes: $\overset{+}{X}$ et $\overset{+}{M}$, prises simultanément. D'où:

$$(19)\quad (dY)^{\circ} = \left(\frac{\partial Y}{\partial \overset{+}{X}}\right)^{\circ} d\overset{+}{X} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \overset{+}{M}}\right)^{\circ} d\overset{+}{M} = \frac{L_i}{\Delta}\, d\overset{+}{X} + \frac{C_i + I_i}{\Delta}\, d\overset{+}{M}$$

$$(20)\quad (di)^{\circ} = \left(\frac{\partial i}{\partial X}\right)^{\circ} d\overset{+}{X} + \left(\frac{\partial i}{\partial M}\right)^{\circ} d\overset{+}{M} = \frac{-L_y}{\Delta}\, d\overset{+}{X} + \frac{(1-C_y+H_y-I_y)}{\Delta}\, d\overset{+}{M}$$

où: $(1-C_y-I_y + H_y)L_i + (C_i + I_i)L_y = \Delta =$ le déterminant.

Nous n'avons déduit, jusqu'à présent, que la valeur de solution des 2 variables endogènes (par rapport aux 2 variables connues) sur 6 existant dans le système. La valeur totale des 4 autres s'obtient sans difficultés. Ainsi:

$$(21) \quad dC = \frac{C_y L_i - C_i L_y}{\Delta} d\overset{+}{X} + \frac{C_y (C_i + I_i) + C_i (1 - C_y - I_y + H_y)}{\Delta} d\overset{+}{M}$$

$$(22) \quad dI = \frac{I_y L_i - I_i L_y}{\Delta} d\overset{+}{X} + \frac{I_y (C_i + I_i) + I_i (1 - C_y - I_y + H_y)}{\Delta} d\overset{+}{M}$$

$$(23) \quad dH = \frac{H_y L_i}{\Delta} d\overset{+}{X} + \frac{H_y (C_i + I_i)}{\Delta} d\overset{+}{M}$$

$$(24) \quad dL = d\overset{+}{M}$$

ou, sous forme réduite:

$$(21')(dC)^\circ = \left(\frac{\partial C}{\partial \overset{+}{X}}\right)^\circ d\overset{+}{X} + \left(\frac{\partial C}{\partial M}\right)^\circ d\overset{+}{M}$$

$$(22')(dI)^\circ = \left(\frac{\partial I}{\partial \overset{+}{X}}\right)^\circ d\overset{+}{X} + \left(\frac{\partial I}{\partial \overset{+}{M}}\right)^\circ d\overset{+}{M}$$

$$(23')(dH)^\circ = \left(\frac{\partial H}{\partial \overset{+}{X}}\right)^\circ d\overset{+}{X} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)^\circ d\overset{+}{M}$$

$$(24')(dL)^\circ = d\overset{+}{M}$$

Ainsi, nous avons les valeurs de la variation totale, à partir du point d'équilibre initial $\overset{\circ}{y} = (\overset{\circ}{Y}, \overset{\circ}{C}, \overset{\circ}{I}, \overset{\circ}{H}, \overset{\circ}{L}, \overset{\circ}{i})$, de chacune des variables endogènes du système par rapport à la variation, à partir du point d'équilibre initial $\overset{\circ}{z} = (\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{M})$, des 2 variables exogènes correspondantes.

Pour généraliser la théorie du multiplicateur, disons que nous avons Z_h variables exogènes (h=1, 2, ..., h), qui commandent Y_k variables endogènes (K = 1,2, ..., k) dans un système linéaire. A chaque attribution de valeur aux <u>h</u> variables exogènes, correspond une variation des <u>k</u> variables endogènes, variation dont la valeur est un multiple de la valeur attribuée aux variables exogènes. Soit:

$\left(\frac{dy}{dz}\right)^{\circ} = \overset{\circ}{y} = g_i\ (\overset{\circ}{z})$. Ce rapport qui n'est autre chose qu'une dérivée partielle dans une équation de forme réduite, ou plus exactement la solution de cette équation statique, est appelée le <u>multiplicateur</u>.

