فصلنامه صنعت بیمه / سال شانزدهم / شماره ۲ / تابستان ۱۳۸۰ / شماره مسلسل ٦٢/ صفحات ۵۷ تا ۷۰

احتمال و شدت ورشکستگی و کاربرد آن در بیمه بدنه اتومبیل[۱]

حسن حیدری

چکیده

هدف از ارائه این مقاله به دست آوردن مقادیر احتمال ورشکستگی و شدت ورشکستگی (در صورت وقوع) است. با فرض این که در یک پورتفوی مشخص تعداد خسارت‌ها از توزیع آماری پواسون تبعیت کند و همچنین این فرض که مبالغ خسارت‌ها از توزیع آماری نمایی تبعیت کند، می‌توانیم کمیت‌های مذکور را به دست آوریم.

واژگان کلیدی

نظریه مخاطره جمعی، احتمال ورشکستگی، شدت ورشکستگی، توزیع پواسون و توزیع نمایی.

مقدمه

بررسی مسائل مربوط به ورشکستگی برای ادامه حیات یک شرکت بیمه بسیار ضروری است و در تصمیم‌گیری‌های مدیریت این شرکت نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. در این خصوص کمیت‌هایی از قبیل احتمال ورشکستگی، شدت ورشکستگی و ... را که برای هر شاخهٔ بیمه به طور مجزا محاسبه می‌شوند می‌توان بررسی کرد. ما در این مقاله بر مبنای مدل کلاسیک[۲] به مطالعه کمیت‌های فوق می‌پردازیم. بدین منظور شرکت

---

۱. این مقاله براساس پایان نامه کارشناسی ارشد نویسنده از دانشگاه شهید بهشتی تهیه شده است.

۲. مهم‌ترین ویژگی این مدل این است که تعداد خسارت‌ها در یک پورتفوی مشخص از توزیع آماری پواسون تبعیت می‌کند.

بیمه‌ای را در نظر می‌گیریم که با سرمایه اولیه مشخص فعالیت خود را در رشتهٔ خاصی از بیمه (برای مثال، بدنه اتوموبیل) شروع کرده است. مازاد سرمایه را تفاضل سرمایه اولیه و حق بیمه‌های دریافتی از مجموع خسارت‌های پرداختی تعریف می‌کنیم. مدیر عامل شرکت طبعاً مایل نیست که مازاد سرمایه در هیچ زمانی از صفر کمتر شود (اصطلاحاً ورشکسته شود).

در ابتدا احتمال ورشکستگی را با استفاده از تعریف مفهوم ویژه‌ای به نام ضریب تعدیل محاسبه می‌کنیم. واضح است پس از محاسبه احتمال ورشکستگی، اگر این مقدار زیاد باشد در ادامه حیات شرکت باید کاری کنیم که این احتمال به حداقل برسد. افزودن به سرمایه اولیه، تعدیل معقول حق بیمه‌ها و اطلاع رسانی به مردم برای کمتر شدن حوادث و خسارت‌ها از جمله راهکارهای مفید خواهد بود.

حال این پرسش مطرح می‌شود که در صورت ورشکستگی، وخامت اوضاع تا چه اندازه و شدت آن چه قدر است؟ در واقع می‌خواهیم بدانیم اگر شرکت ورشکسته شود میزان کسری سرمایه چه قدر خواهد بود؟

