فصلنامه صنعت بیمه / سال پانزدهم / شماره ۵۷ / بهار ۱۳۷۹ / صفحات ۷۵ تا ۹۲

کاربرد کران‌های دو طرفهٔ احتمال‌های ورشکستگی در بیمهٔ جامع خانه و خانواده[۱]

مهدی بسی خواسته[۲]

چکیده:

در این مقاله به معرفی روشی برای به دست آوردن کران‌های دو طرفهٔ احتمال ورشکستگی در نظریهٔ مخاطرهٔ جمعی می‌پردازیم که براساس تحلیلی به اسم مجموع‌های هندسی بنا شده است. مجموع هندسی عبارت است از مجموع تصادفی متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع ($i.i.d$) که تعداد جمعوند، متغیری تصادفی است که توزیع هندسی دارد. در این روش از مفاهیم و استدلال‌های احتمالاتی استفاده می‌شود و از روابط تحلیلی مثل تساوی اسپیتزر استفاده نمی‌شود. این روش برای به دست آوردن کران‌های دو طرفهٔ احتمال ورشکستگی در بیمهٔ جامع خانه و خانواده کاربرد دارد.

واژگان کلیدی:

نظریهٔ مخاطرهٔ جمعی، احتمال ورشکستگی، مجموع هندسی، گام تصادفی، فرایند تجدید.

مقدمه

احتمال‌های ورشکستگی از زمان کارهای کلاسیک اف.لوند برگ (۱۹۰۳ تا ۱۹۲۶) واچ.کرامر (۱۹۳۰ تا ۱۹۵۵) مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران بوده است. در این مقاله نیز برای برآورد احتمال ورشکستگی روش جدیدی بیان می‌شود. ابتدا علایم و اصطلاحات را به طور سریع مرور می‌کنیم و آن گاه با حالت خاص مدل مخاطرهٔ جمعی

---

۱. این مقاله در نخستین سمینار آمار بیمه (اکچواری ـ دانشگاه شهید بهشتی ـ ۱۳۷۸) ارائه گردید.

۲. کارشناس ارشد آمار بیمه.

جلو می‌رویم.

فرض کنید که هزینه‌های پی‌درپی ادعاهای خسارت Z_i، $i \geq ۱$ از یک دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $i.i.d$ باشند که زمان‌های وقوع آن‌ها T_i، $i \geq ۱$ یک فرایند تجدید مستقل از Z_i، $i \geq ۱$ را بـه وجـود مـی‌آورند. ایـن بـدان مـعناست کـه زمـان‌های بـین وقـوع، یـعنی $\theta_1 = T_1$ ، $\theta_i = T_i - T_{i-1}$ ، $i \geq ۲$ متغیرهای تصادفی $i.i.d$ هستند.

فرض کنید که دو دنبالهٔ $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ و $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ از هم مستقل‌اند. متغیر R_i را سطح فرایند مخاطره دقیقاً بعد از iامین پرداخت خسارت در نظر بگیرید. فرض کنید که سرمایهٔ اولیهٔ شرکت بیمه $R_0 = u$ باشد. بنابر این دنبالهٔ $\{R_i\}_{i \geq 1}$ در معادلهٔ بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$R_{i+1} = R_i + c\theta_{i+1} - Z_{i+1} \quad , \qquad t \geq 0 \tag{۱}$$

فرض کنید که Z یک متغیر نوعی همتوزیع Z_1 و θ نیز یک متغیر تصادفی نوعی همتوزیع θ_1 است و میانگین پرداخت خسارت $E(Z) = \mu$ و میانگین فاصلهٔ زمانی بین وقوع دو خسارت $m = E(\theta)$ باشند. بنابراین تساوی

$$E(c\theta - Z) = cm - \mu \tag{۲}$$

میانگین واقعی درآمد شرکت بیمه در یک پرداخت است و

$$\rho = \frac{cm - \mu}{\mu} \tag{۳}$$

سربار ایمنی نسبی می‌باشد.

احتمال ورشکستگی $\Psi(x)$ را می‌توان براساس $\{R_i\}_{i \geq 1}$ چنین تعریف کرد:

$$\Psi(x) = P(\min_{i \geq 1} R_i < 0 \mid R_0 = x) \tag{۴}$$

این، احتمال رسیدن به ورشکستگی را تا افق بی‌نهایت؛ وقتی که سرمایهٔ اولیهٔ شرکت بیمه x باشد، نشان می‌دهد. تابع‌هایی مثل $\underline{\Psi}(x)$ و $\overline{\Psi}(x)$ را به دست می‌آوریم که در نابرابری زیر صدق کنند:

$$\underline{\Psi}(x) \leq \Psi(x) \leq \overline{\Psi}(x) \tag{۵}$$

و دقت کران‌ها به اندازهٔ کافی بالا باشد. با داشتن کران‌های پایین و بالای $\underline{\Psi}(x)$ و $\overline{\Psi}(x)$ دقت مسأله یک جواب روشن و واضح دارد. تابع

$$\Psi_a(x) = \frac{1}{2}\left[\underline{\Psi}(x) + \overline{\Psi}(x)\right] \tag{۶}$$

وقتی که هیچ‌گونه اطلاع دیگری جز $\underline{\Psi}(x)$ و $\overline{\Psi}(x)$ نداشته باشیم بهترین تقریب را نشان می‌دهد. و مقدار

$$\Delta(x) = \frac{۱}{۲}\left[\overline{\Psi}(x) - \underline{\Psi}(x)\right] \qquad (۷)$$

یک درستی مطلق است و مقدار

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{\Psi_a(x)} = \frac{\overline{\Psi}(x) - \underline{\Psi}(x)}{\overline{\Psi}(x) + \underline{\Psi}(x)} \qquad (۸)$$

درستی نسبی است.

