فصلنامه صنعت بیمه / سال هفدهم / شماره ۱ / بهار ۱۳۸۱ / شماره مسلسل ۶۵/ صفحات ۵۹ تا ۷۷

تعیین حق بیمه به روش باورمندی بیزی و مدل‌های پویا

دکتر سیامک نوربلوچی [۱]
لیلا بیطرف [۲]

چکیده

یکی از روش‌های محاسبه حق بیمه در آمار بیمه استفاده از نظریه باورمندی[۳] است. در مسائل پیشرفته این نظریه، برای برآورد حق بیمه، روش‌های بیزی به کار گرفته می‌شوند که به روش‌های باورمندی بیزی موسوم‌اند. متدولوژی بیزی در اواخر دههٔ ۱۹۶۰ با ارائه دو مقاله از بولمن[۴] و بولمن ـ استراب[۵] وارد علم آمار بیمه شد. در مدل کلاسیک بولمن پارامتر ریسک نسبت به زمان همگن اما در بعضی موارد، مانند بیمه محصولات کشاورزی پارامتر ریسک نسبت به زمان متغیر است. بنابراین یک سیستم بیمه‌ای در واقع یک سیستم پویاست که در این صورت می‌توان برآورد نرخ حق بیمه را توسط مدل‌های پویا در هر زمان به دست آورد. در این مقاله ثابت می‌شود این برآورد، همان فرمول باورمندی بیزی است. همچنین در این مقاله برای مثال نرخ حق بیمه خالص محصول چغندر قند همراه با استنباط‌های بیزی مربوط ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی

باورمندی، مدل باورمندی بولمن، استنباط بیزی، مدل‌های بیزی، مدل‌های پویا.

---

۱. عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی، گروه آمار.

۲. کارشناس صندوق بیمه محصولات کشاورزی.

3. Credibility.

4. Buhlmann.

5. Straub.

مقدمه

نظریه باورمندی به عنوان شاخه‌ای از علم آمار بیمه سعی در اصلاح و تعدیل برآورد مورد استفاده برای نرخ حق بیمه و یافتن راه حلی جهت قابل استفاده کردن تجربه ادعاها دارد. باورمندی همچنین به عنوان یک برآورد خطی از ادعاهای واقعی و مورد انتظار تعریف می‌شود. نظریه باورمندی از نظر میلر و هیکمن[1] به صورت زیر تعریف شده است:

«نظریه باورمندی را می‌توان یک سیستم وزنی با هدف برآورد هزینه ادعاهای آینده تصور کرد که در آن وزن‌ها، توابعی از حجم تجربه بیمه‌ای موجودند. این برآورد یک متوسط وزنی از ادعاهای واقعی و ادعاهای مورد انتظار است که در آن ادعاهای واقعی براساس گروه تحت بررسی و ادعاهای مورد انتظار بر اساس تجربه کمکی یا پیشین به دست می‌آیند».

بیمه گران امریکایی نظریه باورمندی را در مدل‌های مورد مطالعه کلاسیک با پارامترهای ثابت به کار گرفتند و از نظریه نمونه‌گیری برای برآورد آنها استفاده کردند. اما در مسائل پیشرفته برای برآورد نرخ حق بیمه از تکنیک‌های برآورد بیزی استفاده می‌شود. معمولاً در این روش‌ها پارامتر ریسک را نسبت به زمان همگن در نظر می‌گیرند. اما در عمل این پارامتر نسبت به زمان متغیر است. برای مثال در بیمه محصولات کشاورزی که در آن شرکت بیمه، محصولات کشاورزی را نسبت به عوامل قهری و طبیعی بیمه می‌کند، ریسک شرکت بیمه به شدت تابع شرایط جوی است و در این صورت نسبت به زمان متغیر است. بنابراین فرض همگنی پارامتر ریسک نسبت به زمان به خصوص در زمینه بیمه‌های اموال و حوادث فرض بزرگی است. اگر پارامتر ریسک را نسبت به زمان متغیر در نظر بگیریم، در این صورت با یک سیستم پویا روبه رو هستیم که مبتنی بر نظریه بیز است. در این مقاله نشان داده می‌شود که برآورد نرخ حق بیمه که توسط مدل‌های پویا به دست می‌آید در واقع همان برآورد ناشی از مدل‌های باورمندی بیزی است که در آن پارامتر ریسک نسبت به زمان تغییر می‌کند.

---

1. Miller & Hickman (1975).

۱. نظریه باورمندی

پارامتر مخاطره را با θ_{ij} نشان می‌دهیم که i معرف قرارداد (i=۱، ۲،...،I) و j نمایش زمان (j=۱، ۲،...،J) است. برای θ_{ij} مفروض X_{ij} ادعای واقعی مربوط به قرارداد i در زمان j است که از توزیع $f(x_{ij} \mid \theta_{ij})$ و θها از یک «تابع توزیع ساختاری» () U تبعیت می‌کنند. حق بیمه ریسک توسط $\mu(\theta_{ij})=E(X_{ij} \mid \theta_{ij})$ نمایش داده می‌شود. باورمندی دقیق توسط $E(\mu(\theta_{ij}) \mid x_{11}, \ldots, x_{IJ})$ مشخص می‌شود، از آن‌جاکه باورمندی دقیق با دشواری ارزیابی می‌شود، تکنیک‌های تقریبی مختلفی پیشنهاد می‌شود، که هدف همه آنها تولید فرمول باورمندی حداقل مربعات خطی است. فرمول باورمندی حداقل مربعات خطی به صورت زیر است:

$$(1-z)m+z\bar{x} \qquad 0\leq z\leq 1 \qquad (1\text{-}1)$$

m میانگین پیشین حق بیمه ریسک قرارداد i و $\bar{X}$ معرف ریسک جنبی روی همه قراردادها و دوره‌ها است. در مدل کلاسیک بولمن (۱۹۶۷) پارامتر ریسک بر حسب زمان همگن است. i امین قرارداد توسط بردار $(\theta_i, X_i)= (\theta_i, X_{i1}, \ldots, X_{ij})$ توصیف می‌شود.

بولمن برای مدل کلاسیک خود دو فرض زیر را در نظر گرفت:

الف) جفت‌های (θ_i, X_{ij}) مستقل و همتوزیع هستند.

ب) برای هر قرارداد i و برای θ_i ثابت، متغیرهای شرطی X_{ij} و j=۱،...، J نیز مستقل و هم توزیع‌اند.

