فصلنامه صنعت بیمه / سال پانزدهم / شماره ۵۷ / بهار ۱۳۷۹ / صفحات ۱۰۹ تا ۱۳۳

نقش بیمه‌های اتکایی در بقای شرکت‌های بیمه[۱]

مهدی نمن الحسینی[۲]

چکیده

بیمه گر هنگام خریداری بیمه اتکایی با دو سؤال اساسی مواجه است: یکی انتخاب نوع بیمهٔ اتکایی مناسب و دیگری تعیین میزان نگهداری یا واگذاری در بیمه اتکایی مزبور. می‌دانیم که خرید بیمه اتکایی لزوماً یک مصالحه بین سود مورد انتظار و ایمنی بیمه گر است. به دلیل وجود عامل سربار در حق بیمه اتکایی، خریداری بیمه اتکایی سود مورد انتظار بیمه گر را کاهش می‌دهد. از طرفی بیمه گر با خریداری بیمه اتکایی بخشی از ریسک را به بیمه گر اتکایی منتقل می‌کند لذا ایمنی خود را افزایش می‌دهد.

هدف از این مقاله مطالعه تأثیر بیمه‌های اتکایی بر احتمال ورشکستگی بیمه گر است. بدین منظور نشان می‌دهیم که تحت چه شرایطی خریداری بیمه اتکایی مناسب است و ایمنی بیمه گر را افزایش خواهد داد. به بیان دیگر در این مقاله روش‌های نظری و کاربردی در مورد ضرورت و یا عدم لزوم خریداری بیمهٔ اتکایی و تأثیر خریداری انواع بیمه‌های اتکایی بر ایمنی و بقای بیمه گر را بررسی می‌کنیم.

بدین منظور ابتدا در بخش نظری با استفاده از روش‌های تحلیلی ریاضی، فرمول‌های لازم را برای محاسبهٔ تقریبی احتمال ورشکستگی در دو حالت بیمه مستقیم و اتکایی به دست می‌آوریم سپس در بخش کاربردی فرمول‌های مذکور را در یکی از رشته‌های خاص بیمه

۱- نویسنده، از دانشگاه شهید بهشتی این مقاله را براساس پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد خود نوشته است (استاد راهنما: دکتر محمدرضا مشکانی، استاد مشاور: دکتر عبدالرحیم شهلایی).

۲-کارشناس ارشد آمار بیمه

(بیمه آتش سوزی) به عنوان کاربرد اجرا می‌کنیم. روش جمع آوری اطلاعات بر اساس بررسی سوابق فعالیت شرکت‌های بیمه و استخراج اطلاعات از بُردروهای بیمه‌ای است. روش‌های مورد استفاده در این مقاله دو سه سالی است که در جهان بیمه متداول شده است در حالی که پیشتر بر اساس تجربیات گذشته و روش‌های نادقیق در این مورد تصمیم‌گیری شده است ولی هم اکنون با توجه به پیشرفت هایی که در محاسبات و روش‌های عددی به وسیله کامپیوتر به وجود آمده است با استفاده از روش‌های مذکور می‌توان با جمع آوری، پردازش و تحلیل داده‌ها و نهایتاً به کارگیری مباحث آکچوئری و تئوری ریسک، لزوم خریداری بیمه اتکایی را در کلیه رشته‌های بیمه‌ای بررسی کرد و نهایتاً به حداکثر سود و ایمنی ممکن رسید.

واژگان کلیدی

احتمال بقا، احتمال ورشکستگی، بیمه اتکایی نسبی، بیمه اتکایی مازاد خسارت، توزیع تعداد خسارت، توزیع مبلغ خسارت، سربار ایمنی، ذخیره اولیه، فرایند دارایی، کران بالای لوندبرگ، مدل ریسک.

مقدمه

کثرت وقوع ریسک‌های فاجعه‌آمیز و خسارت‌های سنگین در سال‌های اخیر از یک سو و محدود بودن ظرفیت بازارهای بیمه برای پذیرش ریسک‌های جدید با سرمایه‌های سنگین از سوی دیگر باعث شده است که بیمه‌های اتکایی نقش مهمی در بازارهای بیمه ایفا کنند.

این امر از طریق انتقال بخشی از تعهدات شرکت‌های بیمه به بیمه‌گران اتکایی و در واقع از طریق توزیع ریسک در سطح وسیع و گسترده انجام می‌گیرد. بنابراین هدف بیمه‌های اتکایی به نوعی کاهش ریسک است.

احتمال ورشکستگی به عنوان یک معیار ایمنی همواره در مدیریت ریسک شرکت‌های بیمه مطرح است که برای بررسی مزیت بیمه‌های اتکایی از این معیار استفاده می‌کنیم بدین ترتیب که با مقایسه احتمال ورشکستگی در دو حالت مستقیم و اتکایی، انجام دادن بیمه اتکایی در صورتی مناسب است که وجودش باعث کاهش احتمال ورشکستگی شود.

در این مقاله تأثیر بیمه‌های اتکایی بر احتمال ورشکستگی به طور مفصل بررسی شده است. برای کاربرد عملی این مقاله از داده‌های مبالغ خسارت پرداختی بیمه آتش‌سوزی در یکی از شعبات شرکت بیمه ایران (شعبه مشهد) و تعداد خسارت‌های پرداختی شرکت بیمه ایران در رشته آتش‌سوزی در سال‌های ۱۳۷۴-۱۳۷۶ استفاده شده است که پس از برازش توزیع مناسب به دو متغیر تصادفی مذکور و محاسبه توزیع مبلغ خسارت انباشته، احتمال ورشکستگی در بیمه‌های اتکایی نسبی و مازاد خسارت محاسبه و با مقادیر متناظر در بیمه مستقیم مقایسه شده‌اند.

۱. کلیات و تعاریف

برای کاهش آثار مالی منفی برخی رویدادهای تصادفی می‌توان تصمیم گرفت که از بیمه استفاده کرد. این تصمیم‌گیری می‌تواند به وسیله یک فرد در جست و جوی ایمنی در برابر خسارت به اموال، ذخایر، درآمد و یا به وسیله یک سازمان طالب ایمنی در برابر انواع مشابهی از ریسک‌ها انجام گیرد. چنان چه این سازمان یک شرکت بیمه خواهان ایمنی در مقابل زیان به دارایی‌اش ـ ناشی از خسارات بسیار زیاد به وسیله یک فرد یا به وسیله پورتفوی بیمه گذارانش ـ باشد، چنین محافظتی بیمه اتکایی نامیده می‌شود.

می‌دانیم برای خسارات ممکن، یک مدل احتمالی مورد نیاز است. فرض کنیم مبلغ خسارات تصادفی بخشی از اقلام در معرض ریسک یک شرکت بیمه به S نشان داده شود. آن‌گاه S متغیری تصادفی است که توزیع احتمالش مورد نظر است. با در نظر گرفتن بیمه‌نامه‌های انفرادی و خسارات مربوط به هر بیمه نامه مدلی تحت عنوان **مدل ریسک انفرادی** به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S=X_1+X_2+...+X_n \qquad (1.1)$$

که در آن X_i خسارت مربوط به بیمه‌گذار شماره i است و n تعداد واحدهای بیمه شده در معرض ریسک است. معمولاً برای سادگی لازم است X_iها، متغیرهای تصادفی مستقل باشند.

در **مدل ریسک جمعی** با یک فرآیند تصادفی مواجه هستیم که مبالغ خسارت را برای یک پورتفوی ارائه می‌دهد. بنابراین فرآیند اخیر بیشتر به طور یک جا برحسب پورتفوی است تا بر حسب بیمه‌نامه‌های انفرادی موجود در پورتفوی. فرض کنیم N تعداد

خسارات واقع شده در یک پورتفوی در دوره زمانی معینی باشد. هم‌چنین فرض کنیم X_1 مبلغ اولین خسارت، X_2 مبلغ دومین خسارت و... را نشان دهد. آن‌گاه مجموع

$$S=X_1+X_2+...+X_N \qquad (2.1)$$

خسارت انباشته‌ای را نشان می‌دهد که در دوره مورد بررسی در پورتفوی مذکور ایجاد شده است. تعداد خسارات، N، متغیری تصادفی است و به **فراوانی وقوع خسارت** مربوط می‌شود. علاوه بر این مبالغ خسارت انفرادی X_1، X_2،... نیز متغیرهای تصادفی هستند و معیار **شدت خسارت** نامیده می‌شوند.

به منظور ارائه یک مدل انعطاف‌پذیر دو فرض اساسی زیر را مطرح می‌سازیم:

(۱) متغیرهای تصادفی X_1، X_2،... همتوزیع هستند.

