فصلنامه صنعت بیمه/سال بیست ویکم/شماره ٤/ زمستان ١٣٨٥/شماره مسلسل ٨٤/صفحات ٣تا ٣٩

سرمایه گذاری بهینه برای مدیریت دینامیک مخاطرهٔ بیمه گر

دکتر غلامعلی پرهام[1]
سهیل شکری فشتالی[2]

چکیده

در این مقاله به بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری برای یک شرکت بیمه در زمان پیوسته می‌پردازیم. هدف ما پیدا کردن استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه برای شرکت‌های بیمه است. ملاک برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، ماکزیمم کردن احتمال بقاء (یا مینیمم کردن احتمال ورشکستگی) بیمه‌گر است. تعیین استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه را با دو فرض دنبال می‌کنیم: مدل مخاطره بیمه‌گر از یک مدل کلاسیک پیروی کند و سبد سرمایه‌گذاری وی شامل یک دارایی با مخاطره و یک دارایی بدون مخاطره باشد. بدین منظور از ابزاری به نام معادلهٔ همیلتن -ژاکوبی- بولمان (معادلهٔبولمان) و از نظریهٔ کنترل تصادفی استفاده می‌کنیم.

واژگان کلیدی: فرآیند حرکت براونی، نظریه ورشکستگی،نظریه کنترل تصادفی ،سرمایه گذاری

---

۱. دکترای آمار و احتمالات از دانشگاه شیراز و استادیارگروه آمار دانشگاه شهید چمران اهواز
۲.کارشناس ارشد آمار ریاضی از دانشگاه شهید چمران اهواز و مدرس دانشگاه آزاد واحد لاهیجان

۱. مقدمه

یکی از اساسی ترین بحث‌های مطرح در اقتصاد هر کشور، مسئلهٔ هدایت و مدیریت انباشت سرمایه به منظور نیل به رشد بالاتر اقتصادی است. مدیریت سرمایه‌گذاری از دو دیدگاه کلان (بهینه‌سازی بازار سرمایه) و دیدگاه موسسات سرمایه‌گذاری قابل بررسی است. به علت کامل نبودن بازارها و عدم امکان تخصیص بهینه از طریق مکانیزم بازار، ضرورت بهینه سازی فرآیند تخصیص در شرکت‌های سرمایه‌گذاری کاملاً ملموس است. (اشمیدل،۲۰۰۲ و امانی،۱۳۷۹).

در دنیای کنونی، صنعت بیمه یکی از زیر بخش‌های اساسی اقتصاد هر جامعه‌ای را تشکیل می‌دهد. فاصلهٔ زمانی میان دریافت حق بیمه و پرداخت خسارت، منابع مالی مختلفی در اختیار شرکت‌های بیمه قرار می‌دهد. بیمه‌گر باید با بهره برداری شایسته از آنها، از کاهش ارزش سرمایه جلوگیری و پشتوانه لازم را برای عمل به تعهدات خود فراهم کند. بنابراین در چنین شرایطی شرکت‌های بیمه علاوه بر فعالیت سنتی خود باید به سرمایه‌گذاری نیز بپردازند. در چنین حالتی توان شرکت‌های بیمه در پرداخت تعهدات به بازده سرمایه گذاری بستگی دارد. به همین دلیل موسسات بیمه وارد بازارهای مالی می‌شوند. ریاضیات مالی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در چارسوی اقتصاد، احتمالات، آمار و بهینه‌سازی قرار می‌گیرد و چارچوب مناسبی برای بهره‌مندی علمی با این مسائل را عرضه می‌کند. آغاز ریاضیات مالی را می‌توان پژوهش‌های ریاضیدان فرانسوی باشلیه[1] دانست که درسال ۱۹۰۰ نخستین گام را در مدل‌سازی نوسان‌های بورس و ارتباط آن با دانش روزآمد احتمالات و فرآیندهای تصادفی، برداشت. گام مهمی که باشلیه برداشت نمایش قیمت یک سهام و ویژگی غیرقابل پیش‌بینی بودن آن به وسیلهٔ مفهوم ریاضی تغییر تصادفی بود. بدین وسیله

1. Bachelier

می‌توان از مفاهیم احتمالات برای نمایش و اندازه‌گیری مخاطره نوسان‌های آینده سهام استفاده کرد.

با بهینه‌سازی می‌توان سبد سرمایه‌ای را جست که کمترین مخاطره را برای سرمایه‌دار داشته باشد. این ایده، که مارکوویتز[۱] در سال ۱۹۵٤ پیشنهاد کرد، بنیان نظریهٔ بهینه‌سازی پرتفوی[۲] است. از آنجا که مخاطره یک سبد سرمایه بستگی به‌مقدار خریداری شده از هرسهام دارد، با تغییراستراتژی سرمایه‌گذاری می‌توان این مخاطره را کاهش یا افزایش داد. این به مفهوم کنترل مخاطره است که یکی از مفاهیم مهم مهندسی مالی است. امروزه شرکت‌های بیمه فقط دربازار پول و صرفا در بازار سهام، سرمایه‌گذاری نمی‌کنند. به علت ریسک بالا در بازار سهام، استراتژی‌های سرمایه‌گذاری و مدیریت مخاطره بسیار مهم‌اند. مسئلهٔ بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری برای یک شرکت بیمه متفاوت با چیزی است که مارکوویتز و دیگران در نظر گرفته‌اند، چون بیمه‌گر نیاز به پرداخت خسارت دارد. در ادبیات علم آمار بیمه، شرکت بیمه یک تابع معیار معین تحت محدودیت‌های مختلف را حداکثر (یا حداقل) می‌کند (Borch, 1967,1969; Bühlmann, 1970; Gerber, 1972)

اولین مقالات دربارهٔ کاربرد نظریهٔ کنترل تصادفی[۳] در بیمه را مارتین[٤] (۱۹۹٤)، بروکت و شیا[۵] (۱۹۹۵) و براون[٦] (۱۹۹۵)به چاپ رساندند. پس از آن با چاپ مقالات بسیاری، گسترش سریعی را در این حوزه می بینیم. براون مدلی را که در آن فرآیند مخاطره با یک حرکت براونی با رانش مدل‌بندی شده بود و قیمت دارایی با مخاطره از حرکت براونی هندسی[۷] پیروی می‌کرد، مورد بررسی قرار داد. در این مقاله به

1 . Markowitz
2 .Portfolio Optimization
3 .Stochastic control
4. Martin - Löf
5. Brockett, p & Xia, X
6. Browne, S
7. Geometric brownian motion

بهینه‌سازی سرمایه‌گذاری در زمان پیوسته برای یک شرکت بیمه می‌پردازیم. به عبارت دیگر ما مسئلهٔ انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، بهینه را برای یک شرکت بیمه مطالعه می‌کنیم. هدف ما پیدا کردن استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه برای شرکت بیمه است. این استراتژی، عبارت است از تصمیمی که شرکت بیمه چگونه باید بر اساس تعهداتش برای پرداخت در بیمه‌نامه‌ها وقتی که خسارت‌ها اتفاق می‌افتند، بین دارایی با مخاطره[1] و دارایی بدون مخاطره[2] سرمایه‌گذاری اتخاذ نماید. ملاک برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، ماکزیمم کردن احتمال بقا (مینیمم کردن احتمال ورشکستگی)[3] شرکت است. بدین منظور از ابزاری به نام معادلهٔ همیلتن- ژاکوبی- بولمان[4] (معادلهٔ بولمان) و از نظریهٔ کنترل تصادفی استفاده می‌کنیم. با استفاده از این ابزار کنترل استاندارد می‌توان استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه را که به مینیمم شدن احتمال ورشکستگی شرکت بیمه منجر می‌شود؛ محاسبه کرد. نتایج به دست آمده، بینشی برای مدیران شرکت‌های بیمه دربارهٔ چگونگی سرمایه‌گذاری فراهم می‌کند.

در این مقاله از نظریهٔ کنترل تصادفی برای پاسخ به پرسش زیر استفاده شده است: اگر شرکت بیمه (بیمه‌گر) امکان سرمایه‌گذاری بخشی از مازادش را در یک دارایی با مخاطره و یک دارایی بدون مخاطره داشته باشد و مدل مخاطره وی از یک مدل مخاطره کلاسیک پیروی کند، استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه برای ماکزیمم کردن احتمال بقا (یا مینیمم کردن احتمال ورشکستگی) چیست؟

۲. مدل فرآیند مازاد و معادلهٔ بولمان

در این مقاله، تعیین استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه را با دو فرض دنبال می‌کنیم:

---

1 . Risky Asset
2 . Risk-free Asset
3 . Survival probability (Ruin probability)
4 Hamilton – Jacobi - Bellman

۱. مدل مخاطره بیمه‌گر از یک مدل مخاطره کلاسیک پیروی کند.
۲. سبد سرمایه‌گذاری بیمه‌گر، شامل یک دارایی با مخاطره و یک دارایی بدون مخاطره می‌شود.

ابتدا مدل فرآیند مازاد را با توجه به مفروضات مسئلهٔ کنترل مسئلهٔ تعیین استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه (کنترل بهینه) با هدف ماکزیمم کردن احتمال بقای بیمه‌گر تعیین می‌کنیم و سپس از معادلهٔ بولمان مسئله کنترل را به دست می‌آوریم.

۲-۱. مدل فرآیند مازاد

با قبول فرض های استاندارد مدل های مالی زمان پیوسته زیر:

تجارت در زمان پیوسته مجاز می‌باشد؛

تجارت شامل مالیات نمی شود و

دارایی‌ها به طور نامتناهی تقسیم پذیر می‌باشند (Merton, 1990)

بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود فرض می‌کنیم که فقط دو نوع دارایی در بازار مالی موجود باشد؛ یک دارایی بدون مخاطره (مانند حساب پس‌انداز بانکی) و یک دارایی با مخاطره (مانند سهام). قیمت دارایی بدون مخاطره از معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$dP(t) = r\,P(t)\,dt \qquad (۱)$$

که در آن: $P(t)$ قیمت دارایی بدون مخاطره در زمان، t و r نرخ بهرهٔ دارایی بدون مخاطره که ثابت ومثبت فرض شده است($r \geq 0$). قیمت دارایی با مخاطره از معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$dZ_t = \mu Z_t dt + \sigma Z_t dB_t \qquad (۲)$$

که Z_t قیمت سهام در زمان t ، μ نرخ آنی مورد انتظار بازده دارایی با مخاطره ($\mu \geq 0$)، σ نوسان پذیری قیمت دارایی با مخاطره ($\sigma > 0$)و $\{B_t : t \geq 0\}$ حرکت براونی استاندارد در فضای احتمال کامل (Ω, F, P) است. (همان ماخذ).

