فصلنامه صنعت بیمه / سال پانزدهم / شماره ۵۷ / بهار ۱۳۷۹ / صفحات ۵۵ تا ۷۳

نظریهٔ میانگین ماندهٔ عمر [۱]

علی خسروبیگی [۲]

چکیده:

میانگین ماندهٔ عمر (MRL) به این شکل تعریف می‌شود که شخصی یا ماشینی به اندازهٔ T بیش از زمان t عمر کند، آنگاه متغیر تصادفی (T-t) به عنوان ماندهٔ عمر یا مازاد عمر تعریف می‌شود.

مقدار متوسط متغیر تصادفی (T-t) به شرط زنده ماندن تا زمان t را که به صورت $E(T-t \mid T>t)$ نشان می‌دهیم، میانگین ماندهٔ عمر می‌نامیم. این تابع یکی از مهم‌ترین ابزار در مطالعات بقاء، اکچواری و قابلیت اعتماد می‌باشد. بر مبنای این تابع و با توجه به مدل کاکس می‌توان مدل رگرسیونی میانگین ماندهٔ عمر را بنا نهاد. بررسی چنین مدلی، هدف این مقاله است.

واژگان کلیدی:

میانگین ماندهٔ عمر (MRL)، نظریهٔ قابلیت اعتماد، تابع (نرخ) مخاطرات، فرایند تجدید مانا، مدل‌های مخاطرات متناسب کاکس، امید به زندگی، توزیع‌های عمر، جدول عمر، آزمون‌های فرض، فرایند دیریکله، بهینگی مجانبی.

مقدمه

بررسی میانگین ماندهٔ عمر، سابقهٔ طولانی دارد [۱۴ و ۹] [۳] در دهه‌های اخیر، آماردانان به این میانگین تمایل و علاقهٔ شدیدی نشان داده‌اند و نتایج مفیدی یافته‌اند. به تابع میانگین ماندهٔ عمر در مطالعات اکچواری، آنالیز بقا، قابلیت اعتماد، مهندسی و سایر شاخه‌ها توجه فراوان شده و اهمیت آن از تابع نرخ ضایعات بیشتر دانسته شده است [۱ و ۲۸]. به فرض آن که عضوی به سن t باشد، باقیماندهٔ عمر او پس از زمان t، تصادفی

---

۱. این مقاله در نخستین سمینار آمار بیمه (اکچواری ـ دانشگاه شهید بهشتی ـ سال ۱۳۷۸) ارائه گردید.

۲. کارشناس ارشد آمار بیمه

۳. اعداد درون دو قلاب، به منابع مقاله اشاره دارد.

است. مقدار مورد انتظار این ماندهٔ عمر تصادفی، میانگین ماندهٔ عمر در زمان t، نامیده می‌شود. چون میانگین ماندهٔ عمر برای هر زمان t، تعریف می‌شود، از این پس دربارهٔ تابع میانگین ماندهٔ عمر سخن خواهیم گفت و آن را به اختصار تابع MRL خواهیم خواند. تابع MRL، همانند تابع چگالی، تابع مولد گشتاورها یا تابع مشخصه است. تابع میانگین ماندهٔ عمر، در مقایسه با تابع بقا یا نرخ ضایعات، تصویر متفاوتی از بقا یا عمر ارائه می‌دهد. پژوهش‌گر ممکن است به هر سه معیار علاقه‌مند باشد و از آن‌ها به عنوان مکمل هم استفاده کند. متغیر تصادفی مورد بررسی X، لزوماً «زمان عمر» نیست و ۰=t نیز لزوماً «تولد» را نشان نمی‌دهد. چنان که گفته شد، تابع میانگین ماندهٔ عمر همانند تابع چگالی، تابع مولد گشتاورها و تابع مشخص، تابع توزیع را به طور کامل معین می‌کند.

۱. تعریف تابع میانگین ماندهٔ عمر

تعریف تابع MRL را در دو حالت پیوسته و گسسته ارائه خواهیم داد. یادآوری این نکته ضرورت دارد که به سبب کاربرد فراوان این تابع در حالت پیوسته، این شق مورد توجه ماست و اکثر قضایا و نتایجی که ارائه می‌شود در ارتباط با تابع MRL برای حالت پیوسته است.

تعریف ۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد که روی فضای احتمال (Ω,A,P) تعریف شده است. تابع توزیع آن F (که اغلب تابع توزیع عمر نامیده می‌شود) پیوسته فرض می‌شود و باید $E(X)<\infty$ یعنی متناهی باشد. میانگین ماندهٔ عمر در سن t به شکل زیر است.

$$m(t)=\begin{cases} E[X-t \mid X>t] & ,t<t'' \\ ۰ & \text{سایر جاها و} \end{cases} \qquad (۱)$$

که $\bar{F}=۱-F \ , t''=sup\left\{t:\bar{F}(t)>۰\right\}$ تابع بقاست.

برای نیازهای محاسباتی، تابع MRL را می‌توان به شکل‌های دیگری نوشت که هر یک در مواردی کارایی دارند. یکی از این صورت‌ها که متداول‌ترین شکل تابع MRL است در لم زیر بیان می‌شود. لم ۱. تابع m(t) را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$m(t)=\int_t^{\infty}\frac{\bar{F}(x)\,dx}{\bar{F}(t)} \qquad (۲)$$

از طرفی اگر F چگالی f داشته باشد، رابطهٔ زیر را نیز داریم

$$m(t)=\int_t^{\infty}\frac{xf(x)\,dx}{\bar{F}(t)}-t$$

همانند تابع نرخ ضایعات (که به صورت $r(t)=\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$ تعریف می‌شود) تابع MRL نیز یک مفهوم شرطی است. هر دو تابع مشروط به زنده ماندن تا زمان t هستند. درحالی که تابع نرخ ضایعات در t در مورد فاصلهٔ کوتاهی پس از زمان t (تنها پس از t) اطلاعاتی ارائه می‌دهد، تابع MRL در t، در مورد فاصلهٔ کامل پس از t (تمام زمان پس از t) اطلاعاتی ارائه می‌دهد. این نکته تفاوت بین دو تابع را از لحاظ کاربرد نشان می‌دهد.