(۲) متغیرهای تصادفی N، X_1، X_2،... دو به دو مستقل هستند.

رابطه (۲.۱) یک **مجموع تصادفی** نامیده می‌شود هر گاه فرض‌های (۱) و (۲) در مورد کلیه مؤلفه‌های آن برقرار باشد.

معمولاً برای N یک توزیع پواسون یا دو جمله‌ای منفی انتخاب می‌شود. برای مبلغ خسارت، توزیع نرمال، گاما یا توزیع دیگری انتخاب می‌شود و یا ممکن است به طور تجربی از توزیعی خاص استفاده شود. وقتی برای N توزیع پواسون انتخاب شده باشد، توزیع S **توزیع پواسون مرکب** و وقتی توزیع دو جمله‌ای منفی برای N انتخاب شود، توزیع S، **توزیع دو جمله‌ای منفی مرکب** نامیده می‌شود. این دو دسته از توزیع‌ها راهکارهای مناسبی برای مدل سازی توزیع مبلغ خسارت انباشته S فراهم می‌کند.

برای محاسبه توزیع مبلغ خسارت انباشته به روش بازگشتی با برقراری شرایط

(۱) احتمال‌های تعداد خسارت از فرمول بازگشتی

$$p_k=(a+b/k).p_{k-1} \quad \text{به ازای} \; k=1, 2, 3, ... \qquad (3.1)$$

پیروی کند که در آن $p_k=P_r(K=k)$ و مقادیر a و b با معلوم بودن توزیع تعداد خسارت مشخص می‌شوند.

(۲) توزیع مبلغ خسارت نامنفی و گسسته (با فاصله‌های مساوی) باشد. به بیان دیگر تنها مبالغ خسارت

$$X_i=i.C \qquad (i=0, 1, 2, ..., r) \qquad (4.1)$$

ممکن‌الوقوع هستند که C عدد مثبتی است و **طول گام** نامیده می‌شود. احتمال‌های مبالغ

خسارت را به

$$s_i=P_r[X=i.C] \qquad (۵.۱)$$

نشان خواهیم داد که در آن $0\leq i\leq r$. به ازای $i<0$ یا $i>r$ داریم $s_i=0$
تحت شرایط فوق مقادیر مبلغ خسارت انباشته نیز گسسته (با فاصله‌های مساوی) است چون تنها مقادیری که مضربی از طول گام C هستند ممکن الوقوع است. احتمال‌های مبلغ خسارت انباشته را به

$$f_j= P_r[S=j.C] \qquad (j=0, 1, 2, ...) \qquad (۶.۱)$$

نشان می‌دهیم که متغیر S مبلغ خسارت انباشته است. این احتمال‌ها می‌تواند به طور بازگشتی از معادلات

$$f_j=\frac{1}{1-as_0} \sum_{i=1}^{\min(j,r)} \left(a+\frac{ib}{j}\right) s_i f_{j-i} \qquad j=1, 2, ... \qquad (۷.۱)$$

با مقدار اولیه

$$f_0= \begin{cases} p_0 & ، \quad s_0=0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i s_0^{i}=M_k(\ln s_0) & ، \quad s_0>0 \end{cases} \qquad (۸.۱)$$

محاسبه شود. فرمول بازگشتی فوق به وسیله پانجر در سال ۱۹۸۱ ارائه شده است.
اکنون یک مدل ریاضی برای بررسی تغییرات در میزان درآمد مازاد بیمه‌گر در یک دوره زمانی طولانی ارائه می‌شود. درآمد مازاد را حاصل جمع ذخیره اولیه و حق بیمه‌های جمع‌آوری شدهٔ مازاد بر خسارات پرداختی در نظر می‌گیریم.
فرض کنیم $U(t)$ دارایی بیمه‌گر را در زمان $t\geq 0$ نشان دهد و حق بیمه‌ها به طور پیوسته با نرخ ثابت $C>0$ دریافت شوند. هم چنین فرض کنیم $S(t)$ مبلغ خسارت انباشته را تا زمان t نشان دهد. اگر $U(0)=u$ دارایی بیمه‌گر در آغاز فعالیت باشد، می‌توان نوشت:

$$U(t)=u+Ct-S(t) \qquad , \quad t\geq 0 \qquad (۹.۱)$$

در این مدل، بهره و سایر عوامل را ـ جز حق بیمه‌ها و خسارات که نقش اصلی را در نوسانات دارایی بیمه‌گر ایفا می‌کنند ـ در نظر نگرفته‌ایم. برای مثال از هزینه‌ها و سود سهام برای بیمه‌گذاران یا صاحبان سهام صرفنظر کرده‌ایم. یک **فرآیند دارایی** را به صورت $\{U(t),\ t\geq 0\}$ تعریف می‌کنیم. واژهٔ فرآیند به خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی

و ارتباط بین توزیع‌های‌شان اشاره دارد.

در این جا دارایی به طور خطی با ضریب زاویه C افزایش می‌یابد و تنها در زمان هایی که خسارت اتفاق می‌افتد، دارایی برحسب مبلغ خسارت نزول می‌کند. اگر ذخیره اولیه u به اندازه h واحد پولی، افزایش و یا کاهش یابد نمودار $U(t)$ به اندازه h واحد در ارتفاع بالا می‌رود یا پایین می‌آید ولی در جاهای دیگر بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین دارایی می‌تواند در زمان‌های معین منفی شود که در این صورت از وقوع ورشکستگی صحبت می‌کنیم. این عبارت معادل با **ناتوانی مالی در ایفای تعهدات** نیست. در یک وضعیت واقعی ممکن است وقوع ورشکستگی به اندازه نامش نومیدکننده نباشد، چون وقتی همه عوامل در نظر گرفته شوند وجوه بیمه‌گر ممکن است مثبت یا بازگشت دارایی به یک وضعیت مثبت محتمل باشد. به هر حال یک معیار مناسب برای بررسی ریسک مالی یک شرکت بیمه، محاسبه احتمال ورشکستگی به عنوان نتیجه‌ای از تغییرات در مبلغ دارایی بیمه‌گر است. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$T=min\{t:t\geq 0,\ U(t)<0\} \qquad (۱۰.۱)$$

در این جا T زمانی است که ورشکستگی اتفاق می‌افتد (در این صورت $T=\infty$ نشان می‌دهد که $U(t)\geq 0$ به ازای هر $t\geq 0$ یعنی ورشکستگی اتفاق نمی‌افتد). علاوه بر این رابطه

$$\psi(u)=P_r(T<\infty) \qquad (۱۱.۱)$$

احتمال ورشکستگی مورد نظر را به عنوان تابعی از ذخیره اولیه u نشان می‌دهد و در این حالت به $U(T)$، ـ مبلغ دارایی مورد نیاز بیمه‌گر در زمانی که ورشکستگی اتفاق می‌افتد ـ علاقه‌مند هستیم.

در عمل، اکثر بیمه‌گران تنها در یک دوره طولانی ولی متناهی، مثلاً ۲۰ سال به محاسبه ورشکستگی علاقه‌مندند و در واقع علاقه‌ای به یک افق نامتناهی ندارند. به طور ساده‌تر بررسی به

$$\psi(u,t)=P_r(T<t) \qquad (۱۲.۱)$$

یعنی احتمال ورشکستگی به قبل از زمان t محدود خواهد شد. به هر حال اکنون راجع به احتمال ورشکستگی در یک افق نامتناهی یعنی $\psi(u,t)$، بحث خواهیم کرد که از لحاظ ریاضی انعطاف‌پذیرتر است. البته $\psi(u)$ یک کران بالا برای $\psi(u,t)$ است. این تذکر لازم

است که مکمل $\psi(u,t)$ را **احتمال بقا** می‌نامیم و آن را به $\delta(u,t)$ نشان می‌دهیم:

$$\delta(u,t) = ۱ - \psi(u,t) = P_r(T>t) \qquad (۱۳.۱)$$

این مطالب می‌تواند به عنوان یک سیستم هشدار اولیه برای آگاهی یک شرکت بیمه به کار رود. برای نمایش این فرآیند ریسکی برای شرکت بیمه، ابتدا لازم است مدلی انتخاب شود. براساس این مدل، احتمال ورشکستگی، مدیریت شرکت بیمه را از بعضی ریسک‌های مورد بحث، آگاه می‌کند. در این جا از تأثیرات سود سهام، بهره و نرخ‌گذاری تجربی صرف نظر شده است. با وجود این، مدل‌ها مفاهیم اولیه را برای تحلیل فرآیند ریسکی یک شرکت بیمه فراهم می‌کنند. ولی در عمل، از طریق ارائهٔ تحلیل‌های اضافی آنها را کامل خواهیم کرد.