تحت این فرضیات، برآورد خطی بهینه $\mu(\theta_i)$ توسط مینیمم کردن میانگین مربعات خطا (که به وسیله $E\{\mu(\theta_i) -\alpha-\sum_j \beta_i X_{ij}\}^2$ مینیمم می‌شود) به دست می‌آید که به صورت $(1-z)\, m + zM_i$ است، که در آن

$$m=E(\mu(\theta_i)) \qquad , \qquad M_i=\bar{X}_i=\textstyle\sum_j X_{ij}/J$$

$$z=aI/(aI+s^2) \qquad , \qquad a=Var(\mu(\theta_i))$$

$$s^2=E(\sigma^2(\theta_i)) \qquad , \qquad \sigma^2(\theta_i)=Var(x_{ij} \mid \theta_i)$$

واضح است که s_2,a,m ابرپارامترهای [1] ناشی از توزیع پیشین هستند و در برآورد بیزی تجربی از روی داده‌ها برآورد می‌شوند. هرزوگ[2] در سال ۱۹۹۰ سازگاری مدل‌های بیزی و بولمن را بررسی کرد و نشان داد که برآورد باورمندی بولمن بهترین ترکیب خطی برای برآورد بیزی حق بیمه خالص است. به تبعیت از جول [3]، نشان داده شد که برآورد باورمندی بولمن با برآورد بیزی رده بزرگی از مسائل (خانواده نمایی خطی و پیشین‌های مزدوج) برابر است.

به تبع مدل بولمن، توسعه‌های دیگری نیز در مدل اصلی صورت گرفت که همه آنها، تحت تغییری از فرضیات با هدف رسیدن به یک برآورد خطی، مشابه آنچه بیان شد، انجام گرفته است.

اما توجه به این نکته مهم است که «هیچ کدام از روش‌های باورمندی که تاکنون استفاده شده است از آنالیز بیزی درستی حاصل نشده است» (کلاگمن، ۱۹۹۲)[4]، یک علت این نکته مربوط به محدودیت‌های عملی تولید یک برآوردگر است که ترکیب وزنی ادعاهای واقعی و برآوردگر ادعاهای پیشین مورد انتظار داده‌ها باشد و علت دیگر آن مربوط به حل بیزی است که از مشکلات محاسباتی در اجرای مدل‌های باورمندی بیزی ناشی می‌شود.

مشکل اول توسط مدل‌های پویا مرتفع می‌شود، به این صورت که همان طور که بعداً توضیح داده خواهد شد برآورد ناشی از مدل‌های پویا در هر زمان برآورد بیزی است و این برآورد ثابت می‌شود در خانواده‌های نمایی با توزیع پیشینی که خود نیز از خانواده نمایی آمده باشد، یک ترکیب خطی است، اما مشکل دوم در مواردی که توزیع ادعای خسارت غیرنرمال است و با تقریب خوبی قابل تبدیل به توزیع نرمال نباشد، همچنان باقی می‌ماند. بنابراین استفاده از مدل‌های پویا تا حد زیادی روش‌های باورمندی را با آنالیز بیزی مطابقت می‌دهد.

---

1. Superparameters.

2. Herzoge (1990).

3. Jewell (1974).

۴. نقل از منبع شمارهٔ ۱۵.

۲. مدل‌های پویا و ارتباط آن با باورمندی بیزی

همان طور که در بخش قبل دیدیم θ_{ij} پارامتر ریسک قرارداد i در زمان j و برای θ_{ij} مفروض، X_{ij} ادعاهای واقعی مربوط به قرارداد i در زمان j است. اگر قراردادهایی را که دارای ریسک همگن هستند در یک گروه قرار دهیم، در این صورت می‌توانیم برای هر گروه پارامترریسک را نسبت به قرارداد همگن و نسبت به زمان متغیر در نظر بگیریم. بنابراین فرض کنید $X_1, \ldots, X_t$ بردار مشاهدات ادعاهای واقعی باشند که از توزیع نرمال با میانگین نامعلوم $F_t' \theta_t$ و واریانس نامعلوم $r_t^{-1}=\sigma_t^2$ تبعیت می‌کنند که در آن θ_t پارامترریسک $(\mu_t=F'_t \theta_t)$ است.

اکنون فرض کنید در یک سیستم پویای خطی قرار داریم که در آن مشاهدات توسط رابطه خطی $X_t=F'_t\theta_t+\nu_t$، $\nu_t\sim N(0,r_t^{-1})$ و پارامترها توسط رابطه خطی

$\theta_t= G_t\theta_{t-1}+ \omega_t, \omega_t \sim N(0,r_t^{-1} W_t^*)$

به یکدیگر مربوط می‌شوند. رابطه اول معادله مشاهدات و رابطه دوم معادله سیستم نامیده می‌شود. از آن جا که واریانس نیز نامعلوم و نسبت به زمان متغیر است، فرض می‌کنیم رابطه واریانس‌های مشاهدات نیز در زمان‌های مختلف توسط مدل جمعی $r_t=r_{t-1}+n_t, n_t\sim Gamma(a_t,b_t)$ بیان شود. این رابطه را معادله واریانس می‌نامیم. b_t,a_t,W_t^*,G_t,F_t مقادیر معلوم هستند. همچنین فرض می‌شود مشاهدات به طور شرطی و خطاهای معادلات مشاهدات، سیستم و واریانس یعنی ν_t,ω_t,n_t از یکدیگر مستقل‌اند و خود n_tها، ω_tها، νها نیز از یکدیگر مستقل‌اند. همچنین فرض می‌شود خطاهای هر سه معادله از پارامتر θ_t نیز مستقل‌اند. بنابراین داریم:

$$X_t = F_t' \theta_t + \nu_t \quad , \quad \nu_t \sim N(0, r_t^{-1}) \tag{۲-۱}$$

$$\theta_t=G_t\theta_{t-1}+ \omega_t \quad , \omega_t \sim N(0, r_t^{-1} W^*_t) \tag{۲-۲}$$

$$r_t = r_{t-1} + n \quad , n_t \sim Gamma(a_t, b_t) \tag{۲-۳}$$

کلیه اطلاعات تا زمان t-1 را با D_{t-1} نمایش می‌دهیم. بعد از مشاهده X_t، کلیه اطلاعات تا زمان t شامل $\{X_t, D_{t-1}\}$ است که آن را با D_t نشان می‌دهیم. همچنین در زمان t-1 براساس تعریف توزیع پیشین مزدوج، فرض می‌کنیم:

$$(\theta_{t-1} \mid D_{t-1}, r_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, r_{t-1}^{-1} C^*_{t-1}) \tag{۲-۴}$$

$$(r_{t-1} \mid D_{t-1}) \sim Gamma(\alpha_{t-1}, \beta_{t-1}) \tag{۲-۵}$$

اکنون می‌توان با استفاده از معادله سیستم و معادله واریانس، توزیع‌های پیشین در زمان t و با استفاده از قضیه بیز توزیع پسین در زمان t را به دست آورد. برای پیش بینی مقادیر ادعای خسارت نیز، با استفاده از انتگرال گیری از توزیع توأم مشاهدات و پارامتر نسبت به پارامتر، توزیع پیش بینی در زمان t نتیجه می‌شود.