۱. احتمال ورشکستگی، قدم زدن‌های تصادفی و مجموع‌های هندسی

اگر $\{\zeta_i\}_{i \geq ۱}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی $i.i.d$ باشد که مقادیر از $(-\infty, +\infty)$ را با احتمال مثبت اختیار می‌کند و تعریف کنیم:

$$\sigma_۰ = ۰ , \quad \sigma_n = \zeta_۱ + \dots + \zeta_n \quad , \quad n \geq ۱ \qquad (۹)$$

آن گاه دنبالهٔ $\sigma_۰$، $\sigma_۱$،...و σ_n یک فرایند قدم زدن تصادفی نامیده می‌شود. هم‌چنین

$$L = inf\ \{K : \sigma_k > ۰ \ , K \geq ۱\} \qquad (۱۰)$$

نخستین لحظهٔ نردبان اکیداً صعودی است و

$$\overline{X} = \sigma_L \qquad (۱۱)$$

نخستین ارتفاع نردبان اکیداً صعودی و

$$M = \sup_{۰ \leq K < \infty} \sigma_K \qquad (۱۲)$$

ماکسیمم مدل فرایند قدم زدن تصادفی است. از (۹) و (۱۲) نتیجه می‌شود که $M \geq ۰$. هم لحظهٔ نردبانی L و هم ارتفاع نردبانی $\tilde{X}$ ممکن است متغیرهای ناقص باشند. برای مثال اگر $E\zeta_۱ < ۰$، باشد L ممکن است یک مقدار نامتناهی را با احتمال مثبت اختیار کند.

$$q = p\ (L = \infty) > ۰ \qquad (۱۳)$$

اگر $L = \infty$ بنابراین نخستین ارتفاع نردبان اکیداً صعودی تعریف نشده است.

قرار دهید $L_0 = 0$ و به صورت بازگشتی تعریف کنید:

$$L_{n+۱} = inf\ \{ K: \zeta_{Ln+۱} + \dots + \zeta_{Ln+k} > ۱ \ , K \geq ۰\} \ , n \geq ۱ \qquad (۱۴)$$

$$X_n = \zeta_{L\,n-۱} + \dots + \zeta_{Ln-۱\, +\, Ln} \ , n \geq ۱ \qquad (۱۵)$$

بنابر تعریف، L_1، L_1+L_2، ...، $L_1+...+L_n$ و ... به ترتیب لحظه‌های نردبان اکیداً صعودی و $\tilde{X}_1$، $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2$، ...، $\tilde{X}_1+...+\tilde{X}_n$ و ... به ترتیب ارتفاع‌های نردبان اکیداً صعودی‌برای فرایند قدم زدن تصادفی $(\sigma_i)_{i\geq 0}$ هستند. هم‌چنین $(L_n,\tilde{X}_n)$، $n\geq 1$ زوج‌های تصادفی $i.i.d$ هستند و همهٔ آن‌ها توزیعی شبیه توزیع $(L,\tilde{X})$ را دارند یعنی

$$(L_n,\tilde{X}_n)\stackrel{d}{=}(L,\tilde{X})$$

متغیر تصادفی ν را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\nu=min\{n: L_n=+\infty \;,\; n\geq 1\} \qquad (۱۶)$$

از (۱۳) و از این‌واقعیت‌که L_n، $n\geq 1$ متغیرهای‌تصادفی $i.i.d$ هستند نتیجه‌می‌شود که

$$p(\nu=k)=q(1-q)^{k-1} \qquad (۱۷)$$

پس

$$M=\tilde{X}_1+...+\tilde{X}_{\nu-1} \qquad (۱۸)$$

و اگر $\nu=1$ باشد آن گاه $M=0$. توجه کنید که به طور کلی متغیر تصادفی ν به $(\tilde{X}_i)_{i\geq 1}$ بستگی دارد. به همین علت قرار می‌دهیم

$$F(x)=P(\tilde{X}\leq x \mid L<\infty) \qquad (۱۹)$$

و فرض می‌کنیم که $(X_i)_{i\geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d$ باشند که تابع توزیع مشترک F دارند و به متغیر تصادفی ν که یک توزیع هندسی دارد، بستگی ندارند. پس

$$M\stackrel{d}{=}X_1+...+X_{\nu-1} \qquad (۲۰)$$

حال قرار می‌دهیم

$$S_\nu=X_1+...+X_\nu \qquad (۲۱)$$

و آن را یک «مجموع هندسی» می‌نامیم و قرار می‌دهیم.

$$W_q(X)=P(S_\nu>x) \qquad (۲۲)$$

قضیه: برای هر $x\geq 0$

$$P(M>x)=(1-q)\,W_q(x) \qquad (۲۳)$$

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه این شرایط به فرایند مخاطره $(R_n)_{n\geq 0}$ ارتباط پیدا می‌کنند. با داشتن سرمایهٔ اولیهٔ $x>0$ قراردادهای زیر را در نظر بگیرید

$$\sigma_i=x-R_i \quad , \quad i\geq 0 \qquad (۲۴)$$

$$\zeta_i=Z_i-c\theta_i \quad , \quad i\geq 1 \qquad (۲۵)$$

بنابر این دنبالهٔ $(\sigma_n)_{n\geq ۰}$ صورت رابطهٔ (۹) را دارد زیرا $\sigma_۰ = x\text{-}R_۰ = x\text{-}x = ۰$ و

$$\sigma_n = x - R_n = x - (R_{n-۱} + c\theta_n - Z_n) = x - R_{n-۱} + \zeta_n$$
$$= x - R_{n-۲} + \zeta_{n-۱} + \zeta_n = ... = x - R_۰ + \zeta_۱ + ... + \zeta_n$$
$$= \zeta_۱ + ... + \zeta_n \quad , \quad n \geq ۱$$