توجه کنید که ممکن است تابع MRL موجود باشد اما تابع نرخ ضایعات موجود نباشد (مثلاً، تابع استاندارد سه سه‌ای کانتور را در نظر بگیرید [۹، ص ۱۲]. در ضمن، ممکن است تابع نرخ ضایعات موجود باشد ولی تابع MRL موجود نباشد (برای مثال، تابع چگالی اصلاح شدهٔ کوشی به شکل $f(t)=\frac{۲}{\pi(۱+t^{۲})}$ به ازای $t\geq ۰$ را درنظر بگیرید). در حوزهٔ کاربرد و نظریه، هر دو تابع نرخ ضایعات و MRL مورد نیاز هستند. در مورد ارتباط بین این دو تابع در بخش سوم بررسی بیشتری انجام خواهد گرفت. هر چند که طول عمر افراد و قطعات اغلب به صورت یک متغیر تصادفی پیوسته بررسی می‌شود، اما حالاتی وجود دارند که در آن‌ها مدل گسسته مرجح است.

تعریف ۲. در حالت گسسته تابع MRL به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} v_k &= E[X-k \mid X\geq k]=\sum_{r>k}(r-k)\frac{f_r}{S_k} \\ &= S_k^{-۱}\left\{\left[\sum_{r>k} r.f_r\right]-\left[k\sum_{r>k} f_r\right]\right\} \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن k مقادیر متغیر تصادفی گسستهٔ X است که یک عدد صحیح نامنفی است و S_k تابع بقاست.

یکی از حالاتی که تعریف گسستهٔ MRL را معنی‌دار می‌کند حالتی است که در آن اطلاعاتی مربوط به ضایعات به صورت هفتگی یا ماهانه یادداشت شوند. بنابراین، مشاهدات تعداد ضایعات هستند، بدون آن که زمان‌های آن‌ها را داشته باشیم. در این مورد، مثال‌های دیگری می‌توان یافت [۴۶، ۱۷ و ۱۸].

۲. چه توابعی می‌توانند MRL باشند؟

می‌دانیم که $m(t) \geq 0$ است، اما آیا لزوماً هر تابع نامنفی می‌تواند یک تابع MRL باشد؟ برای به دست آوردن شرایط لازم و کافی برای آن که یک تابع MRL باشد، قضایای زیادی مطرح و اثبات شده‌اند. یکی از قضایای مهم مطرح شده که بیشتر به آن توجه شده است قضیه‌ای است که هال و ولنر [۲۷] ارائه و اثبات کرده‌اند. در این قضیه شرایط لازم و کافی برای آن که تابعی، تابع MRL باشد، بیان شده است.

قضیهٔ ۱. شرایط زیر را در نظر بگیرید:

(۱) $m : [0 , \infty) \to [0 , \infty)$

(۲) $m(0) > 0$

(۳) m پیوسته از راست (و نه لزوماً پیوسته) باشد.

(۴) $d(t) = m(t) + t$ بر روی $[0 , \infty)$ افزایشی باشد.

(۵) هرگاه t_0 به گونه‌ای وجود داشته باشد که $m(t_0^-) = \lim_{t \to t_0^-} m(t) = 0$ آن‌گاه به ازای هر $t \in [t_0 , \infty)$ رابطهٔ $m(t) = 0$ برقرار باشد. در غیر این صورت اگر این t_0 وجود نداشته باشد، آنگاه رابطهٔ $\int_0^\infty \frac{1}{m(x)} dx = \infty$ برقرار باشد.

تابع m در شرایط (۱) تا (۵) صدق می‌کند اگر و تنها اگر m تابع MRL یک تابع توزیع عمر ناتباهیده در صفر باشد.

در مورد (۴) توجه کنید که $d(t)$ زمان مورد انتظار مرگ به شرط آن است که فرد تا زمان t زنده باشد. در این زمینه قضایای دیگری ارائه شده‌اند [برای مثال نگاه کنید به ۶ یا ۳]. در هر زمان که نیاز باشد ما تنها به قضیهٔ فوق متوسل خواهیم شد و از آن بهره می‌بریم.

۳. ارتباط بین تابع MRL و سایر توابع مربوط به بقا

در این بخش ارتباط بین تابع MRL با تابع بقا و تابع نرخ ضایعات را بررسی می‌کنیم. ارتباط‌ها بسیار مهم‌اند و از لحاظ نظری و کاربرد اهمیت خاصی دارند. در این‌باره متون بسیاری نوشته شده و در زمینه‌های نظری و کاربردی نتایج بسیار مفیدی به‌دست آمده است. هدف این بخش بررسی ارتباط بین تابع بقا و تابع نرخ ضایعات با تابع MRL است.

الف) ارتباط بین تابع MRL و تابع نرخ ضایعات

چنان که می‌دانیم نسبت $r(t) = \dfrac{f(t)}{\overline{F}(t)}$ نرخ ضایعات یا نیروی مرگ و میر نامیده می‌شود. این تابع خواص و مشخصاتی دارد که در بسیاری از متون مربوط به قابلیت اعتماد و آنالیز بقا بررسی شده است. اگر بتوانیم بین تابع MRL و تابع نرخ ضایعات مذکور رابطه‌ای بیابیم، می‌توانیم تابع MRL را با استفاده از خواص نرخ ضایعات بررسی کنیم. قضیهٔ زیر وجود این رابطه را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد. نیز، فرض کنید تابع m(t) و r(t) هر دو موجود باشند، آن‌گاه

$$r(t) = \frac{m'(t) + 1}{m(t)} \qquad (۵)$$

که در آن $m'(t) = \frac{d}{dt} m(t)$.

