بررسی وضعیت مالی یک شرکت بیمه و تعیین احتمال ورشکستگی آن[1]

مهدی نمن‌الحسینی

مقدمه

احتمال ورشکستگی، یک معیار ایمنی و همواره در مدیریت ریسک شرکت‌های بیمه مطرح است. مثال ملموسی از کاربرد احتمال ورشکستگی، سیاست‌گذاری شرکت‌های بیمه برای انتخاب میزان نگهداری در بیمه‌های اتکایی است. طبق این معیار،حد نگهداری مناسب در یک بیمهٔ اتکایی مفروض، حدی است که احتمال ورشکستگی را حداقل سازد. ولی از آن‌جا که محاسبهٔ احتمال ورشکستگی بسیار پیچیده و مشکل و از نظر محاسباتی حتی به کمک کامپیوتر زمان‌بر است، لذا همواره به دنبال روشی هستیم که این محاسبات را ساده‌تر کند.

در ادامهٔ مقاله با یک مثال عددی احتمال ورشکستگی را در حالتی خاص از سه روش دقیق، فرمول بازگشتی و تقریب فرایند گامای انتقال یافته محاسبه و سپس نتایج حاصل را مقایسه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که احتمال ورشکستگی تا چه میزان خوب تقریب شده است. هم‌چنین کران بالای لوندبرگ برای احتمال ورشکستگی را به‌دست می‌آوریم. روش‌های ارائه شده در این مقاله بسته به نوع فعالیت یک شرکت و با تعبیر مناسب از دریافتی و پرداختی آن، قابل تعمیم به هر شرکت مالی ـ اعتباری است. در این‌جا وضعیت مالی یک شرکت بیمه بررسی شده است که داده و ستاندهٔ آن به ترتیب عبارت از خسارت و حق بیمه است. در این مقاله نشان می‌دهیم که چگونه یک فرایند پواسون مرکب را می‌توان به وسیلهٔ یک فرایند گاما و فرایندی تحت عنوان فرایند گامای انتقال یافته تقریب کرد. هم چنین نشان می‌دهیم که چگونه احتمالات ورشکستگی برای

---

۱. این مقاله با عنوان « فرایندهای گاما و احتمالات ورشکستگی» در نخستین سمینار آکچوئری در شهریور ۱۳۷۸ در دانشگاه شهید بهشتی ارائه شد.

یک فرایند پواسون مرکب را می‌توان به وسیلهٔ احتمالات ورشکستگی برای یک فرایند گاما یا یک فرایند گامای انتقال یافته تقریب کرد.

در کتاب‌های آکچوئری، فرایند گاما به صورت حدی از فرایندهای پواسون مرکب تعریف شده و آن را مدلی برای فرایند خسارت انباشته در نظر گرفته‌اند. در بخش اول این موضوع همراه با چگونگی محاسبهٔ احتمال ورشکستگی نهایی برای چنین فرایندی بررسی شده است. در بخش دوم چگونگی تقریب یک فرایند پواسون مرکب به‌وسیلهٔ یک فرایند گاما را نشان می‌دهیم. مزیت تقریب یک فرایند پواسون مرکب با این روش، چنان‌که در بخش اول نشان می‌دهیم این است که احتمال ورشکستگی برای فرایند گاما به ویژه از جهت محاسبه ساده است. در بخش سوم فرایندی به نام فرایند گامای انتقال یافته را معرفی می‌کنیم و بررسی مشابهی با بخش دوم انجام می‌دهیم. فرمول‌های مورد استفاده در پیوست مقاله آمده است.

الف) محاسبه تابع توزیع مبلغ خسارت انباشته

در مورد خسارت، با دو متغیر تصادفی یکی تعداد خسارت در یک‌دورهٔ زمانی و دیگری مبلغ خسارت در هر حادثه روبه‌رو هستیم که براساس مشاهدات پیشین از یک شرکت بیمه و به کمک روش‌های آماری توزیع هایی به این دو متغیر تصادفی برازش می‌دهیم. حق بیمهٔ خالص عبارت از حاصل‌ضرب متوسط مبلغ خسارت در متوسط تعداد خسارت است که با درنظر گرفتن درصدی از حق‌بیمهٔ خالص به منزلهٔ هزینه‌های معمول یک شرکت بیمه تحت عنوان عامل سربار و افزودن آن به حق‌بیمهٔ خالص، حق‌بیمهٔ‌صادره به‌دست می‌آید.

فرض کنیم N تعداد خسارت‌های مربوط به یک پرتفوی در یک دورهٔ زمانی مفروض را نشان دهد. هم چنین فرض کنیم X_1 مبلغ اولین خسارت، X_2 مبلغ دومین خسارت و... را نشان دهد. آن گاه

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N \qquad (1)$$

خسارت انباشته‌ای را نشان می‌دهد که در دورهٔ مورد بررسی در این پرتفوی ایجاد شده است. تعداد خسارت‌ها، N، یک متغیر تصادفی است و به فراوانی خسارت مربوط می‌شود. به علاوه، مبالغ خسارت انفرادی X_1، X_2،... نیز متغیرهای تصادفی هستند و به معیار شدت خسارت‌ها معروف‌اند.

برای ارائه یک مدل انعطاف‌پذیر دو فرض اساسی زیر را مطرح می‌سازیم:

(۱) X_1، X_2،... متغیرهای تصادفی هم‌توزیع هستند.

(۲) متغیرهای تصادفی N، X_1، X_2،... دوبه‌دو مستقل هستند.

به‌این ترتیب رابطهٔ (۱) یک مجموع تصادفی نامیده می‌شود.

معمولاً برای N بسته به رفتار متغیر تصادفی یک توزیع پواسون یا دو جمله‌ای منفی انتخاب خواهد شد. برای توزیع مبلغ خسارت نیز با توجه به خصوصیت این متغیر یک توزیع نرمال، گاما یا توزیع دیگری انتخاب می‌شود و یا ممکن است به طور تجربی از توزیع خاصی استفاده شود. وقتی برای N یک توزیع پواسون انتخاب شده است، توزیع S، **توزیع پواسون مرکب** نامیده می‌شود و وقتی یک توزیع دوجمله‌ای منفی برای N انتخاب شود توزیع S، توزیع **دوجمله‌ای منفی مرکب** نامیده می‌شود.