Les valeurs d'équilibre $\overset{\circ}{y}$, résultant de la forme réduite $\overset{\circ}{y} = (\overset{\circ}{z})$ obtenue à partir du système de valeur admis pour z, sont pour ainsi dire des points finals des vagues d'effets déclenchées par la variation des variables exogènes, vagues qui s'étendent sur tout le système interdépendant. Ainsi, pour aménager ces interdépendances, on ramène, grâce aux formes réduites, le système initial $F(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{z}) = 0$ à un système <u>causal</u>, c.-à-d. $\overset{\circ}{y} = g_i(\overset{\circ}{z})$, qui est un système plus général donnant des solutions explicites et générales pour l'ensemble des variables endogènes, tout en tenant compte de leurs interdépendances.

Signalons que si $\frac{\partial g_k}{\partial z_h}$ est une matrice, comme, par exemple:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_h} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial z_h} \end{vmatrix}$$

soit une matrice 1 x k (k = 1, 2, ..., k), la valeur de solution du système sera, dans ce cas, plus aisément obtenue par l'inversion de la matrice en question.

Cela dit, en économie, notamment quand on est en présence des modèles qualitatifs et incomplets, il est impossible de déterminer la valeur quantitative des multiplicateurs. D'autre part, on cherche souvent à déterminer non pas la valeur mais la tendance ou la direction des variations. Dans ce cas, on aura intérêt à connaître plutôt les signes des multiplicateurs.

B. Determination des Signes des Multiplicateurs

Quand nous traitons des structures linéaires et quantitatives, nous pouvons déterminer sans difficultés, la valeur de la variation des variables internes du système par rapport à la variation de variables exogènes, c'est-à-dire l'ensemble des dérivées partielles, comme nous venons de le faire. Mais, si nous ne considérons qu'une sous-partie (un ou plusieurs sous-ensembles particuliers) de l'ensemble structurel ci-dessus analysé, nous serons alors mieux placés pour déterminer les signes des multiplicateurs et non pas leur valeur.

D'une manière générale, si nous ne possédons pas des données quantitatives suffisantes, nous pouvons, néanmoins, connaître le sens de l'action des variables instrumentales ou conjoncturelles, c'est-à-dire connaître le signe des multiplicateurs. La théorie générale, en est fournie par A.-G. Papandreou [15]. Nous nous contenterons d'en indiquer ici une application simple.

Supposons une structure partielle, soit:

$$\text{(VII)} \qquad \Phi = \left\{F_1, F_2\right\}$$

fondée sur 2 équations, soient:

(25) $S(Y) = I(i)$ une fonction d'investissement

(26) $\bar{M} = L(Y,i)$ une fonction des liquidités dans un modèle du type keynésien

ou implicitement:

(25') $S(Y) - I(i) = 0 \qquad F_1(Y,i) = 0$

ou

(26') $\bar{M} - L(Y,i) = 0 \qquad F_2(Y,i,\bar{M}) = 0$,

où $\bar{M}$, la quantité de monnaie en circulation, est la variable exogène; et Y, le revenu global, et i, le taux d'intérêt en usage, sont les deux variables endogènes.

Il est bien évident que nous ne pouvons pas résoudre ce système par la méthode des équations de forme réduite qui, nécessitera, rappelons-le , la spécification complète des équations caractéristiques du modèle ou de la structure dans son ensemble. Dans ces conditions, et s'il s'agit des systèmes linéaires, comme c'est le cas ici, nous pouvons rechercher, néanmoins, à déterminer ces deux équations, qualitativement, c'est-à-dire à partir des signes des dérivées partielles.

Ainsi, et si certaines conditions sont satisfaites, nous obtiendrons les signes des multiplicateurs; et, partant, nous pourrons déterminer ou prévoir le sens de la variation des variables endogènes.

Quelles sont ces conditions ?
Les équations doivent être linéaires ou linéarisées et continuellement différenciables.

Une fois ces deux conditions satisfaites, il suffira de faire appel à la "règle de Lancaster"[16] pour obtenir les signes des dérivées partielles, et donc, des multiplicateurs.

a) - La règle de Lancaster.

Kelvin Lancaster a récemment expliqué les conditions dans lesquelles on pourra, dans un modèle partiel, dériver les signes des multiplicateurs sans qu'il soit nécessaire d'obtenir les équations de forme réduite.

Les processus et les conditions sur lesquels est fondée la règle de Lancaster, sont les suivants:

i- à partir des coefficients des variables d'un système d'équations incomplet, on établit tout d'abord, une matrice des signes, appelée "Labeled Signs Matrix" (en abrégé LSM);

ii- puis, on effectue, sur cette matrice des signes LSM, un certain nombre d'opérations: transpositions et inter-changements des lignes et des colonnes; et cela jusqu'à ce que la matrice LSM prenne la forme d'un S.