۲. بیمه اتکایی و ورشکستگی

بیمه‌گر هنگام خریداری بیمه اتکایی با دو سؤال اساسی مواجه است. یکی انتخاب نوع بیمه اتکایی و دیگری تعیین میزان نگهداری یا واگذاری در بیمه‌های اتکایی. روش‌های مختلفی برای پاسخگویی به این سؤال‌ها وجود دارد. یک روش استفاده از تابع مطلوبیت است. در این روش بیمه‌گر از میان کلیه قراردادهای بیمه اتکایی، قراردادی را که دارای بیشترین امید ریاضی مطلوبیت است، انتخاب می‌کند. این روش در مفهوم بسیار ساده است ولی در عمل استفاده نمی‌شود.

در روش دوم، نرخ حق بیمهٔ بیمه‌گر یعنی C را با داشتن سربار ایمنی نسبی، θ، به صورت

$$C = (۱+\theta)\lambda p_۱$$

در نظر می‌گیریم. سربار بیمه اتکایی، ξ طبق فرمول

(۱.۲) (میانگین خسارات پرداختی در بیمه اتکایی) $(\xi + ۱)$ = (نرخ حق بیمه اتکایی)

تعریف می‌شود. نرخ حق بیمه اتکایی به وسیله بیمه‌گر اتکایی تعیین و از آن جهت پرداخت‌ها، هزینه‌ها، ایمنی و سود بیمه اتکایی استفاده می‌شود.

روش دوم بیان می‌کند که خرید بیمه اتکایی لزوماً یک مصالحه بین سود مورد انتظار و ایمنی است. به دلیل وجود سربار در حق بیمه اتکایی، خریداری بیمه اتکایی، سود مورد انتظار بیمه‌گر را کاهش خواهد داد. از طرفی یک قرارداد بیمه اتکایی مناسب تا اندازه‌ای ایمنی بیمه‌گر را افزایش خواهد داد. در این روش ابتدا معیاری برای ارزیابی ایمنی

بیمه‌گر تعریف، و سپس تنها قراردادهای بیمه اتکایی صادق در این معیار را بررسی می‌کنیم. بیمه‌گر از مجموعهٔ قراردادهای قابل قبول، قراردادی را که بیشترین سود مورد انتظار را در بردارد، انتخاب می‌کند.

هدف از این مقاله مطالعه تأثیر بیمه اتکایی بر احتمال ورشکستگی یک شرکت بیمه در فرآیند کلاسیک دارایی است. بنابراین احتمال ورشکستگی به عنوان یک معیار خاص ایمنی مطرح است. برای مثال ممکن است لازم باشد که احتمال ورشکستگی از درصدی بیشتر نباشد. چون فقط در موارد خاص فرمول‌های صریح برای احتمال ورشکستگی وجود دارد، مطالعات قبلی در مورد تأثیر بیمه‌های اتکایی بر احتمال ورشکستگی نهایی (برای مثال گربر (۱۹۸۶)، واترز (۱۹۸۳)، سنته نو (۱۹۸۶) و هسلگر (۱۹۹۰)) به تأثیر بیمه‌های اتکایی بر ضریب تعدیل تمرکز داشتند. در نتیجه از مطالب مربوط به ضریب تعدیل، برای کسب اطلاعاتی در مورد احتمال ورشکستگی استفاده شده است. مثلاً چنانچه یک قرارداد بیمه اتکایی معین، ضریب تعدیلی ارائه دهد که به اندازه کافی بزرگ نباشد قرارداد باید اصلاح شود.

بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\psi(u)=C(u)e^{-Ru} \qquad (۲.۲)$$

به آسانی ملاحظه می‌شود که مینیمم کردن احتمال ورشکستگی معادل با ماکزیمم کردن ضریب تعدیل R است. لذا با یافتن نوعی از قرارداد بیمه اتکایی یا نگهداشتی که مقدار ضریب تعدیل را ماکسیمال سازد، می‌توانیم مقدار کران بالای لوند برگ یعنی e^{-Ru} را برای احتمال ورشکستگی نهایی مینیمم کنیم. دلیل بررسی ضریب تعدیل در گذشته، محاسبات نسبتاً ساده آن بود. در صورتی که محاسبات مربوط به احتمال ورشکستگی بسیار پیچیده و مشکل است. به هر حال، توسعه و پیشرفت اخیر الگوریتم‌های عددی برای محاسبه و تقریب احتمال ورشکستگی، این محاسبات را بیش از پیش عملی و ممکن ساخته است. (مثلاً، پانجر (۱۹۸۶)، دوویلدر و گووارتز (۱۹۸۸)، دیکسون و واترز (۱۹۹۱)، دیکسون و واترز (۱۹۹۳)). در این مقاله الگوریتم‌هایی برای مطالعه تأثیر حدود و انواع مختلف بیمه‌های اتکایی بر احتمال ورشکستگی بیمه‌گر معرفی خواهیم کرد.

در فرآیند کلاسیک دارایی ذخیره بیمه‌گر را در زمان t به $U(t)$ نشان می‌دهیم و به صورت

زیر تعریف می‌کنیم:

$$U(t)=u+Ct-S(t) \qquad (۳.۲)$$

که u ذخیره اولیه و C درآمد حق بیمه در هر واحد زمانی است که فرض می‌کنیم به طور پیوسته دریافت می‌شود. $S(t)$ مبلغ خسارت انباشته را تا زمان t نشان می‌دهد. حق بیمه طبق اصل امید ریاضی با عامل سربار $\theta(>0)$ محاسبه می‌شود. فرآیند مبلغ خسارت انباشته یک فرآیند پواسون مرکب است و می‌توان فرض کرد که پارامتر پواسون برابر یک است. مبالغ خسارت انفرادی تابع توزیع $P(x)$ دارند که فرض می‌کنیم این توزیع میانگینی برابر یک دارد. طبق این مفروضات داریم: $C=1+\theta$. احتمال ورشکستگی نهایی برای این فرآیند ریسکی را به $\psi(u)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(u)= P_r(U(t)<0 \ , \ t>0 \ \text{(به ازای برخی از مقادیر)}) \qquad (۴.۲)$$

اکنون فرض می‌کنیم که بیمه‌گر بیمه اتکایی انجام داده است. وقتی iامین خسارت ـ که آن را به X_i نشان می‌دهیم ـ اتفاق بیفتد، مبلغ خسارت پرداختی به وسیله بیمه‌گر برابر $h(X_i)$ است. در این صورت داریم:

$$0\leq h(X_i) \leq X_i$$

به طور کلی فرض می‌کنیم حق بیمه‌های اتکایی به وسیله یک عامل سربار ξ محاسبه می‌شوند و داریم: $\xi>\theta$. در عمل ممکن است این عوامل سربار در بیمه اتکایی نسبی برابر باشند یعنی $\xi=\theta$.

با فرض این که حق بیمه‌های اتکایی به طور پیوسته پرداخت می‌شوند، دارایی بیمه‌گر را در زمان t به $U(t,h)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$U(t,h)=u+(1+\theta)t-(1+\xi)t(1-E[h(X_i)])-\sum_{i=1}^{N(t)} h(X_i) \qquad (۵.۲)$$

که $N(t)$ تعداد خسارات را تا زمان t نشان می‌دهد. برای این فرآیند دارایی، احتمال ورشکستگی نهایی را به $\psi(u,h)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(u,h)= P_r(U(t,h)<0 \ , \ t>0 \ \text{(به ازای برخی از مقادیر)}) \qquad (۶.۲)$$

در ادامه دو فرم از $h(x)$ را بررسی خواهیم کرد:

(۱) بیمه اتکایی نسبی با نگهداشت α یعنی

$$h(X)=\alpha X \quad , \quad ۰<\alpha\leq ۱ \qquad (۷.۲)$$

(۲) **بیمه اتکایی مازاد خسارت با نگهداشت M یعنی**

$$h(X)=min(X,M) \qquad (۸.۲)$$

۳. الگوریتمی برای محاسبه احتمال‌های ورشکستگی نهایی

دیکسون و واترز (۱۹۹۱) یک مدل ریسکی پواسون مرکب با مشخصات زیر در نظر گرفتند:

ـ مبالغ خسارت انفرادی بر روی اعداد صحیح نامنفی با میانگین β توزیع شده‌اند که β بزرگ‌تر از یک است.

(۱.۳) ـ پارامتر پواسون برای تعداد خسارت مورد انتظار در هر واحد زمانی برابر است با $\frac{۱}{(۱+\theta)\beta}$.

ـ درآمد حق بیمه در هر واحد زمانی برابر یک واحد است.