این دو دسته‌از توزیع‌ها یک‌انتخاب درخور توجه‌برای‌مدل‌سازی توزیع خسارت انباشتهٔ S فراهم می‌سازد. برای به‌دست آوردن تابع توزیع S، برحسب وقوع تعداد خسارت‌ها تفاوت قایل می‌شویم و از قانون احتمال تام استفاده می‌کنیم.

محاسبهٔ تابع توزیع مبلغ خسارت انباشته به طور عددی معمولاً مشکل است، اما روش‌هایی وجود دارد که این محاسبات را ساده‌تر می‌کند. این روش‌ها تحت عناوین روش‌های تقریبی و روش‌های بازگشتی مورد بحث قرار می‌گیرند.

ب) *تقریب‌هایی برای توزیع خسارت‌های انباشته*

اگر S یک توزیع پواسون مرکب یا دوجمله‌ای منفی مرکب داشته باشد آن‌گاه متغیر استاندارد شده است

$$\frac{S - E[S]}{\sqrt{var[S]}}$$

وقتی متوسط تعداد خسارت‌ها بزرگ است تقریباً یک توزیع نرمال استاندارد دارد(طبق قضیهٔ حد مرکزی). بنابر این وقتی متوسط تعداد خسارت‌ها بزرگ است توزیع نرمال خودش تقریبی برای توزیع S فراهم می‌کند.

توزیع نرمال متقارن است، در نتیجه سومین گشتاور مرکزی آن برابر صفر است، درحالی که توزیع خسارت انباشته اغلب اوقات چوله است. بنابر این به یک تقریب کلی‌تر برای توزیع خسارت انباشته نیاز داریم که چولگی را در برداشته باشد. بدین‌منظور با یک توزیع گاما شروع می‌کنیم. این انتخاب براساس این واقعیت پیشنهاد می‌شود که توزیع گاما یک گشتاور مرکزی مرتبهٔ سوم همانند توزیع‌های پواسون مرکب و

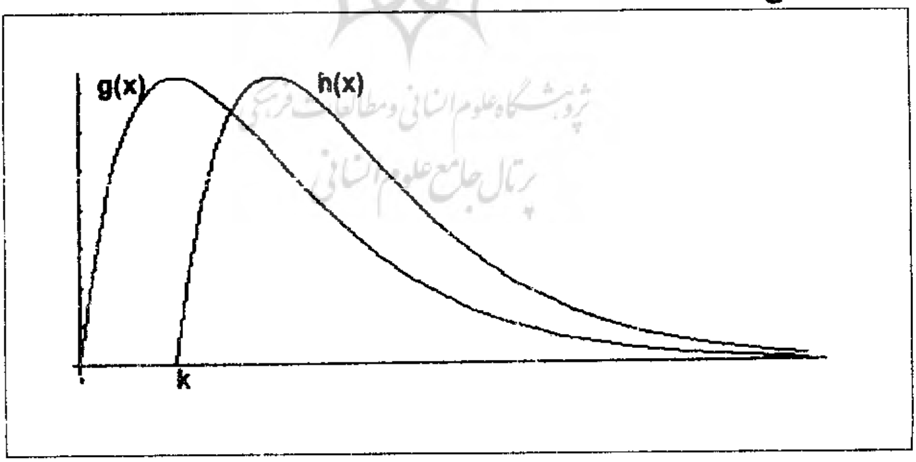
دوجمله‌ای منفی مرکب با مبالغ خسارت مثبت دارد. فرض کنیم $G(x:\alpha,\beta)$ تابع توزیع گاما با پارامترهای (β و α) را نشان دهد. آن‌گاه به‌ازای هر k یک تابع توزیع جدید را، که با (k و β و $H(x:\alpha$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(x:\alpha \text{ و } \beta \text{ و } k)=G(x-k:\alpha \text{ و } \beta)$$

این مطلب به انتقال توزیع (β و $G(x:\alpha$ به اندازهٔ k منتهی می‌شود. شکل شمارهٔ ۱ این موضوع را برای حالت $k>0$ نشان می‌دهد که $g(x)$ به‌ازای $x\geq 0$ و $h(x)$ به ازای $x\geq k$ به ترتیب توابع چگالی احتمال مربوط به (β و $G(x:\alpha$ و (k و β و $H(x:\alpha$ هستند.

طبق مطالب فوق دومین تقریب عبارت است از تقریب توزیع خسارت انباشته S به‌وسیلهٔ یک **توزیع گامای انتقال یافته** که این توزیع مزیت تشخیص چولگی را در توزیع S دارد و در واقع، برازش از برابری سه گشتاور اول آن انجام خواهد گرفت. بدین منظور پارامترهای α و β و k در توزیع‌گامای‌انتقال‌یافته از برابری گشتاورهای مرکزی اول، دوم و سوم S با موارد متناظر برای‌توزیع‌گامای‌انتقال یافته به‌دست می‌آید. این تقریب در مورد فرایند پواسون مرکب در بخش‌سوم مورد بحث قرار می‌گیرد.

شکل ۱. توزیع گامای انتقال یافته



می‌توان نشان داد که خانوادهٔ توزیع‌های نرمال، به صورت توزیع‌های حدی، در بین این خانواده از توزیع‌های گامای سه پارامتری گنجانده می‌شود. به این مفهوم، این تقریب تعمیمی از تقریب نرمال است.