همچنین فرض می‌کنیم که مدل فرآیند مخاطره از مدل کلاسیک پیروی کند.

$$dR(t) = c\,dt - dS(t), \quad R(0) = s \tag{۳}$$

که $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ و $N(t)$، تعداد ادعاهای خسارت تا زمان t را برای شرکت بیمه نشان می‌دهد و مستقل از Y_iهاست. متغیر Y_i، i امین خسارت ادعا شده از طرف بیمه گذاران است و Y_iها دارای توزیع یکسان و مستقل هستند. در ضمن، در هر واحد زمانی پایه شرکت بیمه، مبلغ ثابت و مشخص c را به عنوان حق بیمه از بیمه‌گذاران دریافت می‌کند. c را نرخ ناخالص حق بیمهٔ مخاطره می‌نامیم.

فرض کنید که $N(t)$ دارای نرخ λ باشد، یعنی $E\left(N(t)\right)=\lambda t$ سود حاصل از عملیات مستقیم بیمه‌ای در فاصلهٔ $[0,t]$ همان $X(t)$ است. بنابراین متوسط این سود برابر است با:

$$E\left(X(t)\right)=E\left(E\left(X(t)\mid N(t)\right)\right)=\left(c-\lambda\mu\right)t$$

به طور شهودی، شرکت به غیر از هزینه‌های مستقیم بیمه‌ای خود که همان خسارت‌ها هستند، هزینه‌های جنبی، از جمله پرداخت حقوق کارکنان و هزینه‌های بازاریابی را نیز دارد. برای تامین این هزینه‌ها مرسوم است که مبلغی تحت عنوان سربار ایمنی اضافی از بیمه‌گذاران دریافت شود. این مقدار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta = \frac{(c-\lambda\mu)t}{\lambda\mu t} = \frac{c}{\lambda\mu}-1 \tag{٤}$$

که همان سود نسبی نسبت به متوسط خسارت است. در واقع نرخ ناخالص حق بیمهٔ مخاطره برابر است با

$$c=(1+\theta)\lambda\mu=\lambda\mu+\theta\lambda\mu$$

یعنی متوسط خسارت به علاوهٔ کسری از متوسط خسارت.

هنگامی که مجموع خسارت‌های پرداختی شرکت از سرمایه اولیه به علاوهٔ مجموع حق بیمه‌های دریافتی فزونی یافت، می‌گوییم که شرکت ورشکشته شده است، بنابر این احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(u) = P\{R(t)<0 \text{ for some } t>0\}$$

احتمال مکمل آن را با $\delta(u)$ نشان می دهیم یعنی:

$$\delta(u) = ۱ - \psi(u) = P\{\tau = \infty\}$$

که $\tau = \inf\{t : t \geq ۰, R(t) < ۰\}$ زمان وقوع ورشکستگی را نشان می‌دهد (با این توضیح که $\tau = \infty$ نمادی است برای $R(t) \geq ۰$ برای هر $t \geq ۰$ یعنی ورشکستگی اتفاق نمی‌افتد).

در حالت خاص، وقتی که توزیع اندازه خسارت‌ها نمایی با پارامتر k باشد، احتمال ورشکستگی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\psi(s) = \frac{۱}{۱+\theta} \exp\{-Rs\} \qquad (۵)$$

که در آن R معروف به ضریب تعدیل است و داریم: $R = \frac{\theta k}{۱+\theta}$.

اکنون می توانیم فرآیند مازاد $X(t)$ را به صورت زیر مشخص کنیم:

فرض می‌کنیم که $A(t)$ مقدارکل پولی باشد که بیمه‌گر در دارایی با مخاطره در زمان t سرمایه‌گذاری کرده است. همچنین فرض می‌کنیم که $A(t)$ موضعاً کران‌دار و متعلق‌به‌مجموعهٔ‌استراتژی‌های مجاز(کنترل‌های‌مجاز)باشد. یعنی $A = \{A(t), t \geq ۰\}$ یک فرآیند اندازه پذیر و سازگار با فیلتر $\{F_t\}$ است، با

$$\int_۰^T [A(t)]^۲ dt < \infty$$

با احتمال قریب به یقین برای هر $T < \infty$, A_t مقداری از مازاد را که باید سرمایه‌گذاری شود به طور دینامیک انتخاب می‌کنیم. یعنی بیمه‌گر این مقدار را براساس اطلاعات تا زمان t انتخاب می‌کند: یعنی اگر F_t میدان سیگما تعمیم یافته به وسیلهٔ فرآیند X_u ، $u \leq t$ باشد، فرض می‌شود که $A(t)$ پیش بینی پذیر باشد. یعنی آن یک تابع اندازه پذیر از s ، زمان وقوع و اندازهٔ خسارت های رخ دادهِ تا زمان t است. نشان خواهیم داد که استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه وجود دارد و به وسیلهٔ معادلهٔ بازخور زیر مفروض است.

$A_t = A(X^A(t^-))$

یعنی A_t یک فرآیند کنترل دینامیک مارکف بازخور به حساب می‌آید.

حال اگر مازاد شرکت در زمان t تحت استراتژی A_t را با X_t^A نشان دهیم داریم:

$$dX_t^A = A(t)\frac{dZ(t)}{Z(t)} + (X_t^A - A(t))\frac{dP(t)}{P(t)} + dR(t) \qquad (۶)$$

یا به طور واضح تر با جایگذاری (۱)، (۲) و (۳) در (٦) داریم:

$$\begin{cases} dX_t^A = (\mu - r)A(t)dt + rX_t^A dt + \sigma A(t)dB_t + cdt - dS(t), \\ X_0^A = s \end{cases} \qquad (۷)$$

۲-۲. معادلهٔ بولمان برای مسئلهٔ کنترل

مسئلهٔ کنترل در اینجا، تعیین استراتژی سرمایه‌گذاری بهینهٔ A^* است، به طوری که احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را تحت دینامیک بودن فرآیند مازاد بیمه‌گر مینیمم می‌کند. یعنی:

$$\inf_A \psi^A(s) \qquad (۸)$$

با معادلات سیستم زیر برای مازاد بیمه گر:

$$\begin{cases} dX_t^A = (\mu - r)A(t)dt + rX_t^A dt + \sigma A(t)dB_t + cdt - dS(t), \\ X_0^A = s \end{cases}$$

که

$$\psi^A(s) = P\{X^A_t < 0 : for\ some \quad t \geq 0\} = P\{\tau^A < \infty\} \qquad (۹)$$

احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی و

$$\tau_s^A := \inf\{t > 0 : X_t^A < 0 \} \qquad (۱۰)$$

اولین زمانی که مازاد شرکت منفی می شود(زمان ورشکستگی تحت کنترل A_t با مازاد اولیهٔ s).

استراتژی بهینهٔ A^* که مسئلهٔ کنترل بالا را حل می‌کند از طریق معادلهٔ بولمان برای مسئلهٔ کنترل تعیین خواهد شد. فلمینگ[1] (۱۹۷۵و۱۹۹۳). برای سادگی احتمال بقا یعنی $\delta^A(s) = 1 - \psi^A(s)$ را برای ماکزیمم کردن در نظر می گیریم. با این فرض مسئلهٔ کنترل بالا معادل است با:

$$\sup_A \delta^A(s) \tag{11}$$

که

$$\delta^A(s) := P\{\tau_s^A = \infty\} \tag{12}$$

درنتیجه تابع هدف مسئلهٔ کنترل به صورت زیر است:

$$\delta(s) := \sup_A \{\delta^A(s)\} \tag{13}$$

قضیه معادلهٔ بولمان[2]: فرض کنیم که $\delta(s)$ دیفرانسیل پذیر مرتبهٔ دوم روی $(0,\infty)$ $(\delta \in C^2(0,\infty))$ و افزایشی مقعر $(\delta_s > 0, \delta_{ss} < 0)$باشد. در نتیجه δ از معادلهٔ بولمان زیر نتیجه می‌شود:

$$\max_A \{\lambda E[\delta(s-Y)-\delta(s)]+[c+(\mu-r)A+rs]\delta'(s)+\frac{1}{2}\sigma^2A^2\delta''(s)\} = 0 \tag{14}$$

برای $s > 0$ و با شرطهای مرزی $\delta(s) = 0$ برای $s < 0$ و $\delta(\infty) = 1$.لیویانگ(۲۰۰۴).

حال برای ادامه کار فرض می کنیم که δ دیفرانسیل پذیر مرتبهٔ دوم و افزایشی مقعر$(\delta_s > 0, \delta_{ss} < 0)$ باشد. برای داشتن این فرض، تابع چگالی اندازه‌های خسارت باید موضعاً کران‌دار باشد. معادلهٔ بولمان یک معادلهٔ درجهٔ دوم در A است. مقدار بهینهٔ این معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

---

1. Fleming, W.H.

۲. اثبات قضیه در پیوست ۱ آمده است.

(۱۵)

$$A = A^*(s) = -\frac{(\mu - r)}{\sigma^2}\frac{\delta_A'(s)}{\delta_A''(s)}$$

با مازاد اولیهٔ $s = ۰$، اگر یک مقدار مثبت در دارایی با مخاطره سرمایه‌گذاری شود، به دلیل نوسان حرکت براونی، فوراً ورشکستگی با احتمال ۱ رخ خواهد داد. بنابراین در این حالت فرض می‌کنیم که $A^*(۰) = ۰$.