$(\zeta_i)_{i\geq ۱}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d$ هستند که مقادیری را در فاصلهٔ $(-\infty , +\infty)$ با احتمال مثبت اختیار می‌کنند. پس می‌توانیم فرایند مخاطره را برحسب یک قدم زدن تصادفی بررسی کنیم. طبق قرار قبلی داریم:

$$E\,\zeta_i = \mu - cm < ۰ \qquad (۲۶)$$

رابطهٔ (۴) نتیجه می‌دهد که احتمال ورشکستگی را می‌توان برحسب توزیع ماکسیمم کل M از فرایند قدم زدن تصادفی $(\sigma_n)_{n\geq ۰}$ بیان کرد

$$\Psi(x) = P(M > x) \quad , \quad x \geq ۰ \qquad (۲۷)$$

و بنابر (۲۳) خواهیم داشت:

$$\Psi(x) = (۱ - q)\,P(S_\nu > x) = (۱ - q)\,W_q(x) \,, \quad x \geq ۰ \qquad (۲۸)$$

۲. کران‌های دو طرفهٔ مجموعهای هندسی

یک دنبالهٔ $(X_i)_{i\geq ۱}$ از متغیرهای تصادفی نامنفی $i.i.d$ را در نظر بگیرید. X یک متغیر تصادفی نوعی همتوزیع $X_۱$ است. اگر قرار دهید

$$S_۰ = ۰ \quad , \quad S_n = X_۱ + ... + X_n \quad , n \geq ۱$$

دنبالهٔ $(S_n)_{n\geq ۰}$ یک فرایند تجدید را تشکیل می‌دهد. تعداد تجدیدهای داخل $[۰ , x]$ را به صورت

$$N(x) = \neq \{n : S_n \leq x \quad , \quad n \geq ۱\} \quad , \quad x \geq ۰ \qquad (۲۹)$$

تعریف کنید. مازاد فرایند تجدید $(S_n)_{n\geq ۰}$ از سطح $x \geq ۰$ را با

$$\eta_x = S_{N(x)+۱} - x \qquad (۳۰)$$

نشان می‌دهیم. فرض کنید ν یک متغیر تصادفی هندسی با توزیع (۱۷) و مستقل از $(X_i)_{i\geq ۱}$ باشد. به این ترتیب توزیع $W_q(x)$ تعریف شده در (۲۳) را می‌توان چنین بیان کرد:

قضیه: برای هر $X \geq 0$

$$W_q(x) = E(1-q)^{N(x)} \tag{۳۱}$$

همواره فرض می‌کنیم که مقداری از $\lambda > 0$ وجود دارد به طوری که

$$E \exp(\lambda X) = \mu(\lambda) < \infty \tag{۳۲}$$

اکنون برای مقدار معین q و $F(x) = P(X \leq x)$، مقدار R را تنها جواب مثبت معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$(1-q) E \exp(RX) = 1 \tag{۳۳}$$

فرض کنید که فرایند تجدید $(S_n)_{n \geq 0}$ چنین خواصی دارد: دو توزیع احتمالی $\underline{D}(u)$ و $\overline{D}(u)$ وجود دارند (که هر دو نامنفی، یکنوا و از بالا کران یک دارند) و وقتی $u \to \infty$ به سمت صفر میل می‌کند به طوری که برای هر $x \geq 0$:

$$\underline{D}(u) \leq P(\eta_x > u \mid N(x)) \leq \overline{D}(u) \quad , \quad u \geq 0 \tag{۳۴}$$

نمادهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\underline{d}(R) = \int_0^\infty e^{Ru} \underline{D}(u) du < \infty \tag{۳۵}$$

$$\overline{d}(R) = \int_0^\infty e^{Ru} \overline{D}(u) du < \infty \tag{۳۶}$$

لم ۱. اگر (۳۴) برقرار باشد، خواهیم داشت

$$\frac{\exp(-Rx)}{(1-q)(1+R\overline{d}(R))} = \underline{W}_q(x) \leq W_q(x) \leq \overline{W}_q(x) = \frac{\exp(-Rx)}{(1-q)(1+R\underline{d}(R))} \tag{۳۷}$$

یک حالت ویژهٔ مهم وقتی ایجاد می‌شود که توابع نمایی $\underline{D}$ و $\overline{D}$ به صورت زیر باشند:

$$\underline{D}(x) = \exp(-\lambda_2 x) \tag{۳۸}$$

$$\overline{D}(x) = exp(-\lambda_1 x) \qquad (۳۹)$$

که‌در آن $\lambda_2 \leq \lambda_1 < R$. در این حالت $\underline{d}(R) = \frac{1}{\lambda_2 - R}$ و $\overline{d}(R) = \frac{1}{\lambda_1 - R}$.

فرع: اگر (۳۴) برقرار باشد و توابع $\underline{D}$ و $\overline{D}$ به وسیلهٔ (۳۸) و (۳۹) تعریف شوند آن‌گاه:

(۴۰)

$$\frac{(\lambda_1 - R)exp(-Rx)}{\lambda_1(1-q)} = \underline{W}_q(x) \leq W_q(x) \leq \overline{W}_q(x) = \frac{(\lambda_2 - R)exp(-Rx)}{\lambda_2(1-q)}$$

۳. کران‌های دوطرفهٔ احتمال‌های ورشکستگی

کران‌های ارائه شده در بخش دوم برحسب یک ارتفاع نردبانی نوعی X بیان شده‌اند ولی ما آن‌ها را برحسب داده‌های ورودی فرمول‌بندی می‌کنیم. یعنی برحسب مقدار نوعی ادعای خسارت Z ، فاصلهٔ زمانی بین پرداخت‌های θ و نرخ ناخالص حق بیمه C. با پارامتر R شروع می‌کنیم که نقش کلیدی در تمام کران‌ها ایفا می‌کند.

