فصلنامه صنعت بیمه/سال بیست و دوم/شماره ۳/پائیز ۱۳۸۶/شماره مسلسل ۸۷/صفحات ۳ تا ۱۹

مخاطره‌های وابسته و بیمه اتکایی مازاد خسارت

دکتر قاسم وحیدی اصل[۱]
علی سخایی[۲]

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۶/۱۱/۲۸
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۷/۰۷/۱۶

چکیده

در نظریه مخاطره متداول، مخاطره‌های فردی، مستقل در نظر گرفته می‌شوند، زیرا تجزیه و تحلیل ریاضی آنها ساده‌تر است. اهمیت مدل‌سازی مخاطره‌های وابسته توسط متخصصین علم بیمه آمار اذعان شده است. آنها قصد دارند که ابزارها و مدل‌های موجود را بهتر کنند و دقت برآورد توزیع‌های تجمعی زیان را برای پرتفوی مخاطره‌های بیمه‌ای بهبود بخشند. مدل‌سازی مخاطره‌های وابسته، ارتباط نزدیکی با تحلیل مالی پویا دارد. در این پژوهش بیمه اتکایی خسارت و یافتن حد نگهداشت بهینه در آن از دید بیمه‌گر برای کاهش احتمال ورشکستگی، نقش بسزایی دارد.

این بحث برای حالتی که پرتفوی بیمه‌گر شامل دو مخاطره وابسته است، ارائه شده است. برای وابستگی بین مخاطره‌ها نیز از الگوی وابستگی پواسون دو متغیره استفاده کرده‌ایم. برای یافتن حدود نگهداشت مخاطره‌ها از دو معیار استفاده می‌کنیم. اولین معیار، مطلوبیت مورد انتظار سرمایه برای یک دوره است که بیمه‌گر با ماکسیمم کردن آن نسبت به حدود نگهداشت مخاطره‌ها، جواب بهینه را به دست می‌آورد. دومین معیار، ضریب تعدیل ادعاهای خسارت تجمعی است که باز هم مانند بالا با ماکسیمم کردن آن حدود نگهداشت را محاسبه می‌کنیم. در هر دو معیار، از اصل مشابهی برای محاسبه

---

۱. عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی(E-mail: M_Vahidi@Sbu.ac.ir)
۲. عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور واحد گلپایگان (E-mail: A_Sakhaei@Std.sbu.ac.ir)

حق بیمه اتکایی استفاده می‌کنیم. در نهایت، اگر چه دستگاه معادلاتی که در هر دو معیار، حدود نگهداشت بهینه را تعیین می‌کنند، مشابه هستند اما جواب مسئله کاملاً به معیار انتخابی بستگی دارد.

واژگان کلیدی: بیمه اتکایی، مازاد خسارت، مطلوبیت مورد انتظار سرمایه، تابع مطلوبیت نمایی، ضریب تعدیل، توزیع پواسون دو متغیره، مخاطره‌های وابسته

۱. مقدمه

شرکت‌های بیمه برای کاهش تعهدات سنگینشان، راهی جز واگذاری بخشی از تعهدات خود به دیگر شرکت‌های بیمه ندارند. این واگذاری به روش‌های مختلف صورت می‌گیرد که اصطلاحاً به آن بیمه اتکایی می‌گویند. همان‌طور که بیمه‌گذاران، اموال و دارایی‌های خود را نزد شرکت‌های بیمه، بیمه می‌کنند، شرکت‌های بیمه نیز بخشی از مجموعهٔ تعهدات خود را نزد شرکت‌های بیمه دیگر- برای جبران خسارات سنگین و بزرگی که ممکن است وضعیت مالی آنها را با مخاطره روبرو کند- بیمه می‌کنند. در واقع با این عمل، شرکت‌های بیمه، شرکت‌های دیگری به نام بیمه‌گر اتکایی را در نتایج مالی تعهدات خود سهیم می‌کنند. آنچه در این میان مهم به نظر می‌آید، تعیین مقدار حد نگهداشت بیمه‌گر است؛ به گونه‌ای که حداکثر سود و منفعت یا حداقل احتمال ورشکستگی حاصل شود.