قضیه: فرض کنید توزیع‌های پسین در زمان t-۱ به صورت زیر باشند:

$$(\theta_{t-1} \mid D_{t-1}, r_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, r_{t-1}^{-1} C^*_{t-1})$$

$$(r_{t-1} \mid D_{t-1}) \sim Gamma(\alpha_{t-1}, \beta_{t-1})$$

همچنین فرض می‌شود $b_t=\beta_{t-1}$ در این صورت

الف) توزیع‌های پیشین در زمان t

$$(\theta_t \mid D_{t-1}, r_t) \sim N(G_t\, m_{t-1}, r_t^{-1} R^*_t) \tag{۲-۶}$$

$$(r_t \mid D_{t-1}) \sim Gamma(\alpha_{t-1} + a_t, \beta_{t-1}) \tag{۲-۷}$$

که در آن

$$R^*_t = G'_t\, \delta_t^{-1}\, C^*_{t-1} G_t + W^*_t$$

$$o < \delta_t \le 1 \quad , \quad \alpha_t = r_{t-1}/r_{.t}$$

ب) توزیع‌های پسین در زمان t

$$(\theta_t \mid D_t, r_t) \sim N(m_t, r_t^{-1} B_t^{-1}) \tag{۲-۸}$$

$$(r_t \mid D_t) \sim Gamma(\alpha_t, \beta_t) \tag{۲-۹}$$

که در آن

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

$$m_t=(F'_t\, F_t + R_t^{*-1})^{-1}\,[F'_t X_t + R_t^{*-1} G_t m_{t-1}]$$

$$B_t=(F'_t\, F_t + R_t^{*-1})^{-1}$$

$$\alpha_t=\alpha_{t-1} + a_t+\frac{1}{2}\ ,\ \beta_t=\beta_{t-1}+\frac{1}{2}Q_t^{*-1}(X_t-f_t)^2$$

$$f_t=F_t\, G_t\, m_{t-1}\ ,\ Q^*_t = 1 + F'_t\, R^*_t F\, R_t$$

(ج)توزیع‌های پیشین و پسین غیرشرطی

$$(\theta_{t-1} \mid D_{t-1}) \sim T_2\alpha_{t-1}(m_{t-1}, C^*_{t-1} S_{t-1}) \qquad (۲-۱۰)$$

$$(\theta_{t-1} \mid D_{t-1}) \sim T_2(\alpha_{t-1}+a_t)(G_t m_{t-1}\, , S^*_t R^*_t) \qquad (۲-۱۱)$$

$$(\theta_t \mid D_t) \sim T_2\alpha_t(m_t\, , B_t\, S_t) \qquad (۲-۱۲)$$

که در آن

$$S_t=\beta_t / \alpha_t$$

$$S_{t-1}=\beta_{t-1} / \alpha_{t-1}$$

$$S^*_t=\beta_{t-1}/(a_t+\alpha_{t-1})$$

د) توزیع پیش بینی در زمان t

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

$$(X_t \mid D_{t-1}) \sim T_2(\alpha_{t-1}+a_t)\ \ (f_t, (Q^*_t, S^*_t)) \qquad (۲-۱۳)$$

از دیدگاه نظریه بیزی، در صورتی که تابع زمان درجه دوم خطا برای برآورد منظور شود بهترین برآورد (برآورد بیزی) میانگین توزیع پسین است. بنابراین برآورد نرخ حق بیمه در زمان t، با توجه به رابطه (۲-۱۲) وقتی $m_t, t\to\infty$ است که یک ترکیب بیزی است.

$$M_t=(F'_t\, F_t + R_t^{*-1})^{-1}\ (F'_t X_t + R_t^{*-1} G_t m_{t-1})$$

$$= \frac{R_t^*}{1 + R_t^* F_t' F_t} \left(F_t' X_t + R_t^{*-1} G_t m_{t-1} \right)$$

$$= \frac{R_t^* F_t' F_t}{1 + R_t^* F_t' F_t} F_t^{-1} X_t + \frac{1}{1 + R_t^* F_t' F_t} G_t m_{t-1}$$

با فرض $z_t = \frac{R_t^* F_t' F_t}{1 + R_t^* F_t' F_t}$ داریم:

$$m_t = z_t F_t^{-1} X_t + (1 - z_t) G_t m_{t-1} \qquad (۲-۱۴)$$

که در آن $G_t m_{t-1}$ مقدار مورد انتظار ادعاها در زمان t و $F_t^{-1} X_t$ برآوردی از مقادیر ادعاهای واقعی در زمان t هستند. همان طور که مشاهده می‌شود رابطه (۱۴-۲) همان فرمول باورمندی خطی است.

۳. برآورد حق بیمه چغندر قند در استان خراسان به کمک مدل‌های خطی پویا

همان طور که در مقدمه بیان شد، در بیمه محصولات کشاورزی، ریسک کشاورزان (بیمه‌گذاران) به شدت تابع شرایط جوی است و شرایط جوی طی سال‌های مختلف متغیر است. از طرف دیگر چون حق بیمه برای مناطق مختلف تعیین می‌شود که پارامترریسک در این مناطق همگن است، لذا در مدل بولمن می‌توان پارامتر ریسک را نسبت به قرارداد یا نسبت به بیمه گذاران در هر منطقه همگن در نظر گرفت و برای هر منطقه که تفکیک مناطق از یکدیگر براساس احتمال وقوع خسارت در آن مناطق صورت می‌گیرد، حق بیمه را جداگانه برآورد کرد. بر این اساس، در این قسمت محصول چغندر قند را از بین محصولات تحت پوشش شرکت بیمه محصولات کشاورزی انتخاب و حق‌بیمه آن را در استان خراسان به کمک مدل‌های خطی پویا برآورد می‌کنیم.

فرض کنید متغیر U_t متوسط مبالغ ادعای خسارت برای هر بیمه گذار در استان خراسان و θ_t پارامتر ریسک در این استان باشد که نسبت به زمان متغیر است.