این مدل از فرآیند دارایی را ـ که فرض می‌شود ذخیره اولیه مفروض u یک عدد صحیح است ـ به $\{Z(n)\}_{n\geq ۰}$ نشان می‌دهیم. رابطه زیر احتمال ورشکستگی نهایی را تحت این مدل می‌دهد:

$$\psi_{\mathrm{d}}(u)=P_{\mathrm{r}}(\tau<\infty) \qquad (۲.۳)$$

که در آن

$$\tau=\begin{cases} min\ \{n{:}Z(n)\leq ۰\ \ ,\ n=۱,\ ۲,\ ...\} \\ \infty \text{ باشد } Z(n)>۰\ ,n=۱,۲,... \text{ اگر به ازای} \end{cases} \qquad (۳.۳)$$

طبق دلایلی که دیکسون و واترز (۱۹۹۱) ارائه کرده‌اند می‌توان $\psi_{\mathrm{d}}(\beta u)$ را به عنوان تقریبی برای $\psi(u)$ در نظر گرفت.

احتمال‌های ورشکستگی نهایی تحت این مدل می‌تواند به طور بازگشتی محاسبه شود. بدین منظور g_k و $G(k)$ را احتمال‌های این که مبلغ خسارت انباشته در هر واحد زمانی به ترتیب مساوی و کمتر یا مساوی با k (به ازای $k=۰,\ ۱,\ ۲,\ ...$) باشد، تعریف می‌کنیم. سپس می‌توان مقادیر g_k را از فرمول بازگشتی پانجر که در روابط (۷.۱) و (۸.۱) ارائه

شده، محاسبه کرد. الگوریتم محاسبه احتمال‌های ورشکستگی نهایی برابر است با

(۴.۳) $$\psi_{\mathrm{d}}(0)=\frac{1}{(1+\theta)}$$

(۵.۳) به ازای $u\geq 1$، $$\Psi_d(u)=g_0^{-1}\left(G(u)-1+\Psi_d(u-1)-\sum_{j=1}^{u}g_j\,\Psi_d(u-j)\right)$$

در بخش‌های بعد خواهیم دید که چگونه این الگوریتم، می‌تواند با اتخاذ قراردادهای مختلف بیمه اتکایی تغییر یابد.

۴. بیمه اتکایی نسبی

فرض کنیم $\psi(u,\alpha)$ احتمال ورشکستگی نهایی را وقتی که $h(X)=\alpha X$ است، نشان دهد. آنگاه داریم:

$$\Psi(u,\alpha)=P_r\,[u+(1+\theta-(1-\alpha)(1+\xi)t-\sum_{i=1}^{N(t)}\alpha X_i<0,t>0 \text{ به‌ازای برخی از مقادیر }]$$

(۱.۴) $$=p_r\,[\frac{u}{\alpha}+(1+\hat{\theta})t-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i<0 \quad ,t>0 \text{ به‌ازای برخی از مقادیر }]$$

که در آن $\hat{\theta}=(\theta-\xi(1-\alpha))/\alpha$. بنابراین

(۲.۴) $$\psi(u,a)=\hat{\psi}(\frac{u}{\alpha})$$

در این جا $\hat{\psi}(\frac{u}{\alpha})$ با استفاده از سربار $\hat{\theta}$ محاسبه شده است. برای محاسبه احتمال‌های ورشکستگی در این حالت ابتدا توزیع $P(x)$ را بر روی نقاط ... $\frac{2}{\alpha\beta}$، $\frac{1}{\alpha\beta}$، ۰ با استفاده از روش نقطه میانی گسسته سازی می‌کنیم. سپس با انتخاب پارامتر پواسون برابر

$$1/\left[(1+\hat{\theta})\alpha\beta\right]$$

و به کار بردن فرمول بازگشتی پانجر که در روابط (۷.۱) و (۸.۱) آمده است، توزیع مبلغ خسارت انباشته را محاسبه می‌کنیم. سرانجام با استفاده از الگوریتم بازگشتی موجود در روابط (۴.۳) و (۵.۳)، تقریب‌هایی برای $\hat{\psi}(\frac{j}{\alpha\beta})$ به ازای $j=0,1,2,\ldots$ به دست می‌آوریم. چنانچه تنها مقادیر صحیح u را در نظر بگیریم با جایگذاری $j=\beta u$ مقادیر

تقریبی $\hat{\psi}(\frac{u}{\alpha})$ حاصل می‌شود که مقادیر اخیر، تقریب مورد نظر را برای $\psi(u,\alpha)$ می‌دهد. در این حالت مقدار اولیه الگوریتم برابر است با

$$\hat{\psi}_d(0)=1/(1+\theta) \tag{۳.۴}$$

۵. بیمه اتکایی مازاد خسارت

فرض کنیم $\psi(u,M)$ احتمال ورشکستگی نهایی را وقتی $h(X)=min\ (X,M)$ است، نشان دهد. در این حالت برای استفاده از الگوریتم بازگشتی ارائه شده در روابط (۴.۳) و (۵.۳) برای محاسبه مقادیر تقریبی $\psi(u,M)$، توزیع مبلغ خسارت انفرادی را بر روی نقاط $M,...,\frac{2M}{\beta},\frac{M}{\beta},0$ گسسته‌سازی می‌کنیم که که β عددی صحیح و دلخواه است. اگر مقدار u ی مفروض برای محاسبه $\psi(u,M)$، مضرب صحیحی از $\frac{M}{\beta}$ نباشد، آن گاه احتمال ورشکستگی را به وسیله درونیابی خطی، به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\psi(u,M)=(k+1-\frac{\beta u}{M})\psi(k,M)+(\frac{\beta u}{M}-k)\psi(k+1,M) \tag{۱.۵}$$

که در آن k عددی صحیح است به طوری که $k\leq\frac{\beta u}{M}<k+1$ مقادیر $\psi(u,M)$ را به ازای مقادیری از M که مضارب صحیحی از ۰/۰۱ هستند، محاسبه می‌کنیم.

در اکثر محاسبات، مقدار β را برابر ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم، در حالی که محاسبه مقادیر $\psi(u,M)$ با استفاده از مقدار بزرگ‌تری از β (مثلاً ۳۰۰) نیز امکان‌پذیر است. اگر لازم باشد می‌توان از مقادیر بزرگ‌تر β استفاده کرد تا وقتی که مقادیر $\psi(u,M)$ محاسبه شده به ازای مقادیر مختلف β یکی شوند.

مانند بخش قبل توزیع مبلغ خسارت انفرادی را با استفاده از روش نقطه میانی گسسته سازی می‌کنیم. گفتنی است که این روش متوسط مبالغ خسارت انفرادی پرداخت شده توسط بیمه گر را تغییر نمی‌دهد.

مثال: توزیع‌های نمایی و پارتو دو توزیع معروف برای مبلغ خسارت هستند که توزیع نمایی بیانگر رفتار مبالغ خسارت کوچک است ولی در مورد مبالغ بزرگ خسارت توزیع پارتو مناسب است.

اکنون بیمه اتکایی را در حالت خاصی که توزیع مبلغ خسارت رفتاری نمایی دارد بررسی

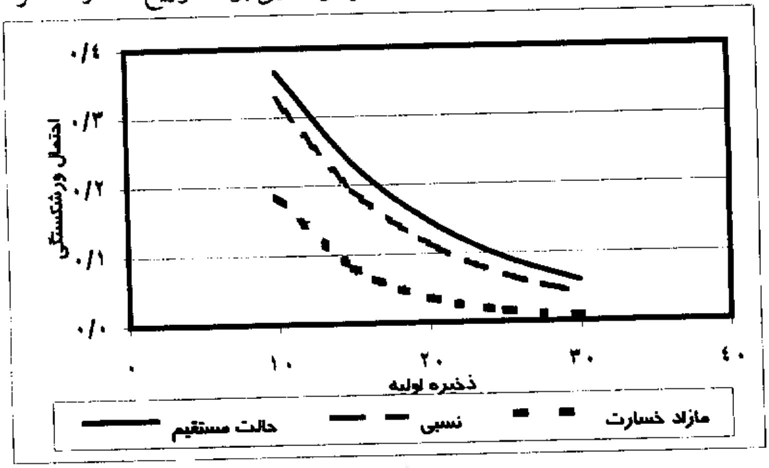
می‌کنیم. بدین منظور مقادیر احتمال ورشکستگی در دو حالت بیمه مستقیم و بیمه‌های اتکایی نسبی و مازاد خسارت به ازای مقادیر مختلف ذخیره اولیه و مقادیر مفروض سربار در حالات مذکور محاسبه می‌کنیم.