۳. معادلهٔ دیفرانسیل انتگرالی

فرض می‌کنیم که $\mu > r$ (اگر $\mu \leq r$ دراین حالت فرض می‌شود که $(A^*(s) = ۰)$. تحت این فرض $A^*(s)$ برای $s > ۰$ مثبت است. با جایگذاری $A^*(s)$ درمعادله بولمان، برای $s > ۰$ داریم:

$$\frac{[(\mu - r)\delta'(s)]^2}{2\sigma^2\delta''(s)} = (rs + c)\delta'(s) + \lambda E\,[\delta(s - Y) - \delta(s)] \quad (۱۶)$$

با جایگذاری $A^*(۰) = ۰$ در معادلهٔ بولمان به دست می‌آید:

$$c\delta'(۰) = \lambda\delta(۰) \quad (۱۷)$$

که شرط اولیه برای معادلهٔ بولمان است. توجه کنید که اگر $\delta(s)$ پاسخ معادلهٔ (۳) باشد، پس $\alpha\delta(s)$ نیز جواب آن است. بنابراین در ادامه کار برای سادگی محاسبات قرار می‌دهیم $\delta'(۰) = ۱$ و در آخر وقتی که $\delta(s)$ به دست آمد، برای داشتن شرط $\delta(\infty) = ۱$ آن را در یک ضریب مناسب ضرب خواهیم کرد. در نتیجه شرط اولیه را به صورت زیر داریم:

$$c = \lambda\delta(۰) \quad (۱۸)$$

٤. بحث و بررسی درباره پاسخ معادله بولمان

در این بخش قضایایی را بدون اثبات درباره وجود و بهینگی جواب معادله بولمان ارائه می‌کنیم.

قضیه وجود جواب: فرض کنید که توزیع اندازه خسارت دارای یک تابع چگالی اکیداً کران‌دار باشد. آنگاه معادله بولمان جواب به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر مرتبهٔ دوم کران‌دار $\delta \in C^2(0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$ را دارد.

اثبات: (Hippb & Plum, 2001)

قضیه خاصیت جواب: اگر $\delta(s)$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر مرتبهٔ دوم و جواب معادله بولمان باشد آن گاه:

- اکیداً صعودی است.
- $\delta(s)$ اکیداً مقعر است.

اثبات: (Schmidli, 2002)

قضیه بهینگی جواب: فرض کنید که جواب $\delta^*(s)$ با تابع ماکزیمم گر $A^*(s)$ از معادله بولمان، با خواص زیر وجودداشته باشد: به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر مرتبهٔ دوم، افزایشی، مقعر، $\delta(s) = 0$ برای $s < 0$ و $\delta(\infty) = 1$. فرض می‌کنیم که $\delta^A(s)$ احتمال بقای متناظر با استراتژی دلخواه $A = \{A(t) : t \geq 0\}$ باشد. همواره داریم:

$$\delta^*(s) \geq \delta^A(s) \quad , \quad s \geq 0 \tag{۱۹}$$

وتساوی را برای $A = A^*$ داریم.

اثبات: (Hippb & Plum, 2001)

۵. حل عددی معادلهٔ بولمان

در این بخش جواب‌های عددی را برای معادلهٔ دیفرانسیل انتگرالی، تحت توزیع‌های مختلف برای اندازهٔ خسارت، ارائه خواهیم داد. ابتدا این معادله را به فرمی تبدیل می‌کنیم که حل آن آسان‌تر شود. فرض می‌کنیم که $F(y)$ تابع توزیع اندازه خسارت باشد. معادلهٔ دیفرانسیل انتگرالی (۱۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda\int_{0}^{\infty}[\delta_A(s-y)-\delta_A(s)]dF(y)+(rs+c)\delta'_A(s)=\frac{1}{2}\frac{[\delta'_A(s)]^2}{\delta''_A(s)}(\frac{\mu-r}{\sigma})^2 \qquad (20)$$

قرار می دهیم:

$$R = (\frac{\mu - r}{\sigma})^2 , \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{R}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{c} = \frac{c}{R}$$

داریم:

$$\bar{\lambda}\int_{0}^{\infty}[\delta(s - y) - \delta(s)]dF(y) + (\bar{r}s + \bar{c})\delta'(s) = \frac{1}{2}\frac{[\delta'(s)]^2}{\delta''(s)} \qquad (21)$$

فرض می‌کنیم که $H(y) = 1 - F(y)$ با استفاده از انتگرال گیری به روش جزء به جزء داریم:

$$\int_{0}^{\infty}[\delta(s - y) - \delta(s)]dF(y) = \int_{0}^{\infty}H(y)\, d\,\delta(s - y)$$

$$= -\delta(0)H(s) - \int_{0}^{s}H(y)\,\delta'(s - y)dy \qquad (22)$$

بنابراین معادله (۲۱) به صورت زیر است:

$$-\bar{\lambda}\delta(0)H(s)-\bar{\lambda}\int_{0}^{s}\delta'(s-y)H(y)dy+(\bar{r}s+\bar{c})\delta'(s)=\frac{1}{2}\frac{[\delta'(s)]^2}{\delta''(s)} \qquad (23)$$

با توجه به شرط اولیهٔ $\bar{\lambda}\delta(0) = \bar{c}$ و قرار دادن $u(s) = \delta'(s)$ در (۲۳) داریم:

$$-\bar{\lambda}\int^{s}u(s-y)H(y)dy+(\bar{r}s+\bar{c})u(s)-\bar{c}H(s)=\frac{1}{2}\frac{[u(s)]^2}{u'(s)} \qquad (24)$$

۵-۱. توزیع اندازه خسارت نمایی

فرض می‌کنیم که $f(y) = ke^{-ky}$ درنتیجه $F(y) = 1 - e^{-ky}$ و $H(y) = e^{-ky}$. با فرض $\upsilon(y) = u(y)e^{ky}$ داریم:

$$\upsilon'(y) = u'(y)e^{ky} + k\upsilon(y), \qquad \frac{\upsilon'(y) - k\upsilon(y)}{\upsilon(y)} = \frac{u'(y)}{u(y)} \qquad (25)$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلهٔ (٢٤) داریم:

$$-\bar{\lambda}\int_{0}^{s}\upsilon(y)dy+(\bar{r}s+\bar{c})\upsilon(s)-\bar{c}=\frac{1}{2}\frac{[\upsilon(s)]^{2}}{\upsilon'(s)-k\upsilon(s)} \qquad (۲۶)$$

با فرض $\omega(s)=[\upsilon(s)/(k\upsilon(s)-\upsilon'(s))]^{2}$. چون $u'(y)=\delta''(s)<0$ و $u(y)=\delta'(y)>0$ در نتیجه $\upsilon'(y)=u'(y)e^{ky}+k\upsilon(y)<k\upsilon(y)$ پس:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega(s)}}=\frac{k\upsilon(s)-\upsilon'(s)}{\upsilon(s)}=k-\frac{\upsilon'(s)}{\upsilon(s)} \qquad (۲۷)$$

معادلهٔ (۲۶) را به صورت زیر می نویسیم.

$$-\bar{\lambda}\int_{0}^{s}\upsilon(y)dy+(\bar{r}s+\bar{c})\upsilon(s)-\bar{c}=-\frac{1}{2}\upsilon(s)\sqrt{\omega(s)} \qquad (۲۸)$$

با دیفرانسیل گیری از دوطرف رابطهٔ (۲۸) و تقسیم طرفین بر $\upsilon(s)$ داریم:

$$(-\bar{\lambda}+\bar{r})+(\bar{r}s+\bar{c})\frac{\upsilon'(s)}{\upsilon(s)}=-\frac{1}{2}\frac{\upsilon'(s)}{\upsilon(s)}\sqrt{\omega(s)}-\frac{\omega'(s)}{4\sqrt{\omega(s)}} \qquad (۲۹)$$

با استفاده از معادلهٔ(۲۷) داریم:

$$\omega'(s)=-2k\omega(s)-4[(-\bar{\lambda}+\bar{r})+k(\bar{r}s+\bar{c})-\frac{1}{2}]\sqrt{\omega(s)}+4(\bar{r}s+\bar{c}) \qquad (۳۰)$$

که معادله (۳۰) یک معادلهٔدیفرانسیل عادی غیر خطی است.

اکنون شرط اولیهٔ مورد نیاز را برای معادلهٔ بالا به دست می آوریم. چون

$$\sqrt{\omega(s)}=\frac{\upsilon(s)}{k\upsilon(s)-\upsilon'(s)}=-\frac{u(s)}{u'(s)}=-\frac{\delta'(s)}{\delta''(s)}=\frac{\sigma^{2}}{\mu-r}A^{*}(s) \qquad (۳۱)$$

داریم:

$$\omega(0)=0 \qquad (۳۲)$$

معادلهٔ دیفرانسیل عادی غیر خطی (۳۰) را به روش تفاضل- متناهی حل می‌کنیم. (Fausett, 1999). فرض می‌کنیم h طول بازهٔ در نظر گرفته شده باشد. $\omega(nh)$ را با ω_n نشان می‌دهیم. معادله(۳۰) را به صورت زیر گسسته سازی می کنیم.

$$\omega_{n+1} = \omega_n + h\{-2k\,\omega_n -4[(-\bar{\lambda}+\bar{r})+ k(\bar{r}nh+\bar{c})-\frac{1}{2}]\sqrt{\omega(s)}+4(\bar{r}nh+\bar{c}) \qquad (۳۳)$$

به وسیلهٔ این فرمول بازگشتی و شرط اولیه، حل عددی $\omega(s)$ به دست می‌آید. $A^*(s)$ با استفاده از رابطهٔ (۳۱) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A^*(s) = \frac{\mu - r}{\sigma^۲}\sqrt{\omega(s)} \qquad (۳۴)$$

بعد از محاسبهٔ استراتژی بهینهٔ $A^*(s)$، $\delta(s)$ نیز می تواند از معادلهٔ (٢٤) به دست آید. معادلهٔ (٢٤) در حالت نمایی به صورت زیر است:

$$\bar{\lambda}\int_{\circ}^{s}\delta(y)e^{k(y-s)}\,dy - \bar{\lambda}\delta(s) + (\bar{r}s+\bar{c})\delta'(s) = -\frac{۱}{۲}\delta'(s)\sqrt{\omega(s)} \qquad (۳۵)$$