اطلاعات جمع آوری شده برای تجزیه و تحلیل سری زمانی و برآورد حق بیمه خالص مربوط به سال‌های زراعی ۱۳۶۴-۱۳۶۳ و ۱۳۷۶-۱۳۷۵ است که به طور سالانه جمع آوری شده‌اند. سال زراعی ۱۳۶۴-۱۳۶۳ سال شروع اجرای طرح بیمه چغندر قند در ایران است. داده‌های مذکور دارای توزیع لگ ـ نرمال‌اند که برازش توزیع به داده‌ها

توسط نرم‌افزار استتگراف[1] انجام گرفته است که با توجه به این که تعداد داده‌ها فقط ۱۳ عدد است، لذا امکان انجام آزمون کی ـ دو وجود نداشته و آماره آزمون توسط نرم‌افزار مذکور قابل محاسبه است. اما توسط آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف، با اطمینان $\alpha=$۰/۵۸ این فرض که مشاهدات از توزیع نرمال لگاریتمی تبعیت می‌کنند، پذیرفته شد. لذا به سهولت می‌توان با یک تبدیل لگاریتمی، توزیع مشاهدات را به توزیع نرمال تبدیل کرد که باز هم براساس آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف فرض نرمال بودن با اطمینان $\alpha=$۰/۶ مورد پذیرش قرار می‌گیرد.

این کار را می‌توان توسط یک تبدیل لگاریتمی $X_t=\log U_t$ انجام داد. داده‌های تبدیل شده در جدول شماره ۱ مشاهده می‌شود.

جدول ۱. مقادیر مشاهدات طی سال‌های ۱۳۶۴ـ۱۳۷۶[2]

سال	مبالغ غرامت پرداختی (ریال‌درهکتار)
۱۳۶۴	۲۷۴/۵
۱۳۶۵	۷۹۴/۷۴
۱۳۶۶	۵۰۴/۷۵
۱۳۶۷	۸۴۲/۹۸
۱۳۶۸	۷۱۲/۹۸
۱۳۶۹	۹۱۵/۴۱
۱۳۷۰	۹۰۱/۱۴
۱۳۷۱	۲۰۴۲/۳۲
۱۳۷۲	۲۴۲۴/۰۹
۱۳۷۳	۱۱۷۱/۰۳
۱۳۷۴	۳۰۹۸/۱۳
۱۳۷۵	۸۸۷۰/۳۸
۱۳۷۶	۶۸۵۵/۰۱

ماتریس رگرسیون F_t و همچنین G_t را مقدار ثابت یک در نظر می‌گیریم، بنابراین $\theta_t=\mu_t$.

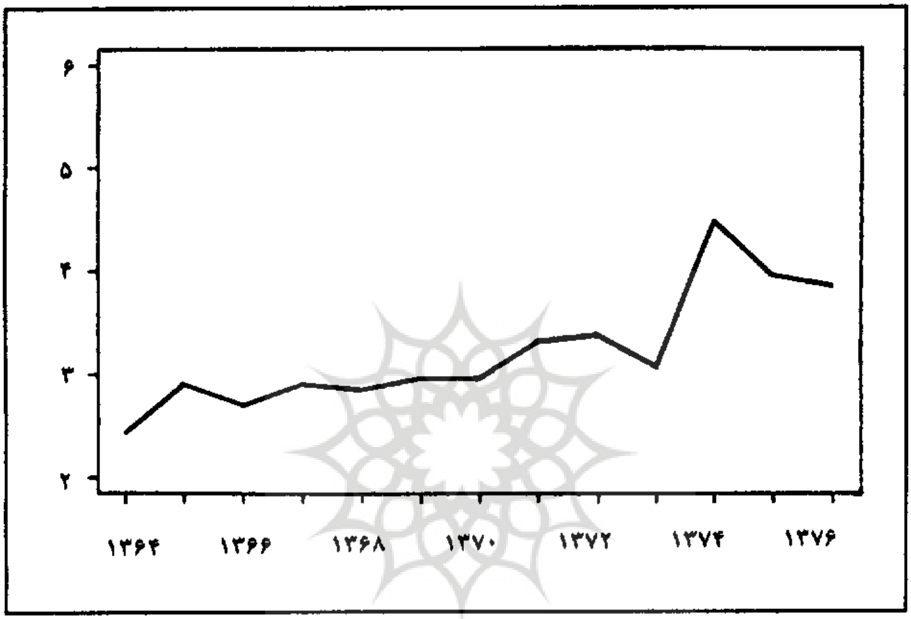
شکل شمارهٔ ۱ نمایش سری زمانی X_t و واضح است که مقادیر سری زمانی با رشد

1. Statgraf.

۲. ادارهٔ تحقیقات و برنامه ریزی و بررسی‌های اقتصادی، آمار صندوق بیمه محصولات کشاورزی.

ثابتی در طول زمان افزایش یافته است. اما بعضی تغییرات ناگهانی به خصوص در سال‌های ۶۹، ۷۱ و ۷۴ در طول سری مشاهده می‌شود که علت افزایش یا کاهش شدید آن شرایط آب و هوایی خاص آن سال‌هاست.

شکل ۱. نمودار سری زمانی مشاهدات



بنابراین در نظر گرفتن واریانس به عنوان یک پارامتر نامعلوم و متغیر نسبت به زمان در مدل، به دلیل وجود تغییرات ناگهانی در طول سری منطقی به نظر می‌رسد.

در این قسمت لازم است مقادیر اولیه در زمان صفر تعیین شوند. در زمان $t-1$ توزیع‌های پیشین مناسب برای $(\theta_{t-1} | r_{t-1}$ و $D_{t-1})$ توزیع نرمال و برای $(r_{t-1} | D_{t-1})$ توزیع گاماست. بنابراین در زمان صفر

$$(\theta_0 \mid r_0 , D_0) \sim N(m_0 , c_0) \quad , \quad c_0 = r_0^{-1} c_0^*$$

$$(r_0 \mid D_0) \sim Gamma(\alpha_0 , \beta_0)$$

با توجه به شرایط بیمه چغندر قند و سابقه آن در شرکت بیمه توزیع‌های پیشین مزدوج زیر را برای پارامترهای میانگین و معکوس واریانس در زمان صفر در نظر می‌گیریم:

$$(\theta_{\circ} \mid r_{\circ}, D_{\circ})' \sim N(۳/۸,\ ۰/۰۱۶۹) \qquad (۳\text{-}۱)$$

$$(r_{\circ} \mid D_{\circ}) \sim Gamma(۰/۵۲,\ ۰/۱)$$

پارامترهای توزیع‌های فوق به طور تجربی به شرح زیر تعیین شده‌اند:

اگر به طور متوسط مبلغ غرامت پرداختی برای محصول چغندرقند در استان خراسان ۵۰۰ میلیون ریال باشد و به طور متوسط ۸۰۰۰۰ هکتار مزارع چغندرقند در استان خراسان بیمه شده باشد، در این صورت متوسط مبلغ غرامت برای هر هکتار ۶۲۵۰ ریال است و اگر حداکثر مبلغ غرامت پرداختی در این استان یک میلیارد ریال باشد و حداکثر سطح بیمه شده ۹۰۰۰۰ هکتار در این صورت متوسط مبلغ غرامت برای هر هکتار ۱۱۱۱۱/۱ ریال است. بنابراین با یک تقریب ۹۵٪ داریم:

$$۱/۹۶\sqrt{C_{\circ}} = ۰/۲۵ \qquad \rightarrow \sqrt{C_{\circ}} = ۰/۱۳$$

و در نهایت توزیع $(\theta_{\circ} | r_{\circ}, D_{\circ}) \sim N(۳/۸، ۰/۰۱۶۹)$

همچنین برای برآورد پارامترهای توزیع $(r_{\circ}|D_{\circ})$، سری تبدیل شده را به مقاطع زمانی سه ساله تقسیم می‌کنیم. در هر مقطع معکوس واریانس مشاهدات را محاسبه می‌کنیم. بدین ترتیب یک سری اطلاعات از معکوس واریانس تولید می‌شود که دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha_{\circ}=۰/۵۲$ و $\beta_{\circ}=۰/۱$ است.

برازش توزیع توسط آزمون کولموگروف اسمیرنوف با اطمینان $\alpha=۰/۹۱$ با نرم‌افزار استتگراف انجام گرفته است.

در مرحله بعد لازم است مقادیر اولیه $W^*_{\circ}$, $c^*_{\circ}$, $\delta_{\circ}$ نیز مشخص شوند. بدین منظور لازم است به ملاک بسیار مهمی که مفهوم نوفه سفید را در تحلیل‌های مهندسی منتقل می‌کند توجه شود. این ملاک، نسبت واریانس خطای معادله سیستم به واریانس مشاهدات است:

$$\lambda_t = \frac{Var(\omega_t)}{Var(\nu_t)} = \frac{r_t^{-1} W_t^*}{r_t^{-1}} = W_t^*$$

λ_t تغییرات معادله سیستم را نسبت به معادله مشاهدات اندازه‌گیری می‌کند. از آن‌جا که معمولاً تغییرات معادله سیستم نسبت به معادله مشاهدات کوچک است، لذا انتظار داریم که λ_t یا W^*_t کوچک باشد. بنابراین W^*_t باید طوری انتخاب شود که نسبت λ_t کوچک باشد.

از طرف دیگر، از رابطه (۲-۱۲) میانگین توزیع پسین $(\theta_t|D_t)$ به صورت زیر است:

$$m_t = z_t X_t + (1 - z_t) m_{t-1} \qquad (۲-۳)$$

رابطه (۲-۳) نشان می‌دهد که m_t یک متوسط وزنی از برآورد پیشین سطح m_{t-1} و مشاهدات در سطح X_t است. وزن z_t که بین صفر و یک قرار دارد با توجه به تعریف m_t این مفهوم را دارد که اگر توزیع پیشین متمرکزتر از درستنمایی باشد یا در واقع توزیع پیشین بر درستنمایی غالب باشد، z_t نزدیک به صفر است و اگر درستنمایی بر پیشین غالب باشد z_t نزدیک به یک است.

بنابراین از آن جا که در کارهای عملی معمولاً درستنمایی بر پیشین غالب است، پس z_t را طوری انتخاب می‌کنیم که به یک نزدیک باشد. برای مثال مقدار z_t را ۰/۹ انتخاب می‌کنیم.

$$z_t = ۰/۹$$

$$z_t = \frac{R_t^*}{1 + R_t^*} = ۰/۹ \rightarrow R_t^* = ۹$$

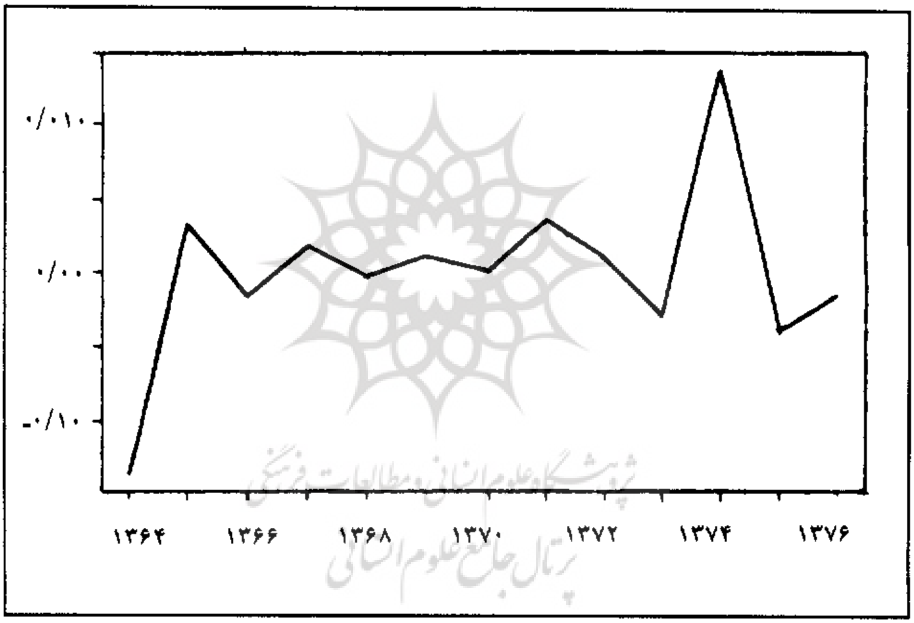
اما طبق رابطه (۲-۶)، $R^*_t = \delta_t^{-1} C^*_{t-1} + W^*_t$ است. بنابراین می‌توان با انتخاب W^*_t به اندازه کافی کوچک و R^*_t که بر اساس انتخاب z_t مشخص می‌شود، با تغییر δ_t مقدار C^*_{t-1} را نیز تعیین کرد.