در جدول ۱ ارقام محاسبه شده نمایش یافته‌اند. طبق ارقام جدول مثلاً به ازای ذخیره اولیه ۱۵ واحد پولی، احتمال ورشکستگی در بیمه مستقیم (با عامل سربار ۱۰ درصد) برابر ۲۳/۲ درصد است. حال چنان‌چه بیمه‌گر اقدام به خریداری بیمه اتکایی نسبی (با عامل سربار ۱۵ درصد) کند احتمال ورشکستگی‌اش به ۱۹/۴ درصد کاهش می‌یابد. هم چنین اگر بیمه‌گر بیمه اتکایی مازاد خسارت (با عامل سربار ۱۵ درصد) خریداری کند، احتمال ورشکستگی‌اش به ۸/۲ درصد تنزل می‌کند. بنابر این در این مثال فرضی چون بیمه اتکایی مازاد خسارت به میزان بیشتری احتمال ورشکستگی بیمه‌گر را کاهش و به بیان دیگر ایمنی بیمه‌گر را افزایش می‌دهد (از ۲۳/۲ درصد به ۸/۲ درصد) لذا خریداری بیمه اتکایی مازاد خسارت پیشنهاد می‌شود. این موضوع در شکل ۱ به وضوح قابل رؤیت است.

جدول ۱. مقادیر احتمال ورشکستگی به ازای مقادیر مختلف ذخیره اولیه در دو حالت بیمه مستقیم و بیمه‌های اتکایی نسبی و مازاد خسارت با فرض نمایی بودن توزیع مبالغ خسارت انفرادی

ذخیره اولیه	احتمال ورشکستگی		
	حالت مستقیم	حالت اتکایی ۰/۱۵ / ۰/۱	
	ـ / ۰/۱	نسبی	مازادخسارت
۱۰	۰/۳۶۶۲۶۳۹۳	۰/۳۲۶۶۶۰۳۰	۰/۱۸۵۲۸۸۱۸
۱۵	۰/۲۳۲۴۸۱۰۶	۰/۱۹۳۵۲۶۶۶	۰/۰۸۱۵۴۸۸۱
۲۰	۰/۱۴۷۵۶۴۱۸	۰/۱۱۴۶۳۰۶۸	۰/۰۳۵۸۹۴۹۲
۲۵	۰/۰۹۳۶۶۴۳۷	۰/۰۶۷۸۹۳۳۹	۰/۰۱۵۸۰۳۵۲
۳۰	۰/۰۵۹۴۵۲۱۹	۰/۰۴۰۲۱۰۲۳	۰/۰۰۶۹۶۱۶۹

شکل ۱. مقایسه مقادیر احتمال ورشکستگی به ازای مقادیر مختلف ذخیره اولیه در دو حالت بیمه مستقیم و بیمه‌های اتکایی نسبی و مازاد خسارت با فرض نمایی بودن توزیع خسارت انفرادی



۶. بررسی بیمه‌های آتش سوزی

اکنون می‌خواهیم مطالب بیان شده را در قالب یک مثال عملی - کاربردی پیاده سازی کنیم. بدین منظور داده‌های آماری زیر از شرکت بیمه ایران تهیه و جمع آوری شده است:

۱- تعداد خسارت‌های پرداخت شده به وسیله شرکت بیمه ایران به بیمه گذران رشته آتش سوزی به صورت ماهانه مربوط به سه سال ۱۳۷۴، ۱۳۷۵ و ۱۳۷۶ در جدول ۲ نشان داده شده است:

جدول ۲. تعداد خسارت‌های بیمه آتش سوزی در شرکت بیمه ایران به تفکیک ماه طی سال‌های ۷۶ - ۱۳۷۴

ماه / سال	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند
۱۳۷۴	۹۷	۱۳۲	۱۵۷	۱۵۷	۱۴۶	۱۳۳	۱۰۷	۱۵۸	۱۴۱	۲۲۷	۱۸۸	۲۵۷
۱۳۷۵	۱۰۰	۲۱۳	۱۴۳	۱۳۱	۱۵۲	۱۴۹	۱۸۸	۱۷۴	۱۹۰	۱۸۷	۲۲۶	۳۹۵
۱۳۷۶	۲۰۸	۲۹۱	۲۳۷	۲۴۴	۳۰۴	۱۹۹	۲۲۸	۲۵۶	۲۴۱	۲۶۲	۲۴۵	۴۱۳

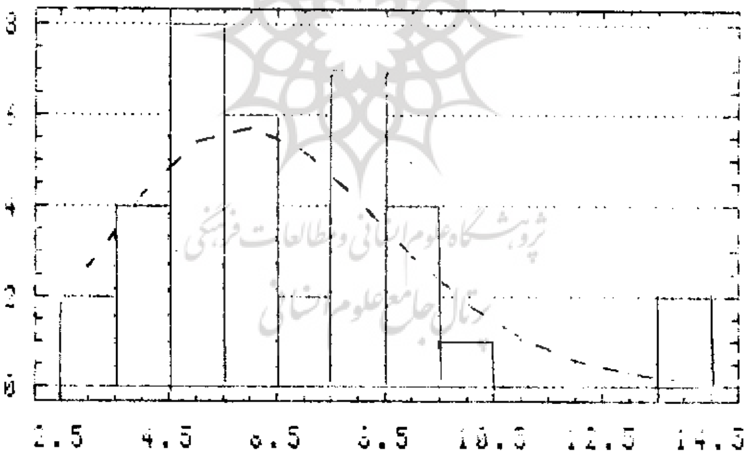
برای بررسی نحوه توزیع تعداد خسارت در بازه‌های زمانی، به علت کم بودن حجم نمونه‌ها و فقدان اطلاعات دقیق در بازه‌های زمانی کوچک (هفته و یا روز) و تراکم شدید

تعداد خسارت‌های پرداختی به صورت ماهانه، از متوسط تعداد خسارت در هر روز از ماه به صورت گرد شده استفاده می‌کنیم. جدول ۳ این مقادیر را نشان می‌دهد:

جدول ۳. متوسط روزانه تعداد خسارت‌های بیمه آتش سوزی در شرکت بیمه ایران در هر ماه از سال طی سال‌های ۷۶-۱۳۷۴

ماه / سال	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند
۱۳۷۴	۳	۴	۵	۵	۵	۴	۴	۵	۵	۸	۶	۹
۱۳۷۵	۳	۷	۵	۴	۵	۵	۶	۶	۶	۶	۸	۱۴
۱۳۷۶	۷	۹	۸	۸	۱۰	۶	۸	۹	۸	۹	۸	۱۴

شکل ۲ فراوانی نسبی تعداد خسارت را به صورت روزانه همراه با برازش توزیع پواسون به این مقادیر نشان می‌دهد.



شکل ۲. نمودار فراوانی تعداد خسارت به صورت روزانه همراه با برازش توزیع پواسون

با انجام دادن آزمون نیکویی برازش خی دو ملاحظه می‌شود که توزیع تعداد ادعاهای خسارت روزانه در رشته آتش سوزی از نوع پواسون با میانگین ۶/۳۶ مورد در سطح معنی داری ۹۸ درصد است.

بنابراین تابع احتمال تعداد خسارت به صورت زیر است:

$$p(n) = e^{-۶/۳۶}\ \frac{(۶/۳۶)^{n}}{n!} \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

یعنی در پورتفوی آتش سوزی شرکت بیمه ایران به طور متوسط در هر روز از ماه تعداد ۶/۳۶ مورد خسارت آتش سوزی اتفاق می‌افتد.

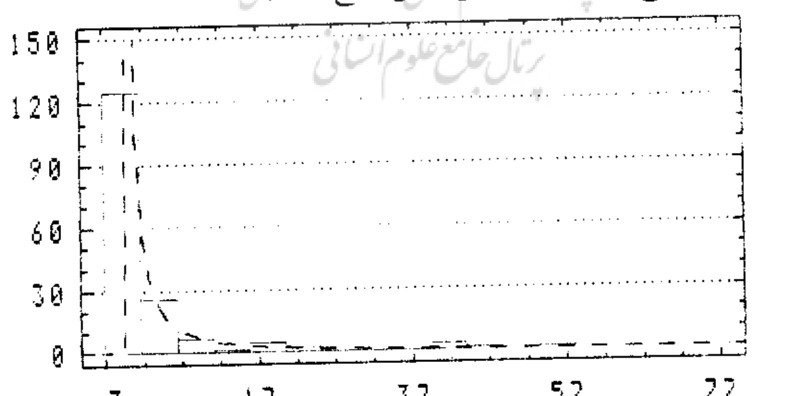
۲- مبالغ ۱۷۲ مورد خسارت پرداختی به بیمه‌گذاران رشته آتش سوزی شرکت بیمه ایران - شعبه مشهد در سال ۱۳۷۶ در جدول ۴ آمده است. تنها از دیدگاه امکان انجام دادن محاسبات فرض شده است که توزیع مبلغ خسارت بیمه آتش سوزی در شعبه مشهد رفتاری همانند توزیع مبلغ خسارت پور تفوی آتش سوزی در شرکت بیمه ایران داشته و نمونه‌ای از آن است.