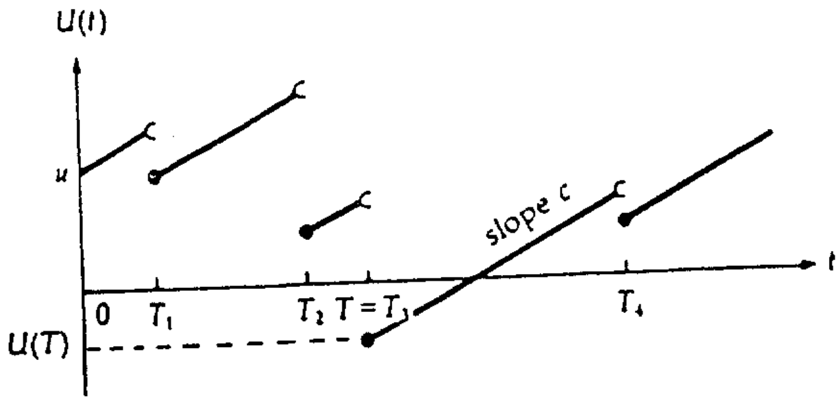
چون وقوع خسارت به صورت تصادفی است، این مقدار کسری سرمایه (اگر ورشکستگی رخ دهد) نیز به صورت یک متغیر تصادفی است. لذا ابتدا توزیع آماری آن را به دست می‌آوریم و سپس از میانگین این توزیع به عنوان کمیت شدت ورشکستگی استفاده می‌کنیم.

احتمال ورشکستگی

هدف از این بخش ارائه یک مدل ریاضی برای تغییرات مقدار مازاد بیمه گر در یک دوره زمانی معین است. در این جا منظور از مازاد (موجودی)، همان مازاد سرمایه اولیه و حق بیمه‌های جمع آوری شده، از خسارت های پرداخت شده است. توجه کنید که این تعریف، تعریف ریاضی مازاد است نه تعریف حسابداری آن.

فرض می‌کنیم در یک پورتفوی مشخص $U(t)$ نشان دهنده مازاد بیمه‌گر در زمان t باشد. همچنین فرض می‌کنیم حق بیمه‌ها به طور پیوسته و با یک نرخ ثابت $S(t)$ نشان دهنده مجموع ادعاهای خسارت تا زمان t باشد، بنابراین داریم:

$$U(t) = u(\text{سرمایه اولیه}) + Ct\,(\text{حق بیمه‌ها}) - S(t)(\text{خسارت ها}) \qquad (۱)$$



نمودار الف) یک نتیجه نوعی فرایند مازاد

توجه کنید که چون در این مدل عواملی مانند نرخ بهره، هزینه‌ها و سود سهام سهامداران را نادیده می‌گیریم، باید از حق بیمه‌ها سربار هزینه را کم کنید. یک نتیجه نوعی از فرایند مازاد U(t) در نمودار «الف» نشان داده شده است. توجه کنید که مازاد به طور خطی (با شیب c)، جز در زمان‌هایی که ادعای خسارت رخ می‌دهد، افزایش می‌یابد. پس مازاد فقط به وسیله مبالغ ادعاها کاهش می‌یابد. اگر سرمایه اولیه u به اندازه مقدار h افزایش و یا کاهش یابد، نمودار U(t) فقط به اندازه h بالا و یا پایین می‌رود و تغییر دیگری نخواهد کرد.

در نمودار «الف» مشاهده می‌کنیم که مازاد ممکن است در زمان‌های مشخصی منفی شود، وقتی این موضوع برای اولین بار اتفاق بیفتد، گفته می‌شود ورشکستگی رخ داده است. البته کلمه تکنیکی ورشکستگی معادل با فنا شدن و از دست دادن همه چیز نیست، چون در عمل وقتی همه عوامل در نظر گرفته می‌شوند، سرمایه بیمه‌گر ممکن است مثبت باشد و یا این امکان وجود داشته باشد که به وضعیت مثبت برگردد. ولی به طور کلی می‌توان از احتمال ورشکستگی به عنوان یک اندازه مفید برای مخاطرات مالی استفاده کرد.