لم ۲. حالتی را در نظر بگیرید که سربار ایمنی مثبت (۲۶) برقرار است. $R>0$ جوابی است از معادلهٔ

$$E\, exp[R(Z - c\theta)] = 1 \qquad (۴۱)$$

آن گاه R در (۳۳) صدق می‌کند. حال فرض می‌کنیم که برای مقداری از $\lambda>0$

$$E\, exp(\lambda Z) < \infty \qquad (۴۲)$$

و تابع توزیع اندازهٔ ادعاها را با $B(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$B(x) = P(Z \leq x) \quad , \quad x \geq 0 \qquad (۴۳)$$

قضیه ۱: رابطهٔ (۴۲) و ثابت $R>0$ را که با استفاده از (۴۱) تعریف شده است در نظر بگیرید. آن گاه کران‌های دو طرفهٔ احتمال‌های ورشکستگی عبارتند از:

(۴۴)

$$\underline{K}(R)\, exp(-Rx) = \underline{\Psi}(x) \leq \Psi(x) \leq \overline{\Psi}(x) = \overline{K}(R) exp(-Rx)$$

که در آن

(۴۵)

$$\underline{K}(R) = (1 + \sup_{v \geq 0} \frac{R}{e^{Rv}(1 - B(v))} \int_v^{\infty} e^{Ru}(1 - B(u))du)^{-1}$$

(۴۶)

$$\overline{K}(R) = (1 + \inf_{v \geq 0} \frac{R}{e^{Rv}(1 - B(v))} \int_v^{\infty} e^{Ru}(1 - B(u))du)^{-1}$$

یک حالت خاص را در نظر می‌گیریم که کران‌های دو طرفه را می‌توان به شکل ساده‌تری بیان کرد. فرض کنید که تابع توزیع $B(u)$ (اندازهٔ ادعای خسارت) یک توزیع نمایی آمیخته باشد. یعنی

$$B(x) = P(Z \leq x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (1 - e^{-\psi x}) L(d\psi) \qquad (۴۷)$$

که در آن $\lambda \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ و $L(0)$ یک اندازهٔ احتمال روی $[\lambda_1, \lambda_2]$ است. حالتی را هم که $\lambda_2 = \infty$ می‌پذیریم.

قضیهٔ ۲. اگر تابع توزیع $B(x)$ مربوط به اندازهٔ ادعاهای خسارت نوعی صورت (۴۷) را داشته باشد و $R>0$ به وسیلهٔ (۴۱) تعریف شود، آن‌گاه احتمال ورشکستگی $\Psi(x)$ را می‌توان این چنین برآورد کرد:

(۴۸)

$$\frac{(\lambda_1 - R)\exp(-Rx)}{\lambda_1} = \underline{\Psi}(x) \leq \Psi(x) \leq \overline{\Psi}(x) = \frac{\exp(-Rx)}{1 + R\underline{d}(R)}$$

۴-محاسبهٔ کران‌های دو طرفهٔ احتمال‌های ورشکستگی برای بیمهٔ جامع خانه و خانواده (خانوار)

اطلاعات مورد استفاده مربوط به دو شرکت بیمهٔ آسیا و ایران هستند و تمام اطلاعات در سطح کشور را مورد استفاده قرار داده‌ایم. این اطلاعات به صورت مبلغ خسارت پرداختی و تاریخ پرداخت خسارت از پرونده‌های بخش آتش‌سوزی شرکت بیمهٔ آسیا و بایگانی بیمهٔ مرکزی ایران استخراج شده‌اند. فاصلهٔ زمانی بین پرداخت خسارت‌ها را با استفاده از تاریخ زمان پرداخت خسارت به دست آورده‌ایم. قبل از این که هرگونه تجزیه و تحلیلی بر روی داده‌های جمع آوری شده انجام دهیم، می‌بایست داده‌های مربوط به

مبالغ خسارت‌های پرداختی را که از اردی‌بهشت ۱۳۷۶ تا مهر ۱۳۷۸ به ثبت رسیده‌اند، هم ارزش می‌کردیم، یعنی اثر تورم را از آن‌ها خارج می‌کردیم. برای این کار، به شاخص تورم مرتبط با داده‌ها نیاز داشتیم. شاخص کل بهای کالاها و خدمات مصرفی در مناطق شهری که شامل خدمات پزشکی نیز می‌شود بهترین شاخص تورم مرتبط با داده‌های مبالغ خسارت بیمهٔ جامع خانه و خانواده (طرح جامع خانوار) تشخیص داده شد. با مراجعه به بانک مرکزی، این شاخص را که بر مبنای سال پایهٔ ۱۳۷۶ به صورت ماهانه محاسبه شده است به دست آوردیم. همهٔ داده‌ها را به ارزش پایه‌ای مهر ۱۳۷۸ تبدیل کرده‌ایم. در این جا نیز همانند بخش قبل مبالغ پی‌درپی ادعاهای خسارت را با Z_i و $i \geq 1$ و زمان‌های بین پرداخت را با $\theta_1 = T_1$ ، $\theta_i = T_i - T_{i-1}$ و $i \geq 2$ نشان می‌دهیم، که T_i زمان پرداخت خسارت i ام است. حال در اولین قدم باید استقلال دو دنبالهٔ $\{Z_i\}_{i\geq 1}$ و $\{\theta_i\}_{i\geq 1}$ را آزمون کنیم. بنابر این، آزمون‌های همبستگی اسپیرمن، کندال و پیرسن را به کار می‌بریم. ضریب همبستگی پیرسن بین مبالغ ادعا و زمان‌های بین پرداخت برابر ۰/۱۴۶- و احتمال معنی داری دو طرفهٔ (*P-Value*) آزمون برابر ۰/۱۳۶ است. بدین ترتیب فرض صفر یعنی استقلال دو متغیر مبلغ ادعای خسارت و زمان پرداخت‌های متوالی رد نمی‌شود و دلیلی برای رد فرض استقلال وجود ندارد. آمارهٔ آزمون همبستگی کندال نیز برابر ۰/۰۸۴- است و احتمال معنی داری دو طرفهٔ (*P-value*) این آزمون برابر ۰/۲۱۲ است، که فرض صفر (استقلال) را رد نمی‌کند. به همین ترتیب ضریب همبستگی اسپیرمن برابر ۰/۱۲۲- و احتمال معنی داری دو طرفهٔ آزمون برابر ۰/۲۱۱ است که دلیلی برای رد فرض صفر به ما نمی‌دهد. بدین ترتیب هر سه آزمون نام برده فرض استقلال مبالغ ادعای خسارت را از فواصل زمانی بین پرداخت ادعاها رد نمی‌کنند.