فرض می‌کنیم که $g(s) = \int_{\circ}^{s}\delta(y)e^{k(y-s)}\,dy$ به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{\lambda}g(s) - \bar{\lambda}\delta(s) + (\bar{r}s+\bar{c})\delta'(s) = -\frac{۱}{۲}\delta'(s)\sqrt{\omega(s)},$$

$$g'(s) = -k\int_{\circ}^{s}\delta(y)e^{k(y-s)}\,dy + \delta(s) = -kg(s)+\delta(s), \qquad (۳۶)$$

با شرط اولیه:

$$g(\circ)=\circ \qquad (۳۷)$$

باگسسته سازی دستگاه معادلات دیفرانسیل (٣٦) و (۳۷) و با فرض $\delta_n=\delta(nh)$ و $g_n=g(nh)$ به دست می‌آوریم:

$$\bar{\lambda} g_n - \bar{\lambda}\delta_n + (\bar{r}\, n\, h + \bar{c})\frac{[\delta_{n+1} - \delta_n]}{h} = -\frac{1}{2}\frac{[\delta_{n+1} - \delta_n]}{h}\sqrt{\omega_n} \qquad (38)$$

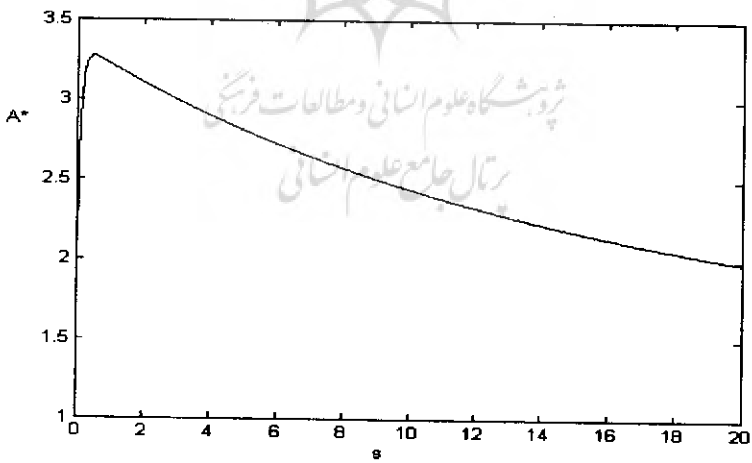
$$\delta_{n+1} = \frac{[\bar{r}(n+1)h + \bar{c} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_n}]\delta_n - \bar{\lambda} h(g_n - \delta_n)}{\bar{r}\, n\, h + \bar{c} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_n}} \qquad (39)$$

$$g_{n+1} = g_n + h(-kg_n + \delta_n). \qquad (40)$$

با این معادلات و شرط های اولیه، مقدار عددی $\delta(s)$ محاسبه می شود. سرانجام برای تامین $\delta(\infty) = 1$، $\delta(s)$ را در یک ثابت مناسب ضرب می کنیم.

مثال۱: فرض می‌کنیم که $\lambda = 3$، $\theta = 0/2$، $\mu = 0/1$، $r = 0/04$، $\sigma = 0/3$، $k = 1$ و $h = 0/01$ باشد، پس $c = (1+\theta)\lambda E(Y) = 1/2(3\times 1) = 3/6$. نتیجه در نمودار۱ نشان داده شده است.

نمودار۱. استراتژی سرمایه گذاری بهینه برای توزیع نمایی



می‌توان دید که وقتی که مازاد کوچک است (در اینجا کوچک‌تر از ۳) بیمه‌گر بیشتر مازادش را در دارایی با مخاطره سرمایه‌گذاری خواهد کرد. این امر می‌تواند با استقراض با نرخ تضمینی انجام پذیرد (با استقراض از طریق انتشار اوراق قرضه با نرخ

بهرهٔ تضمینی با این فرض که هیچ تفاوتی بین نرخ‌های بهرهٔ وام گیری و وام دهی وجود ندارد). این به معنای کسب بازده بیشتر بیمه‌گر، با وجود قبول ریسک بیشتر، برای پیشگیری از ورشکستگی است. با وجود این، وقتی که مازاد بیمه‌گر افزایش می‌یابد، مقدار سرمایه‌گذاری شده در دارایی با مخاطره در سبد سرمایه‌گذاری بیمه‌گر کاهش می‌یابد. مازاد بزرگ‌تر، مخاطرهٔ ور شکستگی فوری را کاهش می‌دهد و شرکت می‌تواند وقوع چندین خسارت را بدون نزدیک شدن به ورشکستگی تحمل کند. بنابراین بیمه‌گر بهتر است که برای مینیمم کردن زیان‌ها به دلیل نوسان‌پذیری قیمت سهام، اوراق قرضهٔ بدون مخاطره بخرد، تا این که سهام داشته باشد. توزیع نمایی از توزیع‌های دم سبک است که احتمال پیشامد با مقادیر بزرگ در این حالت‌ها خیلی کم است. برای بررسی‌کردن توزیع اندازه خسارت‌ها به‌طور جامع‌تر نیاز است که توزیع‌های دم سنگین نیز مطالعه شود.

۵-۲. توزیع اندازه خسارت پارتو

در این بخش دربارهٔ توزیع پارتو از توزیع‌های دم سنگین بحث می‌کنیم. رخداد پیشامدهای اکسترمم که یک شکل مهم از خسارت‌ها در دنیای واقعی هستند، از این توزیع پیروی می‌کنند. در این حالت روش‌های به کار گرفته شده در حالت نمایی برای تبدیل معادله دیفرانسیل انتگرلی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی نمی‌تواند به طور مستقیم به کار برده شود، زیرا تابع توزیع پارتو یک تابع نمایی نیست.

تابع چگالی توزیع پارتو به صورت $f(x)=[\alpha\beta^{\alpha}/(x+\beta)^{\alpha+1}],\ \alpha,\beta>0$ است. در نتیجه $F(x)=1-(\beta/(x+\beta))^{\alpha}$ و $H(x)=(\beta/(x+\beta))^{\alpha}$. با جایگذاری این مقادیر در معادلهٔ (۲٤) داریم:

$$-\bar{\lambda}\int_{0}^{s}u(s-y)\left(\frac{\beta}{y+\beta}\right)^{\alpha}dy+(\bar{r}s+\bar{c})u(s)-\bar{c}\left(\frac{\beta}{y+\beta}\right)^{\alpha}=-\frac{1}{2}\frac{[u(s)]^{2}}{u'(s)} \qquad (41)$$

اگر بخواهیم این معادله را به طور مستقیم از طریق گسسته سازی حل کنیم، الگوریتم

به دست آمده پایا نیست. تلاش می‌کنیم که با تفاضلی کردن معادله نسبت به s آن را مانا کنیم. در نتیجه:

$$\frac{1}{2}u(s)-\frac{1}{4}u(s)\frac{\omega'(s)}{\sqrt{\omega(s)}}=-\bar{\lambda}\int_0^s u'(s-y)(\frac{\beta}{y+\beta})^{\alpha}dy-\bar{\lambda}(\frac{\beta}{y+\beta})^{\alpha}$$
$$+(\bar{r}s+\bar{c})u'(s)+\bar{r}u(s)+\bar{c}\alpha\frac{\beta^{\alpha}}{(s+\beta)^{\alpha+1}}$$

که $\omega(s)=[\upsilon(s)/(k\upsilon(s)-\upsilon'(s))]^2$. طرفین تساوی را بر $u'(s)$ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\omega'(s)=4[-\bar{\lambda}\int_0^s\frac{1}{\sqrt{\omega(s-y)}}\frac{u(s-y)}{u(s)}(\frac{\beta}{y+\beta})^{\alpha}dy+\bar{\lambda}(\frac{\beta}{s+\beta})^{\alpha}\frac{1}{u(s)}$$
$$-\bar{c}\alpha\frac{\beta^{\alpha}}{(s+\beta)^{\alpha+1}}\frac{1}{u(s)}-\bar{r}+\frac{1}{2}]\times\sqrt{\omega(s)}+4(\bar{r}s+\bar{c}) \qquad (42)$$

فرض می‌کنیم:

$$m(s)=\int_0^s\frac{1}{\sqrt{\omega(s-y)}}\frac{u(s-y)}{u(s)}(\frac{\beta}{y+\beta})^{\alpha}dy \qquad (43)$$

در نتیجه:

$$\omega'(s)=4[-\bar{\lambda}m(s)+\bar{\lambda}(\frac{\beta}{y+\beta})^{\alpha}\frac{1}{u(s)}-\bar{c}\alpha\frac{\beta^{\alpha}}{(s+\beta)^{\alpha+1}}\frac{1}{u(s)}-\bar{r}+\frac{1}{2}]\sqrt{\omega(s)}+4(\bar{r}s+\bar{c})$$

(۴۴)

به همراه معادلهٔ

$$\sqrt{\omega(s)}=-[u(s)/u'(s)]$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل برای توابع $u(s)$، $\omega(s)$ و $m(s)$ خواهیم داشت.