در این مرحله برای برازش توزیع احتمال مناسب به مبالغ خسارت، نمودار فراوانی نسبی مبالغ خسارت را در نظر می‌گیریم. بررسی این نمودار نشان می‌دهد که چگالی نمایی، گاما یا وایبول برای رفتار احتمالی متغیر تصادفی مبالغ خسارت مناسب است.

پس از برازش توزیع‌های مختلف آماری به متغیر تصادفی مبالغ خسارت، ملاحظه می‌شود که چگالی وایبول با پارامترهای $\gamma = ۰/۳۴۷$ و $\eta = ۷۸۷$ به این داده‌ها بهتر می‌برازد.

شکل ۳ فراوانی نسبی مبالغ خسارت را همراه با برازش توزیع وایبول به این مقادیر نشان می‌دهد.

شکل ۳: برازش توزیع وایبول به فراوانی نسبی مبالغ خسارت



جدول ۴.مبالغ خسارت‌بیمه آتش سوزی در شرکت بیمه ایران – شعبه مشهد (به‌هزار ریال)

ردیف	مبلغ‌خسارت	ردیف	مبلغ‌خسارت	ردیف	مبلغ‌خسارت	ردیف	مبلغ‌خسارت	ردیف	مبلغ‌خسارت	ردیف	مبلغ‌خسارت
۱	۱۶۶/۲۰	۳۰	۲۷۰/۰۰	۵۹	۱۳۵/۰۰	۸۸	۱۰۱۱۲/۳۵	۱۱۷	۲۴۸۳/۰۰	۱۴۶	۷۰۶۵/۴۴
۲	۲۵۲۰/۹۸	۳۱	۷۷۰۰/۰۰	۶۰	۱۴۱/۰۰	۸۹	۱۷۰/۰۰	۱۱۸	۳۹۰۱/۰۳	۱۴۷	۳۹۹۸/۰۳
۳	۱۹۰/۰۰	۳۲	۱۰۸/۳۰	۶۱	۲۵۵/۸۹	۹۰	۴۳۷۴۷/۵۰	۱۱۹	۳۱۰۹/۴۴	۱۴۸	۱۰۴۹۷/۸۹
۴	۱۰۹/۷۰	۳۳	۶۰۰/۰۰	۶۲	۱۰۹/۹۷	۹۱	۴۱۶۲۵/۰۰	۱۲۰	۱۱۵/۰۰	۱۴۹	۲۰۰/۳۰
۵	۱۸۵/۰۰	۳۴	۶۷۵۰/۰۰	۶۳	۴۷۵/۰۰	۹۲	۴۰۵۶/۹۰	۱۲۱	۱۳۰/۷۰	۱۵۰	۴۵۰/۰۰
۶	۴۶۹۷/۹۵	۳۵	۱۶۰۰/۰۰	۶۴	۱۶۰۰/۰۰	۹۳	۱۶۵/۵۰	۱۲۲	۱۰۰/۰۰	۱۵۱	۵۱۰/۱۹
۷	۱۸۶/۳۵	۳۶	۱۰۸/۷۸	۶۵	۱۵۹/۵۰	۹۴	۶۹/۲۸	۱۲۳	۲۳۲/۰۰	۱۵۲	۱۴۸/۱۸
۸	۷۹۲/۰۰	۳۷	۵۲۶۶/۰۰	۶۶	۱۰۰/۱۸	۹۵	۲۱۲۸۰/۷۲	۱۲۴	۲۶۶/۰۰	۱۵۳	۵۸۶۸/۰۹
۹	۱۹۶۸۲/۷۴	۳۸	۸۷۷/۷۳	۶۷	۱۱۰/۰۰	۹۶	۱۹۰۵۳/۰۰	۱۲۵	۱۲۶۰/۰۰	۱۵۴	۷۰۰۰/۰۰
۱۰	۲۱۰/۵۰	۳۹	۴۲۶۰/۰۰	۶۸	۹۹/۲۳	۹۷	۳۲/۵۰	۱۲۶	۶۰/۰۰	۱۵۵	۵۵/۰۰
۱۱	۱۶۲/۵۰	۴۰	۱۷۰/۰۰	۶۹	۱۲۲/۸۵	۹۸	۷۹۳/۰۰	۱۲۷	۳۳۶۳/۵۰	۱۵۶	۲۴۵۱/۲۵
۱۲	۲۲۱۷۷/۷۵	۴۱	۱۳۹۵/۵۰	۷۰	۲۰۶/۲۵	۹۹	۴۶۴/۷۲	۱۲۸	۲۳۸۲/۳۶	۱۵۷	۱۸۸/۵۵
۱۳	۲۱۰/۰۰	۴۲	۷۹۰/۰۰	۷۱	۱۷۸۰۰/۰۰	۱۰۰	۲۷۰/۰۰	۱۲۹	۱۹۱/۴۷	۱۵۸	۱۵۳/۶۰
۱۴	۱۲۵/۶۸	۴۳	۹۶/۳۰	۷۲	۱۷۱/۶۴	۱۰۱	۱۷۰/۸۰	۱۳۰	۸۵۵/۸۵	۱۵۹	۷۲/۶۰
۱۵	۱۸۲۵/۰۰	۴۴	۱۰۷/۰۰	۷۳	۲۰۶/۵۴	۱۰۲	۱۸۵/۹۵	۱۳۱	۱۶۸/۹۰	۱۶۰	۱۴۴/۰۰
۱۶	۱۸۷/۰۰	۴۵	۲۵۳/۸۰	۷۴	۲۰۵/۷۰	۱۰۳	۱۶۸۹/۶۳	۱۳۲	۷۰۰/۰۰	۱۶۱	۱۱۶/۹۰
۱۷	۱۲۰/۰۸	۴۶	۱۲۹۰/۰۰	۷۵	۲۱۶/۱۱	۱۰۴	۱۷۵۷۱/۱۱	۱۳۳	۱۰۰۰/۰۰	۱۶۲	۲۵۷۸۸/۵۰
۱۸	۱۵۰۰۰/۰۰	۴۷	۱۶۶/۹۸	۷۶	۲۱۵۰/۰۰	۱۰۵	۷۹/۶۰	۱۳۴	۱۶۵/۰۰	۱۶۳	۲۲۹/۳۶
۱۹	۲۴۰/۰۰	۴۸	۹۸/۳۳	۷۷	۱۸۲/۰۰	۱۰۶	۱۸۰/۰۰	۱۳۵	۴۲۳۹۲/۰۰	۱۶۴	۴۱/۷۰
۲۰	۲۱۱/۲۰	۴۹	۹۷۸۰/۴۵	۷۸	۱۳۸/۰۰	۱۰۷	۸۴۵/۰۰	۱۳۶	۱۱/۴۳	۱۶۵	۱۷۸/۸۶
۲۱	۱۹۲/۷۰	۵۰	۱۵۸/۹۰	۷۹	۱۴۰/۹۰	۱۰۸	۵۵۱/۵۰	۱۳۷	۱۹۹۰/۰۰	۱۶۶	۱۲۱/۰۰
۲۲	۲۵۰/۰۰	۵۱	۴۲۶/۷۶	۸۰	۲۱۳/۱۹	۱۰۹	۱۴۴۳/۷۵	۱۳۸	۴۸۰۷/۰۰	۱۶۷	۶۰/۰۰
۲۳	۱۲۴۴/۸۰	۵۲	۵۸۰/۰۰	۸۱	۴۳۴۰/۲۵	۱۱۰	۲۰۲/۴۰	۱۳۹	۲۳۹۲/۶۵	۱۶۸	۱۰۰/۰۰
۲۴	۱۹۳۰/۰۰	۵۳	۲۲۰۰/۰۰	۸۲	۶۷/۵۰	۱۱۱	۴۵۰/۰۰	۱۴۰	۲۵۴/۸۰	۱۶۹	۴۶۶/۹۰
۲۵	۲۳۰/۰۰	۵۴	۵۰۰/۰۰	۸۳	۱۱/۸۰	۱۱۲	۱۶۹۷/۳۵	۱۴۱	۳۶۶/۰۰	۱۷۰	۴۰۰۰/۰۰

۲۶	۱۶۵/۰۰	۵۵	۲۲۰/۸۰	۷۴	۴۷۳۲۳/۰۳	۱۱۳	۴۸۱۹/۴۷	۱۴۲	۵۴۶/۰۰	۱۷۱	۳۷۷۸/۰۰
۲۷	۱۶۲/۰۰	۵۶	۲۰۶۵/۵۰	۸۵	۱۳۸/۵۲	۱۱۴	۶۵۶/۲۵	۱۴۳	۴۷۱/۷۵	۱۷۲	۲۰۴/۰۰
۲۸	۱۹۹۹۷/۶۸	۵۷	۱۵۱/۸۹	۸۶	۲۱۷/۶۴	۱۱۵	۳۶۱۱/۷۹	۱۴۴	۱۲۶/۵۰		
۲۹	۹۹/۰۰	۵۸	۹۸۰/۰۰	۸۷	۵۵۱۰۲/۲۵	۱۱۶	۳۴۰/۷۳	۱۴۵	۵۲/۷۸		

آماره آزمون معنی داری خی دو برای این برازش برابر با ۰/۱۳۷ است و در سطح معنی داری ۹۳ درصد نیکویی این برازش تأیید می‌شود.