فرض کنید T اولین زمانی باشد که مازاد سرمایه به زیر صفر می‌رسد و u سرمایه اولیه‌ای باشد که شرکت فعالیت خود را با آن در شاخه خاصی از بیمه شروع کرده است. مسلماً احتمال ورشکستگی تابعی از این سرمایه اولیه است. بدین صورت که هر چه سرمایه اولیه u بیشتر باشد، احتمال ورشکستگی کمتر است. احتمال ورشکستگی را با $\Psi(u)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi(u) = P_r(T < \infty) \qquad (۲)$$

یعنی احتمال این که ورشکستگی در یک زمان متناهی رخ دهد وجود دارد.
از ایده‌هایی که در این مقاله ارائه می‌شوند، می‌توان به عنوان یک سیستم هشدار دهنده، برای یک شرکت بیمه استفاده کرد. لزوماً برای فرایند مخاطره چنین شرکتی باید ابتدا یک مدل انتخاب کنیم و احتمال ورشکستگی بر مبنای این مدل است که مدیریت شرکت بیمه را از خطرهای احتمالی که او را تهدید می‌کنند آگاه می‌کند.
در ادامه سربار ایمنی θ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۳) (متوسط مبلغ خسارت) × (متوسط تعداد خسارت‌ها) × $(\theta + ۱)$ = حق بیمه

واضح است که اگر سربار ایمنی θ را کمتر یا مساوی صفر در نظر بگیریم، ورشکستگی قطعی است. همچنین بنا به تعریف مفهوم زمانی ویژه‌ای به نام ضریب تعدیل جواب معادله زیر است:

$$۱ + (۱ + \theta) p_۱ r = M_x(r) \qquad (۴)$$

که در این معادله $P_۱$ میانگین مبلغ خسارت و $M_x(r)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی مبالغ خسارت‌هاست. به عنوان مثال اگر توزیع مبالغ تکی ادعای خسارت نمایی با پارامتر β باشد ضریب تعدیل آن از حل معادلهٔ

$$۱ + \frac{(۱ + \theta) r}{\beta} = \frac{\beta}{\beta - r} \qquad (۵)$$

یا معادل آن

$$(1+\theta)r^2-\theta B r=0 \qquad (۶)$$

بدست می‌آید، که در این صورت یک جواب آن $r=0$ و جواب دیگر آن که همان ضریب تعدیل است به صورت $R=\frac{\theta\beta}{1+\theta}$ می‌باشد. به علاوه ثابت می‌شود که رابطه بین ضریب تعدیل و احتمال ورشکستگی به صورت زیر است:[۱]

$$\Psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E\left[e^{-RU(T)} \mid T<\infty\right]} \quad , \quad u\geq 0 \qquad (۷)$$

که در آن u سرمایه اولیه و U(T) کسری در زمان ورشکستگی است.

بنابراین اگر مبالغ خسارت‌ها از توزیع نمائی پیروی کنند، احتمال ورشکستگی $\Psi(u)$ که تابعی از سرمایه اولیه u است به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Psi(u)=\frac{1}{1+\theta}\,e^{-Ru} \qquad (۸)$$

از فرمول فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر چه سرمایه اولیه بیشتر باشد، احتمال ورشکستگی کمتر می‌شود. همچنین هر چه سربار ایمنی θ بیشتر باشد، احتمال ورشکستگی کمتر می‌شود که از لحاظ شهودی نیز هر دو قابل درک است.

شدت ورشکستگی

در این بخش علاوه بر احتمال ورشکستگی، شدت آن را نیز بررسی می‌کنیم. منظور از شدت ورشکستگی میزان کسری سرمایه در هنگام ورشکستگی است. در واقع می‌خواهیم بدانیم در صورت ورشکستگی وخامت اوضاع تا چه اندازه است.

---

۱. احتمال و شدت ورشکستگی، توزیع مازادقبل از ورشکستگی و کاربرد آن در بیمه‌بدنه‌اتوموبیل، حسن حیدری، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد رشته‌آمار بیمه، دانشگاه‌شهیدبهشتی، استاد راهنما دکتر محمدذکایی، ص ۹۶.

$$U(t) = u + (1 + (1+\theta)t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \tag{9}$$

بنابراین فرایند تصادفی $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ نشان دهنده مازاد در زمان t با یک مازاد اولیه U(۰)=u است. زمان ورشکستگی این فرایند را که با T نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

همچنین احتمال و شدت ورشکستگی را که با G(u,y) نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(u,y) = P_r\left(T < \infty \quad , u_t\ (1+\theta)t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \geq -y\right), y > 0 \tag{10}$$