در این پژوهش به نحوه تعیین مقدار حد نگهداشت بهینه بیمه‌گر در بیمه اتکایی مازاد خسارت می‌پردازیم، در حالتی که با دو مخاطره وابسته مواجه هستیم که از ساختار وابستگی پواسون دو متغیره تبعیت می‌کنند. برای این منظور از دو معیار بهینه‌سازی مطلوبیت مورد انتظار سرمایه و ضریب تعدیل ادعاهای خسارت تجمعی استفاده می‌کنیم. اگر چه استفاده از یک معیار برای بهینه‌سازی حدود نگهداشت کافی به نظر می‌رسد، اما مقایسه نتایج حاصل از این دو معیار در یک مسئله- به خصوص

زمانی که سیستم معادلات شبیه به هم باشند- کار جالبی در حیطه موضوع مورد بررسی است که در این پژوهش به آن پرداخته شده است.

۲. مدل مخاطره کلاسیک

مفهوم اساسی در ریاضیات بیمه، مفهوم مخاطره است. مخاطره، در برگیرنده دو عنصر عدم قطعیت زمان وقوع حادثه (مانند پیشامد فوت در بیمه عمر) و عدم قطعیت شدت نتایج حاصل از وقوع حادثه (مانند میزان خسارت در بیمه اتومبیل) است.

مازاد بیمه‌گر در زمان $t > 0$ با سه عامل مشخص می‌شود:

- مازاد اولیه بیمه‌گر که توسط u نشان داده می‌شود.
- حق بیمه‌های دریافتی تا زمان t
- ادعاهای خسارت پرداختی تا زمان t

از این سه عامل، تنها عامل سوم تصادفی است که توسط $S(t)$ نشان داده می‌شود و فرآیند مربوط به آن را فرآیند ادعاهای خسارت تجمعی می‌نامند. فرض کنید $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ فرآیند شمارشی برای تعداد ادعاهای خسارت باشد، متغیر تصادفی $N(t)$ تعداد ادعاها را در بازه مشخص $[0,t]$ نشان می‌دهد. اگر مقادیر ادعاهای خسارت که با $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ نشان داده می‌شوند، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند، در این صورت مقدار ادعاهای خسارت تجمعی تا زمان t برابر است با $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$، وقتی $N(t) = 0$، $S(t) = 0$. به این ترتیب مازاد بیمه‌گر در زمان $t > 0$ برابر است با:

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

c نرخ درآمد حق بیمه در واحد زمان است که به طور پیوسته دریافت می‌شود. تابع توزیع X_i را با F نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $F(0) = 0$ (مقادیر ادعاها مثبت هستند). برای سادگی فرض می‌کنیم F پیوسته و تابع چگالی آن f باشد.

به این مدل، مدل مخاطره کلاسیک می‌گویند و فرآیند مربوط را فرآیند مخاطره کلاسیک می‌نامند. در فرآیند مخاطره کلاسیک فرض می‌شود که $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ یک

فرآیند پواسون است و در نتیجه، فرآیند ادعاهای خسارت تجمعی $S(t) \geq 0$ یک فرآیند پواسون مرکب است.

اگر شرایط زیر برای $N(t)$ برقرار باشد، $N(t)$ خواص فرایند پواسون را دارا بوده و از قانون پواسون تبعیت کند:

- رخداد پیشامدها در دو بازه زمانی جداگانه، مستقل از یکدیگر باشند.
- تعداد پیشامدها در بازهٔ (t_1, t_2) فقط به طول بازه بستگی داشته باشد و به نقطه شروع وابسته نباشد.
- احتمال رخداد دو پیشامد یا بیشتر از آن در یک بازه بی‌نهایت کوچک، برابر صفر باشد.

در این صورت

$$P_r(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

که در آن λ پارامتر توزیع پواسون است(Buhlmann, 1970).

۳. مخاطره‌های وابسته[1]

مطالبی که در قسمت ۲ ذکر شد، مربوط به حالتی است که مخاطره‌ها مستقل هستند. اما در حالت کلی، مخاطره‌های X_i مستقل از هم نیستند؛ چرا که از یک ساختار تولید ادعای خسارت ناشی شده‌اند یا تحت تأثیر یک محیط خاص اقتصادی یا فیزیکی قرار دارند. بنابراین از فرض استقلال تخطی می‌شود و نمی‌توان از آن برای یافتن تابع توزیع S استفاده کرد. مخاطره‌های مربوط به بیمه‌نامه‌های یک پرتفوی که از یک منطقه جغرافیایی انتخاب شده‌اند، مانند مخاطره بیمه‌نامه‌های زمین‌لرزه در یک شهرخاص، به هم وابسته‌اند. بنابراین ادعای خسارت مربوط به این مخاطره‌ها وابسته به رخداد و شدت اتفاق زیان‌باری است که در این ناحیه رخ می‌دهد. مثال دیگر اینکه در یک روز مه‌آلود، همه اتومبیل‌های در حال حرکت واقع در یک ناحیه به علت