در این مرحله باید توزیع‌های دو متغیر تصادفی Z و θ را مشخص کنیم. تابع توزیع Z را با $B(x) = P(Z \leq x)$ و تابع توزیع θ را با $A(x)$ نشان می‌دهیم. بهترین توزیع‌های برازنده شده به داده‌ها، به ترتیب توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = ۰/۶۸۷$ و $\lambda = ۰/۰۰۰۰۰۲۱$ برای داده‌های مبالغ ادعاهای خسارت و توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = ۰/۶۷۹$ و $\lambda = ۰/۰۷۶۷$ برای داده‌های فواصل زمانی بین پرداخت خسارت‌ها هستند. آزمون‌های نیکویی برازش مجذور خی و کلموگروف - اسمیرنوف را برای هر

دو توزیع برازنده شده به کار بردیم که نتایج آن به صورت زیر است:

برای داده‌های مبالغ خسارت پرداختی داریم: $X^{۲}_{\circ b} =$ ۱/۷۳۸۱۶ با ۴ درجه آزادی و سطح معنی داری برابر ۰/۷۸۳۷۷۴ است. سطح معنی داری *(Sig.Level)* آزمون کلموگروف - اسمیرنوف برابر با ۰/۴۲۴۰۸۸ است و برای داده‌های مربوط به فواصل زمانی بین پرداخت خسارت‌های متوالی داریم: $X^{۲}_{\circ b} =$ ۱/۸۲۸۳۳ با ۴ درجه آزادی و سطح‌معنی‌داری‌برابر ۰/۷۶۷۲۹۶ است. سطح‌معنی‌دار آزمون کلموگروف - اسمیرنوف برابر با ۰/۰۴۶۲۲۹۵ است. با این توضیحات می‌توانیم بپذیریم که

$$Z \sim \Gamma\,(۰/۶۸۷ \text{ و } ۰/۰۰۰۰۰۰۲۱)$$
$$\theta \sim \Gamma\,(۰/۶۷۹ \text{ و } ۰/۰۷۶۷)$$

برای راحتی کار واحد پول را به جای ریال، صدهزار ریال می‌توانیم در نظر بگیریم تا پارامتر λی توزیع گاما برای مبالغ خسارت از عدد بسیار کوچک ۰/۰۰۰۰۰۰۲۱ به عدد قابل محاسبهٔ ۰/۰۲۱ تغییر یابد. بنابر این ما با داده‌های مبالغ خسارت با واحد پول صدهزار ریال ادامه می‌دهیم که در این صورت

$$Z \sim \Gamma\,(۰/۶۸۷ \text{ و } ۰/۰۲۱)$$

است. اکنون میانگین پرداخت مبالغ خسارت برابر است با

$$\mu = E\,(Z) = \frac{۰/۶۸۷}{۰/۰۲۱} = ۳۲/۷۱۴۳$$

$$M_Z(t) = \left(\frac{۰/۰۲۱}{۰/۰۲۱ - t}\right)^{۰/۶۸۷} \quad , \quad t < ۰/۰۲۱$$

و میانگین فاصلهٔ زمانی بین پرداخت خسارت‌های پیاپی برابر است با

$$m = E\,(\theta) = ۸/۸۴۷$$

$$M_\theta(t) = \left(\frac{۰/۰۷۶۷}{۰/۰۷۶۷ - t}\right)^{۰/۶۷۹} \quad , \quad t < ۰/۰۷۶۷$$

حال با داشتن سربار ایمنی نسبی ρ می‌توانیم نرخ ناخالص حق بیمه را ــ مبلغی را که شرکت بیمه در واحد زمانی مشخص (روزانه) به عنوان حق بیمه دریافت می‌کند ــ با استفاده از (۳) از طریق فرمول زیر محاسبه کنیم:

$$c = \frac{\rho\mu + \mu}{m} \qquad (۴۹)$$

سپس با داشتن مقدار c ضریب تعدیل (R) را با استفاده از رابطهٔ (۴۱) به دست می‌آوریم. رابطهٔ (۴۱) به صورت معادلهٔ زیر در می‌آید:

$$E\exp[\, R\,(\,Z - c\theta)\,] = M_z(R)\,.\,M_\theta\,(-Rc) = ۱$$

آن گاه

$$\left(\frac{۰/۰۲۱}{۰/۰۲۱ - t}\right)^{۰/۶۸۷} \left(\frac{۰/۰۷۶۷}{۰/۰۷۶۷ + Rc}\right)^{۰/۶۷۹} = ۱ \qquad (۵۰)$$

اکنون با داشتن مقادیر مختلف ρ اطلاعات جدول شمارهٔ ۱ رابه دست می‌آوریم.