La forme S est obtenue lorsque le bloc triangulaire supérieur de LSM ne comporte, sauf exceptions, que des signes positifs (+), et le bloc triangulaire inférieur des signes (O). Et si par hasard, la diagonale (ou la quasi-diagonale, pour le cas où la matrice ne serait pas carrée) principale ne comporte que des signes négatifs (-), cela signifie seulement que la structure considérée n'est pas du type intégré:

iii- et une fois là forme S obtenue, on pourra dériver dès lors, les signes des multiplicateurs.

b) - La dérivation des signes des multiplicateurs.

Reprenons maintenant notre exemple. Si nous explicitons les fonctions implicites (25') et (26'), c.-à-d. en differenciant le système par rapport à $\overset{+}{M}$, nous obtenons:

$$(25'')\quad \frac{\partial F_1}{\partial Y}\left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} d\overset{+}{M} + \frac{\partial F_1}{\partial i}\left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} d\overset{+}{M} = 0$$

$$(26'')\quad \frac{\partial F_2}{\partial Y}\left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} d\overset{+}{M} + \frac{\partial F_2}{\partial i}\left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} d\overset{+}{M} = - \frac{\partial F_2}{\partial \overset{+}{M}} d\overset{+}{M}$$

ou, en simplifiant:

$$(25''')\quad \frac{\partial F_1}{\partial Y}\left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} + \frac{\partial F_1}{\partial i}\left(\frac{\partial di}{\partial d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} = 0$$

$$(26''')\quad \frac{\partial F_2}{\partial Y}\left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} + \frac{\partial F_2}{\partial i}\left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} = \frac{\partial F_2}{\partial \overset{+}{M}}$$

dès lors, à l'aide des déterminants, nous obtenons pour les 2 inconnues du système, c.-à-d. $\left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ}$ et $\left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ}$:

$$\left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F_1}{i} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial \overset{+}{M}} & \frac{\partial F_2}{\partial i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial i} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial i} \end{vmatrix}}$$

et

$$\left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & -\frac{\partial F_2}{\partial \overset{+}{M}} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

ou, le déterminant est:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial i} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial i} \end{vmatrix} \neq 0$$

Maintenant, nous ne pouvons pas évaluer, quantitativement, la valeur des éléments du déterminant; et, partant, celle des dérivées partielles ou des multiplicateurs $\left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ}$ et $\left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ}$. Mais, à partir des fonctions implicites (25') et (26'), nous savons que:

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial Y} > 0 = + \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial i} > 0 = + \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial Y} < 0 = - \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial i} > 0 = + \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial \overset{+}{M}} = 1 = + \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial \overset{+}{M}} = 0 = 0 \end{cases}$$

Nous appliquons maintenant, la règle de Lancaster:

i- à partir du système des signes (VIII), nous construisons la matrice de coefficients (exprimés par leur signe), soit:

$$LSM = \left[\begin{array}{c|c|cc} F \backslash V & \overset{+}{M} & Y & i \\ \hline F_1 & 0 & + & + \\ F_2 & + & - & + \end{array} \right]$$

ii- maintenant, nous faisons, sur cette matrice des signes, quelques opérations de transposition et de transformation, et cela jusqu'à ce qu'elle prenne la forme S:

en interchangeant les lignes F_1 et F_2, nous obtenons:

$$\begin{array}{c|c:cc} F \backslash V & \overset{*}{M} & Y & i \\ \hline F_2 & + & - & + \\ F_1 & 0 & + & + \end{array}$$

puis, en transformant les signes de cette dernière matrice, nous obtenons:

$$\begin{array}{c|c:cc} F \backslash V & \overset{*}{M} & Y & i \\ \hline F_1 & - & + & - \\ F_2 & 0 & + & + \end{array}$$

ensuite, en interchangeant les lignes et en transformant les signes de la ligne 1, nous aurons :

$$\begin{array}{c|c:cc} F \backslash V & \overset{*}{M} & Y & i \\ \hline F_1 & - & + & - \\ F_2 & 0 & - & - \end{array}$$

et enfin, en transformant les signes de la colonne i, nous obtenons la matrice de forme S, soit:

$$S = \left[\begin{array}{c|c:cc} {}^{F}\diagdown{}^{V} & \overset{+}{M} & Y & i \\ \hline F_1 & - & + & + \\ F_2 & 0 & - & - \end{array}\right]$$

La matrice des signes LSM a maintenant pris la forme voulue, $\underline{S}$; ce qui va nous permettre de déterminer, sans aucune information complémentaire, les signes de $\left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ}$ et $\left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ}$, soient les deux multiplicateurs dans notre exemple.