ذکر این نکته لازم است که چون مبالغ خسارت از یکی از شعبه‌های شرکت بیمه ایران (شعبه مشهد) تهیه شده است، نمونه گرفته شده بیان‌گر پیشامدهایی است که در این شعبه رخ داده است.

بنابراین چگالی احتمال متغیر تصادفی مبالغ خسارت به صورت زیر است:

$$p(z) = \frac{۰/۳۴۷}{۷۸۷^{(۰/۳۴۷)}} z^{(۰/۳۴۷-۱)} e^{-(\frac{z}{۷۸۷})^{۰/۳۴۷}} \quad , \qquad z \geq ۰$$

و تابع توزیع مبالغ خسارت پرداختی به صورت

$$P(z) = ۱ - e^{-(\frac{z}{۷۸۷})^{۰/۳۴۷}} \quad , \qquad z \geq ۰$$

است می‌دانیم میانگین توزیع وایبول با پارامترهای γ و η برابر است با

$$p_۱ = E(Z) = \frac{\eta}{\gamma}\ \Gamma(\frac{۱}{\gamma}) = \frac{۷۸۷}{۰/۳۴۷}\ \Gamma(\frac{۱}{۰/۳۴۷}) = ۴۰۷۸/۸۶$$

۱.۶. بیمه اتکایی نسبی

در بیمه اتکایی نسبی طبق رابطه (۷.۲) داریم: $h(X) = \alpha X\ ,\ ۰<\alpha \leq ۱$ که α نگهداشت بیمه اتکایی نسبی است. در این حالت دارایی بیمه گر در زمان t بصورت زیر در می‌آید:

$$U(t,\alpha) = u + (۱+\theta)\, E(X)\, t - (۱+\xi)\, E\,[X-\alpha X]\, t - \sum_{i=۱}^{N(t)} \alpha X_i$$

$$= u + \left[۱+\theta - (۱+\xi)\,(۱-\alpha)\right] \lambda P_۱ t - \alpha \sum_{i=۱}^{N(t)} X_i$$

هم چنین احتمال ورشکستگی در این حالت برابر است با:

$$\psi(u,\alpha)=P_r[u+(1+\theta-(1-\alpha)(1+\xi)\lambda P_1 t-\alpha \sum_{i=1}^{N(t)} X_i<0\ ,\ t>0 \text{ به‌ازای برخی از مقادیر }]$$

$$= P_r\ [\frac{u}{\alpha} + (1+\hat{\theta})\ \lambda P_1 t-\alpha \sum_{i=1}^{N(t)} X_i<0\ ,\ t>0 \text{ به‌ازای برخی از مقادیر }]$$

که در آن $\frac{\theta-\xi\ (1-\alpha)}{\alpha} = \hat{\theta}$ و هم چنان رابطه (۲.۴) یعنی $\psi\ (u,\alpha)=\hat{\psi}\ (\frac{u}{\alpha})$ برقرار است.

طبق مطالب بخش ۴ برای محاسبه احتمال ورشکستگی باید توزیع وایبول را بر روی نقاط .... , $\frac{2}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\alpha\beta}$, ۰ گسسته سازی کنیم. پارامتر پواسون در این حالت برابر است با

$$1/\left[(1+\hat{\theta})\ \alpha\beta\lambda P_1\right]$$

برای محاسبه مقادیر تقریبی احتمال ورشکستگی در حالت بیمه اتکایی نسبی ابتدا گام گسسته سازی را برابر $\beta=0/01$ قرار می‌دهیم. سپس به کمک فرمول بازگشتی پانجر (روابط (۷.۱) و (۸.۱)) توزیع مبلغ خسارت انباشته را به دست می‌آوریم. در انتها با استفاده از الگوریتم بازگشتی موجود در روابط (۴.۳) و (۵.۳) مقادیر تقریبی احتمال ورشکستگی را در این حالت محاسبه می‌کنیم.

۲.۶. بیمه اتکایی مازاد خسارت

در حالت کلی توابع توزیع و چگالی وایبول $(\gamma\ ,\ \eta)$ به صورت زیر است:

$$P(x) = 1-exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\gamma}\right\}$$

$$p(x)=\gamma\eta^{-\gamma}x^{\gamma-1}exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\gamma}\right\}$$

طبق رابطه (۸.۲) بیمه اتکایی مازاد خسارت با نگهداشت M به صورت $h(X)=X_M=min(X,M)$ معرفی می‌شود. در این حالت فرایند دارایی مفروض در رابطه (۵.۲) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$U(t,M) = u + (۱+\theta)\,E(X)\,t - (۱+\xi)\,E\,[X - X_M]\,t - \sum_{i=۱}^{N(t)} min\,(X_i, M)$$
$$= u + (۱+\theta)\lambda\,E(Z)\,t - (۱+\xi)\lambda\,E\,[Z - Z_M]\,t - \sum_{i=۱}^{N(t)} min\,(X_i, M)$$

طبق مطالب بخش ۵ می‌توان نوشت:

$$E(Z_M) = \int^{M} exp\left\{-(\frac{z}{\eta})^{\gamma}\right\} dz$$

که با مفروض بودن مقادیر M، α=۰/۳۴۷ و β =۷۸۷ داریم:

$$E(Z_M) = \int_{۰}^{M} exp\left\{-(\frac{z}{۷۸۷})^{۰/۳۴۷}\right\} dz$$

برای محاسبه انتگرال فوق از نرم افزارهای ریاضی استفاده شده است. می‌توان نوشت:

$$E(Z - Z_M) = p_۱ - \int_{۰}^{M} exp\left\{-(\frac{z}{۷۸۷})^{۰/۳۴۷}\right\} dz$$

در این حالت درآمد حق بیمه C، به صورت زیر است:

$$C = (۱+\theta)E(X) - (۱+\xi)\,E\,(X - X_M)$$

$$= \lambda p_۱ \left\{ ۱+\theta - (۱+\xi)\left[۱ - \frac{۱}{p_۱}\int_{۰}^{M} exp\left\{-(\frac{z}{\eta})^{\gamma}\right\} dz\right]\right\}$$

$$= \lambda p_۱(۱+\hat{\theta})$$

که در آن

$$p_۱ = \int_{۰}^{\infty} \gamma(\frac{z}{\eta})^{\gamma} exp\left\{-(\frac{z}{\eta})^{\gamma}\right\} dz$$

$$= \int_{۰}^{\infty} (۰/۳۴۷)(\frac{z}{۷۸۷})^{۰/۳۴۷} exp\left\{-(\frac{z}{۷۸۷})^{۰/۳۴۷}\right\} dz = ۴۰۷۸/۸۶$$

بنابراین فرایند دارایی در این حالت به صورت زیر در می‌آید:

$$U(t,M) = u + (۱+\hat{\theta})\,\lambda p_۱ t - \sum_{i=۱}^{N(t)} min\,(X_i\,,M)$$

که در آن

$$\hat{\theta} = \theta - (۱+\xi)\left[۱ - \frac{۱}{۴۰۷۸/۸۶}\int_۰^M exp\left\{-(\frac{z}{۷۸۷})^{۰/۳۴۷}\right\}dz\right]$$