در چنین تابعی احتمال آن است که ورشکستگی رخ دهد و میزان کسری سرمایه از یک عدد مفروض y-کمتر باشد. در نمودار (ب) این مسئله نشان داده شده است. در حالتی که مبالغ خسارت‌ها به صورت توزیع نمایی باشند، ثابت می‌شود که[1] تابع G(u,y) به صورت زیر است:

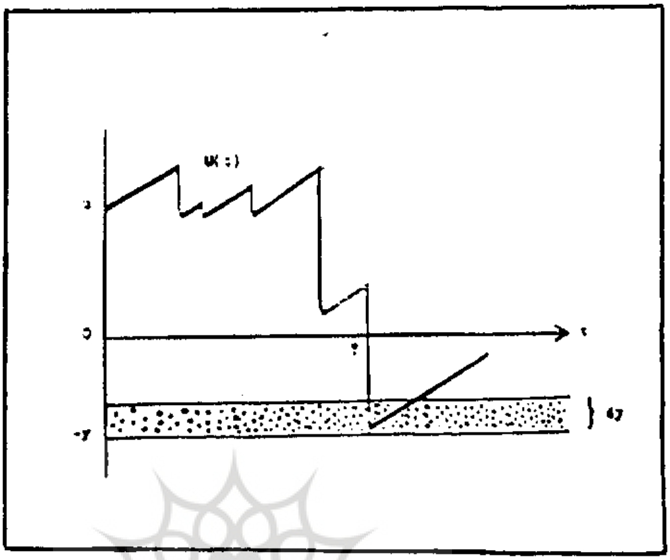
$$G(u,y) = \frac{1}{1+\theta} exp\left\{\frac{-\theta u}{1+\theta}\ (1 - exp(-y))\right\} \tag{11}$$

کاربرد احتمال و شدت ورشکستگی در بیمه بدنه اتوموبیل

در مقدمه متذکر شدیم که احتمال و شدت ورشکستگی را برای هر یک از رشته‌های بیمه می‌توان به طور مجزا به دست آورد. در این بخش می‌خواهیم کاربردی از این موارد را در کشور خود بررسی کنیم.

---

۱. همان منبع ص ۵۶.



نمودار (ب) تغییر y(u,y) dy

بدین منظور از اطلاعات مربوط به بیمه بدنه اتوموبیل استفاده کرده‌ایم. از آن جا که شرکت بیمه ایران در شاخه بیمه اتوموبیل به تنهایی بیش از نیمی از بازار را در اختیار دارد، لذا ما نیز بر آن شدیم که از اطلاعات موجود در یکی از بزرگ‌ترین مجتمع‌های خدمات بیمه‌ای این شرکت استفاده کنیم.

با ملاحظهٔ مدل ارائه شده، در یک بازه زمانی مشخص به اطلاعاتی از قبیل تعداد افراد بیمه شده، مبلغ کل حق بیمه این افراد (بدون سربار هزینه‌ها)، تعداد ادعاهای خسارت و مبالغ تکی ادعاهای خسارت احتیاج داریم. بدین منظور بیمه بدنه اتوموبیل این مجتمع خدمات بیمه‌ای را در سال ۱۳۷۷ بررسی می‌کنیم. پورتفوی مورد نظر در این سال ۳۱۹۴ مورد است و مبلغ کل حق بیمه دریافت شده از این پورتفوی ۳۵۲۹/۳۷ واحد[1] است که البته این حق بیمه شامل سربار هزینه‌ها نیز هست. چون در قسمت تئوری این مقاله، عواملی همچون هزینه‌ها، تورم، سود سهام و ... را نادیده گرفتیم، لذا

---

۱. برای سادگی محاسبات هر یک میلیون ریال را برابر ۱ واحد در نظر گرفته‌ایم.