حال با گسسته سازی این دستگاه معادلات را به روش عددی حل می‌کنیم. تعریف می‌کنیم: $m_n=m(nh)$، $u_n=(nh)$ و $\omega_n=\omega(nh)$. در نتیجه داریم:

$$\omega_{n+1} = \omega_n + ۴h[-\bar{\lambda}m_n + \bar{\lambda}(\frac{\beta}{y+\beta})^{\alpha}\frac{۱}{u_n} - \bar{c}\alpha\frac{\beta^{\alpha}}{(nh+\beta)^{\alpha+۱}}\frac{۱}{u_n} - \bar{r} + \frac{۱}{۲}]\sqrt{\omega_n} + ۴h(\bar{r}nh + \bar{c}). \quad (۴۵)$$

$$m_n = \int^{nh}\frac{۱}{\sqrt{\omega(nh)-y)}}\frac{u(nh-y)}{u_n}(\frac{\beta}{y+\beta})^{\alpha}dy \approx \sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{\omega_{n-i}}}\frac{u_{n-i}}{u_n}(\frac{\beta}{ih+\beta})^{\alpha}h. \quad (۴۶)$$

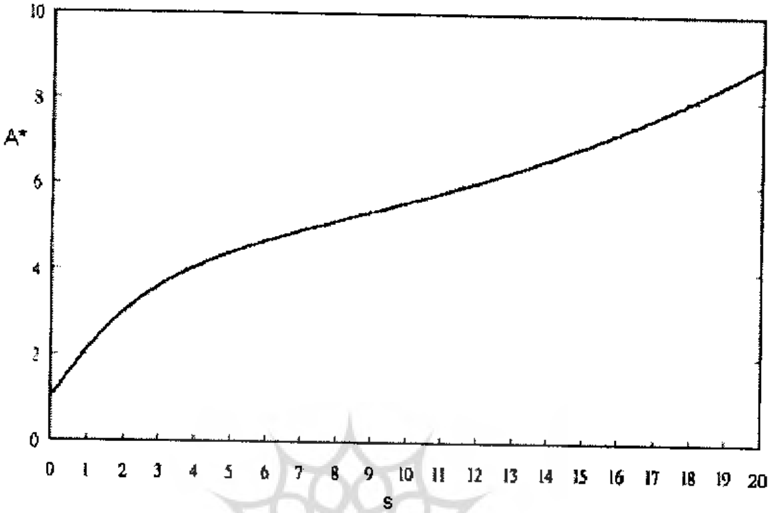
$$\frac{۱}{\sqrt{\omega_n}} = -\frac{u_{n+۱}-u_n}{hu_n}, \quad u_{n+۱} = u_n[۱-\frac{h}{\sqrt{\omega_n}}]. \quad (۴۷)$$

برای تعیین استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه $A^*_n = ((\mu-r)/\sigma^۲)\sqrt{\omega_n}$ به کار می‌بریم و برای تعیین $\delta(s)$، از رابطهٔ $\delta(s) = \int_{.}^{s}u(y)dy$ یا $\delta_n \approx \sum_{i=۱}^{n}u_i$ استفاده می‌کنیم.

مثال۲: فرض می‌کنیم $\lambda = ۳$، $\theta = ۰/۲$، $\mu = ۰/۱$، $r = ۰/۰۴$، $\sigma = ۰/۳$، $\alpha = ۳$، $\beta = ۲$ و $h = ۰/۰۱$ باشد، پس $c = (۱+\theta)\lambda E(Y) = ۱/۲(۳\times\frac{۲}{(۳-۱)}) = ۳/۶$ استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه در نمودار ۲ نشان داده شده است.

وقتی که توزیع اندازه خسارت پارتو باشد، برخلاف حالت نمایی استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه هنگامی که سرمایهٔ اولیه زیاد است، سرمایه‌گذاری بیشتر در سهام انجام می‌شود. به علت دم سنگین بودن توزیع پارتو نمی‌توان پذیرفت که مازاد اولیه برای جبران خسارات کافی خواهد بود حتی وقتی که مازاد اولیه نسبتاً زیاد باشد.

نمودار۲. استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه برای توزیع پارتو



٦. سرمایه‌گذاری بهینه برای بیمه‌گر شخص ثالث

با بررسی انجام گرفته در مورد اطلاعات مربوط به رشته بیمه شخص ثالث در یکی از شعب بیمه ایران تعداد ادعاها با فرآیند پواسن با نرخ $\lambda = ۷/۵۸$ به دست آمده است و ادعاها، توزیع نمایی با میانگین $k = E(Y_1) = ۰/۵۹$ دارند (امانی، ۱۳۷۹). حال باتوجه به رابطهٔ $c = (۱+\theta)\lambda k$ ورابطهٔ٤،مقادیر c به ازای مقادیرمختلف θ درجدول۱آمده است.

جدول ۱. مقادیر c به ازای مقادیر مختلف θ

θ	c
۱٪	٤/٥١٦٩٢٢
۲/٥٪	٤/٥٨٤٠٠٥
٥٪	٤/٦٩٥٨١

۶-۱.محاسبه استراتژی سرمایه گذاری بهینه[۱]

باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده‌برای پارامترهای مدل و با استفاده ازفرمول(۳۴)، داریم:

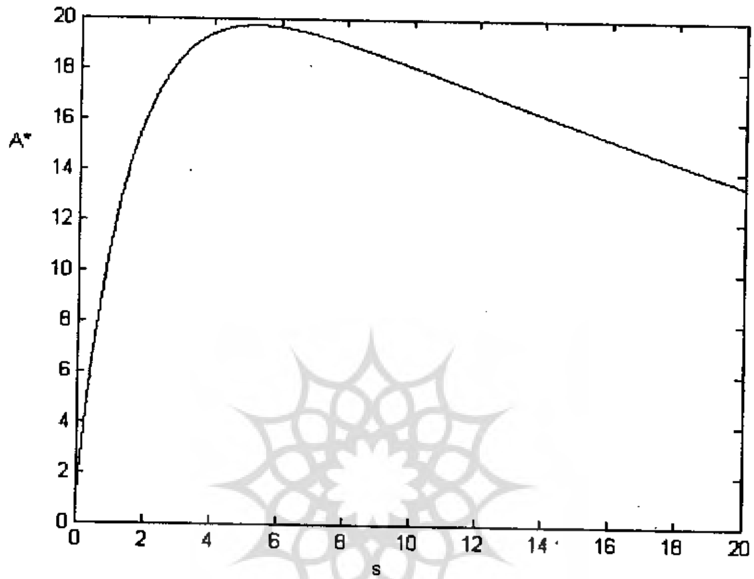
$$A^{*}(s) = \frac{\mu - r}{\sigma^{2}}\sqrt{\omega(s)}$$

حال داریم: $k = ۰/۵۹$، $\lambda = ۷/۵۸$، $\theta = ۰/۰۱$، $c = ۴/۵۱۶۹۲۲$. به دلیل کارا نبودن بازار سهام در ایران (سهام را یک دارایی با مخاطره در سبد سرمایه‌گذاری بیمه‌گر در نظر می‌گیریم) پارامترهای مدل رفتار قیمت سهام را به طور فرضی در یک دامنه منطقی در نظر می‌گیریم.[۲] حال فرض می‌کنیم $r = ۰/۲۲$ یا $r = ۰$، $\mu = ۱$، $\sigma = ۱$ و $h = ۰/۰۱$ باشد. مقدار استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه برای مقادیر مختلف مازاد اولیه در نمودارهای۳ و ۴ نشان داده‌شده‌است. با توجه به نمودار ۳، وقتی مازاد کوچک است (دراینجا کوچک‌تر از ۶) بیمه‌گر بیشتر مازادش را در دارایی با مخاطره سرمایه‌گذاری خواهد کرد. با وجود این، وقتی که مازاد بیمه‌گر افزایش می‌یابد، مقدار سرمایه‌گذاری شده در دارایی با مخاطره در سبد سرمایه‌گذاری وی کاهش می‌یابد. مازاد بزرگ‌تر مخاطرهٔ ورشکستگی فوری را کاهش می‌دهد و شرکت می‌تواند وقوع چندین خسارت را بدون نزدیک شدن به ورشکستگی تحمل کند. بنابراین بیمه‌گر بهتر است که برای مینیمم کردن زیان ها به دلیل نوسان پذیری قیمت سهام، اوراق قرضهٔ بدون مخاطره بخرد تا این که سهام داشته باشد.

۱. برای محاسبات از نرم افزار Matlab استفاده شده است.

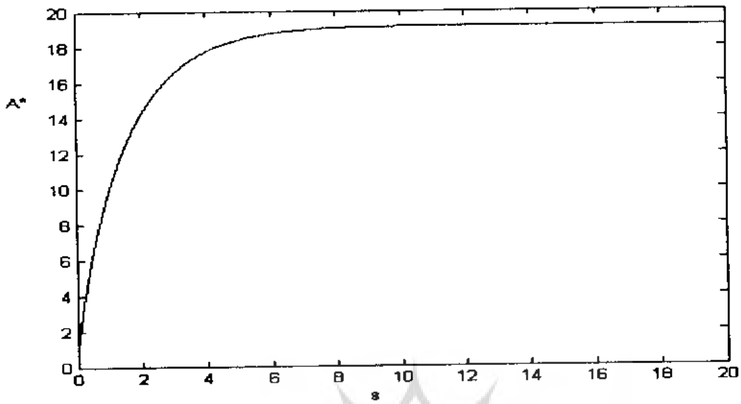
۲. برای مطالعهٔ چگونگی محاسبهٔ این پارامترها در صورت کارا بودن بازار سهام، نگاه کنید به: شکری فشتالی، ۱۳۸۴.

نمودار۳. استراتژی‌سرمایه‌گذاری بهینه تحت مدل کلاسیک برای بیمه‌گر بادو فرصت سرمایه‌گذاری (یک دارایی با مخاطره و یک دارایی بدون مخاطره)



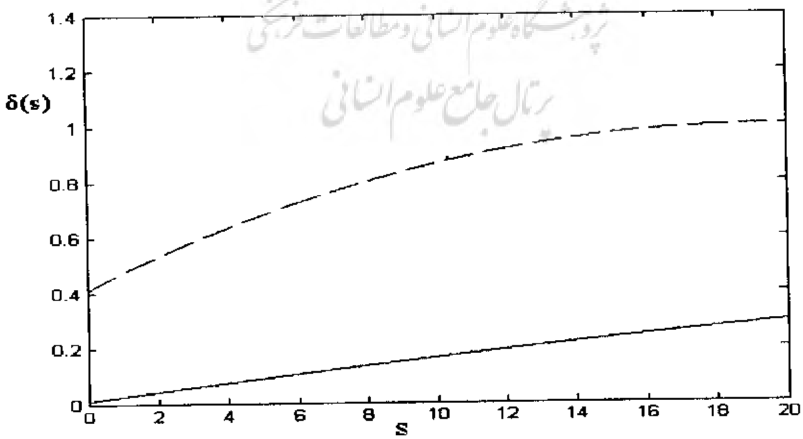
از نمودار٤ واضح است که وقتی که نرخ بهره افزایش می‌یابد سرمایه‌گذاری در سهام کاهش می‌یابد و برعکس. این نتیجه شهودی به نظر می‌رسد. با ثابت نگهداشتن نوسان پذیری قیمت سهام و بازده سهام، بیمه گر دارایی با نرخ بهرهٔ بزرگ‌تر، برای بقا نیاز ندارد به مقدار زیاد در بازار سهام سرمایه‌گذاری کند. زیرا وی می‌تواند بازده بیشتری در بازار دارایی بدون مخاطره به دست آورد. اگر نرخ بهره کاهش یابد در قابل بیمه‌گر ترجیح می‌دهد که بیشتر در سهام سرمایه‌گذاری کند.