Ainsi:

$$\text{signe de} \left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} = \text{signe de} \frac{\begin{vmatrix} 0 & + \\ - & + \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} + & + \\ - & + \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(+)}{(+)\ (+) - (+)\ (-)} > 0 = +$$

et

$$\text{signe de}\left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ} = \text{signe de} \begin{vmatrix} + & 0 \\ - & - \\ \hline + & + \\ - & + \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-)}{(+)\ (+)-(+)\ (-)} < 0 = -$$

Ainsi,nous concluons qu'une fois connus les signes des variables exogènes, nous pouvons déterminer par rapport à ces derniers, ceux des multiplicateurs; et partant, la direction de variation des variables endogènes: les signes des multiplicateurs obtenus dans notre exemple montrent:

i- le signe de $\left(\frac{dY}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ}$ étant positif, toute variation de $\overset{+}{M}$ (soit la quantité de monnaie en circulation, et prise ici comme variable exogène), entraînera une variation, dans le même sens, de Y (soit le revenu national, considéré comme une variable endogène);

ii- et le signe de $\left(\frac{di}{d\overset{+}{M}}\right)^{\circ}$ étant négatif, toute variation de $\overset{+}{M}$ (considéré toujours comme une variable exogène), provoquera une variation, dans le sens opposé, de i (soit le taux d'intérêt, et considéré de même que Y comme une variable endogène); le rapport de la variation des Y et i étant un multiple de la variable $\overset{+}{M}$.

Ainsi, avec la technique des signes, nous franchissons un second stade de généralisation de la théorie du multiplicateur; le premier stade-et l'essentiel- étant déjà réalisé par la méthode des équations de forme réduite.

Cependant, le processus de généralisation reste loin d'être complètement achevé. En effet,les variations des valeurs ou des signes des variables endogènes par rapport à la variation des variables exogènes ne sont envisagées, jusqu' ici , qu'en termes purement statiques: les valeurs de solution (équations de forme réduite) ou les signes des multiplicateurs obtenus, n'indiquent que l'impact des variables exogènes sur les variables endogènes, une fois l'équilibre réalisé. Dès lors, si ce processus de variations est envisagé comme un processus dans le temps, nous ne pouvons être sûrs du succès du multiplicateur ainsi généralisé, que si celui-ci est dynamisé, sans toutefois qu'il perde de sa stabilité.

SECTION III

Dynamisation et Generalisation Complete de la Theorie du Multiplicateur

Pour généraliser complètement la théorie du multiplicateur ci-dessus formalisée, nous devons donc rechercher à dynamiser celle-ci. La dynamisation est rendue possible, chaque fois que:

les variables du système se trouvent datées, décalées, voire même "monétarisées";

les paramètres structurels, et surtout les paramètres politiques, acceptent de changer;

. ainsi de suite ...

Et, une fois dynamisé, ce modèle nous permettra de mesurer l'impact des variables exogènes dans la succession des périodes; et de décrire et de prévoir, la réaction des variables endogènes, tout au long du chemin transitoire, séparant l'équilibre initial, provoquée par la variation des variables exogènes.

A) - La formulation des multiplicateurs dynamiques

Pour formaliser ce que nous venons de dire, admettons le modèle structurel qui suit, soit:

$$(1) \quad HY_t = A + BZ_t + CY_{t-i} + U_t,$$

où:

H = une matrice carrée de dimension k des variables endogènes,

Y_t = le vecteur des variables endogènes ($Y_t = y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{kt}$),

A = une matrice de coefficients de dimension,

B = la matrice d'ordre m.k des coefficients des variables exogènes (paramètres politiques),

Z_t = le vecteur de dimension m des variables exogènes ($Z_t = z_{1t}, z_{2t}, \ldots, z_{mt}$),

CY_{t-i} = un vecteur de variables décalées, appartenant à la $i^{ème}$ période dans le passé,

U_t = le vecteur des variables stochastiques, qui englobe l'ensemble des causes non incorporées dans le modèle,

t = se réfère à la période courante et t-i à la $i^{ème}$ période passée.