ب) ارتباط بین تابع MRL و تابع بقا

همان‌طور که پیشتر گفتیم تابع MRL متغیر تصادفی X، تابع بقای آن را به طور منحصر به‌فرد معین می‌کند. در این‌باره قضایای فراوانی در نوشته‌های مختلف ارائه شده‌اند. ما به برخی از قضایا در دو حالت پیوسته و گسسته می‌پردازیم و آن‌ها را بررسی می‌کنیم. ابتدا قضایا را برای حالت ملموس‌تر بیان می‌کنیم که X متغیر پیوسته باشد. در بخش‌های بعدی از این قضایا در مدل‌بندی‌ها استفاده خواهیم کرد.

قضیهٔ ۳. فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با میانگین معین μ باشد. F(t) را

می‌توان به‌طور منحصربه‌فرد با $v(t)=r(t)m(t)$ مشخص کرد که $D \equiv \left\{ t \in R^{+} \mid F(t) < ۱ \right\} \in$

$$F(t) = ۱ - exp \left[\int_{۰}^{t} \frac{v(x)}{I(x) + \mu - x} dx \right] \qquad (۷)$$

که در آن

$$I(x) = \int_{۰}^{x} v(u) du$$

در رابطهٔ (۷) حالت جالب توجه این است که $v(x)$ برابر مقدار ثابت c باشد، در این صورت سه حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: $c=۱$ که در این حالت رابطهٔ (۷) توزیع نمایی را نتیجه می‌دهد.

حالت دوم: $c>۱$ که در این حالت رابطهٔ (۷) توزیع با دامنهٔ محدود را نتیجه می‌دهد.

حالت سوم: $۰<c<۱$ که در این حالت رابطهٔ (۷) توزیع پارتو حاصل می‌شود.

درستی مثال زیر را می‌توان به راحتی بررسی کرد.

مثال: متغیر X دارای توزیع یکنواخت بر روی (a,b) است اگر و تنها اگر به ازای $t \in (a,b)$ داشته باشیم $v(t) = ۱/۲$.

همانطور که قبلاً نیز گفته شد، ممکن است گاهی تابع m(t) و r(t) هم‌زمان وجود نداشته باشند، آنگاه تکلیف رابطهٔ (۷) چیست؟ در این‌جا به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که به‌طور مستقیم ارتباط بین تابع MRL و تابع بقا را نشان می‌دهد و نیازی به وجود r(t) نیست.

قضیهٔ ۴. فرض کنید F پیوسته از راست (و نه لزوماً پیوسته) باشد. با دانستن تابع MRL، تابع بقا به طور کامل به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$\overline{F}(t) = \frac{m(۰)}{m(t)} exp \left[- \int_{۰}^{t} \frac{۱}{m(x)} dx \right] \qquad (۸)$$

این قضیه نشان می‌دهد که تابع MRL، تابع بقا را به‌طور کامل معین می‌کند.

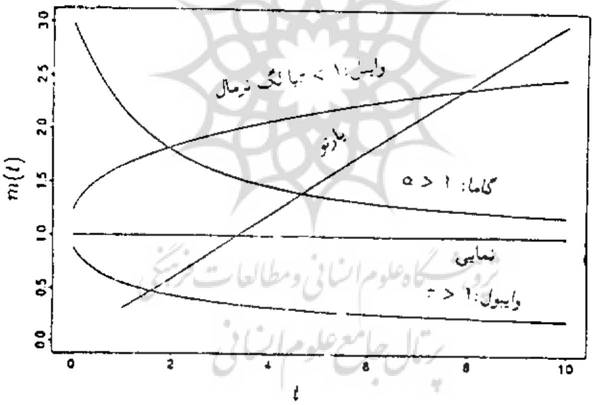
۴. توابع MRL چند توزیع مهم

با توجه به قضایای مطرح شده در بخش سوم، ملاحظه می‌شود که ارتباط بین توابع

توزیع و توابع MRL بسیار مهم و درخور توجه است. در این بخش تابع MRL چند توزیع مهم را بررسی می‌کنیم که این توابع در آنالیز بقا، آمار زیستی و اکچواری اهمیت فراوانی دارند. با دقت در نمودار توابع MRL می‌توان به تفاوت‌های آن‌ها و در نتیجه تفاوت‌های بین توابع توزیع آن‌ها پی برد. از طرفی با دانستن توابع MRL و بررسی مقادیر کرانگین‌ها می‌توان از آن‌ها برای هدف‌های مدل‌بندی استفاده کرد.

در بخش سوم دیدیم که اگر تابع MRL برابر مقدار ثابتی باشد، آنگاه آن تابع MRL مربوط به یک توزیع نمایی است. با استفاده از رابطهٔ (۷) می‌توان توابع MRL سایر توزیع‌ها را نیز به‌دست آورد. توابع MRL مربوط به برخی از تابع‌های توزیع، در مدل‌بندی‌های آکچواری و آمار زیستی کاربرد فراوانی دارند (جدول شمارهٔ ۱). با توجه به این جدول، نمودارهای توابع MRL در شکل شمارهٔ ۱ ملاحظه می‌شود که تغییرات توابع مختلف MRL را نشان می‌دهند.

شکل ۱. نمایش گرافیکی توابع MRL برای توزیع‌های مهم اکچواری و آمار زیستی.