باید از این حق بیمه دریافتی سربار هزینه حق بیمه را کسر کنیم. ولی چون در کشور ما میزان حق بیمه به صورت سنتی تعیین می‌شود و مقدار این سربار حق بیمه برای هر رشته معلوم نیست، لذا در نهایت با ارائه جدول درصدهای مختلف سربار هزینه حق بیمه را از کل حق بیمه دریافتی و همچنین مشابه این را با تهیه جدول سرمایه‌های اولیه مختلف بررسی می‌کنیم.

از پورتفوی مورد بررسی، ۵۶۱ ادعای خسارت در سال ۱۳۷۷، ۷۱۴ ادعای خسارت در سال ۱۳۷۸ و تنها ۱۰ ادعای خسارت در سال ۱۳۷۹ گزارش شده است. (از ادعاهای خسارت IBNR[1] سال ۱۳۸۰ و بعد از آن چشم پوشی کرده‌ایم) پس تعداد کل ادعاهای خسارت ۱۲۸۵ مورد است. البته توجه داریم که این بدان معنی نیست که ۱۲۸۵ فرد مختلف ادعای خسارت کرده‌اند، زیرا بعضی از افراد بیش از یک بار خسارت دیده‌اند. مبالغ تکی هر یک از این خسارت‌ها را نیز برای به دست آوردن توزیع مبالغ تکی ادعاهای خسارت گردآوری کرده‌ایم.

آزمون نیکویی برازش برای تعداد و مبالغ تکی ادعاهای خسارت

همه مباحث ما در چند بخش گذشته، بر مبنای مدل کلاسیک نظریه مخاطره جمعی ارائه شده‌اند. پس در ابتدا باید فرض پواسون بودن تعداد ادعاهای خسارت را آزمون کنیم.

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N \qquad (12)$$

که در آن N نشان دهنده تعداد ادعاهای خسارت در پورتفوی و X_i نشان دهنده مبلغ iامین ادعای خسارت است. می‌توانیم متغیر تصادفی N را به صورت

$$N = \sum_{i=1}^{3194} N_i$$

نیز بنویسیم که در آن متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع N_i، نشان دهنده تعداد مراجعات فرد iام برای دریافت ادعای خسارت است. بنابراین اگر نشان دهیم N_i دارای توزیع پواسون با پارامتر λ_1 است، آن گاه N دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 3194\ \lambda_1$

---

۱. Incurred But Not Reported خسارت‌های واقع شده اما گزارش نشده

است. بدین منظور از آزمون نیکویی برازش کی‌دو برای فرض پواسون بودن متغیر تصادفی N_i استفاده می‌کنیم.

با ملاحظهٔ شماره بیمه نامه‌های مشابه در فهرشت مبالغ ادعاهای خسارت در سال‌های ۱۳۷۷، ۱۳۷۸ و ۱۳۷۹ تعداد افرادی را که ۱، ۲، ۳ و ۴ خسارت دیده‌اند به ترتیب ۸۰۷، ۱۸۹، ۲۸ و ۴ نفر به دست آوردیم. یعنی کل افراد خسارت دیده ۱۰۲۸ نفر هستند. پس تعداد افرادی که خسارت ندیده‌اند ۲۱۶۶ = ۱۰۲۸ ـ ۳۱۹۴ نفر است. بنابراین با فرض پواسون بودن تعداد ادعاهای خسارت، برآورد پارامتر پواسون متغیر تصادفی N_i عبارت است از:

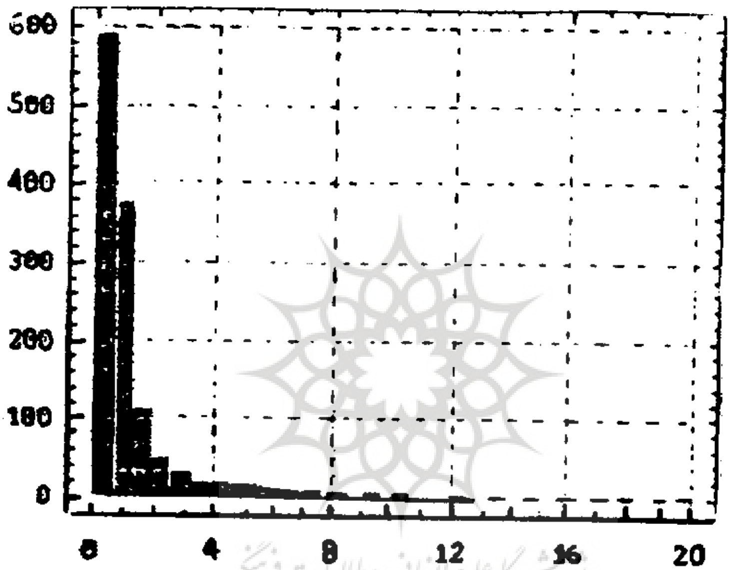
$\hat{\lambda}_1 = \bar{X} =$ ۰/۴۰۲۳

X_j	فراوانی مشاهده شده	فراوانی مورد انتظار	X_j^2
۰	۲۱۶۶	۲۱۳۶/۰۵	۰/۴۲۰
۱	۸۰۷	۸۵۹/۳۷	۳/۱۹۱
۲	۱۸۹	۱۷۲/۸۷	۱/۵۰۵
۳	۲۸	۲۳/۱۸	۱/۰۰۲
بیشتراز۴	۴	۲/۵۳	۰/۸۵۴
جمع	۳۱۹۴	۳۱۹۴	۶/۹۷۳

جدول ۱: محاسبه آمار و آزمون کی دو برای فرض پواسون بودن تعداد ادعاها

یعنی به طور متوسط هر فرد ۰/۴۰۲۳ بار برای دریافت خسارت مراجعه کرده است. حال این فرض را که N_i دارای توزیع پواسون با پارامتر ۰/۴۰۲۳ = λ_1 است، آزمون می‌کنیم. آماره آزمون به صورت $X^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}$ است که در آن o_j فراوانی مشاهده شده در طبقه iام است و از فهرست مبالغ ادعاهای خسارت به صورتی که در بالا ذکر شد، تعیین می‌شود و e_j ها فراوانی مورد انتظار در طبقه iام هستند که تحت فرض H_0 محاسبه می‌شوند. در جدول ۱، مقادیر مشاهده شده، مقادیر مورد انتظار و آماره کی‌دو آورده شده است. چون پارامتر توزیع پواسون از طریق مشاهدات برآورد

شده است، درجه آزادی توزیع کی دو، ۳ = ۱ - ۱ - (تعداد طبقات) است. کی دوی جدول با ۳ درجه آزادی و $\alpha =$ ۰/۰۵ عبارت است از: ۷/۸۱. چون مقدار آماره کی دو محاسبه شده (۶/۹۷۳) کمتر از کی دو جدول (۷/۸۱) است، فرض H_0 در سطح $\alpha =$ ۰/۰۵ پذیرفته می‌شود و این نشان دهنده این است که متغیر تصادفی N_i دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda_1 =$ ۰/۴۰۲ است. لذا متغیر تصادفی N یعنی تعداد ادعاهای خسارت در پورتفوی دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda =$ ۱۲۸۵ است.



نمودار (پ) بافت نگار مبالغ تکی ادعاهای خسارت

قبلا متذکر شده‌ایم که اگر توزیع مبالغ تکی ادعاهای خسارت دارای توزیع آماری نمایی باشد، می‌توانیم احتمال و شدت ورشکستگی را به طور دقیق محاسبه کنیم. بافت نگار مبالغ تکی ادعاهای خسارت در نمودار «پ» آمده است. بهترین توزیعی که می‌توان به این مشاهدات برازش داد، توزیع نمایی با پارامتر ۰/۵۶۷ است. آماره آزمون نیکویی برازش برای برازش دادن این توزیع نمایی ۱۵/۷۹۲ با ۹ درجه آزادی و مقدار احتمال متناظر با آن ۰/۰۷۱ است. لذا مشاهده می‌کنیم که مقدار احتمال محاسبه شده از سطح معنی داری آزمون ($\alpha =$ ۰/۰۵) بیشتر است. لذا فرض نمایی بودن توزیع مبالغ تکی ادعاهای خسارت رد نمی‌شود.