نمودار ٤. استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه تحت مدل کلاسیک برای بیمه‌گر با یک فرصت سرمایه‌گذاری ($r = o$)



نمودار ٥ احتمالات بقا را قبل و بعد از سرمایه‌گذاری نشان می‌دهد که احتمال بقا قبل از سرمایه‌گذاری از رابطه ٦ و احتمال بقا بعد از سرمایه گذاری از دستگاه معادلات ۳۹ و ٤۰ به دست آمده است.

نمودار ٥. احتمالات بقا قبل و بعد از سرمایه‌گذاری(خط پیوسته احتمال بقا قبل از سرمایه‌گذاری و خط چین احتمال بقا بعد از سرمایه‌گذاری)



۷. نتیجه‌گیری

۱. با توجه به این که در دنیای کنونی یکی از زیر بخش‌های اساسی اقتصاد هر جامعه‌ای را شرکت‌های بیمه تشکیل می‌دهند و براساس توان بالقوه این شرکت‌ها برای سرمایه‌گذاری، مهندسی مالی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری شرکت‌های بیمه بسیار مهم است.

۲. نتایج به دست آمده در این مقاله نشان می‌دهد که تئوری کنترل تصادفی یک ابزار بسیار سودمند در مدیریت دینامیک مخاطره بیمه‌گر است.

۳. وقتی که مدل مخاطره بیمه گر از یک مدل مخاطره کلاسیک پیروی می‌کند و توزیع اندازه خسارت در این مدل یک توزیع دم سبک است با مازاد اولیه صفر بیمه‌گر باید به طور کامل در دارایی بدون مخاطره سرمایه گذاری کند و اگر در دارایی با مخاطره سرمایه‌گذاری کند، به ورشکستگی وی منجر خواهد شد.

٤. در حالتی که مخاطره بیمه گر از یک مدل مخاطره کلاسیک پیروی می کند و سبد سرمایه‌گذاری وی شامل یک دارایی با مخاطره است، استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه تابعی از مازاد اولیه بیمه‌گر است.

٥. بررسی متغیرهای کنترل دیگر از جمله بیمه اتکایی، حق بیمه و غیره در حوزه بیمه با هدف مینیمم کردن احتمال ورشکستگی.

٦. انتخاب تابع مطلوبیت به عنوان تابع هدف.

۷. بررسی رفتار حدی تابع هدف و استراتژی های سرمایه گذاری.

۸. بررسی مسائل کنترل بحث شده در این مقاله تحت مدل های مخاطره دیگر برای مخاطره بیمه‌گر از جمله مدل اسپار اندرسون و مدل مخاطره شامل نرخ بهره.

۹. در نظر گرفتن همزمان دو متغیر کنترل برای مینیمم کردن ورشکستگی بیمه گر و تعیین کنترل های بهینه در این حالت(مانند سرمایه گذاری و بیمه اتکایی).

۱۰. بهینه سازی سبد سرمایه گذاری بیمه گر در زمان گسسته.

پیوست ۱.اثبات معادله بولمان

فرض می‌کنیم که $\delta^{A}(s)$ احتمال بقای متناظر با استراتژی دلخواه $A = \{A(t) : t \geq 0\}$ باشد. اگر A^{*} استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه باشد، تابع احتمال بقای متناظر با آن ماکزیمم است، یعنی:

$$\delta^{A^{*}}(s) \geq \delta^{A}(s).$$

برای سادگی در نوشتن قرار می‌دهیم $\delta^{A^{*}}(s) = \delta(s)$. همچنین فرض می‌کنیم که $\delta(s)$ دیفرانسیل پذیر مرتبهٔ دوم روی بازهٔ $(0,\infty)$ باشد. فرآیند $X(t)$ را هنگامی که، مقدار $A(t)$ در دارایی با مخاطره و مقدار $X(t) - A(t)$ در دارایی بدون مخاطره سرمایه‌گذاری شده‌اند، روی بازهٔ بی‌نهایت کوچک $[0,dt]$ در نظر می‌گیریم. فرآیند مازاد بیمه‌گر دارای دینامیک زیر است:

۱. خسارت Y با احتمال $\lambda dt + o(dt)$ در بازهٔ مفروض اتفاق می‌افتد و با احتمال $1 - \lambda dt + o(dt)$ هیچ خسارتی رخ نمی‌دهد.

۲. مقدار cdt به عنوان درآمد حق بیمه دریافت می‌شود.

۳. مقدار $A(t)[\mu dt + \sigma dB(t)]$ به‌عنوان درآمد سرمایه‌گذاری در دارایی با مخاطره دریافت می‌شود.

۴. مقدار $[X(t) - A(t)]rdt$ به عنوان درآمد سرمایه‌گذاری در دارایی بدون مخاطره دریافت می‌شود.

دوحالت مجزا درطول بازهٔ $[0,dt]$ درنظرگرفته شد: هیچ خسارتی رخ ندهدیا فقط یک خسارت اتفاق افتد. اگر هیچ خسارتی در بازهٔ مفروض رخ ندهد، مازاد شرکت با آهنگ $s + cdt + A(t)[\mu dt + \sigma dB(t)] + [X(t) - A(t)]rdt$ رشد می‌کند و احتمال بقا دراین‌حالت $\delta[s + cdt + A(t)(\mu dt + \sigma dB(t)) + (X(t) - A(t))rdt]$ است. حال اگر یک خسارت رخ دهد (خسارت Y با فرض $Y < s$) مازاد شرکت به مقدار $s - Y$

کاهش می‌یابد و احتمال بقا در این حالت $\delta(s-Y)$ است. با توجه به حالت‌های در نظر گرفته شده احتمال بقای مورد انتظار تحت استراتژی $A(t)$ عبارت است از:

$$\delta^A(s) = \lambda dt E[\delta(s-Y)] + (1-\lambda dt)E[\delta(s + cdt + A_t\mu dt + A_t\sigma dB_t + (X_t - A_t)rdt]$$

عبارت اول در سمت راست احتمال بقای مورد انتظار وقتی که یک خسارت رخ دهد، و عبارت دوم احتمال بقای مورد انتظار وقتی که هیچ خسارتی رخ ندهد، است. از این که $\delta(s) \geq \delta^A(s)$ داریم:

$$\delta(s) \geq \lambda dt E[\delta(s-Y)] + (1-\lambda dt)E[\delta(s + cdt + A_t\mu dt + A_t\sigma dB_t + (X_t - A_t)rdt]$$

یا به طور معادل داریم:

$$0 \geq \frac{1}{dt}E[\delta(s + cdt + A_t\mu dt + A_t\sigma dB_t + (X_t - A_t)rdt) - \delta(s)] + \lambda E[\delta(s-Y)] - \lambda E[\delta(s + cdt + A_t\mu dt + A_t\sigma dB_t + (X_t - A_t)rdt)]$$

فرض می‌کنیم که $dV(t) = cdt + A_t\mu dt + A_t\sigma dB_t + (X_t - A_t)rdt$. داریم:

$$0 \geq \frac{1}{dt}E[d\delta(V(t))] + \lambda E[\delta(s-Y)] - \lambda E[\delta(s + dV(t))] \qquad (۴۸)$$

که فرآیند $V(t)$ را می توان به عنوان فرآیند درآمد شرکت بیمه تعبیر کرد. به علاوه رابطهٔ $V(t)$ و $X^A(t)$ به صورت زیر است:

$$dX^A(t) = dV(t) - dS(t), \quad X(0) = V(0) = s$$

با استفاده از فرمول ایتو از حساب تصادفی داریم (Fleming, 1975):

$$d\delta(V(t)) = [(c + \mu A_t + (X_t - A_t)r)\delta'(V(t)) + \frac{1}{2}A_t^2\sigma^2\delta''(V(t))]dt + A_t\sigma\delta'(V(t))dB_t$$

بنابراین

$$E[d\delta(V(t))] = [(c + \mu A_t + (X_t - A_t)r)\delta'(V(t)) + \frac{1}{2}A_t^2\sigma^2\delta''(V(t))]dt$$
$$+ A_t\sigma\delta'(V(t))E[dB_t]$$

با توجه به مارتینگل بودن B_t داریم $E[dB_t] = 0$. در نتیجه:

$$E[d\delta(V(t))]=[(c+\mu A_t +(X_t - A_t)r)\delta'(V(t))+\frac{1}{2}A_t^2\sigma^2\delta''(V(t))]dt$$

با جایگذاری در نامساوی (۴۸) خواهیم داشت:

$$0 \geq (c+\mu A_t + (X_t - A_t)r)\delta'(V(t)) + \frac{1}{2}A_t^2\sigma^2\delta''(V(t)) + \lambda E[\delta(s-Y)]$$
$$-\lambda E[\delta(s+dV(t))]$$

وقتی که $dt \to 0$ داریم:

$$0 \geq \frac{1}{2}A_t^2\sigma^2\delta''(V(t)) + (c+\mu A_t + (X_t - A_t)r)\delta'(V(t)) + \lambda E[\delta(s-Y) - \delta(s)]$$

نامساوی بالا برای تمام A_t ها برقرار است. حال اگر A_t بهینه باشد، احتمال بقای متناظر با آن یعنی $\delta^A(s)$ باید به $\delta(s)$ نزدیک شود و به طور شهودی مساوی نتیجه می‌شود. حال اگر قرار دهیم $X(t) = V(t) = s$ و $A_t = A$ معادله زیر را خواهیم داشت که همان معادلهٔ بولمان مسئله کنترل توصیف شده است با شرط‌های مرزی $\delta(s) = 0$ برای $s < 0$ و $\delta(\infty) = 1$.

$$\max_A \{\lambda E[\delta(s-Y)-\delta(s)]+[c+(\mu-r)A+rs]\delta'(s)+\frac{1}{2}\sigma^2 A^2\delta''(s)\} = 0$$

پیوست ۲.مقدمه‌ای بر نظریه کنترل بهینه و کاربرد آن در بیمه

امروزه از نظریه کنترل‌بهینه علاوه بر گرایش‌های مختلف مهندسی، در برنامه‌ریزی و سیاست‌گذاری اقتصادی نیز به مقیاس وسیعی استفاده می‌شود. ما نیز از این نظریه برای بهینه سازی سبد سرمایه‌گذاری شرکت‌های بیمه استفاده می‌کنیم. به طور کلی روش برخورد نظریه کنترل بهینه با مسائل را می توان به سه مرحله تقسیم کرد:

۲-۱. مدل‌سازی: که در این مرحله تعریف تابع هدف، محدودیت ها و مدل ریاضی سیستمی که باید کنترل شود، صورت می‌گیرد.