جدول ۱. مقادیر نرخ ناخالص حق بیمه و ضریب تعادل در مقابل مقادیر سربار ایمنی

ρ	c	R
۰/۰۵	۳/۸۸۳	۰/۰۰۱۰۰۸۶۹
۰/۱۰	۴/۰۶۷	۰/۰۰۱۹۰۷۸۶
۰/۱۵	۴/۲۵۲	۰/۰۰۲۷۳۳۵۵
۰/۲۰	۴/۴۳۷	۰/۰۰۳۴۹۰۶۲
۰/۲۵	۴/۶۲۲	۰/۰۰۴۱۸۷۱۱
۰/۳۰	۴/۸۰۷	۰/۰۰۴۸۳۰۱۴
۰/۳۵	۴/۹۹۲	۰/۰۰۵۴۲۵۶۲
۱/۰۰	۷/۳۹۶	۰/۰۱۰۴۵۹۷

مقادیر R به دست آمده برای محاسبهٔ کران‌های دو طرفهٔ احتمال‌های ورشکستگی به کار می‌روند. برای محاسبهٔ کران‌ها ابتدا باید مقادیر $\overline{K}(R)$ و $\underline{K}(R)$ را برای مقادیر مختلف R به دست آوریم. برای به دست آوردن آن‌ها باید از روابط (۳۹) و (۴۰) استفاده

کنیم. حال با داشتن تابع توزیع $B(u)$ سعی می‌کنیم که آن‌ها را به ساده‌ترین صورت بنویسیم، لذا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{R}{e^{Rv}(1-B(v))}\int_{v}^{\infty} e^{Ru}(1-B(u))du$$

$$=\frac{Re^{-Rv}\int_{v}^{\infty} e^{Ru}\left(\int_{u}^{\infty} f(x)dx\right)du}{P(Z>v)}$$

$$=\frac{e^{-Rv}\int_{v}^{\infty} e^{Rx} f(x)dx}{P(Z>v)}-1$$

بدین ترتیب صورت دیگر $\overline{K}(R)$ و $\underline{K}(R)$ با هر تابع توزیع B به صورت زیر است:

$$\underline{K}(R)=\left(\sup_{v\geq 0}\frac{e^{-Rv}\int_{v}^{\infty} e^{Rx}\,dB(x)}{1-B(v)}\right)^{-1} \tag{۵۱}$$

$$\overline{K}(R)=\left(\inf_{v\geq 0}\frac{e^{-Rv}\int_{v}^{\infty} e^{Rx}\,dB(x)}{1-B(v)}\right)^{-1} \tag{۵۲}$$

اکنون که $Z\sim\Gamma(\alpha\lambda)$ است داریم:

$$\underline{K}(R)=\left(\sup_{v\geq 0}\frac{M_Z(R)\,P(Z'>v)}{e^{Rv}P(Z>v)}\right)^{-1} \qquad (۵۳)$$

$$\overline{K}(R)=\left(\inf_{v\geq 0}\frac{M_Z(R)\,P(Z'>v)}{e^{Rv}P(Z>v)}\right)^{-1} \qquad (۵۴)$$

با توجه به این که $Z\sim\Gamma$ (۰/۰۲۱ و ۰/۶۸۷) و $Z'\sim\Gamma$ (۰/۰۲۱-R و ۰/۶۸۷) .

اگر به طور تحلیلی یا عددی مثلاً با استفاده از نرم‌افزار *Mathematica* که یکی از نرم افزارهای پر کاربرد در ریاضی است نشان دهیم که $f(v)=\dfrac{P(Z'>v)}{e^{Rv}P(Z>v)}$ به نتایج زیر می‌رسیم:

$$\inf_{v\geq 0} f(v)=f(0)=1 \qquad (۵۵)$$

و برای مقادیر مختلف R جدول شمارهٔ ۲ را داریم.

جدول ۲. مقادیر سوپریمم تابع $f(v)$ در مقابل مقادیر سربار ایمنی نسبی و ضریب تعدیل

$\sup f(v)$	R	ρ
۱/۰۱۵۵۲۷	۰/۰۰۱۰۰۸۶۹	۰/۰۵
۱/۰۳۰۲۶۱	۰/۰۰۱۹۰۷۸۶	۰/۱۰
۱/۰۴۴۶۱۷	۰/۰۰۲۷۳۳۵۵	۰/۱۵
۱/۰۵۸۵۴۹	۰/۰۰۳۴۹۰۶۲	۰/۲۰
۱/۰۷۲۰۸۳	۰/۰۰۴۱۸۷۱۱	۰/۲۵
۱/۰۸۵۲۴۹	۰/۰۰۴۸۳۰۱۴	۰/۳۰
۱/۰۹۸۰۷۰	۰/۰۰۵۴۲۵۶۲	۰/۳۵
۱/۲۴۰۸۰۰	۰/۰۱۰۴۵۹۷	۱/۰۰

بنابر این

$$\underline{K}(R)=\left(M_Z(R)\sup_{v\geq 0} f(v)\right)^{-1} \qquad (۵۶)$$

$$\overline{K}(R)=(M_Z(R))^{-1} \qquad (۵۷)$$

جدول ۳. مقادیر $\underline{K}(R)$ و $\overline{K}(R)$ در مقابل مقادیر سربار ایمنی نسبی و ضریب تعدیل