محاسبه احتمال و شدت ورشکستگی

در بخش قبلی دیدیم که تعداد ادعاهای خسارت دارای توزیع پواسون با میانگین $\lambda =$ ۱۲۸۵ و مبالغ تکی ادعاهای خسارت دارای توزیع نمایی با میانگین $p_1 =$ ۱/۷۶۳ است. قبلا متذکر شدیم که کل حق بیمه جمع آوری شده از پورتفوی برابر با ۳۵۲۹/۳۷ واحد است. همچنین با توجه به (۱۲) حق بیمه خالص پورتفوی عبارت است از:

E(s) = E(N) E(X*i*) = ۱۲۸۵ × ۱/۷۶۳= ۲۲۶۵/۴۶

ضریب تعدیل	سربار ایمنی	نسبت هزینه به حق بیمه در بیمه بدنه اتوموبیل
۰/۱۶۳	۰/۴۰۲	٪۱۰
۰/۱۱۲	۰/۲۴۶	٪۲۰
۰/۰۴۷	۰/۰۹۱	٪۳۰
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	٪۳۶
-	-۰/۰۶۵	٪۴۰
-	-۰/۲۲۱	٪۵۰

جدول ۲: سربار ایمنی و ضریب تعدیل در مقابل نسبت‌های مختلف هزینه به حق بیمه

سربار ایمنی را نیز به وسیلهٔ فرمول $c =$ ۲۲۶۵/۴۶ $(1+\theta)$ که در آن c حق بیمهٔ بدون سربار هزینه است، به ازای هزینه‌های مختلف (فقط در رشتهٔ بیمه بدنه اتوموبیل) در جدول ۲ آورده‌ایم. همچنین در این جدول ضریب تعدیل را به ازای این سربارهای ایمنی به دست می‌آوریم.

حال طبق فرمول (۸) داریم:

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\, exp\{-Ru\}$$

همچنین با توجه به فرمول (۱۱) داریم:

$$G\{u,y\}=\frac{۱}{۱+\theta}\,(۱-exp\{-\,۰/۵۶۷y\}).\,exp\{-\,Ru\} \qquad (۱۳)$$

در جدول ۳ مقادیر G(u,y) را به ازای سربارهای ایمنی مختلف به دست آورده‌ایم. راهنمای این جدول به صورت زیر است.

۱. نشان دهندهٔ مقادیر دقیق G(u,y) به ازای $\theta =$ ۰.۴۰۲.

۲. مشابه (۱)، با این تفاوت که $\theta =$ ۰.۲۴۶.

۳. مشابه (۱)، با این تفاوت که $\theta =$ ۰.۰۹۱.

بدیهی است که در سطر $y=\infty$ مقادیر $G(u,\infty)$ همان احتمال‌های ورشکستگی $\Psi(u)$ به ازای uهای مختلف‌اند.

	u=۰	u=۱۰	u=۵۰	u=۱۰۰
y=۱ (۱)	۰/۳۰۸۶۶	۰/۰۶۰۷۱	۰/۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۰
(۲)	۰/۳۴۷۲۴	۰/۱۱۳۲۳	۰/۰۰۱۲۸	۰/۰۰۰۰۰
(۳)	۰/۳۹۶۸۵	۰/۲۴۷۸۶	۰/۰۰۳۷۷	۰/۰۰۳۵۸
y=۳ (۱)	۰/۵۸۳۰۵	۰/۱۱۴۶۹	۰/۰۰۰۱۷	۰/۰۰۰۰۰
(۲)	۰/۶۵۵۹۳	۰/۲۱۳۸۹	۰/۰۰۲۴۲	۰/۰۰۰۰۰
(۳)	۰/۷۴۹۶۴	۰/۴۶۸۲۰	۰/۰۷۱۲۵	۰/۰۰۶۷۷
y=۱۰ (۱)	۰/۷۱۰۷۵	۰/۱۳۹۸۰	۰/۰۰۰۲۱	۰/۰۰۰۰۰
(۲)	۰/۷۹۹۶۰	۰/۲۶۰۷۳	۰/۰۰۲۹۵	۰/۰۰۰۰۱
(۳)	۰/۹۱۳۸۲	۰/۵۷۰۷۵	۰/۰۸۶۸۵	۰/۰۰۸۲۵
y=∞ (۱)	۰/۷۱۳۲۱	۰/۱۴۰۲۹	۰/۰۰۰۲۱	۰/۰۰۰۰۰
(۲)	۰/۸۰۲۳۶	۰/۲۶۱۶۳	۰/۰۰۲۹۵	۰/۰۰۰۰۱
(۳)	۰/۹۱۶۹۹	۰/۵۷۲۷۲	۰/۰۸۷۱۵	۰/۰۰۸۲۸