پ) فرمول بازگشتی برای محاسبهٔ تابع توزیع مبلغ خسارت انباشته

مهم‌ترین خانواده از توزیع‌های مبلغ خسارت انباشتهٔ مرکب را، که روش بازگشتی برای آن قابل اجراست، می‌توان به وسیلهٔ دو شرط زیر مشخص کرد:

شرط اول: احتمال تعداد خسارت از فرمول بازگشتی

$$P_r\,(K=k)=(a+\frac{b}{k})\,P_r\,(K=k-1) \quad , \quad k=1,2,3,... \quad \text{به ازای} \qquad (2)$$

پیروی می‌کند که ثابت‌های a و b با داشتن توزیع تعداد خسارت‌ها مشخص می‌شوند.

شرط دوم: توزیع مبلغ خسارت، نامنفی، گسسته و متساوی الفاصله است. به طور ساده‌تر تنها مبالغ خسارت $Z_i = ic \qquad i=0,1,2,...,r$ ممکن‌الوقوع هستند که c یک ثابت مثبت است و طول گام نامیده می‌شود.

احتمالات مبلغ خسارت را با $S_i = P_r\,[\ Z= i\,c]$ نشان خواهیم داد که $0 \le i \le r$ است. معمولاً بزرگ‌ترین i که به‌ازای آن $S_i > 0$ است برای انتخاب r مناسب است. در این صورت توزیع مبلغ خسارت انباشته نیز گسسته و متساوی‌الفاصله است، چون تنها مقادیری که مضربی از طول گام c هستند ممکن‌الوقوع‌اند احتمالات به وسیلهٔ

$$f_j = P_r\,[S=j\,c] \qquad\qquad j=0,1,2,...$$

نشان داده خواهند شد که S متغیر مبلغ خسارت انباشته را نشان می‌دهد. این احتمالات را می‌توان به طور بازگشتی از روابط (۱۱) محاسبه کرد.

اکنون مقدار متناظر تابع توزیع خسارت انباشته، F، در هر نقطهٔ مفروض $S=j\,c$، $j \ge 0$ از رابطهٔ

$$F(x) = F(j\ c) = \sum_{i=0}^{j} f_i$$

به‌دست می‌آید.

ت) فرمول بازگشتی برای محاسبهٔ احتمال ورشکستگی نهایی

یک مدل پواسون مرکب با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم:

ـ مبالغ خسارت انفرادی روی اعداد صحیح نامنفی با میانگین β توزیع شده‌اند که β بزرگ‌تر از یک است.

ـ پارامتر پواسون‌برای تعداد خسارت‌های مورد انتظار در هر واحد زمانی برابر است با

$$\frac{1}{\left[(1+\theta)\beta\right]}$$

که در آن θ عامل سربار حق بیمه است.

ـ درآمد حق بیمه در هر واحد زمانی برابر ۱ است.

برای این مدل که فرض می‌شود ذخیرهٔ اولیهٔ مفروض u یک عدد صحیح باشد فرایند دارایی با $\left\{z\left(n\right)\right\}_{n\geq 0}$ نشان داده شده است و احتمال ورشکستگی نهایی گسسته سازی شده به صورت $\psi_d=P_r(\tau<\infty)$ نشان داده شده است که

$$\tau = \begin{cases} min\{n: Z(n) \leq 0 \text{ و } n = 1, 2, \ldots\} \\ \infty \qquad \text{اگر به‌ازای } \ldots ,2 ,1 = n ،\ Z(n) > 0 \text{ باشد} \end{cases}$$

می‌توانیم احتمال ورشکستگی نهایی گسسته سازی شده با ذخیرهٔ اولیهٔ βu، $\psi_d(\beta u)$، را تقریبی برای احتمال ورشکستگی نهایی پیوسته با ذخیرهٔ اولیهٔ u، $\psi(u)$ در نظر بگیریم (مأخذ ۴). احتمالات‌ورشکستگی تحت این مدل را می‌توان به طور بازگشتی محاسبه کرد. بدین منظور g_k و G_k را احتمالات این که خسارت انباشته در هر واحد زمانی به‌ترتیب‌مساوی k و کمتر یا مساوی‌با k به‌ازای ... ، ۲، ۱، ۰ = k باشد تعریف می‌کنیم. آن‌گاه مقادیر g_k را می‌توان از رابطهٔ (۱۱) محاسبه کرد. فرمول بازگشتی محاسبهٔ احتمالات ورشکستگی در رابطهٔ (۱۲) آمده است.

۱. فرایندگامای‌استاندارد شده‌به‌منزلهٔ حدی از فرایندهای پواسون مرکب

فرض کنیم $\{S(t,1)\}_{t>0}$ یک فرایند پواسون مرکب باشد. به‌ازای ... ، ۳ ، ۲ = n فرایند $\{S(t,n)\}_{t>0}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(t\ ,\ n) = S(t\ ,\ n\text{-}1) + X_n(t) \qquad (3)$$

که $\{X_n(t)\}_{t>0}$ یک فرایند پواسون مرکب مستقل از فرایند $\{S(t\ ,\ n\text{-}1)\}_{t>0}$ است. به‌آسانی می‌توان نشان داد که به‌ازای ... ، ۲ ، ۱ = n، $\{S(t,n)\}_{t>0}$ یک فرایند پواسون مرکب است.

فرایند گامای استاندارد شده، فرایند $\{S_{SG}(t)\}_{t>0}$ است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$S_{SG}(t) = \lim_{n\to\infty} S(t,n) \qquad \text{به‌ازای } t>0، \qquad (4)$$

طبق رابطهٔ (۳)، وقتی $n\to\infty$ $S(t\ ,\ n)$ یکنوای افزایشی است، لذا این حد به ازای هر $t>0$ وجود دارد. چون $S(t\ ,\ n)$ به $S_{SG}(t)$ می‌گراید این همگرایی در توزیع نیز وجود دارد. می‌توان نشان داد که $S(t\ ,\ n)$ در توزیع به یک متغیر تصادفی با توزیع $Gamma\ (t\ ,1)$ می‌گراید. از این رو، $S_{SG}(t)$ یک توزیع $Gamma\ (t\ ,\ 1)$ دارد. سرانجام به‌ازای هر $\alpha>0$ و $\beta>0$ یک فرایند تصادفی جدید $\{S_G(t)\}_{t>0}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_G(t) = \beta^{-1}\, S_{SG}(\alpha t)$$

و آن را یک فرایند گامای (α,β) می‌نامیم. نتیجه این که فرایند گامای استاندارد شده، $\{S_{SG}(t)\}_{t>0}$، یک فرایند گامای (۱و۱) است. توجه داریم که متغیر تصادفی $S_G(t)$ یک توزیع گامای $(\alpha t,\beta)$ دارد (هم چنین توزیع گاما طوری پارامتر سازی شده است که $S_G(t)$ میانگین $\frac{\alpha t}{\beta}$ دارد).