۵. رده‌هایی از توابع MRL

تعریف ۳. توزیع عمر F، تابع میانگینماندهٔ عمر کاهشی (DMRL) دارد، اگر تابع MRL آن، تابعی کاهشی باشد. یعنی، اگر و تنها اگر E(x) متناهی و به ازای $0 \leq s \leq t$ داشته باشیم

$$m(s) \geq m(t)$$

تعریف ۴. توزیع عمر F، میانگین ماندهٔ عمر افزایشی سپس کاهشی (IDMRL) دارد. اگر و تنها اگر نقطهٔ بازگشتی مانند $\tau \geq 0$، به گونه‌ای وجود داشته باشد که m روی

$(\tau$ ۰] افزایشی باشد، یعنی

به ازای $0 \le s \le t \le \tau \qquad m(s) \le m(t)$

به ازای $\tau \le s \le t \qquad m(s) > m(t)$

جدول ۱. تابع میانگین ماندهٔ عمر برخی توابع توزیع مهم در اکچواری و آمار زیستی

نام توابع توزیع	شکل $\overline{F}$ یا f	تابع MRL
پارتو	$\overline{F}(x)=(\frac{K}{K+x})^{\alpha}$	$\frac{K+x}{\alpha-1}, \alpha>1$
بور	$\overline{F}(x)=(\frac{K}{K+x^{r}})^{\alpha}$	$\frac{x}{\alpha r-1}(1+o(1)), \alpha r>1$
لگ‌گاما	$f(x)=\frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1}x^{-\alpha-1}$	$\frac{x}{\alpha-1}(1+o(1)), \alpha>1$
لگ نرمال	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta x}e^{-(\ln x-\mu)^{2}/2\delta^{2}}$	$\frac{\delta^{2}x}{\ln x-\mu}(1+o(1))$
بنکتاندر نوع‌اول	$\overline{F}(x)=(1+2\frac{\beta}{\alpha}\ln x)e^{-\beta(\ln x)^{2}-(\alpha+1)\ln x}$	$\frac{x}{\alpha+2\beta\ln x}$
بنکتاندر نوع‌دوم	$\overline{F}(x)=e^{\alpha/\beta}x^{-(1-\beta)}e^{-\alpha x^{\beta}/\beta}$	$\frac{x^{1-\beta}}{\alpha}$
وایبل	$\overline{F}(x)=e^{cx^{r}}$	$\frac{x^{1-r}}{cr}(1+o(1))$
نمایی	$\overline{F}(x)=e^{-\lambda x}$	λ^{-1}
گاما	$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\mu(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$	$\beta^{-1}(1+\frac{\alpha-1}{\beta x}+o(1/x))$
نرمال بریده‌شده	$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^{2}/2}$	$x^{-1}(1+o(1))$

تعریف ۵. توزیع عمر F به طور متوسط جدید، بهتر از قدیم (NBUE) است اگر به ازای هر $t \ge 0$

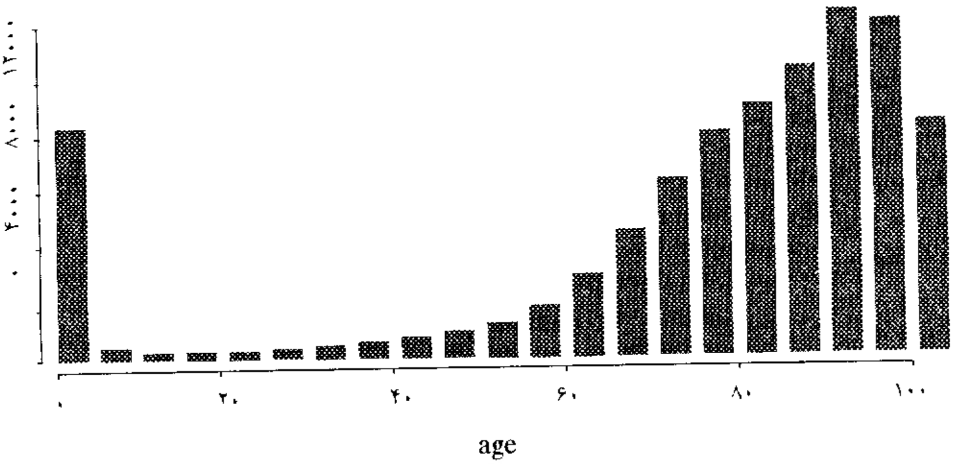
$$m(0) \ge m(t)$$

هر یک از رده‌های فوق، رده‌های متقابلی دارند، یعنی توابع میانگین ماندهٔ عمر افزایشی (IMRL) به‌طور متوسط جدید، بدتر از قدیم (NWUE) هستند و میانگین ماندهٔ عمر کاهشی‌سپس‌افزایشی (DIMRL) دارند. ردهٔ DMRL عمرهایی را مدل‌بندی می‌کند که متضرر هستند (یعنی فرسودگی دارند). بارلو، مارشال و پراشان [۲] متذکر شده‌اند که ردهٔ DMRL، به‌طورمتوسط دارای ماندهٔعمر کمتری است. [برای بحث مفصل‌تر در موردکاربرد ردهٔ DMRL نگاه کنید به ۸]. چنانچه از تعریف‌ها برمی‌آید، ردهٔ DMRL ردهٔ NBUE را دربر دارد. ردهٔ IDMRL سن‌هایی را مدل‌بندی می‌کند که ابتدا سودمند و سپس مضرند. حالات زیادی وجود دارند که می‌توان این مدل را برای آن‌ها به کار برد از جمله طول عمر افراد که در آن مرگ و میر زیاد درکودکی IMRL اولیه را نشان می‌دهد و مسن‌تر شدن و عمر کردن نشان دهندهٔ دورهٔ DMRL است. به‌هرحال در عمل همگی این خانواده‌ها می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند، که هر یک از آن‌ها نیاز به بررسی‌های جداگانه‌ای دارند.