۲-۲. انتخاب مسئله: در این مرحله انتخاب متغیرهای سیاست‌گذاری، اعم از متغیرهای حالت و کنترل، صورت می‌پذیرد.

۲-۳. حل وتجزیه تحلیل: در این مرحله تصمیم بهینه (کنترل بهینه) در حالت ایستا یا پویا با استفاده از روش‌های ارائه شده در نظریهٔ کنترل بهینه به دست می‌آید.

مدل‌بندی مازاد بیمه‌گر و رفتار قیمت دارایی با مخاطره (سهام) و یا بدون مخاطره شامل مدل‌بندی نوفه در معادلات دیفرانسیل است که به پدید آمدن انتگرال تصادفی (ایتو) و معادلات دیفرانسیل تصادفی منجر می‌شود.

به دلیل بررسی مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری بیمه‌گر در زمان پیوسته در مدل‌سازی برای انتخاب کنترل بهینه با معادلات دیفرانسیل رو به رو خواهیم شد که شامل نوفه نیز هست. مفاهیم زیر چگونگی کاربرد حساب تصادفی در نظریهٔ کنترل بهینه را آشکارتر می‌کند.

دینامیک

بسیاری از مسائل با ارزش در علوم مهندسی، علوم فزیکی و علوم اجتماعی، وقتی به زبان ریاضی بیان می شوند، نیاز به تعیین تابعی دارند که در یک معادله شامل یک و یا چند مشتق از مشتقات تابع مجهول، صدق کنند. چنین معادلاتی معادلات دیفرانسیل

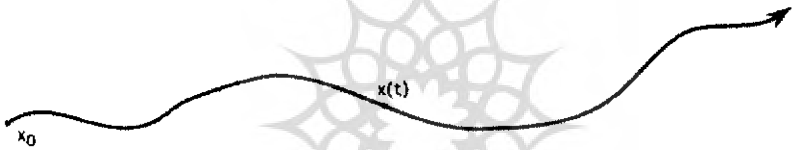
نامیده می شوند. تحلیل سیستم های دینامیکی اغلب به معادلات دیفرانسیل عادی به فرم زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(X(t)) & (t > 0) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

که $x_0 \in R$ و $f: R \to R$.

خم جواب $X(\cdot):[0,\infty) \to R$ که آن را به تکامل دینامیکی حالت سیستم (یا مسیر) تفسیر می‌کنیم، نا معلوم و $X(t)$ حالت سیستم در زمان t است.

نمودار ٦. منحنی مسیر حرکت معادله دیفرانسیل عادی[1]



دینامیک کنترل شده[2]

تعمیمی از مسئلهٔ بالا به این‌صورت است که فرض کنیم f به توابع کنترلی متعلق به مجموعهٔ A نیز وابسته باشد. بنابراین در اینجا داریم $f: R \times A \to R$؛ پس اگر مقدار $A \in A$ را انتخاب کنیم و دینامیک متناظر با آن را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(X(t), A) & (t > 0) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

1. Ordinary Differential Equation (ODE)
2. Controlled Dynamics

معادلات فوق تکامل سیستم را وقتی که تابع کنترل مقدار ثابت A است به دست می‌دهد. البته می‌توان مقدار این پارامتر را تغییر داد. برای مثال، فرض کنید تابع $A:[0,\infty) \to A$ را به صورت زیر

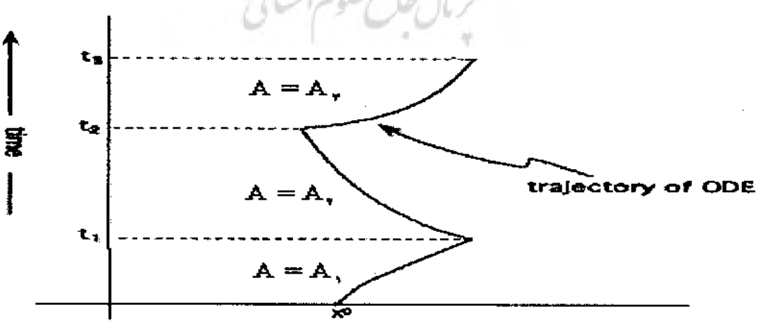
$$A_t = \begin{cases} A_1 & 0 \le t \le t_1 \\ A_2 & t_1 < t \le t_2 \\ A_3 & t_2 < t \le t_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

برای زمان‌های $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ و مقادیر کنترل $A_1, A_2, A_3, \dots \in A$ تعریف کنیم. سپس معادلهٔ دینامیکی زیر را عرضه کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(X(t), A(t)) & (t > 0) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

نمودار ۲ نتیجهٔ چنین تکامل سیستم را نشان می‌دهد. وقتی که تابع کنترل را تغییر می‌دهیم، سیستم ممکن است رفتار کاملاً متفاوتی داشته باشد.

نمودار ۷. دینامیک کنترل شده



در بسیاری از کاربردها، خم‌های اندازه‌گیری شدهٔ سیستم‌های دینامیکی مدل‌بندی شده به وسیلهٔ معادلات دیفرانسیل عادی، از طریق آزمایش، به صورت پیش‌بینی شده حرکت نمی‌کنند. از این رو تغییر دادن معادلات دیفرانسیل عادی به طریقی که اغتشاش اثرهای تصادفی ممکن سیستم رادربرگیرد، منطقی به نظر می‌رسد. یک روش برای این منظور نوشتن معادلهٔ دیفرانسیل عادی قبل به شکل زیراست:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(X(t)) + g(X_t)W_t \\ X(\circ) = x_\circ, \end{cases}$$

که $g: R \to R$ و "نوفه سفید"۱- بعدی =: $W(\cdot)$.

تحلیل سیستم های دینامیکی تصادفی اغلب به معادلات دیفرانسیل به فرم بالا منجر می‌شود که معدلات دیفرانسیل تصادفی نام دارند.

نمودار ۸ مسیر نمونه‌ای معادله دیفرانسیل تصادفی

و هنگامی که f, g به توابع کنترل وابسته هستند، این معادلات را به فرم زیر داریم که به فرآیند $X(t)$ که در معادلات زیر صدق کند فرآیند کنترل شده می گویند.

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f(X(t), A(t)) + g(X(t), A(t))W_t \\ X(\circ) = x_\circ, \end{cases}$$

به‌طورکلی،تابع $A: [\circ, \infty) \to A$ را تابع‌کنترل می‌نامیم و تعریف می‌کنیم:

$$U = \{ A: [\circ, \infty) \to A \mid A(\circ) \text{ measurable} \}$$

که مجموعهٔ همه کنترل های مجاز می‌باشد.

مدلی برای رفتار قیمت‌های سهام

در این بخش از فرآیند تصادفی با زمان پیوسته برای مدل‌بندی رفتار قیمت‌های سهام استفاده می‌کنیم. در یک وضعیت مالی پیچیده، نرخ بهره ممکن است تابعی از زمان یا یک فرآیند تصادفی باشد. در این حالت تحلیل مدل قیمت سهام خیلی پیچیده است. در سرتاسر این بحث فرض می‌کنیم که نرخ بهره سپرده کوتاه مدت بانک یک ثابت معلوم باشد. همچنین باید توجه داشت که تغییر مطلق در قیمت سهام به‌وسیلهٔ خودش یک کمیت مفیدی برای رفتار قیمت‌های سهام نیست: تغییر یک درصدی در قیمت سهام وقتی که قیمت سهام ۲ دلار است معنی‌دارتر است از وقتی که قیمت سهام ۲۰۰ دلار است. در عوض با هر تغییر در قیمت سهام، با یک بازده مواجه می باشیم که این بازده تغییر در قیمت سهام تقسیم بر ارزش اولیه سهام تعریف می‌شود. این اندازهٔ نسبی از تغییر به وضوح یک شاخص بهتری از هر اندازهٔ مطلق می باشد. حال فرض می کنیم که $Z(t)$ قیمت سهام در لحظهٔ t باشد. یک بازهٔ زمانی بینهایت کوچک به طول dt که در طی آن $Z(t)$ به $Z(t)+dZ(t)$ تغییر می یابد را در نظر می‌گیریم (ما ازنماد d برای درنظرگرفتن تغییر دریک کمیت روی این بازه زمانی وقتی که می‌خواهیم این تغییر بینهایت کوچک باشد، استفاده می کنیم). با این تعریف، بازده قیمت سهام در زمان t، $\frac{dZ(t)}{Z(t)}$ می‌باشد. حال سوال این‌است‌که چگونه باید این بازده را مدل‌بندی‌نمود؟

برای درک آسان‌تر مدل‌بندی، فرض کنید که نرخ بهرهٔ سپرده بانکی r باشد و شخص دارای یک حساب پس انداز در بانک با ماندهٔ حساب $P(t)$ در زمان t باشد. پس بازده $\frac{dP(t)}{P(t)}$ از پس انداز در زمان t، $r\,dt$ می باشد بدین معنی که

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = r\,dt$$

یا

$$\frac{dP}{dt} = rP(t)$$

این معادلهٔ دیفرانسیل عادی وقتی که مقدار پس انداز دارای یک رشد نمایی باشد دارای جواب صریح زیر می باشد:

$$P(t) = P_{\circ}e^{r(t-t_{\circ})}$$

که $P_{\circ}$ سپردهٔ اولیه از حساب پس انداز در زمان $t_{\circ}$ است. قیمت‌های سهام مانند پول سرمایه‌گذاری شده در یک بانک بدون مخاطره، حرکت نمی‌کنند اما اغلب به دلیل فرض کارا بودن بازار بیان می‌شود که قیمت‌های سهام باید به طور تصادفی حرکت کنند. صورت‌های مختلفی از این فرض وجود دارند اما همه آنها براساس دو فرض زیر بنا شده‌اند:

۱. قیمت‌های سهام در زمان حال انعکاس دهندهٔ آن اطلاعاتی است که در تاریخچه گذشتهٔ خود قیمت‌های سهام نهفته است و اطلاعات بیشتری در آن وجود ندارد.