---

1. Dependent Risks

شرایط بد جوی، دارای احتمال تصادف بالایی هستند و به این ترتیب، شدت خسارات وارده به اتومبیل‌ها با تعداد ادعاهای خسارت وابسته‌اند، یا به عنوان نمونه در بیمه عمر، گواه کافی وجود دارد که، بین طول عمر زن و شوهر و کیفیت زندگی آنان (مانند رفاه، مالی، آسایش و آرامش و...) وابستگی وجود دارد. به طور کلی، اگر تراکم خطرهای موضوع بیمه در یک منطقه یا ناحیه زیاد باشد (بلایای طبیعی مثل سیل، زلزله و ...) می‌توانند باعث انباشتگی ادعای خسارت برای بیمه‌گر باشند.

چون استفاده از ساختار وابستگی بین مخاطره‌ها به صورت ریاضی در کارهای بیمه‌ای معمول‌تر است، لذا به منظور در نظر گرفتن وابستگی بین مخاطره‌ها از توزیع خاصی به نام پواسون دو متغیره[۱] استفاده می‌کنیم.

مدل‌های پواسون دو متغیره برای مدل‌سازی داده‌های شمارشی جفتی که با هم وابستگی دارند، به کار می‌روند. این داده‌ها در زمینه‌های متعددی هم‌چون بازاریابی، همه‌گیر شناسی[۲]، ورزش و اقتصاد به وجود می‌آیند.

هولگیت[۳] این توزیع را در سال ۱۹٦٤ به وجود آورد که به این صورت تعریف می‌شود:

$$N_1 = K_1 + K; \qquad N_2 = K_2 + K \qquad (۱)$$

به طوری که اگر K_1 و K_2 و K متغیرهای تصادفی مستقل و پواسون با میانگین‌های به ترتیب λ_1 و λ_2 و λ باشند، آنگاه متغیرهای تصادفی N_1 و N_2 دارای توزیع توأم پواسون دو متغیره با تابع جرم احتمال زیر هستند (Johnson, Kotz & Balakrishnan, 1997).

$$P_r[N_1 = n_1, N_2 = n_2] = P(n_1, n_2) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda)} \sum_{i=0}^{\min(n_1,n_2)} \frac{\lambda_1^{n_1-i}\lambda_2^{n_2-i}\lambda^i}{(n_1-i)!(n_2-i)!i!} \qquad (۲)$$

---

1. Bivariate Poisson
2. Epidemiology
3. Holgate

٤. حدود نگهداشت بهینه بیمه‌گر در یک قرارداد مازاد خسارت با دو مخاطره وابسته

مدلی شامل دو مخاطره را در نظر می‌گیریم که به واسطه تعداد ادعای خسارت‌ها با هم وابستگی دارند. دو مخاطره می‌توانند، ارائه دهنده دو رده از بیمه‌های تجاری باشند. فرض کنید $\{X_{ij}\}_{j=1,2,...}$ متغیرهای تصادفی اندازه ادعای خسارت برای مخاطره iام باشند و $i=1,2$.

هم‌چنین فرض می‌کنیم که برای این دو مخاطره $\{X_{ij}\}$ ... $j=1,2,$, $i=1,2$ ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع F_i و میانگین μ_i باشند و تابع مولد گشتاور آنها نیز وجود داشته باشد و برای $i=1,2$ نیز $F_i(0)=0$.

مقادیر ادعاهای خسارت تجمعی برای مخاطره‌های اول و دوم را به ترتیب با S_1 و S_2 نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر: $S_i=\sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}$، که در این رابطه N_i تعداد ادعاهای خسارت مخاطره iام در دوره‌ای معین است.

در ضمن $\{X_{1j}\}_{j=1,2,...}$ و $\{X_{2j}\}_{j=1,2,...}$ مستقل بوده و از N_1 و N_2 نیز مستقلند. حال فرض می‌کنیم:

$$N_1=K_1+K\ ,\ N_2=K_2+K \qquad (۳)$$

که K_1 و K_2 و K متغیرهای تصادفی مستقل و پواسون با پارامترهای به ترتیب λ_1 و λ_2 و λ هستند. به عبارت دیگر (N_1,N_2) دارای توزیع پواسون دو متغیره است. به این ترتیب مشخص است که S_1 و S_2 از طریق K با هم وابستگی دارند، زیرا N_1 و N_2 از طریق K وابسته‌اند. این مدل را وانگ[1] برای توصیف پرتفوی مخاطره‌های وابسته در نظر گرفت. وابستگی بین این دو مخاطره ناشی از وجود

1. Wang, 1998.

عاملی است که تعداد و اندازه ادعاهای خسارت هر دو نوع بیمه را تحت تـأثیر قـرار می‌دهد.