همچنین لازم است یک مقدار اولیه برای پارامتر a_t در زمان t=۱ (اولین مقدار a_t در زمان t=۱ رخ می‌دهد) در معادله واریانس نیز انتخاب کنیم. از آن جا که انتظار داریم تغییرات در واریانس به آرامی صورت گیرد، لذا a_t را طوری انتخاب می‌کنیم که میانگین تغییرات آن نزدیک به صفر باشد. این مقدار با توجه به مقدار δ_t تعیین می‌شود. اکنون با این توضیحات می‌توان کار برازش مدل را انجام داد.

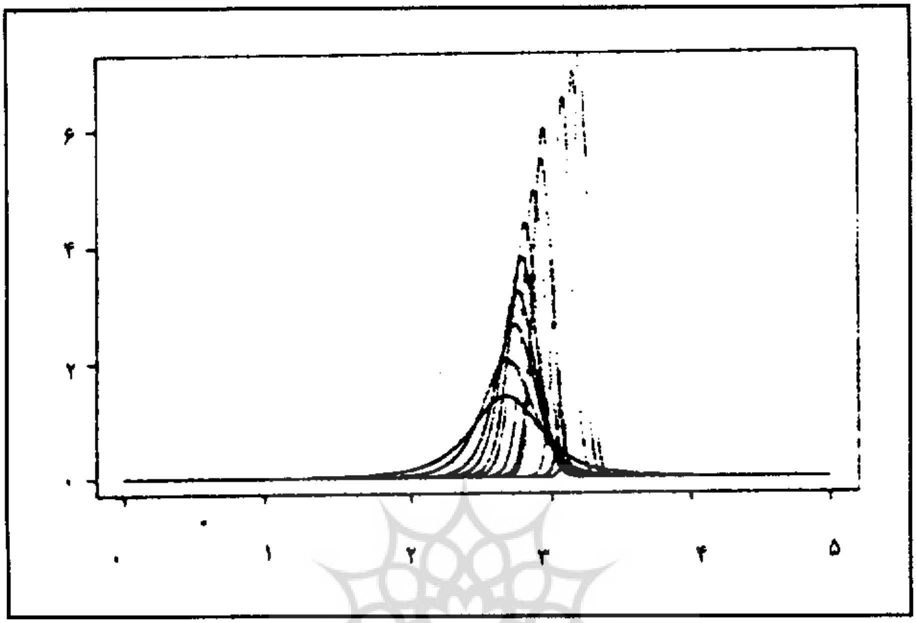
بنابراین اگر $W^* = ۰/۰۵$ و $\delta = ۰/۵$ را انتخاب کنیم $C^* = ۱۷/۹$ می‌شود. که در نتیجه a_t نیز به مقدار ۰/۵۲ می‌رسد. همان طور که در شکل شمارهٔ ۲ مشخص است، مقادیر

خطاها نزدیک به صفر است. همچنین توزیع‌های پسین $(\theta_t|D_t)$ باگذشت زمان متمرکزتر شده‌اند (شکل شمارهٔ ۳). با گذشت زمان a_t افزایش یافته، در نتیجه برآورد واریانس مشاهدات در زمان t از رابطه (۲-۱۲)، $S_t=\beta_t/\alpha_t$ کاهش می‌یابد. اما به دلیل کاهش واریانس مشاهدات و در نتیجه افزایش معکوس آن یعنی r_t همانطور که در شکل شمارهٔ ۴ مشخص است عدم قطعیت نسبت به حالت قبل افزایش یافته می‌یابد. بنابراین نمودارهای $(r_t|D_t)$ پهن‌تر شده‌اند.

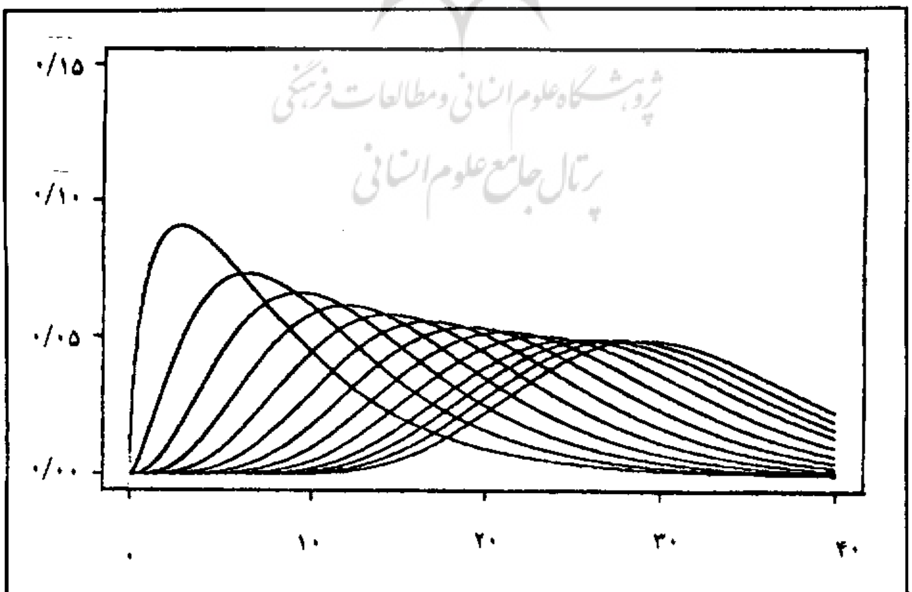
شکل ۲. نمودار سری زمانی خطاها، $\delta = ۰/۵$



شکل ۳. نمودار توزیع‌های پسین میانگین، $\delta = ۰/۵$



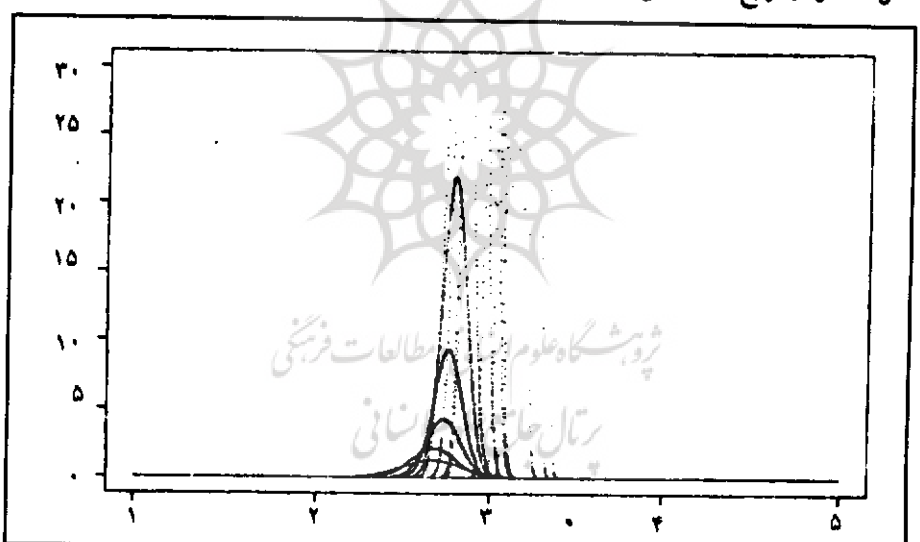
شکل ۴. نمودار توزیع‌های پسین معکوس واریانس، $\delta = ۰/۵$