Dans ces conditions, si la matrice H est une matrice régulière (non singulière), soit de rang k, notre modèle structurel admet la forme réduite qui suit, soit:

$$(2) \quad Y_t = H^{-1}A + H^{-1}BZ_t + H^{-1}CY_{t-i} + H^{-1}U_t$$

où:

H^{-1} est le multiplicateur général courant, $H^{-1}B$ le multiplicateur général dynamique qui indique l'impact de la variation des paramètres politiques, de même que $H^{-1}C$ qui montre l'impact de la variation d'un ensemble (vecteur) de variables prédéterminées dans le passé, sur les variables endogènes courantes.

Cela dit, il reste à savoir si le système sur lequel se trouve fondé le modèle, est en définitive, stable ou instable. Ceci est d'une importance capitale, car le sort des multiplicateurs en dépend. En effet, si l'ensemble des effets induits par la variation des variables exogènes est convergent, c'est-à-dire s'il tend vers une valeur finale, le système sera alors stable. Dans ces conditions, la théorie générale du multiplicateur y est applicable sans obstacle. Mais, si cet ensemble est, par contre divergent, c'est-à-dire qu'il s'écarte toujours de la position d'équilibre initiale sans converger pour autant vers une valeur finale, alors le système sera instable et donc la théorie du multiplicateur inapplicable. A partir de là, nous aurons affaire à des phénomènes d'amplification, tels que: accélération, polarisation, croissance longue; ou encore à des mouvements discontinus comme oscillations.

Dès lors, nous sortons pratiquement du domaine de la théorie du multiplicateur et entrons dans celui de dynamisation au second degré, ou celui des amplifications.

Cependant, W.-W. Léontief a tout récemment proposé que l'on pourrait franchir, sous certaines conditions, le seuil de dynamisation ainsi fixé; et partant, dynamiser davantage le multiplicateur. Cette dynamisation sera faite à l'aide d'une inversion dite dynamique.

B) - La dynamisation à l'aide de la notion d'inversion dynamique de W.-W. Léontief

A la notion de l'inversion habituelle, qualifiée statique, W.-W. Léontief oppose celle de l'inversion dite dynamique [17].

Le modèle qu'il propose pour démontrer cette thèse, est de forme structurelle suivante:

Selon lui, la production (output) d'une période courante (t) est à la fois fonction des caractéristiques structurelles (les coefficients techniques d'entrée courants), de la demande terminale de la même période (t) et des coefficients projetés de capital pour la période suivante (t +1); ce qui signifie, que les équipements produits dans la période courante (t) ne sont mis en oeuvre que dans la période suivante (t + 1), soit:

$$(1) \quad X_t = A_t X_t + B_{t+1}(X_{t+1} - X_t) + C_t$$

$$\underbrace{\text{Prod.}} = \underbrace{\text{Demande interm.}} + \underbrace{\text{Investissement}} + \underbrace{\text{Consomm. terminale}}$$

où:

$X_t = (X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt})$, soit le vecteur-colonne des outputs de n secteurs dans une période donnée, t;

A_t = la matrice d'ordre n, qui décrit les caractéristiques structurelles de l'économie dans la même période, ou si l'on veut, la matrice de coefficients d'inputs courants;

B_{t+1} = la matrice carrée d'ordre n des coefficients de capital de la période t+1;

C = le vecteur de la demande terminale d'ordre m,

$= (C_{1t}, C_{2t}, \ldots, C_{mt})$.

La demande terminale permise par la production X_t est donc:

$$(2) \quad C_t = X_t - A_t X_t - B_{t+1}(X_{t+1} - X_t).$$

Et comme la production courante (X_t), dépend de celle de la période t+1 par l'intermédiaire de la matrice B, d'où:

$$(2bis) \quad (X_t - A_t X_t + B_{t+1} X_t) - B_{t+1} X_{t+1} = C_t$$

En posant:

$$(3) \quad G_t = (I - A_t + B_{t+1}),$$

on obtient:

$$(4) \quad C_t = G_t X_t - B_{t+1} X_{t+1}$$

Ce qui donne lieu à un système linéaire de forme:

$$(4') \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_{-2} & X_{-1} & X_0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{G_{-2}}X_{-2} & -\boxed{B_{-1}}X_{-1} & -\boxed{B_0}X_0 \\ & \boxed{G_{-1}}X_{-1} & -\boxed{B_0}X_0 \\ & & \boxed{G_0}X_0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} = \\ = \\ = \end{array} \begin{bmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \\ C_0 \end{bmatrix} \qquad (4')$$

ou si l'on veut :

$$(4'') \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} X_{-m} & X_{-m+1} & X_{-3} & X_{-2} & X_{-1} & X_0 \end{array} \\ \hline \left[\begin{array}{cccccc|c} G_{-m} & -B_{-m+1} & & & & & X_{-m} \\ & G_{-m+1} & & & & & X_{-m+1} \\ \hline & & G_{-3} & -B_{-2} & & & X_{-3} \\ \hline & & & G_{-2} & -B_{-1} & & X_{-2} \\ & & & & G_{-1} & -B_0 & X_{-1} \\ \hline & & & & & G_0 & X_0 \end{array}\right] \end{array} = \begin{bmatrix} C_{-m} \\ C_{-m+1} \\ \hline C_{-3} \\ \hline C_{-2} \\ C_{-1} \\ \hline C_0 \end{bmatrix}$$

A partir de ce système, on peut simuler les productions passées en remontant dans le temps. Il suffit de partir de C, dont la valeur est connue, et de déterminer X nécessaire à sa réalisation. C'est le problème de l'inversion. D'où :

$$(5) \qquad X_t = G_t^{-1} C_t + B_{t+1} X_{t+1}$$

Cette inversion ou solution, est dite dynamique, car elle fait intervenir la matrice B_{t+1} et, à travers celle-ci, relie X_t à X_{t+1}. Chaque élément de l'équation (5) étant, en fait, une matrice, on aura dès lors plutôt et au lieu de (5) le système de solution suivant:

$$\begin{bmatrix} X_{-m} \\ X_{-3} \\ X_{-2} \\ X_{-1} \\ X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Année-m} & \text{Année -2} & \text{..Année 0} \\ \hline G_{-m}^{-1} & R_{-m} \cdot\cdot R_{-3} G_{-2}^{-1} & R_{-m} \cdot\cdot R_{-m} \cdot\cdot R_{-3} R_{-2} R_{-1} G_0^{-1} \\ & R_{-3} G_{-2}^{-1} \quad \cdot\cdot & R_{-3} R_{-2} R_{-1} G_0^{-1} \\ & G_{-2}^{-1} \quad \cdot\cdot & R_{-2} R_{-1} G_0^{-1} \\ & \cdot\cdot & R_{-1} G_0^{-1} \\ & \cdot\cdot & G_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-m} \\ C_{-3} \\ C_{-2} \\ C_{-1} \\ C_0 \end{bmatrix}$$

ou

$$(6) \qquad R_t = G_t^{-1} B_t = (I - A + B_{t+1})^{-1} B_t$$

ou

$$(6) \quad R_t = G_t^{-1} B_t = (I-A + B_{t+1})^{-1} B_t$$

En remontant de bas en haut (en suivant les flèches), on trouve à la base, la matrice de solution G_O^{-1}, qui n'est autre chose que l'inverse statique de la matrice G. Il s'agit, plus précisément, du multiplicateur habituel, qui est obtenu dans l'année de base, O. Cette matrice de solution nous montre les conditions dans lesquelles on pourra satisfaire une demande terminale (C_O) à l'aide des entrées courantes de la même année de base. Mais, le terme précédent (toujours en remontant de bas en haut), c.-à-d. $R_{-1}G_O^{-1}$, indique la quantité de biens intermédiaires et capital nécessaires dans l'année t-1 pour satisfaire un montant de la demande finale égal à C_{-1} en réalisant une production totale égale à X_{-1}; et ainsi de suite, jusqu'à l'année -m (m étant une série de périodes déterminées). Ainsi, ces solutions permettent de simuler les productions des périodes passées à partir des éléments d'une période de base donnée.