مسئله مورد نظر، تعیین حد نگهداشت[1] (سهم نگهداری) بهینهٔ مازاد خسارت M_i از دید بیمه‌گر واگذارنده برای هر مخاطره است که با دو روش مطلوبیت مورد انتظـار سرمایه و ضریب تعدیل، این کار انجام شده و اصل محاسبه حق بیمه‌ای که برای هـر قرارداد به کار برده می‌شود، اصل مقدار مورد انتظار[2] با ضریب سربار[3] $\alpha_i > \circ$ است.

۱-٤. روش مطلوبیت مورد انتظار سرمایه

تصمیم‌گیری با استفاده از تـابع مطلوبیـت، بـر مبنـای مطلوبیـت مـورد انتظـار (امیـد مطلوبیت) است. این معیار می‌گوید که یک تصمیم‌گیرنده باید مقدار مطلوبیـت مـورد انتظار سرمایه‌اش را تحت اتخاذ هر یک از تصمیماتش محاسبه کرده و آن تصمیمی را برگزیند که بیشترین مقدار مطلوبیت مورد انتظار را حاصل می‌کند (Centeno, 1988). برای درک این مفهوم، فردی بـا تـابع مطلوبیـت u را در نظـر بگیریـد کـه در صـدد انتخاب یکی از دو نوع سرمایه‌گذاری است که هر یک به ترتیب منجر به سود خالص و تصادفی X_1 و X_2 می‌شوند. فرض کنید سرمایه اولیه این شخص W است. از این رو، نتیجه سرمایه‌گذاری $i = 1, 2;\ W + X_i$ است. بنابراین تحت معیار مطلوبیت مورد انتظـار، سـرمایه‌گـذار، فرصـت اول را بـه دوم تـرجیح مـی‌دهـد اگـر $E[u(W + X_1)] > E[u(W + X_2)]$ و اگر هیچ تفاوتی بین فرصت‌های اول و دوم وجود نداشته باشد: $E[u(W + X_1)] = E[u(W + X_2)]$.

1. Retention Limit
2. Expected Value Principle
3. Loading Coefficient

هدف ما محاسبه (M_1, M_2) برای ماکسیمم نمودن مطلوبیت مورد انتظار سرمایه خالص بیمه اتکایی است، وقتی که تابع مطلوبیت مورد نظر، نمایی باشد. در چنین حالتی سرمایه خالص بیمه‌گر اولیه برابر است با:

$$P_1 + P_2 - (\hat{P}_1(M_1) + \hat{P}_2(M_2) + \hat{S}_1(M_1) + \hat{S}_2(M_2))$$

حال مطلوبیت مورد انتظار این عبارت را نسبت به M_1 و M_2 ماکسیمم می‌کنیم، یعنی ماکسیمم

$$E\{-\exp[-\beta(P_1 + P_2 - (\hat{P}_1(M_1) + \hat{P}_2(M_2) + \hat{S}_1(M_1) + \hat{S}_2(M_2)))]\} \tag{٤}$$

(که در آن، $i = 1, 2; P_i$ حق بیمهٔ مخاطره i ام، $\hat{P}_i(M_i)$ حق بیمهٔ اتکایی مخاطره iام و $\hat{S}_i(M_i) = \sum_{j=1}^{N_i} \min(X_{ij}, M_i)$ میزان خسارت‌های پرداختی به افراد تحت پوشش برای مخاطره iام هستند)، نسبت به M_1 و M_2 به دست می‌آوریم.

قضیه: حق بیمهٔ اتکایی مخاطره iام عبارت است از

$$\hat{P}_i(M_i) = (1 + \alpha_i)(\lambda_i + \lambda)\int_{M_i}^{\infty} (1 - F_i(x))\, dx \tag{٥}$$

برهان

برای اثبات قضیه بالا از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم: مطلوبیت مورد انتظار سرمایه، تابعی خوش رفتار از حدود نگهداشت است. به این معنی که در نقاطی که گرادیان[1] صفر است، ماتریس هسین[2] همیشه منفی است

حال می‌توان به جای ماکسیمم نمودن رابطه ٤، عبارت (٦) را مینیمم نمود (Centeno, 2005):