۶. بررسی میانگین ماندهٔ عمر ایرانی‌ها

اطلاعات این قسمت از سرشماری سال ۱۳۷۵ مرکز آمار ایران استخراج و با توجه به تعداد مرگ و میرها در سنین مختلف، تابع میانگین ماندهٔ عمر یا امید به زندگی افراد در سنین مختلف محاسبه شده است. این محاسبه را برای افراد از ۰ تا ۱۰۳ سالگی آورده‌ایم (نمودار هیستوگرام داده‌ها در شکل شمارهٔ ۲ رسم شده است).

شکل ۲. هیستوگرام مربوط به مرگ و میر جمعیت ایران



جدول ۲. تابع میانگین ماندهٔ عمر مربوط به جمعیت ایران در سنین مختلف

سن	MRL	سن	MRL	سن	MRL	سن	MRL
۰	۷۳/۶۲۴۳	۲۶	۵۰/۱۰۴۴۶	۵۲	۲۶/۸۶۷۷۲	۷۸	۹/۶۳۷۰۴۸
۱	۷۴/۵۵۶۸۱	۲۷	۴۹/۱۷۱۵۲	۵۳	۲۶/۰۵۱۶۷	۷۹	۹/۰۹۸۳۵۵
۲	۷۲/۶۸۷۷۸	۲۸	۴۸/۲۴۰۱۵	۵۴	۲۵/۲۴۴۲۱	۸۰	۸/۵۷۶۴۵۵
۳	۷۱/۷۴۸۹۲	۲۹	۴۷/۳۰۹۷۳	۵۵	۲۴/۴۴۸۵۴	۸۱	۸/۰۷۰۳۰۹
۴	۷۰/۸۰۷۷۴	۳۰	۴۶/۳۸۰۷۱	۵۶	۲۳/۶۶۷۳۷	۸۲	۷/۵۸۳۷۸۵
۵	۶۹/۸۶۵۸۳	۳۱	۴۵/۴۵۳۵۱	۵۷	۲۲/۹۱۵۴۷	۸۳	۷/۱۲۳۵۳
۶	۶۸/۹۲۳۲	۳۲	۴۴/۵۲۸۰۲	۵۸	۲۲/۱۹۰۷۴	۸۴	۶/۶۹۰۱۳۱
۷	۶۷/۹۷۹۸۳	۳۳	۴۳/۶۰۴۶۲	۵۹	۲۱/۴۱۲۳۲	۸۵	۶/۲۸۱۹۴۲
۸	۶۷/۰۳۶۴۷	۳۴	۴۲/۶۸۳۱۹	۶۰	۲۰/۶۸۲۰۱	۸۶	۵/۸۹۰۷۰۱
۹	۶۶/۰۹۲۳۷	۳۵	۴۱/۷۶۴۰۹	۶۱	۱۹/۹۷۰۲۵	۸۷	۵/۵۱۷۵۵۹
۱۰	۶۵/۱۴۸۲۵	۳۶	۴۰/۸۴۷۶۲	۶۲	۱۹/۲۷۶۷۱	۸۸	۵/۱۵۸۲۱۴
۱۱	۶۴/۲۰۴۰۹	۳۷	۳۹/۹۳۳۶۴	۶۳	۱۸/۶۰۰۶۶	۸۹	۴/۸۱۷۹۰۶
۱۲	۶۳/۲۶۰۵۷	۳۸	۳۹/۰۲۲۸۸	۶۴	۱۷/۹۴۱۲	۹۰	۴/۴۸۶۴۹۹

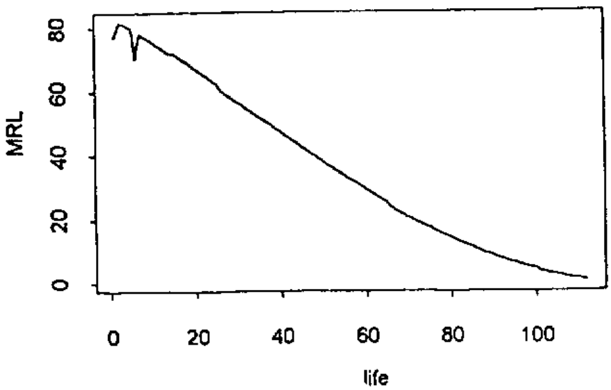
ادامه جدول ۲. تابع میانگین ماندهٔ عمر مربوط به جمعیت ایران در سنین مختلف