Cela dit, nous devons signaler qu'à partir de la période t-1, les $R_{-1}G_O^{-1}$, etc..., sont des solutions dynamiques et non plus (comme ce fut le cas pour G_O) celles obtenues par inversion statique . Il s'agit là, d'une dynamisation au second degré, due à l'intervention des coefficients de capital. Et les solutions que l'on obtient dans ces conditions, n'expriment plus la théorie de multiplication, mais plutôt, celles d'accélération, de polarisation et de croissance longue. Cependant , le système demeure, pour son auteur, stable et convergent. Mais, il n'est pas exclu qu'il devienne instable et divergent. Pour cela, il suffit que l'on abandonne l'hypothèse selon laquelle "les biens de capital produits dans l'année t ne sont mis en oeuvre que dans l'année t+1", c.-à-d. que l'on intègre ces biens d'équipement au processus productif de la période prise en considération.

o o o

o

Avec ceci nous terminons la partie conceptuelle de la théorie du multiplicateur. Et, dans une prochaine livraison nous aborderons des exemples concrets de son application.

(1) - Il existe trois notions principales de multiplicateurs.

i- le multiplicateur cartésien, qui permet de lier un élément d'un ensemble particulier à un ou à plusieurs éléments d'un autre ensemble. Dans ce cas, la notion de multiplicateur correspond à celle d'une fonction;

ii- le multiplicateur de Lagrange, qui est lié à la notion de contrainte ou, plus exactement, aux maxima et minima contraints. Lorsque le champ de variation des variables est limité, la maximisation ou la minimisation se réduit au problème de chercher les valeurs les plus grandes ou les plus petites, pouvant être réalisées dans les limites permises des variables en question. Un tel problème est dit problème de maximisation ou de minimisation contraintes; et les relations qui limitent le champ de variation de ces variables, sont dites contraintes. Dans de tels cas, on se trouvera en présence d'un système dont le nombre des équations est supérieur à celui des variables inconnues. Cette sur-détermination, est due à l'introduction de relations de contrainte. Dès lors, pour déterminer le système, on sera amené à introduire des inconnues artificielles jusqu'à ce qu'il soit possible de résoudre le système. Ces inconnues artificielles, dont le nombre est égal à celui des contraintes, sont appelées multiplicateur de Lagrange;

iii- enfin, le multiplicateur rattaché -à tort- au nom de Keynes. Seule cette dernière notion de multiplicateur, dont nous généralisons ici la conception, fait l'objet de l'étude présente.

(2) - D.-B. Suits: The Theory and Application of Econometric Models, (Center of Economic Res., Vol. 3, Athens, 1963); id: Applied Econometric Forecasting and Policy Analysis, in Arquivo do Inst. Gulbekian de Ciencia , (Lisboa, 1967, vol. II, n° 2, pp. 91-147) ; L.-R. Klein and A.-R. Goldberger: An Econometric Model of the United States 1929-1952, (North-Holland Publ. Co, Amsterdam, 1955) ; id: Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein-Goldberger Model, (North -Holland Publ. Co, Amsterdam, 1959); J.- S. Dusenberry, G. Fromm, L.-R. Klein and E. Kuh: The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States, (North - Holland Publ. Co, 1965); G. Fromm and P.-J. Taubman: Policy Simulations with an Econometric Model, (North-Holland Publ. Co, Amsterdam, 1968); R. H. Rasche and H. T. Shapiro: The F.R.B.-M.I.T. Econometric Model: Its Special Features, in Am. Eco. R., (May 1968, pp. 123-149).

(3) - J. Tinbergen: Economic Policy (Principles and Design), (North-Holland Publ. Co.), Tr. Fr. par L. de Azcarate: Techniques modernes de la politique économique, (Dunod, Paris, 1961); Id: On the Theory of Economic Policy, (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1963); H. Theil: Economic Forecasts and Policy , (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1970), 2nd Ed.; Id: Applied Economic Forecasting, (North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1966 ; E. D. Kirschen and L. Dupriez: A Model of World Income and Trade in 1975, (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1970); E. S. Kirschen: Politique économique contemporaine, (Editions de l'Institut de Sociolo-

gie, Bruxelles, 1965); Id: Economic Policy in our Time, (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1964); Id: Vers un modèle prévisionnel mégisto-économique, in Cah. Eco. Bruxelles, (N° 16, Oct. 1962, pp. 471-483); Id. Mégistos: un modèle mondial de croissance économique, in Cah. Eco. Bruxelles, (N° 49, Ier trim. 1971, pp. 85-99), (c.r. par M. Montazer-Zohour, in R. Doc. Eco., (N° 150, 1972, p. 49); J. Paelinck: Un modèle dynamique de simulation et de contrôle pour l'économie belge, in Rev. Int. S. Eco. Com., (N°3, 1969, pp. 201-228).