1. Gradient
2. Hessian Matrix

(٦)

$$h(M_1,M_2) = (1+\alpha_1)(\lambda_1+\lambda)\int_{M_1}^{\infty}(1-F_1(x))\,dx + (1+\alpha_2)(\lambda_2+\lambda)$$
$$\times\int_{M_2}^{\infty}(1-F_2(x))\,dx + (\lambda_1+\lambda)\int_{\circ}^{M_1}\exp(\beta x)(1-F_1(x))\,dx$$
$$+(\lambda_2+\lambda)\int_{\circ}^{M_2}\exp(\beta x)(1-F_2(x))\,dx$$
$$+\beta\lambda\int_{\circ}^{M_1}\exp(\beta x)(1-F_1(x))\,dx\int_{\circ}^{M_2}\exp(\beta x)(1-F_2(x))\,dx$$

نتیجه: بسته به شرایط $\{\alpha_i; i=1,2\}$ ماکسیمم مقدار مطلوبیت مورد انتظار در نقاطی به شکل (M_1,M_2) اتفاق می‌افتد که در روابط زیر صدق کنند:

الف) اگر

$$\alpha_1 \geq \beta\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda}\int_{\circ}^{(\frac{1}{\beta})\log(1+\alpha_2)}\exp(\beta x)(1-F_2(x))dx \qquad (٧)$$

و

$$\alpha_2 \geq \beta\frac{\lambda}{\lambda_2+\lambda}\int_{\circ}^{(\frac{1}{\beta})\log(1+\alpha_1)}\exp(\beta x)(1-F_1(x))dx \qquad (٨)$$

مقدار ماکسیمم در نقطه (M_1,M_2)ای اتفاق می‌افتد که در این روابط صدق می‌کند:

$$\exp(\beta M_1) = \frac{1+\alpha_1}{1+\beta\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda}\int_{\circ}^{M_2}\exp(\beta x)(1-F_2(x))dx} \qquad (٩)$$

$$\exp(\beta M_2) = \frac{1+\alpha_2}{1+\beta\frac{\lambda}{\lambda_2+\lambda}\int_{\circ}^{M_1}\exp(\beta x)1-F_1(x))dx}$$

ب) اگر

$$\alpha_1 < \beta\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda}\int_{\circ}^{(\frac{1}{\beta})\log(1+\alpha_2)}\exp(\beta x)(1-F_2(x))dx \qquad (١٠)$$

نقطه (M_1,M_2) بهینه عبارت است از: $(M_1,M_2) = (\circ,(\frac{1}{\beta})\log(1+\alpha_2))$

ج) اگر

$$\alpha_2 < \beta \frac{\lambda}{\lambda_2 + \lambda} \int_0^{(\frac{1}{\beta})\log(1+\alpha_1)} \exp(\beta x)(1 - F_1(x))dx \qquad (۱۱)$$

مقدار ماکسیمم در نقطه $(M_1, M_2) = ((\frac{1}{\beta})\log(1+\alpha_1), 0)$ اتفاق می‌افتد.

برهان

با قرار دادن $\lambda = 0$، نتیجه بالا برای مخاطره‌های مستقل به دست می‌آید. هم‌چنین در حالت استقلال، موارد ب و ج اتفاق نمی‌افتند؛ زیرا α_1 و α_2 منفی می‌شوند و این غیر ممکن است (Centeno, 2005).

۲-٤. روش ضریب تعدیل[1]

ضریب تعدیل، معیاری برای مطالعه تأثیرات بیمه‌های اتکایی است. به عنوان مثال، اگر بخواهیم تأثیر بیمه اتکایی را بر احتمال ورشکستگی یک شرکت بیمه بررسی کنیم، ضریب تعدیل، معیاری برای یافتن کران بالا و پایین احتمال ورشکستگی است. نام ضریب تعدیل از این حقیقت ناشی می‌شود که با استفاده از بیمه اتکایی و افزایش حق بیمه‌ها، می‌توان این ضریب و به دنبال آن احتمال ورشکستگی را تعدیل نمود. ضریب تعدیل معیار مخاطره برای فرآیند مازاد است و با R نشان داده می‌شود. این ضریب، دو مؤلفه در فرآیند مازاد را در بر می‌گیرد:

– ادعاهای خسارت تجمعی

– حق بیمه‌ها

برای فرآیند مخاطره کلاسیک، ضریب تعدیل، ریشه مثبت و یکتای این معادله است:

$$\lambda M_X(r) - \lambda - cr = 0 \qquad (۱۲)$$

1. Adjustment Coefficient

(که در آن $M_X(r)$ تابع مولد گشتاور مقادیر ادعاهای خسارت، λ پارامتر توزیع پواسون است) به این ترتیب R از این معادله به دست می‌آید:

$$\lambda + cR = \lambda M_X(R) \qquad (۱۳)$$

ذکر این نکته لازم است که با نوشتن c به صورت $(1+\alpha)\lambda m_1$ دیده می‌شود که R مستقل از پارامتر پواسون λ است (α عامل سربار حق بیمه و m_1 گشتاور مرتبه اول مقادیر ادعای خسارت است) (Dickson, 2005).