سن	MRL	سن	MRL	سن	MRL	سن	MRL
۱۳	۶۲/۳۱۶۹۶	۳۹	۳۸/۱۱۵۶	۶۵	۱۷/۲۹۶۷۸	۹۱	۴/۱۶۰۷۶۹
۱۴	۶۱/۳۷۳۲۵	۴۰	۳۷/۲۱۲۰۱	۶۶	۱۶/۶۶۵۶۹	۹۲	۳/۸۳۱۵۴۸
۱۵	۶۰/۴۳۰۷۵	۴۱	۳۶/۳۱۳۱۷	۶۷	۱۶/۰۴۶۰۷	۹۳	۳/۴۹۸۷۲۵
۱۶	۵۹/۴۸۸۰۹	۴۲	۳۵/۴۱۸۷۹	۶۸	۱۵/۴۳۵۸۶	۹۴	۳/۱۷۶۳۷۱
۱۷	۵۸/۵۴۶۵۴	۴۳	۳۴/۵۲۹۸۳	۶۹	۱۴/۸۳۳۲۸	۹۵	۲/۸۶۸۱۹۷
۱۸	۵۷/۶۰۵۴۲	۴۴	۳۳/۶۴۷۱۶	۷۰	۱۴/۲۳۷۲۷	۹۶	۲/۵۶۶۳۳۴
۱۹	۵۶/۶۶۴۶۷	۴۵	۳۲/۷۷۱۲۱	۷۱	۱۳/۶۴۶۰۹	۹۷	۲/۲۹۸۰۷۴
۲۰	۵۵/۷۲۴۹	۴۶	۳۱/۹۰۳۱۲	۷۲	۱۳/۰۵۸۱۸	۹۸	۲/۰۱۰۰۳۲
۲۱	۵۴/۷۸۶۰۴	۴۷	۳۱/۰۴۳۵۸	۷۳	۱۲/۴۷۳۸۲	۹۹	۱/۷۲۱۳۷
۲۲	۵۳/۸۴۷۴۲	۴۸	۳۰/۱۹۴۳	۷۴	۱۱/۸۹۴۱۸	۱۰۰	۱/۵۲۱۹۹۴
۲۳	۵۲/۹۱۰۲	۴۹	۲۹/۳۵۶۲	۷۵	۱۱/۳۱۸۶۸	۱۰۱	۱/۴۰۴۳۷۲
۲۴	۵۱/۹۷۴۳	۵۰	۲۸/۵۲۲۰۶	۷۶	۱۰/۷۴۹۳۹	۱۰۲	۱/۱۱۲۵
۲۵	۵۱/۰۳۸۵	۵۱	۲۷/۶۹۲۵۸	۷۷	۱۰/۱۸۷۴۳	۱۰۳	۰/۷۲۹۵۶

نتایج حاصل در جدول ۲ مشاهده می‌شود و تابع MRL مربوط به آن در شکل شمارهٔ ۳ آمده است. توابع MRL محاسبه شده و نمودار رسم شده نشان می‌دهند که میانگین ماندهٔ عمر مربوط به این افراد کاهشی است. به این معنا که میانگین ماندهٔ عمر هر گروه از گروه ماقبل خود کمتر است، اما این اصل کلی نیست و همان‌طور که ملاحظه می‌شود در صفر سالگی این مسأله رعایت نشده است. این به علت مرگ و میر زیاد در صفر سالگی است، اما با گذر از این سن، تابع MRL کاملاً کاهشی است (اهمیت مقادیر محاسبه شده در تشکیل جداول عمر نیز باید مورد توجه باشد).

یک کار تحقیقی بسیار مفید، مقایسهٔ بین تابع MRL دو گروه با یکدیگر است. این مقایسه‌ها از جنبه‌های مختلف مورد توجه و مفید است. برای مثال، مقایسه را می‌توان بین گروه زنان و مردان، یا بین افراد دو کشور مختلف انجام داد. البته برای این کار آزمون‌هایی ارائه شده است که در این‌جا فرصت پرداختن به آن نیست.

شکل ۳. نمودار تابع MRL جمعیت ایران



۷. کاربرد MRL در بیمه

در این بخش برای نشان دادن نمونه‌ای از کاربرد تابع MRL در بیمه مثالی می‌آوریم. برای این مطالعه، داده‌های مربوط به بیمهٔ عمر یکی از شعب شرکت‌های بیمه را انتخاب کردیم و مبالغ پرداختی بابت ۳۶۲ ادعا از سال ۱۳۷۶ تا نیمهٔ اول ۱۳۷۸ را درنظر گرفتیم. چون بررسی خود داده‌ها عملاً مشکل زاست، هیستوگرام مربوط به لگاریتم این اعداد را رسم و آماره‌های توصیفی برای آن را محاسبه می‌کنیم. نمودار هیستوگرام در شکل شمارهٔ ۴ و مقادیر آماره‌های توصیفی در جدول شمارهٔ ۳ آمده است.

جدول ۳. آماره‌های توصیفی برای لگاریتم داده‌های عمر

Variable	FIRE.fire
Sample size	362
Average	13.6685
Mode	13.6248
Standard deviation	1.95669
Minimum	9.12324
Maximum	18.9143
Lower quartile	12.2814
Upper quartile	14.9778
Skewness	0.130497
Kurtosis	-0.405047
Sum	4947.99