(4) - K.-A. Fox, J.-K. Sengupta and E. Thorbecke : The Theory of Quantitative Economic Policy with application to economic growth ans stabilization, (North-Holland Publ. Co., 1966).

(5) - M. Aurousseau: The Distribution of Population - A constructive problem, Geographical Review, 1921; Cf: également: J. Dreyfus: Recherche et aménagements urbains, pp. 40 et ss. in Consommation -CREDOC, (N° 1-1966); Cl. Ponsard: Théorie de la base Economique et croissance urbaine, texte présenté au Colloque Canado-Français (Développement urbain et analyse économique), (Univ. Laval, Sept. 1968); H. Beblaoui, H. Bourbon, M. Montazer-Zohour et J. Pelicand (sous la direction du Prof. Boudeville) - La croissance du Bassin Parisien, (I.S.E.A., 1968); J.-R.Boudeville: Modèle de croissance du Bassin Parisien, in Cah. I.S.E.A., (Ser. L, 18, 1968).

(6) - Les résultats de recherches empiriques, entreprises entre 1921-1926, aboutissaient, à deux reprises, à un multiplicateur 2,6 pour le commerce extérieur du Danemark. Cf: W. Gueldner: Untersuchungen zur Theorie vom Aussenhandelsmultiplikator, (Frankfurt/Main, 1959), Annexe I.

(7) - R.-M. Haig: Major Economic Factors in Metropolitan Growth and Arrangement, (New - York, 1928).

(8) - A.-F. Kahn: The Relations of Home Investment to Unemployment, in Eco. J., (N° 2-1931, pp. 173-198).

(9) - J.-S. Chipman: The Theory of Intersectoral Money Flows and Income Formation, (Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1951); id: The Generalized Bi-System Multiplier, in Can. J. E. & Pol., (May 1949, pp. 176-189); id: The Multi-Sector Multiplier, in Eco. J., (Dec., 1950, pp. 355-374).

(10)- Vu l'ampleur de l'étude, nous aborderons cette partie dans une prochaine livraison.

(11)- Cf: A.-G. Papandreou: Fundamentals of Model Construction in Macro-Economics, (Athens, 1962), pp. 23 et ss.

(12)- L.-R. Klein and A.-S. Goldberger: An Econometric Model of the U.S. 1929-1952, (North -Holland Publ. Co., Amsterdam, 1955).

(13)- Cf: A.-S. Goldberger: Impact Multiplier and Dynamic Properties of the Klein- Goldberger Model, (Amsterdam-Chicago, North - Holland Publ. Co., 1959), pp. 110 et ss; R.-S. Eckaus: The Stability of Dynamic Models, in R. of Eco. and Stat., (1957, pp. 172-182).

(14)- Pour ce genre de modèles, voir: M. Montazer-Zohour: Généralisation de la théorie du multiplicateur, Thèse Sci. Eco., (Paris, 1969), pp. 227 et ss ; K.-C. Kogiku: Introduction aux modèles macroéconomiques , trad. fr. par F. Bertault, (Ed. Sirey, 1971), pp. 97 et ss; E. Ames: Introduction à la macroéconomie, tr. fr. par J.-L. Jac-

quier, (P.U.F., Paris,1970), pp. 71 et ss; A.-G. Papandreou: Economic as Science, (Chicago, 1958), pp. 79 et ss; Id: Fundamentals of Model Construction, op. cit., pp. 43 et ss; H. Kuhn: Die Struktur quantitativer Modelle, (J.C.B. Mohr, Tuebingen, 1968), pp. 73 et ss.

(15)- A.-G. Papandreou: Fundamentals of Model Construction in Macro-Economics, op. cit. , pp. 27 et ss; Id. Introduction to Macro-economic Models, (Athens, Center for Economic Res., 1962), pp. 63 et ss.

(16)- Cf: K. Lancaster: The Scope of Quantitative Economics, in R. of Eco. Stud., Feb. 1962, pp. 99-123 et Jan. 1964, pp. 65-68; Id: The Theory of Quantitative Linear System, in Econometrica, Apr. 1965, pp. 265-276; A.- G. Papandreou: Introduction to Macro- Economic Models, Athens, 1965, pp. 59-71.

(17)- W. W. Leontief: The Dynamic Inverse Fourth Intern. Conf. on Input-Output Techniques , Geova, Jan. 8-12, 1968.