ρ	R	$M_Z(R)$	$\underline{K}(R)$	$\overline{K}(R)$
۰/۰۵	۰/۰۰۱۰۰۸۶۹	۱/۰۳۴۴	۰/۹۵۱۹۶	۰/۹۶۶۷۴
۰/۱۰	۰/۰۰۱۹۰۷۸۶	۱/۰۶۷۶	۰/۹۰۹۱۷	۰/۹۳۶۶۸
۰/۱۵	۰/۰۰۲۷۳۳۵۵	۱/۱۰۰۵	۰/۸۶۹۸۷	۰/۹۰۸۶۸
۰/۲۰	۰/۰۰۳۴۹۰۶۲	۱/۱۳۳۰	۰/۸۳۳۷۹	۰/۸۸۲۶۱
۰/۲۵	۰/۰۰۴۱۸۷۱۱	۱/۱۶۵۰	۰/۸۰۰۶۶	۰/۸۵۸۳۷
۰/۳۰	۰/۰۰۴۸۳۰۱۴	۱/۱۹۶۷	۰/۷۶۹۹۹	۰/۸۳۵۶۳
۰/۳۵	۰/۰۰۵۴۲۵۶۲	۱/۲۲۷۹	۰/۷۴۱۶۶	۰/۸۱۴۴۰
۱/۰۰	۰/۰۱۰۴۵۹۷	۱/۶۰۵۷	۰/۵۰۱۹۲	۰/۶۲۲۷۸

طبق قضیهٔ ۱ بخش سوم داریم:

$$\underline{K}(R)e^{-Rx}\equiv \underline{\Psi}(x)\le\Psi(x)\le\overline{\Psi}(x)\equiv\overline{K}(R)\,e^{-Rx} \qquad (۵۸)$$

بنابراین درستی نسبی برابر است با

$$\delta(x)=\frac{\overline{\Psi}(x)-\underline{\Psi}(x)}{\overline{\Psi}(x)+\underline{\Psi}(x)}=\frac{\overline{K}(R)-\underline{K}(R)}{\overline{K}(R)+\underline{K}(R)} \qquad (۵۹)$$

از (۵۹) واضح است که درستی نسبی $\delta(x)$ به x بستگی ندارد و فقط به مقادیر R وابسته است. جدول شمارهٔ ۴ مقادیر δ را در مقابل مقادیر ρ و R نشان می‌دهد. این جدول نشان می‌دهد که کران‌های به دست آمده، درستی بسیار بالایی دارند زیرا در

صورتی که حتی سربار ایمنی نسبی را برابر ۱ در نظر بگیریم درستی نسبی کران‌ها ۱۰/۷ درصد است که از دقت بالای کران‌ها نشان دارد.

جدول ۴. مقادیر درستی نسبی در برابر مقادیر سربار ایمنی نسبی و ضریب تعدیل

ρ	R	δ (%)
۰/۰۵	۰/۰۰۱۰۰۸۶۹	۰/۷۷
۰/۱۰	۰/۰۰۱۹۰۷۸۶	۱/۵
۰/۱۵	۰/۰۰۲۷۳۳۵۵	۲/۲
۰/۲۰	۰/۰۰۳۴۹۰۶۲	۲/۸
۰/۲۵	۰/۰۰۴۱۸۷۱۱	۳/۵
۰/۳۰	۰/۰۰۴۸۳۰۱۴	۴/۱
۰/۳۵	۰/۰۰۵۴۲۵۶۲	۴/۷
۱/۰۰	۰/۰۱۰۴۵۹۷	۱۰/۷

از رابطهٔ (۶) داریم

$$\Psi_a(x) = \frac{1}{2}\left[\overline{\Psi}(x) + \underline{\Psi}(X)\right]$$

اکنون برای مقادیر ρ و x با استفاده از جدول شمارهٔ ۳ و رابطهٔ (۵۸) به جدول شمارهٔ ۵ نگاه می‌کنیم.

جدول ۵. مقادیر کران پایین برآورد و کران بالای احتمال ورشکستگی در مقابل مقادیر سربار ایمنی نسبی و سرمایهٔ اولیه شرکت بیمه برای بیمهٔ جامع خانه و خانواده (طرح جامع خانوار)

ρ	x	$\underline{\Psi}(x)$	$\Psi_a(x)$	$\overline{\Psi}(x)$
۰/۰۵	۱۰۰	۰/۸۶۰۶	۰/۸۶۷۱۵	۰/۸۷۳۷
	۵۰۰	۰/۵۷۴۹	۰/۵۷۹۳۵	۰/۵۸۳۸
	۱۰۰۰	۰/۳۴۷۲	۰/۳۴۹۸۵	۰/۳۵۲۵
۰/۱۰	۱۰۰	۰/۷۵۱۳	۰/۷۶۲۶۵	۰/۷۷۴۰
	۵۰۰	۰/۳۵۰۲	۰/۳۵۵۵۰	۰/۳۶۰۸
	۱۰۰۰	۰/۱۳۴۹	۰/۱۳۶۹۵	۰/۱۳۹۰
۰/۱۵	۱۰۰	۰/۶۶۱۸	۰/۶۷۶۵۵	۰/۶۹۱۳
	۵۰۰	۰/۲۲۱۸	۰/۴۵۳۴۰	۰/۲۳۱۶
	۱۰۰۰	۰/۰۵۶۵	۰/۰۰۵۷۷۵	۰/۰۵۹۰
۰/۲۰	۱۰۰	۰/۵۸۸۱	۰/۶۰۵۳۰	۰/۶۲۲۵
	۵۰۰	۰/۱۴۵۶	۰/۱۴۹۸۵	۰/۱۵۴۱
	۱۰۰۰	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۶۱۵	۰/۰۲۶۹۰
۰/۲۵	۱۰۰	۰/۵۲۶۷	۰/۵۴۵۷۰	۰/۵۶۴۷
	۵۰۰	۰/۰۹۸۷	۰/۱۰۲۲۵	۰/۱۰۵۸
	۱۰۰۰	۰/۰۱۲۲۲	۰/۰۱۲۶۲	۰/۰۱۳۰۴
۰/۳۰	۱۰۰	۰/۴۷۵۰	۰/۴۹۵۲۵	۰/۵۱۵۵
	۵۰۰	۰/۰۶۸۸	۰/۰۷۱۷۵	۰/۰۷۴۷
	۱۰۰۰	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۶۷
۰/۳۵	۱۰۰	۰/۴۳۱۲	۰/۴۵۲۳۰	۰/۴۷۳۴
	۵۰۰	۰/۰۴۹۲	۰/۰۵۱۶۰	۰/۰۵۴
	۱۰۰۰	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۳۴۵	۰/۰۰۳۶
۱/۰۰	۱۰۰	۰/۱۷۶۴	۰/۱۹۷۶۰	۰/۲۱۸۸
	۵۰۰	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۳۰۰	۰/۰۰۳۳
	۱۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱۴	۰/۰۰۰۰۱۶	۰/۰۰۰۰۱۸