در این بخش، با استفاده از ماکسیمم نمودن ضریب تعدیل (مینیمم نمودن کران بالای احتمال ورشکستگی)، حدود نگهداشت بهینه را، وقتی که مخاطره‌ها از الگوی وابستگی پواسون دو متغیره تبعیت نموده و $n = 2$، محاسبه می‌کنیم.

از ویژگی‌های ضریب تعدیل آن است که مقدار مورد انتظار $e^{-RU(t)}$ در هر زمان برابر e^{-Ru} است یعنی:

$$E[e^{-RU(t)}] = E[e^{-R\{u+ct-S(t)\}}] = e^{-Ru[e^{-Rc}\exp\{\lambda(M_X(R)-1)\}]^t} = e^{-Ru}$$

زیرا $S(t)$ دارای توزیع پواسون مرکب است (Promislow, 2006).

با توجه به این نکته و با جایگزینی $U(t) = u+P_1+P_2-(\hat{P}_1(M_1)+\hat{P}_2(M_2)+\hat{S}_1(M_1)+\hat{S}_2(M_2))$ در عبارت بالا، برای مسئله مورد نظر ما، ضریب تعدیل $R = R(M_1, M_2)$ ریشه مثبت و یکتای معادله زیر (در صورت وجود) است.

$$E\{\exp[R(\hat{S}_1(M_1)+\hat{S}_2(M_2))]\} = \exp[R(P_1+P_2-(\hat{P}_1(M_1)+\hat{P}_2(M_2)))] \qquad (۱٤)$$

این رابطه معادل است با

$$G(R; M_1, M_2) = ۰ \qquad (۱۵)$$

که

$$\begin{aligned} G(R;M_1,M_2) &= (1+\alpha_1)(\lambda_1+\lambda)\int_{M_1}^{\infty}(1-F_1(x))dx+(1+\alpha_2)(\lambda_2+\lambda) \\ &\times\int_{M_2}^{\infty}(1-F_2(x))dx+(\lambda_1+\lambda)\int_{\circ}^{M_1}\exp(Rx)(1-F_1(x))dx \\ &+(\lambda_2+\lambda)\int_{\circ}^{M_2}\exp(Rx)(1-F_2(x))dx+R\lambda\int_{\circ}^{M_1}\exp(Rx) \\ &\times(1-F_1(x))dx\int_{\circ}^{M_2}\exp(Rx)(1-F_2(x))dx-(P_1+P_2) \end{aligned} \qquad (١٦)$$

این رابطه مشابه رابطه ٦ است، با این تفاوت که R به جای β نشسته و اختلاف آنها در یک مقدار ثابت است. حال فرض کنید سود خالص مورد انتظار بیمه‌گر اولیه پس از بیمه اتکایی را با $E[W(M_1,M_2)]$ نشان دهیم در این صورت:

$$W(M_1,M_2)=P_1+P_2-(\hat{S}_1(M_1)+\hat{S}_2(M_2)+\hat{P}_1(M_1)+\hat{P}_2(M_2))$$

حال با گرفتن امید ریاضی از رابطهٔ بالا خواهیم داشت:

(١٧)

$$\begin{aligned} E[W(M_1,M_2)] &= P_1+P_2-(\lambda_1+\lambda)\,\mu_1-(\lambda_2+\lambda)\,\mu_2-\alpha_1(\lambda_1+\lambda)\int_{M_1}^{\infty}(1-F_1(x))\,dx \\ &-\alpha_2(\lambda_2+\lambda)\int_{M_1}^{\infty}(1-F_2(x))dx \end{aligned}$$

حال γ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma=\{(M_1,M_2):M_i\geq\circ\,;E[W(M_1,M_2)]>\circ\}$$

لم:

- $R(M_1,M_2)$ وجود دارد اگر $(M_1,M_2)\in\gamma$.
- برای هر $(M_1,M_2)\in\gamma$، $\frac{\partial}{\partial R}G(R;M_1,M_2)$ در $R=R(M_1,M_2)$ مثبت است. برهان(Centeno, 2005).