۲. بازارها بی درنگ به‌اطلاعات جدید درمورد یک سهم واکنش نشان‌می‌دهند.

با دو فرض فوق تغییرات پیش بینی نشده در قیمت سهام یک فرآیند مارکف است. معمولاً فرض می‌شود که قیمت‌های سهام از فرآیند مارکف تبعیت می‌کنند. فرض کنید که قیمت سهام شرکت "الف" در حال صد دلار است. چنانچه قیمت سهام شرکت از فرآیند مارکف تبعیت کند، پیش‌بینی قیمت آینده سهام باید از قیمت هفته گذشته، ماه گذشته و همین طور سال گذشته آن تاثیر نپذیرد. تنها قیمتی که جزو اطلاعات مربوط به‌حساب می‌آید، این‌واقعیت است که قیمت‌های سهام این شرکت درحال‌حاضر صددلار است. الگوی مارکف راجع به قیمت‌های سهام با فرم کارایی بازار به صورت ضعیف سازگاری دارد. این مطلب بیانگر آن است که قیمت فعلی سهام در بازار، کلیهٔ اطلاعات موجود در رکورد قیمت‌های گذشته را با خود به همراه دارد. چنانچه فرم بازار

به نحو کارا به صورت ضعیف وجودنداشت، تحلیل‌گران فنی می‌کنند با تفسیر نمودارهای ترسیمی از قیمت‌های گذشته سهام، بازده بالاتر از حد متوسط کسب کنند.

تحت این فرض‌ها مدل متداول‌تر تجزیهٔ بازدهٔ قیمت سهام $\frac{dZ(t)}{Z(t)}$ به دو جزء است. یک جزءبازده پیش‌بینی پذیرمعین و مورد انتظار، همانند بازده پول سرمایه‌گذاری شده در بانک بدون مخاطره است. این جزء از بازده $\frac{dZ(t)}{Z(t)}$ را به صورت زیر داریم:

$$\mu\, dt$$

که μ نرخ رشد متوسط (نرخ بازده مورد انتظار) قیمت سهام و به ضریب رانش نیز معروف است. جزء دوم بازده $\frac{dZ(t)}{Z(t)}$، تغییر تصادفی در قیمت سهام در پاسخ به اثرهای تصادفی بیرونی مانند اخبار غیر منتظره است. این اثرهای تصادفی با اضافه کردن $\sigma dB(t)$ به بازده $\frac{dZ(t)}{Z(t)}$ در مدل قیمت‌های سهام لحاظ می‌شود. در اینجا $dB(t)$ فرآیند حرکت براونی با میانگین صفر و واریانس dt بوده و σ نوسان پذیری قیمت سهام است که به ضریب انتشار نیز معروف است. ما از ترکیب این دو جزء با یکدیگر معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = \mu\, dt + \sigma\, dB(t)$$

یا

$$d\ Z(t) = \mu\ Z(t)\, dt + \sigma\ Z(t)\, d\ B(t) \qquad (۴۹)$$

رابطه(۴۹) یک فرآیند انتشار زمان همگن ایتوست که نمایش ریاضی مدلی ساده برای تولید قیمت‌های سهام است.

روش برنامه‌ریزی پویا

این روش برای حل کردن مسئله کنترل بهینه ابزار اصلی به کار گرفته شده توسط مهندسان گرایش‌های مختلف است. منظور از روش برنامه ریزی پویا این است که مسئله کنترل خاصی را که برای حل کردن در نظر گرفته شده است در یک مجموعه وسیع‌تر از مسائلی که به وسیله پارامترهای متغیر مشخص شده‌اند جا می‌دهد و با به‌کارگیری اصل بهینه‌گر بولمان، آن رابطهٔ اساسی ای که اعضای این مجموعه از مسائل را به یکدیگر مرتبط می‌کند به دست آورد. این رابطه اساسی در زمان گسسته یک رابطه بازگشتی پسرو و در زمان پیوسته یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی است که معادله همیلتن- ژاکوبی- بولمان (معادله بولمان) نام دارد و با حل آن پاسخ کلی مجموعه وسیع‌تری از مسائل به‌دست می‌آید و نتیجه جواب مسئله مورد نظر نیز در دست خواهد بود. استراتژی بهینه (کنترل بهینه) به دست آمده از این روش، این خاصیت را دارد که وضعیت و تصمیم اولیه هرچه باشد تصمیمات بعدی باید یک استراتژی بهینه را با توجه به وضعیت منتج از تصمیم‌گیری اولیه تشکیل دهند، که به این روش اصل بهینگی گویند. به عبارت دیگر مفهوم بنیانی برنامه‌ریزی پویا اصل بهینگی است که می گوید:

"استراتژی بهینه باید به‌گونه‌ای باشد که صرف نظر از این که چگونه به این حالت خاص رسیده ایم، تمام انتخاب های بعد از آن حالت بهینه باشد".

برنامه‌ریزی پویا با مدل‌های دیگر تخصیص منابع از این نظر تفاوت دارد که تصمیم‌گیری را در طول زمان بررسی می‌کند و بدین جهت از کلمه پویا استفاده می‌کنیم که زمان به صورت صریحی در آن ملحوظ است. برخلاف روش‌های دیگر، روش برنامه‌ریزی پویا برای حل تمام مسائل، ساختار ریاضی مشخصی عرضه نمی‌کند و هر مسئله ای با مسئله دیگر فرق دارد.

مراحل حل یک مسئلۀ کنترل تصادفی در بیمه

برای حل یک مسئلۀ کنترل تصادفی در بیمه به روش برنامه‌ریزی پویا باید از طریق مراحل زیر اقدام کرد:

۱.اولین گام در حل یک مسئله بهینه سازی تعریف تابع هدف و فرض به اندازه کافی هموار بودن این تابع می باشد؛

۲.نوشتن فرآیند مازاد کنترل شده برای کنترل ثابت A (معادلات سیستم).

۳.به دست آوردن معادلۀ بولمان برای مسئله کنترل.

٤.به‌دست‌آوردن جوابی برای معادلۀ بولمان که درشرط‌های حدی مسئلۀکنترل‌صدق کند.

٥.بررسی بهینگی کنترل به دست آمده.

منابع

۱. امانی، محمدمهدی. (۱۳۷۹)، مارتینگل‌ها و ریسک‌بیمه، **فصلنامه‌صنعت‌بیمه**، سال‌پانزدهم، ش۵۷.

۲. ثبات، غلامعلی. (۱۳۷٤)، نقش صنعت بیمه در بازار سرمایه (ارزیابی مدیریت منابع و دارایی‌ها در دورۀ ۱۳٦۱-۱۳۷۲)، دانشکدۀ اقتصاد دانشگاه تهران.

۳. حسین‌نیا، بتول. (۱۳۷٦)، اهمیت سرمایه‌گذاری شرکت‌های بیمه، **فصلنامۀ صنعت بیمه**، ش٤۹.

٤. شکری فشتالی، سهیل. (۱۳۸٤)، سرمایه‌گذاری بهینه برای مدیریت دینامیک مخاطره بیمه‌گر: مینیمم کردن احتمال ورشکستگی بیمه‌گر، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز.

5. Borch, K.(1967), The Theory of Risk, **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B 29.

6. Borch, K.(1969), The Capital Structure of a Firm, **Swedish Journal of Economics** 71.

7.Brockett, P. and Xia, X. (1995), **Operations research in insurance: a review,** Trans. Act. Soc.XLVII.

8.Browne, S. (1995), Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin. **Math. Operations Res.** 20.

9.Bühlmann,H.(1970), **Mathematical Methods in Risk Theory**. Berlin.

10.Fausett, L.(1999), **Applied Numerical Analysis Using MATLAB**, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

11. Fleming, W. H. and Rishel, R.W.(1975), **Deterministic and stochastic optimal control,** New York.

12.Fleming, W. H. and Soner, M. (1993), **Controlled Markov processes and viscosity solutions**, New York.

13. Gerber, H. U.(1972), Games of Economic Survival with Discrete and Continuous Income Processes, **Operations Research,** 20.

14.Hipp, C. and Plum, M.(2001), Optimal investment for insurers, **Insurance: Math. Economics,** 27.

15. Liu, C. H. and Yang, H.(2004), Optimal Investment for an Insurance to Minimize Its Probability of Ruin, **North American Actuarial Journal,** Vol 8, no.2.

16.Martin-LÖf, A.(1994), Lectures on the use of control theory in insurance. **Scand. Scandinavian Actuarial Journal,** No.1, 1-25.

17. Merton, R. C. (1990), **Continuous-Time Finance, Macroeconomics and Finance,** Blackwell.

18. Schmidli, H.(2002), On Minimizing the Ruin Probability by Investment and Reinsurance, **Annual Applied Probability**, 12.