جدول ۳: مقادیر دقیق G(u,y) به ازای سربار ایمنی‌های مختلف

نتیجه گیری

با ملاحظهٔ جدول ۳ می‌توان به نتایج خوبی دست پیدا کرد. مجدداً یادآوری می‌کنیم که در این جدول u سرمایه اولیه و y مازاد کسری سرمایه در زمان ورشکستگی است. اعداد داخل جدول در سه سطح اول y یعنی y=۱، y=۳، y=۱۰ احتمال این است که «ورشکستگی رخ دهد و میزان کسری سرمایه از این y کمتر شود.» و اعداد موجود در سطح $y=\infty$ جدول احتمال‌های ورشکستگی $\Psi(u)$ به ازای سرمایه اولیه و همچنین سربارهای ایمنی مختلف‌اند. اهم نتایج به دست آمده را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

۱. به ازای هر مقدار مشخص y، هر چه سربار ایمنی θ بیشتر باشد، احتمال و شدت ورشکستگی کمتر است. برای مثال، سرمایه اولیه را صفر و میزان کسری سرمایه را ۱۰ در نظر می‌گیریم. احتمال این که ورشکستگی رخ دهد و میزان کسری سرمایه کمتر از ۱۰ واحد باشد، به ازای سربارهای ایمنی ۰/۴۰۲، ۰/۲۴۶ و ۰/۰۹۱ به ترتیب ۰/۷۱۰۷۵، ۰/۷۹۹۶۰ و ۰/۹۱۳۸۲ است.

۲. به ازای هر مقدار مشخص y، مشاهده می‌کنیم که هر چه سرمایه اولیه u زیادتر باشد، احتمال و شدت ورشکستگی کمتر است. برای مثال، به ازای سرمایه اولیه u=۱۰۰، احتمال ورشکستگی با سربارهای ۰/۴۰۲ و ۰/۲۴۶ تقریباً برابر با صفر است.

۳. چون میزان کسری سرمایه به صورت یک متغیر تصادفی است، می‌توانیم از میانگین آن به عنوان شدت ورشکستگی استفاده کنیم. در مورد مثال مورد نظر ما توزیع این متغیر تصادفی به صورت فرمول (۱۳) است. برای مثال اگر سرمایه اولیه برابر با صفر و سربار ایمنی برابر با ۰/۰۹۱ باشد، داریم:

متوسط کسری سرمایه = E(U(T)) = ۱/۶۱۶

یعنی اگر شرکت کار خود را با سرمایه اولیه صفر شروع کند، در صورت ورشکستگی به طور متوسط میزان کسری سرمایه‌اش ۱/۶۱۶ واحد خواهد بود.

منابع

1. Bowers, N.U. Gerber, J.G. Hickman, D.A. Jones and G.J. Nesbitt. (1997), *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, itasca,IL.
2. Dickson, D.G.M. (1992), *on the distribiution of the surplus to ruin, insurance mathematics and economics*, II, 191-207.
3. Gerber, H.U. Goovaerts, M. J. and kaas, R. (1987) *on the probability and severity of ruin*. ASTIN bulletin 17,151-163.