جدول ۴. آمار خی‌دو برای برازش توزیع لگ نرمال

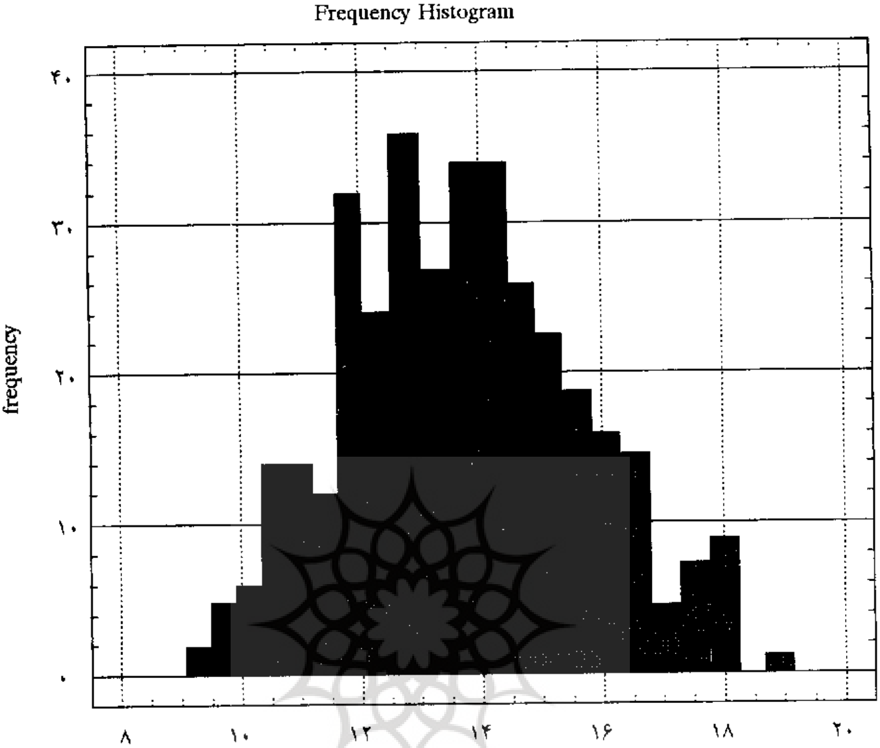
Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chisquare
at or below	9.846	7	5.1	.66830
9.846	10.308	6	5.9	.00382
10.308	10.769	14	9.9	1.65434
10.769	11.231	14	15.1	.08416
11.231	11.692	12	20.9	3.76245
11.692	12.154	32	26.3	1.21288
12.154	12.615	25	30.8	1.08285
12.615	13.077	36	33.5	.18573
13.077	13.538	27	34.3	1.53602
13.538	14.000	34	33.1	.02555
14.000	14.462	34	30.4	.43832
14.462	14.923	26	26.6	.01295
14.923	15.385	23	22.3	.02018
15.385	15.846	19	18.1	.05000
15.846	16.308	16	14.1	.25305
16.308	16.769	15	10.7	1.76629
16.769	17.231	5	7.8	1.02570
17.231	17.692	7	5.6	.34541
17.692	18.615	9	6.6	.87508
above 18.615		1	5.0	3.20140

Chisquare = 18.2095 with 17 d.f. Sig. level = 0.375742

جدول ۵. مقدار آماره کولموگروف – اسمیرنوف برای برازش توزیع لگ نرمال

Estimated KOLMOGOROV statistic DPLUS = 0.0246137
Estimated KOLMOGOROV statistic DMINUS = 0.0341521
Estimated overall statistic DN = 0.0341521
Approximare significance level = 0.792343

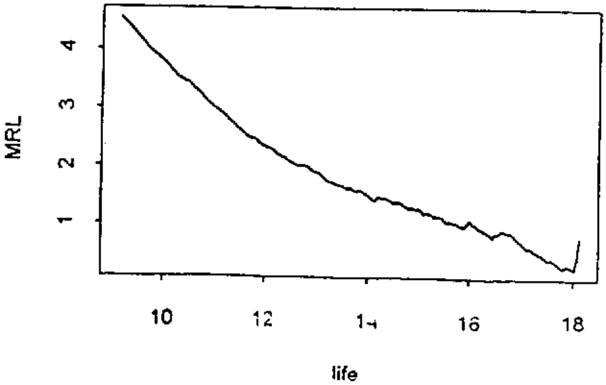
شکل ۴. نمودار هیستوگرام لگاریتم داده‌های بیمهٔ عمر به همراه برازش توزیع لگ نرمال



با مشاهدهٔ تابع MRL مربوط به این داده‌ها که در شکل شمارهٔ ۵ رسم شده است و با توجه به شکل شمارهٔ ۱، نمودار MRL این داده‌ها ما را به توزیعی نزدیک لگ نرمال رهنمون می‌کند. اما این مرحله تنها تشخیص چشمی از توزیع داده‌های مورد بررسی است و برای بررسی بیشتر داده‌ها به برازش توزیع به داده‌ها خواهیم پرداخت. نمودار هیستوگرام به همراه برازش توزیع لگ نرمال با پارامترهای میانگین = ۱۳/۶۷۰۴ و انحراف استاندارد = ۱/۹۹۲۰۷ را در شکل شمارهٔ ۴ مشاهده می‌کنیم. با توجه به مقادیر جداول ۴ و ۵، آماره‌های خی‌دو و کولموگروف ـ اسمیرنوف نیز این برازش را می‌پذیرند. یعنی لگاریتم مقادیر ادعاهای بیمهٔ عمر وارده به این شرکت خاص از توزیع لگ نرمال با تابع توزیع زیر پیروی می‌کنند.

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - ۱۳/۶۷۰۴}{۱/۹۹۲۰۷}\right)$$

شکل ۵. نمودار MRL مربوط به لگاریتم داده‌های بیمهٔ عمر



منابع

1. Arnold, B.C.(1983) Pareto Distributions, International Co-Operative Publishing House, Fairland.
2. Barlow, R.E., Marshall, A.W. and Proschan, F.(1963) Properties of probability distributions with monotone hazard rate, Ann. Math. Stat 34, 375-389.
3. Barlow, R.E., Proschan, F.(1981) Statistical theory of reliability, Wiley, NewYork.
4. Basu, D., Tiwari, R.C. (1982) A note on the Dirichlet process, Stat. and Prob, Essay of Rao, North-Holland, Amsterdom, 89-103.
5. Beirlant, J., Broniatowski, M., Teugels, J.L., Vynckier, P. (1995) The mean residual life function at great age: Application to tail estimation, J. Statistical Plan. Inf, 45, 21-48.
6. Bhatachargee, M.C. (1982) The class of mean residual lives and some consequence, SIAM.J. Algebric. Discrete. Methods 3, 56-65.
7. Breslow, N.E., Crowley, J. (1974) A large sample study of the life table and prod limit estimates on the random censorship, Ann. Stat 2, 437-453.

8. Chen, Y.Y., Hollander, M., Landberg, N.A. (1983) Tests for monotone mean residual life using randomly censored data, Biometrics, 39, 119-127.