نتیجه: $R=R(M_1,M_2)$ تابعی تک‌مدی از حدود نگهداشت است و ماکسیمم آن بسته به حالت‌های مختلف α_i به این صورت است.

الف) هنگامی که

$$\alpha_1 < \frac{P_1 + P_2 - (\lambda_1 + \lambda)\mu_1 - (\lambda_2 + \lambda)\mu_2}{(\lambda_1 + \lambda)\mu_1} \tag{۱۸}$$

و

$$\alpha_1 < R \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda} \int_0^{(\frac{1}{R})\log(1+\alpha_2)} \exp(Rx)(1 - F_2(x))dx \tag{۱۹}$$

R به عنوان ریشۀ معادلۀ ۱۵ وقتی ماکسیمم خواهد شد که:

$$(M_1, M_2) = (0, (\frac{1}{R})\log(1+\alpha_2))$$

ب) وقتی

$$\alpha_2 < \frac{P_1 + P_2 - (\lambda_1 + \lambda)\mu_1 - (\lambda_2 + \lambda)\mu_2}{(\lambda_2 + \lambda)\mu_2} \tag{۲۰}$$

و

$$\alpha_2 < R \frac{\lambda}{\lambda_2 + \lambda} \int_0^{(\frac{1}{R})\log(1+\alpha_1)} \exp(Rx)(1 - F_1(x))dx \tag{۲۱}$$

R به عنوان ریشه معادلۀ ۱۵ وقتی ماکسیمم خواهد شد که:

$$(M_1, M_2) = ((\frac{1}{R})\log(1+\alpha_1), 0)$$

ج) اگر هیچ یک از شرایط بالا برقرار نباشد آنگاه ماکسیمم R در M_1 و M_2 ایی اتفاق خواهد افتاد که در این شرایط صدق کند.

$$\exp(RM_1) = \frac{1+\alpha_1}{1 + R\frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda}\int_0^{M_2} \exp(Rx)(1-F_2(x))dx} \tag{۲۲}$$

$$\exp(RM_2) = \frac{1+\alpha_2}{1 + R\frac{\lambda}{\lambda_2 + \lambda}\int_0^{M_1} \exp(Rx)(1-F_1(x))dx}$$

$$G(R; M_1, M_2) = 0$$

برهان(Centeno, 2005).

۵. مثال

در این بخش با ارائه مثالی، حدود نگهداشت بهینه برای یک قرارداد مازاد خسارت را با روش‌های بحث شده در دو بخش قبل به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم، توزیع مقادیر ادعای خسارت برای مخاطره‌های اول و دوم به ترتیب زیر باشند:

$$F_1(x) = 1 - (\frac{1}{1+x})^2, \quad x > ٠$$

$$F_2(x) = 1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x}, \quad x > ٠$$

یعنی مقادیر ادعای خسارت برای مخاطره اول دارای توزیع $Pareto(1,2)$ و برای مخاطره دوم دارای توزیع $Gamma(2,2)$ هستند. همچنین فرض می‌کنیم $P_1 + P_2 = (1.1)E[S_1 + S_2]$، $\lambda_1 = \lambda_2$، $\alpha_1 = 0.5$، $\alpha_2 = 0.3$ و $\beta = 0.05$.

وقتی ضریب همبستگی N_1 و N_2 یعنی $\frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda}$، صفر (حالت استقلال N_1 و N_2)، ۰/۵ و ۱ (همبستگی کامل N_1 و N_2) است، با استفاده از معیار مطلوبیت مورد انتظار و ضریب تعدیل، حدود نگهداشت بهینه را محاسبه می‌کنیم.

در جدول ۱ این مقادیر وقتی از معیار اول استفاده نموده‌ایم، نشان داده شده‌اند. در جدول ۲ همین مقادیر وقتی از ضریب تعدیل برای محاسبه حدود نگهداشت استفاده کرده‌ایم آورده شده‌اند.