برای محاسبه احتمال ورشکستگی در این حالت باید توزیع وایبول را بر روی نقاط

$$۰, \frac{M}{\beta}, \frac{۲M}{\beta}, \ldots, \frac{\beta M}{\beta} = M$$

گسسته سازی کنیم. پارامتر پواسون در این حالت برابر است با:

$$\lambda = M / \left[(۱+\hat{\theta})\,\beta\lambda p_۱\right]$$

بدین منظور ابتدا گام گسسته سازی (β) را برابر ۱۰۰ اختیار می‌کنیم. سپس به کمک فرمول بازگشتی پانجر (روابط (۷.۱) و (۸.۱)) توزیع مبلغ خسارت انباشته را به دست می‌آوریم. در انتها با استفاده از الگوریتم بازگشتی مفروض در روابط (۴.۳) و (۵.۳) مقادیر تقریبی احتمال ورشکستگی را در حالت بیمه اتکایی مازاد خسارت محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم:

$$\psi(۰,M) = \frac{E\left[h(X)\right]}{C} = \frac{E\,(X_M)}{\lambda p_۱(۱+\hat{\theta})}$$

$$= \frac{\int_۰^M exp\left\{-(\frac{z}{۷۸۷})^{۰/۳۴۷}\right\}dz}{p_۱\left\{۱+\theta - (۱+\xi)\left[۱ - \frac{۱}{p_۱}\int_۰^M exp\left\{-(\frac{z}{۷۸۷})^{۰/۳۴۷}\right\}dz\right]\right\}}$$

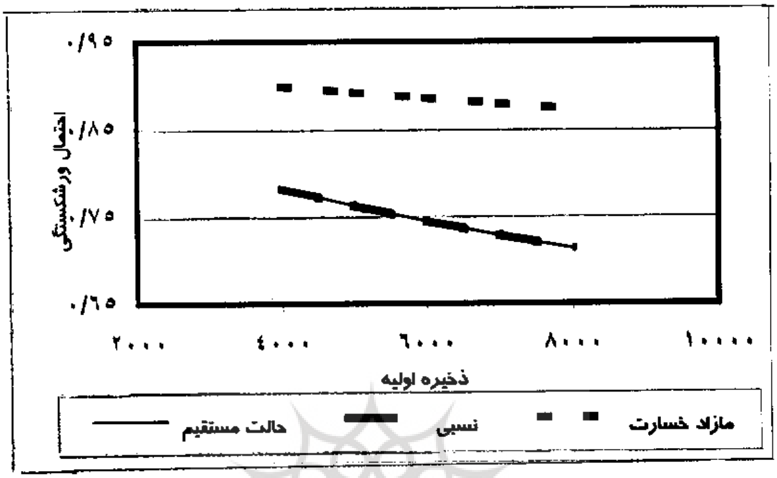
جدول ۵ مقادیر احتمال ورشکستگی را به ازای مقادیر مختلف ذخیره اولیه در دو حالت بیمه مستقیم و بیمه‌های اتکایی نسبی و مازاد خسارت نشان می‌دهد. توزیع مبلغ خسارت انفرادی، توزیع وایبول مربوط به مبالغ خسارت بیمه آتش‌سوزی در شرکت بیمه ایران است.

جدول ۵ : مقادیر احتمال ورشکستگی به ازای مقادیر مختلف ذخیره اولیه در دو حالت بیمه مستقیم و بیمه‌های اتکایی نسبی و مازاد خسارت در بیمه آتش سوزی شرکت بیمه ایران

ذخیره اولیه	احتمال ورشکستگی		
	حالت مستقیم	حالت اتکایی ۰/۱۵ / ۰/۱	
	– / ۰/۱	نسبی	مازاد خسارت
۴۰۰۰	۰/۷۸۲۰۱۵	۰/۷۸۲۰۱۵	۰/۸۹۸۸۷۹
۵۰۰۰	۰/۷۶۲۶۸۴	۰/۷۶۲۶۸۴	۰/۸۹۲۲۷۱
۶۰۰۰	۰/۷۴۵۰۲۱	۰/۷۴۴۹۹۹	۰/۸۸۵۸۱۷
۷۰۰۰	۰/۷۲۸۷۰۴	۰/۷۲۸۵۷۲	۰/۸۷۹۴۸۳
۸۰۰۰	۰/۷۱۳۵۱۲	۰/۷۱۳۲۲۳	۰/۸۷۳۱۸۷

شکل ۴ احتمال ورشکستگی را برای توزیع مبالغ خسارت آتش سوزی شرکت بیمه ایران در دو حالت بیمه مستقیم و بیمه‌های اتکایی نسبی و مازاد خسارت، به ازای مقادیر مختلف ذخیره اولیه مقایسه می‌کند.

شکل ۴ : مقایسه مقادیر احتمال ورشکستگی به ازای مقادیر مختلف ذخیره اولیه در دو حالت بیمه مستقیم و بیمه‌های اتکایی نسبی و مازاد خسارت



طبق شکل ملاحظه می‌شود که افزایش ذخیره اولیه موجب کاهش احتمال ورشکستگی می‌شود. هم چنین وقتی توزیع مبلغ خسارت انفرادی، توزیع وایبول با پارامترهای مفروض باشد، بیمه اتکایی نسبی تأثیر چندانی بر احتمال ورشکستگی ندارد و به ازای مقادیر بزرگ ذخیرهٔ اولیه، احتمال ورشکستگی در حالت بیمهٔ مستقیم و بیمهٔ اتکایی نسبی تقریباً یکسان است مثلاً به ازای ذخیرهٔ اولیهٔ ۷ میلیون ریال انجام دادن بیمهٔ اتکایی نسبی باعث ۰/۰۱ درصد کاهش در احتمال ورشکستگی (از ۷۲/۸۷ درصد به ۷۲/۸۶ درصد) می‌گردد ولی برای مقادیر کوچکتر ذخیرهٔ اولیه بیمهٔ اتکایی نسبی هیچ گونه تأثیری بر احتمال ورشکستگی ندارد.

در حالی که خریداری بیمهٔ اتکایی مازاد خسارت با سربارها و ذخایر مفروض باعث افزایش احتمال ورشکستگی بیمه گر می‌شود.

بنابراین در این حالت خاص، خریداری بیمهٔ اتکایی پیشنهاد نمی‌شود ولی در حالتی که

ذخیرهٔ اولیهٔ شرکت مقدار بزرگی باشد بیمهٔ اتکایی نسبی تأثیر اندکی در افزایش ایمنی شرکت بیمه خواهد داشت.
برنامه‌های محاسباتی مقادیر تقریبی احتمال ورشکستگی و نتایج حاصله در این حالت نزد مؤلف موجود است.

منابع

1. Abramowitz, M. and I.A.Stegun (1964). Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, Washington, DC. Reprinted by Dover, New York.

2. Beard, R.E., T. Pentikainen and E. Pesonen (1984). Risk Theory. Chapman and Hall.

3. Bowers, N.L., H.U. Gerber, J.C.Hickman, D.A.Jones and C.J.Nesbitt (1986). Actuarial Mathematics. Society of Actuaries, Schaumburg, IL.

4. Centeno, L. (1986). Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient. Insurance: Mathematics and Economics 5.

5. Centeno, L. (1991). An insight into the excess of loss retention limit. Scandinavian Actuarial journal.

6. Daykin, C.D., T.Pentikainen and M.Pesonen (1994). Practical Risk Theory for Actuaries. chapman and Hall.

7. De Vylder, F. and M.J.Goovaerts (1988). Recursive calculation of finite - time ruin probabilities. Insurance: Mathematics and Economics 7.

8. Dickson, D.C.M. and H.R.Waters (1991). Recursive calculation of survival probabilities. ASTIN Bulletin 22.

9. Dickson, D.C.M. (1992). On the distribution of the surplus prior to ruin. Insurance: Mathematics and Economics 11.

10. Dickson, D.C.M. and H.R.Waters (1993). Gamma processes and finite

time survival probabilities. ASTIN Bulletin 23.

11. Dickson. D.C.M., A.D. Egidio dos Reis and H.R.Waters (1995). Some stable algorithms in ruin theory and their applications. ASTIN Bulletin 25.
12. Dickson, D.C.M. and H.R.Waters (1996). Reinsurance and ruin. Insurance: Mathematics and Economics 19.
13. Dufresne, F., H.U. Gerber and E.S.W. Shiu (1991). Risk Theory and the gamma process. ASTIN Bulletin 21.
14. Gerber, H.U.(1979). An Introduction to Mathematical Risk Theory. S.S. Huebner Foundation Monograph Series No. 8. Distirbuted by R. Irwin, homewood, IL.
15. Hesselager, O. (1990). Some results on optimal reinsurance in terms of the adjustment coefficient. Scandinavian Actuarial Journal.
16. Panjer, H.H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. ASTIN Bulletin 12.
17. Panjer, H.H. (1986). Direct calculation of ruin probabilities. The Journal of Risk and Insurance 53.
18. Panjer, H.H. and G.E. Willmot (1992). Insurance risk models. society of Actuaries, schaumburg, IL.
19. Steenackers, A. and M.J. Goovaerts (1992). Optimal reinsurance from the viewpoint of the cedent. Transactions of the 24th International Congress of Actuaries2.
20. Waters, H.R. (1983). Some mathematical aspects of reinsuranc Insurance: Mathematics and Economics 2.