9. Chung, K.L (1974) A course in probability theory, 2nd ed. Academic Press, New York.

10. Cox, D.R. (1962) Renewal theory, Mathuen, London.

11. Cox, D.R. (1972) Regression models and Life-tables, J.R. Stat. Soci, B. 34, 187-202.

12. Cox, D.R. (1975) Partial likelihood, Biometrika 62, 269-276.

13. Dasu, T. (1991) The proportional mean residual life model, PhD. Thesis. University of Rochester, Rochester.

14. Deevy, E.S. (1974) Life tables for natural population of animals, Quarterly review of biology, 22, 283-314.

15. de Haan, L. (1975) On regular variation and it's application to the weak convegence of sample extremes, Mathematical centre tract, 32, Mathematisch centrum, Amsterdom.

16. Dress, H., Reiss, R.D. (1996) Residual life function at great age, Comm. Stat-Theory and Methods 25, 283-314.

17. Ebrahimi, N. (1986) Classes of discrete decreasing and increasing mean residual life distributions IEEE. Trans. Reliability, 37, 545-549.

18. Ebrahimi, N. (1998) Estimating the finite population versions of mean residual life-time function and hazard function using Bayes method, Annals of Institue of Statistical Mathematics, 50, 15-23.

19. Efron, E. (1967) The two sample problem with censorship data, Proc. Fifth. Brek. Symp. Math. Stat. Prob., 4, 831-854.

20. Ferguson, T.S. (1973) A Bayesian analysis of some nonparametric problems, Ann. Stat 2, 615-629.

21. Fleming, T., Harrington, D. (1991) Counting processes and survival

analysis, New York, Wiley.

22. Gertsbakh, I.B., Kordonsky, K.B. (1969) models of failure, Springer, NewYork.

23. Ghosh, M. Meeden, G. (1986) Emperical Bayes estimation in finite population sampling, J.A.S.A 82, 1058-1062.

24. Ghosh, M., Lahiri, P., Tiwari, R.C. (1989) Nonparametric emperical Bayes estimation of the distribution functions and mean, Comm. Stat-Theory and Methods 18, 121-146.

25. Guess, F., Procshan, F. (1988) Mean residual life: Theory and applications, Handbook of Statistics, Vol 7, 215-224.

26. Hall, W.J., Wellner, J.A. (1979) Estimation of mean residual life, University of Rochester, Department of statistics, Technical Report.

27. Hall, W.J., Wellner, J.A. (1981) mean residual life statistics and related topics, North-Holland, Amsterdam, 169-184.

28. Hogg, R.V., Klugman, S.A. (1984) Loss Distributions, Wiley, New York.

29. Hollander, M., Proschan, F. (1984) Nonparametric concepts and method in reliability, Handbook of Statistics, vol.4, 613-655.

30. Howell, I.P.S. (1984) Small sample studies for linear decreasing mean residual life, Reliability theory and model, Academic Press, New York.

31. Kaplan, E.L., Meier, P. (1958) Nonparametic estimation from incomplete observation, J.A.S.A, 53, 457-481.

32. Karlin, S., Taylor, H.M (1975) A first course in stochastic processes, Academic Press, New York, 167-237.

33. Lahiri, P., Park, D.H. (1988) Nonparametric Bayes and emperical Bayes estimation of the residual survival function at age t, Comm. Stat-Theory and Methods 17, 4085-4098.

34. Lahiri, P., Park, D.H. (1988) Nonparametric Bayes and emperical Bayes

estimation of the mean residual life at age t, J. of . Stat. Plan. Infe 29, 125-136.

35. Lawless, J.F. (1982) Statistical models and methods for life time data, NewYork, Wiley.
36. Magulari, G. Zhung, C. (1994) Estimation in the mean residual life regression model, J. R. Stat. Soc, B., 56, 477-489.
37. Meier, P. (1975) Estimation of a distribution from incomplete observations, Perspective in probability and statistics, Academic Press, New York, 67-87.
38. Morrison, D.G (1987) On linearly Increasing mean residual lifetime, J. App. Prob. 15, 617-620.
39. Oakes, D.,Dasu, T. (1991) A note on residual life, Biometrika 77, 409-410.
40. Prentice, R. L. (1973) Exponential survival with censoring and explanatory variables, Biometrika 80, 279-288.
41. Robbins, H. (1955) An empirical Bayes approach to statistics, Proc. 3rd. Brekely symp. math. stat. prob. VI, University of California, Berekley, CA, 157-164.
42. Ross, S. (1996) Stochastic Processes (2nd), New York, Wiley.
43. Ruize, J.M., Navarro, J. (1994) Characterization of Distribution by relationships between failure rate and mean residual life, IEEE. Trans. Reliability 43, 640-644.
44. Schoenfeld, D. (1982) Partial residual for proportional hazard regression model, Biometrika 69, 239-241.
45. Shaked, M., Shantikumar, J.G. (1991) Dynamic multivariate mean residual life functions, J. Appl. Probab 28, 613-629.
46. Salvia, A.A., (1996) Som resulte on discrete mean residual life, IEEE. Trans. Reliability 45, 359-361.

47. Swartz, G.B. (1973) The mean residual life time function, IEEE. Trans. Reliability 22, 108-109.

48. Yang, G.L. (1978) Estimation of a biometric function, Ann. Stat. 6, 112-116.

49. Ynag, G.L. (1979) Life Expectancy under random censorship, Stochastic Processes and their applications 6, 33-39.

50. Zahedi, H. (1988) Some new classes of multivariate survival distribution functions, J. Appl. probab 28, 613-629.

51. Zahedi, H. (1991) Proportional mean remaining life model, J. Stat. Plan. Infe. 29, 221-228.

52. Zehnwirth, B. (1981) Anote on the asymptotic optimality of the empirical distribution function, Ann. Stat. 9, 220-223.