جدول ۱. نتایج استفاده از مطلوبیت مورد انتظار در یافتن حدود نگهداشت بهینه مخاطره‌ها

i	$\frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda}$		
	٠	٠/٥	١
M_1	٨/١٠٩٣	٧/٥٩٦٥	٧/٠٩٦٦
M_2	٥/٢٤٧٣	٤/٨١٣٣	٤/٤٠٤٣

جدول ۲. نتایج استفاده از ضریب تعدیل در یافتن حدود نگهداشت بهینهٔ مخاطره‌ها

i	$\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda}$		
	۰	۰/۵	۱
M_1	۸/۱۰۹۳	۷/۵۹٦۵	۷/۰۹٦٦
M_2	۵/۲٤۷۳	٤/۸۱۳۳	٤/٤۰٤۳
R	۰/۰٦۵۱	۰/۰۵۳۳	۰/۰٤۵۵

به این دلیل M_1 در هر دو جدول همیشه از M_2 بیشتر است که احتمال دمی توزیع اول از توزیع دوم بیشتر است. به عنوان مثال وقتی مقدار ضریب همبستگی برابر ۰/۵ است خواهیم داشت:

$$1 - F_1(7.5965) = 0.0135318$$

$$1 - F_2(4.8133) = 0.0007008$$

که مقدار احتمال اول به مراتب بزرگتر از مقدار احتمال دوم است.

در جدول ۱ می‌بینیم که وقتی مطلوبیت مورد انتظار سرمایه را ماکسیمم می‌کنیم، هر چه مقدار ضریب همبستگی بیشتر می‌شود حد نگهداشت بهینه کمتر می‌شود، اما در مورد ضریب تعدیل در جدول ۲ این مطلب کاملاً برعکس است، یعنی با افزایش ضریب همبستگی، حد نگهداشت بهینه بیشتر می‌شود (به این دلیل که وقتی مقدار همبستگی N_1 و N_2 بیشتر می‌شود، مقدار R در نقطه بهینه کمتر شده (البته با فرض $\lambda_1 = \lambda_2$)، در حالی که ضریب مخاطره گریزی ثابت است).

٦. نتیجه‌گیری

نتایج مهم پژوهش عبارتند از:

مازاد بیمه‌گر در زمان t به عوامل مختلفی بستگی دارد که یکی از این فاکتورهای مهم، حد نگهداشت بیمه‌گر است. در صورتی که مازاد بیمه‌گر منفی گردد، بیمه‌گر ورشکسته خواهد شد و توان ادامه کار برای وی میسر نیست. لذا تعیین مقدار حد نگهداشت بیمه‌گر، اهمیت اساسی در بقای بیمه‌گر دارد و مقدار بهینه آن، به سود حداکثر برای وی خواهد انجامید. این حد نگهداشت بهینه به توزیع مقادیر ادعاهای خسارت مخاطره‌ها، وابسته است.

اگر چه سیستم معادلاتی که حدود نگهداشت بهینه از آنها حاصل می‌شود شبیه به هم هستند، اما جواب‌ها کاملاً به معیار انتخابی بستگی دارد و هر کدام از این دو معیار مورد بحث، جواب‌های متفاوتی دارند که بیمه‌گر با توجه به شرایط بازار بیمه و موقعیت مالی خود باید معیار مناسب را برگزیند.

وقتی بیمه‌گر از معیار مطلوبیت مورد انتظار برای یافتن حدود نگهداشت بهینه M_1 و M_2 استفاده می‌کند، با افزایش ضریب همبستگی مخاطره‌ها، M_1 و M_2 کاهش می‌یابند؛ اما وقتی ضریب تعدیل را به کار می‌بریم، با افزایش ضریب همبستگی N_1 و N_2، حدود نگهداشت بهینه‌ای که R را ماکسیمم می‌کند، افزایش می‌یابد و با این افزایش طبیعتاً احتمال بقای بیمه‌گر کاهش یافته و مقدار R برای این حدود نیز کاهش می‌یابد.

منابع

1. Buhlmann, H 1970, *Mathematical methods in risk theory*, Springer-Verlag, New York.

2. Centeno, L 1986, 'Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient', *Insurance: Mathemetics and Economics*, no. 5, 169-182.

3. Centeno, L 1988, 'The expected utility applied to reinsurance', In:Munier, B.R.(Ed),Risk, *Decision and Rationality*, D.Reidel Publishing Company, Holland.

4. Centeno, L 2005, 'Dependent risks and excess of loss reinsurance', *Insurance* : *Mathemetics and Economics,* no. 37, 229-38.

5. Dickson, DCM 2005, *Insurance risk and ruin*, Cambridge.

6. Gerber, HU 1979, *An introduction to mathematical risk theory*, Philadelphia, PA.

7. Johnson, L, Kotz, S & Balakrishnan, N 1997, *Descrete multivariate distributions,* New York, Wily.

8. Promislow, SD 2006, *Fundamentals of actuarial mathematics*, Wily.

9. Wang, S 1998, *Aggregation of correlated risk portfolios: models and algorithms*, Actuarial Society.