فرایند گامای استاندارد شده را مدلی برای فرایند خسارت انباشته برای یک ریسک در نظر می‌گیریم به طوری که $S_{SG}(t)$ خسارت انباشتهٔ مربوط به این ریسک در دورهٔ زمانی $[0,t]$ رانشان می‌دهد. فرض کنیم درآمد حق بیمه به طور پیوسته با نرخ ثابت C در هر واحد زمانی برای این ریسک دریافت می‌شود. هم چنین فرض کنیم که

$$C > E\ [S_{SG}(1)]$$

احتمال بقا یعنی عدم ورشکستگی تا زمان t برای این فرایند با دارایی اولیهٔ مفروض $u(\geq 0)$ را با $\delta_{SG}(u\ ,\ t)$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\delta_{SG}(u\ ,\ t) = P_r\ (u + C\,\tau - S_{SG}(\tau) \geq 0 \quad \text{(به‌ازای تمام } \tau \text{ هایی که } 0<\tau\leq t$$

احتمالات ورشکستگی نهایی برای یک فرایند گامای استاندارد شده وقتی عامل سربار حق بیمه برابر θ است طبق رابطهٔ (۱۵) محاسبه می‌شود.

چون $\psi_{SG}(u)$ احتمال دُم یک توزیع هندسی مرکب است، مقادیر $\psi_{SG}(u)$ به‌وسیلهٔ گسسته‌سازی $G(x)$ بر روی نقاط ... ، $2h$ ، h، ۰ با استفاده از گرد کردن معمولی و سپس به‌کار بردن فرمول بازگشتی (۱۱) محاسبه می‌شود.

۲. تقریب فرایند گاما برای یک فرایند پواسون مرکب

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه احتمالات بقای زمان متناهی برای یک فرایند پواسون مرکب را می‌توان به‌وسیلهٔ احتمالات بقای زمان متناهی برای یک فرایند گاما تقریب کرد.

فرض کنیم $\{S(t)\}_{t>0}$ یک فرایند پواسون مرکب با پارامتر λ باشد و $P(x)$ توزیع مبلغ خسارت فردی را نشان می‌دهد. هم‌چنین فرض کنیم p_k kامین گشتاور حول صفر این توزیع را نشان دهد. این فرایند پواسون مرکب را به‌وسیلهٔ یک فرایند گامای (α,β) به‌صورت $\{S_G(t)\}_{t>0}$ تقریب خواهیم زد. پارامترهای α و β از فرایند گاما را به‌وسیلهٔ برابری دو گشتاور اول دو فرایند پیدا می‌کنیم که نتیجه می‌شود

$$\alpha = \lambda p_1^2 / p_2 \quad \text{و} \quad \beta = p_1/p_2 \tag{5}$$

توجه داریم که پارامترهای α و β مستقل از t هستند.

فرایند دارایی مربوط به فرایند پواسون مرکب $\{U(t)\}_{t>0}$ است که $U(t)=u+Ct-S(t)$ u دارایی اولیه و C درآمد حق‌بیمه در هر واحد زمانی است. در مثال‌های عددی می‌نویسیم $C = (1+\theta)\lambda p_1$ که θ عامل سربار حق‌بیمه است. احتمال بقای زمان متناهی برای این فرایند را با $\delta(u,t)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta(u,t) = P_r\,(u + C\tau - S(\tau) \geq 0 \text{ ،} 0<\tau\leq t \text{ به ازای همه } \tau \text{هایی که})$$

این احتمال را به‌وسیله $\delta_G(u,t)$ احتمال بقای زمان متناهی برای فرایند گاما تقریب می‌زنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_G(u,t) = P_r\,(u + C\tau - S(\tau) \geq 0 \text{ ،} 0<\tau\leq t \text{ به ازای همهٔ } \tau \text{هایی که})$$

که پارامترهای α و β از $\{S_G(t)\}_{t>0}$ به‌وسیلهٔ (۵) مفروض هستند. $\delta_G(u,t)$ را با استفاده از فرایند گامای استاندارد شده و تساوی زیر محاسبه می‌کنیم، چون $C=(1+\theta)\lambda p_1=(1+\theta)\alpha/\beta$ می‌توان نوشت:

$$\delta_G(u,t) = \delta_{SG}(\beta u,\alpha t) \tag{6}$$

در مثال‌های عددی قرار می‌دهیم $\lambda=1$ و از دو توزیع زیر برای مبالغ خسارت فردی استفاده می‌کنیم:

توزیع ۱ : $P(x)$ توزیع گامای ($\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$) است. برای این توزیع، $p_1=1$ و $p_2=4$ بنابراین در تقریب فرایند گاما داریم: $\alpha=\beta=0/25$ لذا $\delta(u,t)$ را به‌وسیلهٔ $\delta_{SG}(u/4,t/4)$ تقریب می‌زنیم.

توزیع ۲ : $P(x)$ توزیع پارتو (۲ و ۳) است. برای این توزیع $p_1=1$ و $p_2=4$ بنابراین در تقریب فرایند گاما داریم $\alpha=\beta=0/25$.