اکنون با استفاده از جدول شمارهٔ ۵ با داشتن سرمایهٔ xمی‌توان سربار ایمنی نسبی (ρ) را به گونهٔ مناسبی اختیار کرد تا احتمال ورشکستگی در فاصلهٔ دلخواه قرار گیرد، سپس با استفاده از جدول شمارهٔ ۱ نرخ ناخالص (c) را تعیین می‌کنیم.

منابع

1. Asmussen, S. (1987), Applied Probability and Queues, J.Wiley & sons, Chichester.

2. Borovkov, A. (1976), Stochastic Processes In Queueing Theory, Springer-Verlag, New York.

3. Camer, H. (1930), On the Mathematical Theory of Risk, Skandia Jubilee, Vol., Stockholm.

4. Camer, H. (1995), Collective Risk Theory, Skandia Jubilee Vol., Stockholm.

5. Dynkin, E.B. (1965), Markov Processes I, Springer -Verlag, Berlin.

6. Dynkin, E.B. (1965), Markov Processes II, Springer -Verlag, Berlin.

7. Emberechts, P. & Veraverbeke, N. (1982), Estimates for the Probability of Ruin with Special Emphasis on the Probability of Large Claims, Insurance: Math.and Econom., 1,55-72.

8. Feller, W. (1971), An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume I, wiley, New York.

9. Feller, W. (1971), An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II, wiley, New York.

10. Gerber, H.U.(1979), An Introduction to Mathematical Risk Theory, Hubner Foundation. Monagraphs, Philadelphia.

11. Grandell, J. (1991), Aspects of Risk Theory, Springer-Verlag. New York.

12. Grigelionis, B. (1993), Two-Sided Lundberg Inequalities in a Markovian Environment, Liet. Matem. Rink. 33,30-41.

13. Grimmett. G and Strizaker. D. (1982), Probability and Random Processes, Clarendon Press. Oxford.

14. BÜhlmann. Hans. (1970), Mathematical Methods in Risk Theory, Springer-Verlag. New York.

15. Kalashnikov, V.(1993), Two-Sided Estimates of Geometric Convolutions, LN in Math. 1546, 76-88 Springer-Verlag. Berlin.

16. Kalashnikov, V.(1994a), Mathematical Methods in Queueing Theory, Kluwert Academic Publishers, Dordrecht.

17. Kalashnikov, V.(1994b), Topics on Regenerative Processes, CRC Press, Boca Raton.

18. Kalashnikov, V.(1996), Two-Sided Bounds of Ruin Probabilities, Scand. Actuarial J.1:1-18.

19. Karlin. S. and Taylor, H.M. (1975), A First Course in Stochastic Processes, Academic Press,

New York.

20. Kingman, J. (1962), The Use of Spitzer's Identity in the Investigation of the busy Period and Other Quantities in the Queue, GIĬGIĬ1.J.Austral. Math. Soc. 2,345-356.

21. Newton.L, Bowers.JR, Hans U.Gerber, James C.Hickman, Donald A.Jones, Cecil J.Nesbitt. (1986), Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries.

22. Pentikainen, T. (1994), Practical Risk Theory for Actuaries, Chapman & Hall, London.

23. Prabhu, N. (1980), Stochastic Storage Processes, Queues, Insurance risk, and dams. Springer-Verlag, New York.

24. Robert V.Hogg. (1984), Loss Distributions, John Wiley & Sons. New York-Chiechster - Brisbane.

25. Stuart, A. Klugman Harry, H. Panger Gordon, E. Willmot. (1998), Loss Models from Data to Decision, John Wiley.

26. Thorin, O. (1973), The Ruin Problem in Case the Tail of the Claim Distribution is Completely Monotone, Skand. Aktuar Tidskr., 100-119.

27. Thorin, O. (1977), Ruin Probabilities Prepared for Numerical Calculations, Scand. Actuarial. J.Suppl., 7-17.

28. Von Bahr,B.(1974),Ruin Probabilities Expressed in term of Ladder Height Distribution, Scand. Actuarial. J. 1974, 190-204.

29. Williams. D (1979), Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Volum 1. John Wiley & Sons.

۳۰. گراس، دانلد و م. کارل هریس. مبانی نظریهٔ صف، ترجمهٔ غلامحسین شاهکار، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۲.

۳۱. رودین، والتر. *اصول آنالیز ریاضی*، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۷۶.