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

برای بررسی بیشتر مدل، توزیع‌های پیشین $(\theta_t|D_{t-1})$ و پسین $(\theta_t|D_t)$ را در هر زمان با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. این بررسی در شکل شمارهٔ ۶ نشان داده شده است. با توجه به روابط (۲-۱۱) و (۲-۱۲)، همان طور که مشاهده می‌شود در هر زمان توزیع میانگین توسط درستنمایی اصلاح شده است. به این صورت که توزیع $(\theta_t|D_t)$ بعد از یک مشاهده متمرکزتر شده است و واریانس آن کاهش یافته است. این موضوع باعث کاهش طول فاصله اطمینان برای برآورد θ_t می‌شود. زیرا بعد از هر مشاهده، S_t نسبت به S_t^* بزرگ می‌شود، در نتیجه واریانس $(\theta_t|D_t)$ کاهش می‌یابد. همچنین m_t نیز بنا به تعریف نسبت به m_{t-1} افزایش می‌یابد، یعنی میانگین توزیع پسین نسبت به میانگین توزیع پیشین در هر زمان بزرگ‌تر می‌شود. این موضوع با افزایش پارامتر مکان توزیع در شکل شمارهٔ ۶ نشان داده شده است.

شکل ۵. نمودار توابع درستنمایی، $\delta = ۰/۵$



نکته دیگر مربوط به تغییرات توزیع پیشین نسبت به زمان است که باگذشت زمان همراه باافزایش پارامتر مکان توزیع، توزیع به‌حالت نرمال نزدیک می‌شود و به‌تقارن می‌رسد. همچنین همان‌طورکه مشاهده می‌شود توزیع‌های پیشین به‌نسبت خودباگذشت زمان متمرکزتر می‌شوند و این به دلیل افزایش S_t^* وکاهش واریانس توزیع $(\theta_t|D_t)$ رخ می‌دهد. این موضوع درباره تغییرات توزیع پسین نسبت به‌یکدیگر نیز صدق می‌کند.

از طرف دیگر توزیع‌های پسین در ارتباط مستقیم با درستنمایی (شکل شمارهٔ ۵) قرار دارند. هر گونه تغییری از نظر پارامتر مکان، میزان تمرکز یا تیزی درستنمایی به توزیع‌پسین منتقل می‌شود. یعنی پسین بیشتر از پیشین، از درستنمایی تأثیر می‌پذیرد، که معرف غالب بودن درستنمایی بر پیشین است.

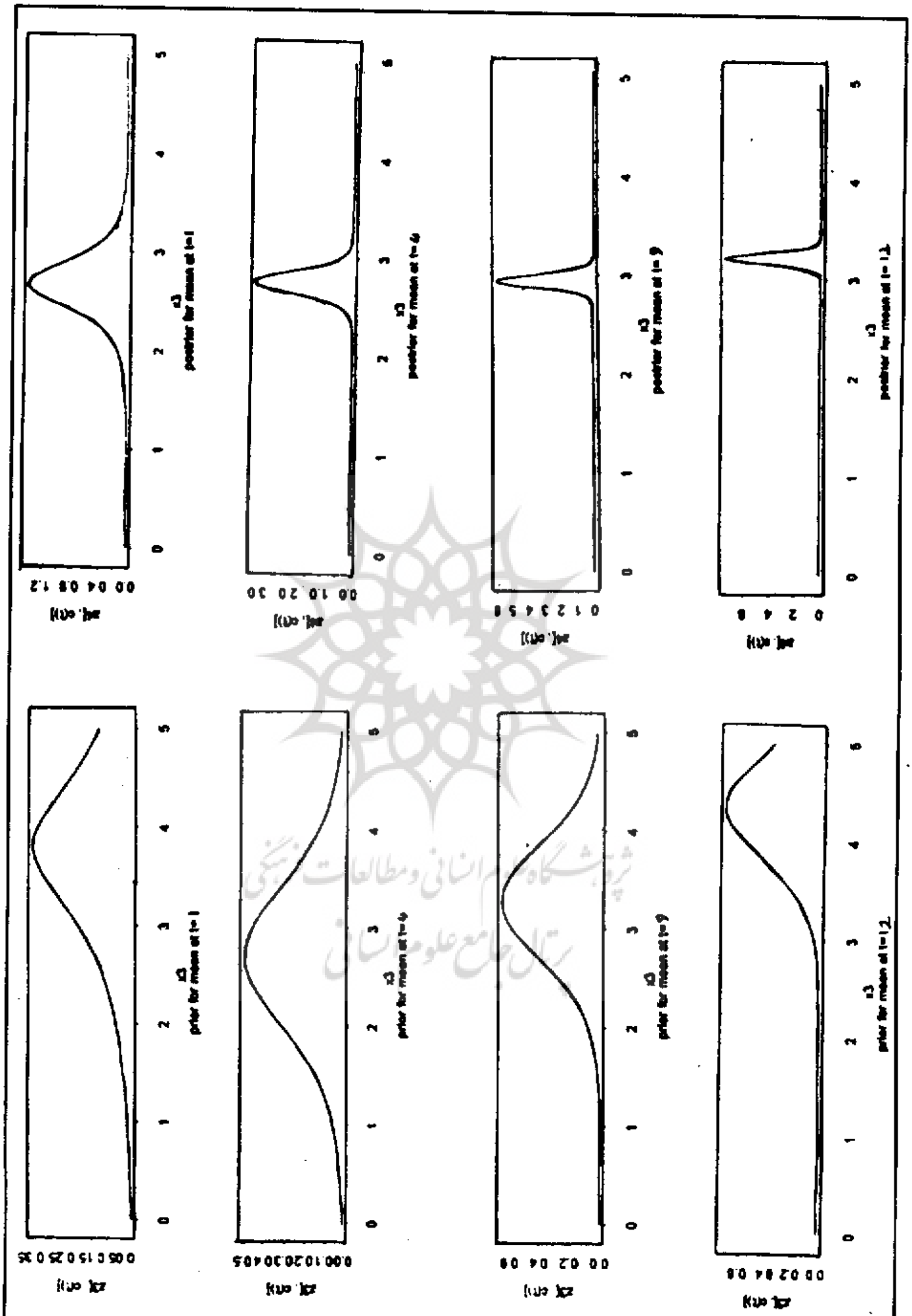
در این مرحله لازم است برآوردی به عنوان حق بیمه خالص چغندرقند برای سال بعد ارائه شود. یکی از ساده‌ترین استنباط هایی که در مبحث استنباط بیزی مطرح می‌شود، برآورد نقطه‌ای پارامتر θ است. از آن جا که در استنباط بیزی بر این عقیده هستیم که کامل‌ترین اطلاعات موجود در توزیع پسین θ خلاصه شده است، لذا هر گونه استنباطی درباره θ از طریق توزیع پسین صورت گیرد.