پارامترهای این توزیع‌ها طوری انتخاب شده‌اند که فرایند گامای یکسانی هر دو

فرایند پواسون مرکب را تقریب می‌زند. گرچه دو گشتاور اول برای هر یک از توزیع‌های ۱ و ۲ یکسان هستند، $p_۴$ برای توزیع ۲ وجود ندارد ولی برای توزیع ۱ وجود دارد. از این رو انتظار داریم‌که‌تقریب‌فرایندگامابرای‌فرایندپواسون‌مرکب با توزیع ۱ بهتر از توزیع ۲ باشد.

۳. تقریب فرایند گامای انتقال یافته برای یک فرایند پواسون مرکب

همانند بخش قبل، $\{S(t)\}_{t>۰}$ یک فرایند پواسون مرکب با پارامتر λ است و p_k، kامین گشتاور حول صفر توزیع مبلغ خسارت انفرادی را نشان می‌دهد. $\{S(t)\}_{t>۰}$ را به‌وسیلهٔ $\{S_{TG}(t)\}_{t>۰}$ که **فرایند گامای انتقال‌یافته** نامیده می‌شود تقریب خواهیم زد. بدین منظور به‌ازای هر $t>۰$ تعریف می‌کنیم:

$$S_{TG}(t) = S_G(t) + kt$$

که $\{S_G(t)\}_{t>۰}$ یک فرایند گامای (α,β) و k مقدار ثابتی است (که ممکن است مثبت یا منفی باشد). پارامترهای α، β، k از فرایند $\{S_{TG}(t)\}_{t>۰}$ طوری انتخاب می‌شوند که میانگین، واریانس و ضریب چولگی $S(t)$ و $S_{TG}(t)$ را به ازای هر t برابر قرار دهیم. این تساوی‌ها مقادیر پارامترها را به‌صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\alpha = ۴\lambda p_۲^۳ / p_۳^۲ \quad , \quad \beta = ۲p_۲ / p_۳ \quad , \quad k = \lambda(p_۱ - ۲p_۲^۲ / p_۳) \qquad (۷)$$

همانند تقریب قبلی، پارامترها همگی مستقل از t هستند. اکنون

$$\delta(u,t) = P_r\ (u+c\tau-S(\tau) \geq ۰ \text{ ،}۰<\tau\leq t \text{ به ازای تمام } \tau\text{هایی که})$$

را به‌وسیلهٔ $\delta_{TG}(u,t)$، احتمال بقا برای فرایند گامای انتقال یافته که به صورت زیر تعریف می‌شود تقریب می‌زنیم:

$$\delta_{TG}(u,t) = P_r\ (u+c\tau-S_{TG}(\tau) \geq ۰ \text{ ،}۰<\tau\leq t \text{ به ازای تمام } \tau\text{هایی که})$$

$$= Pr\ (u+(c-k)\tau-S_G(\tau) \geq ۰ \text{ ،}۰<\tau\leq t \text{ به ازای تمام } \tau\text{هایی که}) \qquad (۸)$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$c-k = (۱+\theta)\frac{\alpha}{\beta} + k\theta$$

بنابراین داریم:

$$c=(۱+\theta)\ (\alpha/\beta + k)$$

لذا بدون توجه به مقادیر k می‌توان نوشت:

$$c\text{-}k> E[S_G(۱)] = \alpha/\beta$$

یا

$$c > \alpha/\beta + k$$

که $S_G(۱)$ توزیع گامای (α,β) دارد. با توجه به روابط فوق رابطهٔ (۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\delta_{TG}(u,t) = Pr(u+(۱+\hat{\theta})\ \alpha/\beta\ \ \tau - S_G(\tau)\ \geq ۰ \text{ (به ازای تمام } \tau \text{هایی که } ۰<\tau\leq t)$$

$$= \delta_{SG}(\beta u, \alpha t) \qquad (۹)$$

چون $\lambda p_۱ = \alpha/\beta + k$ لذا $\delta_{TG}(u,t)$ احتمال بقای زمان متناهی را نشان می‌دهد وقتی فرایند خسارت انباشتهٔ یک فرایند گامای (α,β) و عامل سربار حق‌بیمه برابر $\hat{\theta}=\theta(۱+k\beta/\alpha)$ است. از این رو می‌توانیم $\delta(u,t)$ را به‌وسیلهٔ $\delta_{SG}(\beta u, \alpha t)$ با به کار بردن عامل سربار حق‌بیمه $\hat{\theta}$ تقریب بزنیم.

روش تقریب را جهت دو توزیع زیر برای مبالغ خسارت انفرادی نشان می‌دهیم:

توزیع ۱: $P(x)$ توزیع گامای $(\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲})$ است. سه گشتاور اول این توزیع برابر $p_۱=۱$ و $p_۲=۴$ و $p_۳=۲۸$ هستند. فرض‌کنیم $\lambda=۱$ و $\theta=۰/۱$، نتیجه‌می‌شود $\alpha=\frac{۱۶}{۴۹}$، $\beta=\frac{۲}{۷}$ و $k=\frac{-۱}{۷}$، آن‌گاه $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{۸}{۷}$ و $c\text{-}k=\frac{۸۷}{۷۰}$. بنابراین $\hat{\theta}=\frac{۷}{۸۰}$. بنابراین $\delta(u,t)$ را به‌وسیلهٔ $\delta_{SG}(\frac{۲u}{۷}$ و $\frac{۱۶t}{۴۹})$ با استفاده از عامل سربار حق‌بیمه $\frac{۷}{۸۰}$ تقریب می‌زنیم.

توزیع ۲: $P(x)$ توزیع پارتوی (۳ و ۴) است. برای این توزیع $p_۱=۱$ و $p_۲=۳$ و $p_۳=۲۷$. مجدداً فرض کنیم $\lambda=۱$ و $\theta=۰/۱$، نتیجه می‌شود که $\alpha=\frac{۴}{۲۷}$، $\beta=\frac{۲}{۹}$ و $k=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{۲}{۳}$ و $c\text{-}k=\frac{۲۳}{۳۰}$. بنابراین $\hat{\theta}=۰/۱۵$ از این رو $\delta(u,t)$ را به‌وسیلهٔ $\delta_{SG}(\frac{۲u}{۹}$ و $\frac{۴t}{۲۷})$ با استفاده از عامل سربار حق‌بیمه ۰/۱۵ تقریب می‌زنیم.

شگفت‌آور نیست که فرایند گامای انتقال یافته تقریب‌های بهتری از بخش قبل ارائه می‌دهد، زیرا تقریب زدن حاصل برابری یک گشتاور بیش از فرایند مفروض در بخش قبل است.

از طرفی چون سه گشتاور اول تقریب فرایند گامای انتقال یافته را به ازای تمام مقادیر t، با مقادیر متناظر فرایند پواسون مرکب مساوی قرار داده‌ایم انتظار داریم که $\delta_{TG}(u,t)$ تقریب مستدلی برای $\delta(u,t)$ باشد. این موضوع در حالتی درست است که $u>۰$. به هر حال وقتی $u=۰$ این تقریب‌ها ضعیف و بسیار بدتر از تقریب‌های بخش قبل هستند.

۴. مثال عددی

فرض کنیم خسارت‌های انفرادی به صورت نمایی با میانگین یک ($\lambda = 1$) توزیع شده‌اند یعنی $P(x) = 1 - exp\ \{-x\}$ ، $x > 0$ و عامل سربار، θ، برابر ۰/۱ است. می‌خواهیم احتمال ورشکستگی را در این حالت از سه روش دقیق، فرمول بازگشتی و تقریب گامای انتقال یافته محاسبه کنیم. می‌توان نشان داد که احتمال ورشکستگی برای توزیع نمایی از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\ exp\left\{-\frac{\theta}{1+\theta}\ \frac{u}{p_1}\right\} \tag{10}$$

بنابراین به کمک رابطهٔ فوق مقادیر دقیق احتمال ورشکستگی در این حالت به ازای مقادیر مختلف ذخیرهٔ اولیه، u به‌دست می‌آید.

برای محاسبهٔ احتمال ورشکستگی به روش بازگشتی، ابتدا توزیع نمایی را بر روی نقاط ... ، $\frac{2}{100}$ ، $\frac{1}{100}$ ، ۰ گسسته‌سازی می‌کنیم و سپس توزیع خسارت انباشته را از رابطهٔ (۱۱) و احتمال ورشکستگی را از رابطهٔ (۱۲) به‌دست می‌آوریم.

سرانجام برای محاسبهٔ احتمال ورشکستگی با استفاده از تقریب گامای انتقال یافته، ابتدا پارامترهای α، β و k از فرایند گامای انتقال یافته را از روابط (۷) به‌دست می‌آوریم. سپس تابع $G(x)$ مفروض در رابطهٔ (۱۴) را گسسته‌سازی و احتمال ورشکستگی را از رابطهٔ (۱۵) محاسبه می‌کنیم.

در گذشته که پیشرفت‌های اخیر در محاسبات عددی صورت نگرفته بود چون محاسبهٔ احتمال ورشکستگی ممکن نبود لذا یک کران بالا برای احتمال ورشکستگی به‌نام کران بالای لوندبرگ به‌صورت $\psi(u) < e^{-Ru}$ در نظر می‌گرفتند که در آن R ضریب تعدیل نام داشت.

می‌دانیم که ضریب تعدیل در توزیع نمایی برابر است با:

$$R = \theta / (1 + \theta)$$

در جدول شمارهٔ ۱ مقادیر محاسبه شدهٔ احتمال ورشکستگی، حاصل از سه روش مختلف همراه با کران بالای لوندبرگ برای احتمال ورشکستگی به‌ازای مقادیر مختلف ذخیرهٔ اولیه نشان داده شده است.

توضیح آن‌که فرض کنیم خسارت‌هایی که در طی یک دورهٔ زمانی به یک شرکت بیمه می‌رسد، توزیع پواسون با میانگین یک داشته باشد. هم‌چنین فرض کنیم مجموعهٔ مبالغ

جدول ۱. مقادیر محاسبه شدهٔ احتمال ورشکستگی حاصل از سه روش همراه با کران بالای لوندبرگ

ذخیرهٔ اولیه	کران بالای لوندبرگ	مقادیر احتمال ورشکستگی حاصل از		
		روش دقیق	فرمول بازگشتی	تقریب گامای انتقال یافته
۲	۰/۸۳۳۷۵	۰/۷۵۷۹۶	۰/۷۵۷۲۷	۰/۷۵۷۲۴
۴	۰/۶۹۵۱۴	۰/۶۳۱۹۵	۰/۶۳۱۳۸	۰/۶۳۰۶۹
۶	۰/۵۷۹۵۸	۰/۵۲۶۸۹	۰/۵۲۶۴۲	۰/۵۲۵۸۴
۸	۰/۴۸۳۲۳	۰/۴۳۹۳۰	۰/۴۳۸۹۱	۰/۴۳۸۴۹
۱۰	۰/۴۰۲۸۹	۰/۳۶۶۲۶	۰/۳۶۵۹۴	۰/۳۶۵۶۶
۲۰	۰/۱۶۲۳۲	۰/۱۴۷۵۶	۰/۱۴۷۴۶	۰/۱۴۷۴۷
۳۰	۰/۰۶۵۴۰	۰/۰۵۹۴۵	۰/۰۵۹۴۳	۰/۰۵۹۴۷
۴۰	۰/۰۲۶۳۵	۰/۰۲۳۹۵	۰/۰۲۳۹۷	۰/۰۲۳۹۸
۵۰	۰/۰۱۰۶۲	۰/۰۰۹۶۵	۰/۰۰۹۶۸	۰/۰۰۹۶۷
۶۰	۰/۰۰۴۲۸	۰/۰۰۳۸۹	۰/۰۰۳۹۳	۰/۰۰۳۹۰
۷۰	۰/۰۰۱۷۲	۰/۰۰۱۵۷	۰/۰۰۱۶۱	۰/۰۰۱۵۷
۸۰	۰/۰۰۰۶۹	۰/۰۰۰۶۳	۰/۰۰۰۶۷	۰/۰۰۰۶۳

خسارت در هر حادثه از توزیع نمایی با میانگین ۱ پیروی کند. حال چنانچه دارایی اولیهٔ این شرکت برابر ۳۰ واحد پولی باشد و بخواهیم احتمال ورشکستگی آن را محاسبه کنیم طبق کران بالای لوندبرگ، احتمال ورشکستگی این شرکت از ۶/۵ درصد فراتر نخواهد رفت.

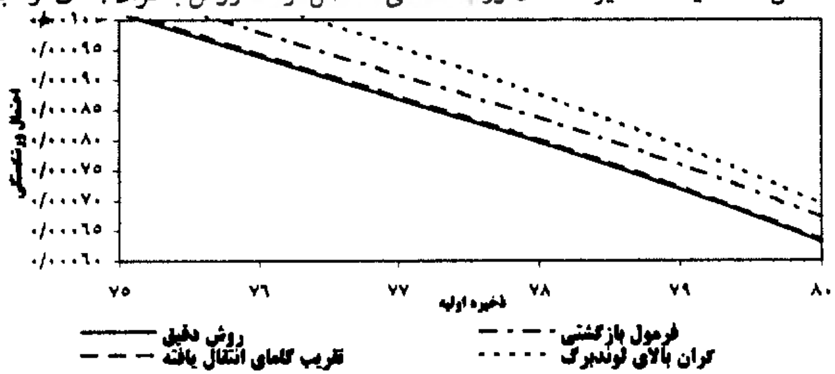
محاسبهٔ احتمال ورشکستگی با استفاده از فرمول بازگشتی و تقریب گامای انتقال یافته نشان می‌دهد که احتمال ورشکستگی شرکت برابر ۵/۹ درصد است که این مقادیر بسیار نزدیک به مقدار دقیق احتمال ورشکستگی این شرکت است (فرمول بازگشتی و تقریب تا چهار رقم اعشار با مقدار دقیق یکسان هستند). این امر خوبی روش‌های تقریبی و بازگشتی مورد استفاده را می‌رساند لذا در حالاتی که محاسبهٔ احتمال ورشکستگی یک شرکت پیچیده و تقریباً ناممکن است روش‌های تقریبی و بازگشتی نتایج خوبی دربی دارند. چنان که انتظار داریم، مطابق ارقام جدول افزایش ذخیرهٔ اولیهٔ شرکت، باعث

کاهش احتمال ورشکستگی آن می‌شود. برای مثال، افزایش ذخیرهٔ اولیهٔ شرکت از ۱۰ واحد پولی به ۵۰ واحد پولی باعث کاهش احتمال ورشکستگی آن از ۳۶/۶ درصد به حدود ۱ درصد می‌شود. بنابراین شرکت‌های بیمه چنانچه فرایند افزایش سرمایه و ذخیره‌گیری خود را به‌طور مناسب و پیوسته انجام دهند خواهند توانست ظرفیت پذیرش ریسک خود را به سرعت افزایش دهند. مقایسهٔ روش‌های تقریبی و بازگشتی نشان می‌دهد که به ازای مقادیر بزرگ ذخیرهٔ اولیهٔ شرکت، محاسبهٔ احتمال ورشکستگی با استفاده از تقریب گامای انتقال یافته نتایج بسیار خوب و تقریباً منطبق بر مقادیر دقیق این احتمال می‌دهد. برای مثال، به ازای ذخیرهٔ اولیهٔ برابر با ۷۰ و ۸۰ واحد پولی مقادیر تقریبی و دقیق تا پنج رقم اعشار یکسان هستند. این موضوع در شکل شمارهٔ ۳ به وضوح دیده می‌شود (برنامه‌های کامپیوتری محاسبهٔ احتمال ورشکستگی با استفاده از روش‌های مذکور نزد مؤلف موجود است).

شکل‌های زیر مقادیر احتمال ورشکستگی حاصل از سه روش محاسباتی را همراه با کران بالای لوندبرگ مقایسه می‌کنند.

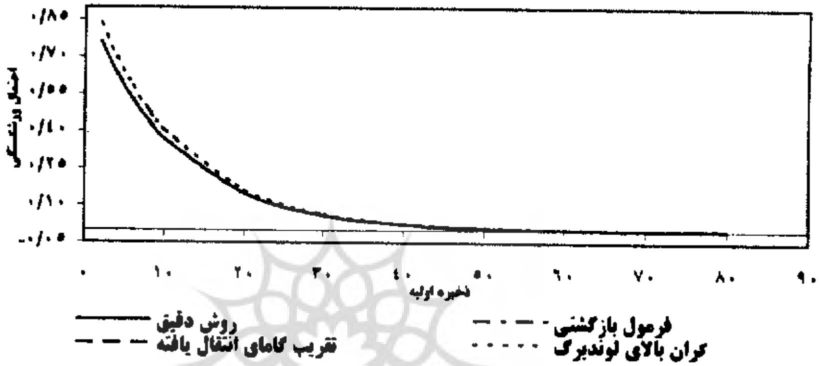
طبق شکل ۲ منحنی حاصل از سه روش محاسبهٔ احتمال ورشکستگی و کران بالای لوندبرگ به ویژه به ازای مقادیر بزرگ ذخیرهٔ اولیهٔ شرکت تقریباً بر هم منطبق است که این امر نشان از خوبی روش‌های تقریبی و بازگشتی دارد. به طوری که در این شکل مشخص است با افزایش ذخیرهٔ اولیه، منحنی احتمال ورشکستگی نزول می‌کند و به صفر نزدیک می‌شود.

شکل ۲. مقایسهٔ مقادیر احتمال ورشکستگی حاصل از سه روش با کران بالای لوندبرگ



در شکل شمارهٔ ۳ مقطع کوچکی از شکل شمارهٔ ۲ نمایش یافته است. این شکل مقایسهٔ مقادیر احتمال ورشکستگی را به میزان زیادی ساده می‌کند. طبق این شکل مقادیر احتمال ورشکستگی حاصل از روش تقریب گامای انتقال یافته بسیار نزدیک به مقادیر دقیق این احتمال است. در این‌جا روند نزول احتمال ورشکستگی به سبب افزایش ذخیرهٔ اولیهٔ شرکت است.

شکل ۳. مقایسهٔ مقادیر احتمال ورشکستگی حاصل از سه روش با کران بالای لوندبرگ



نتیجه گیری

زمان محاسباتی مورد نیاز برای محاسبهٔ مقادیر تقریبی $\delta(u,t)$ با استفاده از روش‌های دو بخش قبل بسیار کمتر از زمان محاسباتی لازم با استفاده از فرمول (۱۲) است. گرچه الگوریتم‌های مذکور مقادیر بسیار دقیقی ارائه می‌دهند، میزان زمان محاسباتی لازم برای مقادیر بزرگ u و t در این فرمول‌ها درخور توجه است. مثال عددی نشان می‌دهد که تقریب‌ها برای $\delta(u)$ به ازای مقادیر بزرگ u خوب هستند. نتیجه این که روش تقریب بخش قبل را می‌توان برای ایجاد برآوردهای سریع و نسبتاً معتبر $\delta(u,t)$ برای مقادیر بزرگ u و t به‌کار برد.

ایدهٔ اصلی در بخش‌های ۲ و ۳ تقریب زدن یک فرایند پواسون مرکب $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ به‌ترتیب به‌وسیلهٔ یک فرایند گاما $\{S_G(t)\}_{t\geq 0}$ و یک فرایند گامای انتقال یافته $\{S_{TG}(t)\}_{t\geq 0}$ بوده است. در هر حالت تقریب، نتیجه برابری یک تعداد مناسب از گشتاورهاست. سپس احتمال بقا برای فرایند پواسون مرکب، $\delta(u,t)$، به‌وسیلهٔ احتمال متناظر برای فرایند گاما یا فرایند گامای انتقال یافته تقریب شده است.

پیوست

الف) فرمول بازگشتی محاسبهٔ توزیع خسارت انباشته

$$f_j = \frac{1}{1-aS_0} \sum_{i=1}^{min(j,r)} (a + \frac{ib}{j}) S_i f_{j-i} \qquad j=1, 2, \ldots \qquad (11)$$

با مقدار اولیه

$$f_0 = \begin{cases} p_0 & S_0 = 0 \text{ اگر } \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i S_0^i = M_k (\ln S_0) & S_0 > 0 \text{ اگر } \end{cases}$$

مقادیر a و b از رابطهٔ (۲) حاصل می‌شوند. M_k تابع مولد گشتاور است.

ب) فرمول بازگشتی محاسبهٔ احتمال ورشکستگی

$$\psi_d(0) = \frac{1}{(1+\theta)} \qquad (12)$$

به ازای $u \geq 1$،

$$\psi_d(u) = g_0^{-1} [(G(u) - 1 + \psi_d(u-1) - \sum_{j=1}^{u} g_j \psi_d(u-j))]$$

پ) محاسبهٔ احتمال ورشکستگی در فرایند گامای انتقال یافته

اکنون می‌خواهیم برای احتمال بقای نهایی برای یک فرایند گامای استاندارد شده فرمولی ارائه دهیم. بدین منظور متغیر تصادفی خسارت انباشتهٔ ماکزیمم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L = max_{t \geq 0} \left\{ S(t) - Ct \right\}$$

برای به‌دست آوردن تابع توزیع متغیر تصادفی L به‌ازای $u \geq 0$، می‌نویسیم:

$$\delta(u) = 1-\psi(u) = P_r (U(t) \geq 0 \quad \text{، به‌ازای تمام } t \text{ ها})$$

$$= P_r (L \leq u) \quad , \quad u \geq 0 \qquad (13)$$

بنابر این تابع توزیع L برابر $\delta(u) = 1-\psi(u)$ است. در مدل پواسون مرکب

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$$

یک توزیع هندسی مرکب دارد. در این‌جا N، L_1، L_2 و ... متغیرهای تصادفی مستقل و L_iها همتوزیع‌هستند و N یک توزیع هندسی دارد. در حالت خاصی که $\{S_G(t)\}_{t>0}$ یک فرایند گاماست می‌دانیم که هر فرایند گاما می‌تواند به یک فرایند گامای استاندارد شده تبدیل شود. می‌توان‌نشان داد که تابع توزیع‌مشترک‌متغیرهای تصادفی $\{L_i\}$ برابر است با

$$G(x) = ۱ - e^{-x} + x \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dy \qquad (۱۴)$$

از طرفی طبق رابطهٔ (۱۳) داریم:

$$\psi_{SG}(u) = ۱ - P_r\,[\,L_{SG} \leq u\,]$$

$$= ۱ - \sum_{n=۰}^{\infty} G^{n*}(u) \quad \frac{\theta}{(۱+\theta)^{n+۱}} \qquad (۱۵)$$

منابع

1. Abramowitz, M. and Stegun, I. A (1964), *Handbook of Mathematical Functions.*
2. Bowers, N.J. , Gerber, H.U. , Hickman, J.C. , Jones, D.A. and Nesbitt, C.J, (1986), *Actuarial Mathematics.*
3. Daykin C.D. , T. Pentikainen and M. Pesonen (1994), *Practical Risk Theory for Actuaries,* Chapman and Hall, London.
4. Dickson, D.C. M. and H.R. Waters (1991), "Recursive Calculation of Survival" *Probabilities, Astin Bulletin* 22, 199-221.
5. Dickson, D.C.M. and H.R.Waters (1993), "Gamma Processes and Finite Time Survival Probabilities", *Astin Bulletin* 23, 259-272.
6. Dufresne, F., H.U. Gerber and E.S.W. Shiu (1991), "Risk Theory and the Gamma Process", *Astin Bulletin* 21, 177-192.