برای برآورد θ، گاهی از تکنیک‌های کلاسیک استفاده می‌شود که معمول‌ترین آن برآورد حداکثر درستنمایی است. بنابراین مد توزیع پسین θ به عنوان برآورد حداکثر درستنمایی ارائه می‌شود. بر این اساس مد را به عنوان برآورد حق بیمه خالص چغندرقند در نظر می‌گیریم. البته در حد توزیع $(\theta_t|D_t)$ که یک توزیع t- استودنت است، به سمت توزیع نرمال همگرا می‌شود که در این صورت مد توزیع با میانگین آن برابر خواهد بود.

پس برآوردی که به عنوان پیش بینی برای سال ۷۷ در نظر می‌گیریم، مد توزیع $(\theta_{۱۳}|D_{۱۳})$ و برابر است با ۳/۸۶ و مقدار توزیع در ازای آن ۲/۴۶۴۷۹۹۸۵۵ است. همان طور که مشاهده می‌شود مقدار مد تا دو رقم اعشار با مقدار میانگین در زمان t=۱۳ برابر است. بعد از عکس تبدیل لگاریتمی بر روی مد، مقدار برآورد ۷۲۴۴/۳۶ ریال در هکتار خواهد بود.

سال	δ=۰/۵
۶۴	۲/۵۷۶
۶۵	۲/۸۶۷۶
۶۶	۲/۷۱۶۷۶
۶۷	۲/۸۸۱۶۷۶
۶۸	۲/۸۵۳۱۶۸
۶۹	۲/۹۴۹۳۱۷
۷۰	۲/۹۴۹۹۳۲
۷۱	۳/۲۷۳۹۹۳
۷۲	۳/۳۶۹۳۹۹
۷۳	۳/۰۹۹۹۴
۷۴	۴/۳۵۰۹۹۴
۷۵	۳/۹۹۰۰۹۹
۷۶	۳/۸۵۵۰۱

با شکل ۶. نمودارهای توزیعهای پیشین و پسین میانگین در زمانهای ۱۲و۹و۴و۱=t، δ=۰/۵



نتیجه گیری

با استفاده از مدل‌های پویا می‌توان برآوردی از نرخ حق بیمه در هر زمان با توجه به مقادیر ادعاهای واقعی و مقادیر مورد انتظار ادعاها به دست آورد. مزیت این روش در این است که در مواردی که فرض همگنی پارامتر ریسک نسبت به زمان بزرگ می‌نماید، می‌توان آن را متغیر در نظر گرفت و با توجه به نظریه باورمندی بازهم یک برآورد خطی از مقادیر ادعاهای واقعی و مقادیر مورد انتظار ادعاهای خسارت را نتیجه گرفت. از طرف دیگر این روش یافتن یک برآوردگر مناسب در نظریه باورمندی را تسهیل می‌کند. در نظریه باورمندی، برآورد نرخ حق بیمه به صورت امید ریاضی میانگین پارامتر ریسک تعریف می‌شود، در حالی که با به کار گرفتن این روش، یک سیستم بیمه‌ای، سیستمی پویا تلقی می‌شود که با ارائه مدلی برای این سیستم می‌توان برآورد بیزی ناشی از آن را به عنوان برآورد نرخ حق بیمه معرفی کرد.

منابع

۱. بهداد، ابراهیم (بی تا)، بیماریهای گیاهان زراعی، (بی جا).

۲. بیطرف، لیلا (۱۳۷۸)، برآورد حق بیمه چغندرقند به کمک مدل‌های پویا: نظریه و کاربرد (پایان نامه کارشناسی ارشد، به راهنمایی دکتر سیامک نور بلوچی)، (تهران، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی).

۳. جابری دربندی، ایرج (۱۳۷۶)، دست نوشته‌های مربوط به اولین سمینار آموزشی بیمه محصولات کشاورزی .

۴. ناشناخته (۱۳۶۷)، شناخت چغندرقند و چگونگی تشخیص خسارات ناشی از تگرگ و سایر عوامل آن (بیمه چغندرقند در آلمان فدرال)، ترجمه مصطفی خلفی و ایرج جابری دربندی.

۵. هاتگ، روبرت و آلن گریگ، (۱۳۷۰)، مقدمه‌ای بر آمار ریاضی، ترجمه دکتر نوروز ایزد دوستدار، دانشگاه تهران.

۶. همایون آریا، شاهین (۱۳۷۵)، برآورد پارامترهای توزیع گاوسی وارون به روش بیز تجربی، پایان نامه کارشناسی ارشد، تهران، دانشگاه شهید بهشتی.

۷. هواسی، محمدرضا (۱۳۷۵)، نظریه مخاطره و کاربردهای آن در محاسبه حق بیمه پایان نامه کارشناسی ارشد، تهران، دانشگاه شهید بهشتی.

8. Berger, J. (1980), Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, Springer.

9. Bernardo, J. and Smith, A. (1994), Bayesian Theory.

10. Box, G. and Tiao, G.(1992), Bayesian Inference in Statistical Analysis, John Wiley & Sons. Searle, S.(1971), Linear Models, John Wiley & Sons.

11. Casella, G. and George, E.(1992), Explaining the Gibbs Sampler, The American Statistician, Vol. 46, PP. 167-174.

12. Degroot, M. (1970), Optional Statistical Decisions, McGraw - Hill.

13. Embrechts, P. and et al, (1997), Modelling Extrenal Events, Springer.

14. Johnson, L. and et al (1994), Continuous Univariate Distributions, John Wiley & Sons.

15. Makov, U and et al, "Bayesian methods in Actuarial Science", *The statisticion,* 1996 Vol. 45, PP. 503-515.

16. West, M.and Harrison, J., *Bayesian Forecasting and Dynamic Models,* Springer, 1989.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی