رشد بهینه‌ی جمعیت با ترجیحات
CIES در مدل رمزی با افق نامحدود[1]

دکتر رالف وانگ، دکتر رحیم دلالی اصفهانی و لیلا ترکی[*]

تاریخ وصول: ۸۵/۳/۲۹   تاریخ پذیرش: ۸۵/۶/۲۷

چکیده:
با به کار گیری ترجیحات مصرف بین دوره‌ای از نوع کشش جانشینی ثابت (CIES)[2] و سرمایه‌ی انسانی به شکل خاص در تابع تولید این مقاله می‌کوشد رشد بهینه‌ی جمعیت را وقتی ترجیحات مصرف بین دوره‌ای از نوع کشش جانشینی ثابت بین دوره‌ای و در فضای مرسوم رمزی باشد، بررسی نماید. نتایج تحقیق نشان داد که نرخ رشد بهینه‌ی جمعیت دقیقا برابر با نرخ تنزیل ذهنی استنتاجی از مدل با افق نامحدود رمزی است.
طبقه بندی JEL: J11

واژه‌های کلیدی: *رشد جمعیت، تابع CIES، مدل رمزی*

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

---
[1] این مقاله شکل تعمیم یافته و مدرن شده مقاله‌ي اولیه توسط نویسندگان است.

[*] به ترتیب، عضو هیات علمي دانشکده‌ي اقتصاد دانشگاه ژجیانگ چین، عضو هیات علمي و دانشجوي دوره‌ی دکتري اقتصاد دانشگاه اصفهان. (Ltorki@gmail.com)

[2] Constant Inter Period Elasticity of Substitution

۱- مقدمه

در تئوری‌های نئوکلاسیک مشهور، (مثل کاس،[۳] ۱۹۶۵ و کوپمن،[۴] ۱۹۶۵)، رشد بهینه‌ی جمعیت برونزا در نظر گرفته شده است. اما در برخی از الگوهای دیگر مانند مدل الگوی مصارف دوره‌ی زندگی ساموئلسون[۵] (۱۹۷۵)، می‌توان شرایطی را برای نرخ رشد جمعیت بهینه در حالت پایا در نظر گرفت که بر اساس قاعده‌ی طلایی[۶] و بدون ملاحظات سیر رشد، جمعیت به دست آید. پالیوس[۷] (۱۹۹۵) نشان داده است که مسیرهای چند گانه رشد جمعیت بهینه در حالت پایا را می‌توان بر حسب سرمایه‌ی سرانه ارائه کرد. این موضوع نیز در مطالعات تجربی، مورد تأیید قرار گرفته است. البته، این در حالی است که سیر رشد جمعیت به صورت متمرکز کنترلی و بدون ملاحظات دیگر در نظر گرفته شده است.

با توجه به ادبیات موجود، هدف اصلی این مقاله تحلیل نرخ رشد بهینه‌ی جمعیت در شرایط ترجیحات مصرف بین دوره‌ای از نوع کشش جانشینی ثابت بین دوره‌ای ($CIES$) و در فضای مرسوم رمزی[۸] است.

در مقاله‌ی حاضر هیچ فرض قبلی بر نوع ویژگی‌های رشد جمعیت، تحمیل نمی‌شود. حال آنکه در مطالعات دیگر همچون مقاله اخیر لمیجوکی[۹] (۲۰۰۴) رشد جمعیت (با سطح خالص باروری) بر اساس سرمایه‌ی سرانه ابتدا افزایشی و سپس کاهشی در نظر گرفته شده است و نقطه‌ی انتقال تحولات جمعیتی متناظر، به دلیل مشخصات ویژه‌ی کشوری، برونزا فرض شده است، در این مقاله سرمایه‌ی انسانی به عنوان متغیر اصلی در تابع تولید لحاظ می‌شود و انتخاب نرخ باروری بر محدودیت بودجه و همچنین مطلوبیت خانوار اثر می گذارد.

این مقاله در چهار بخش تنظیم شده است. بخش دوم به بررسی فروض اساسی می‌پردازد. بخش سوم شرط تعادل را بیان می‌کند و در بخش چهارم نتایج تحقیق ارایه می‌گردد.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

---

3 Cass
4 Koopmans
5 Samuelson

۶ قاعده‌ي طلائي k^* مسير رشدي را توضيح مي‌دهد كه وقتي اقتصاد به آن مسير دست يافت براي هميشه مصرف سرانه‌ي بيشتري را نسبت به همه‌ي مسيرهاي ديگر ارائه خواهد داد.

7 Palivos

۸ براي توضيح بيشتر به كتاب بلانچارد و فيشر مراجعه شود.

9 Lehmijoki

۲- فروض اساسی

۲-۱- ترجیحات

همان‌طور که در بالا ذکر شد، ترجیحات بین زمانی مصرفی افراد به صورت تابع مطلوبیت $U : R_+ \rightarrow R$، به صورت $CIES$ نشان داده می‌شود. این تصریح به صورت زیر قابل ارائه است.

$$U(C(t))=\frac{C(t)^{1-\delta}}{(1-\delta)} \qquad (1)$$

$$\delta > 0, \delta \neq 1$$

در رابطه‌ی فوق U نشانگر مطلوبیت، $C(t)$ نشانگر مصرف فرد در طول زمان و δ کشش مطلوبیت نهائی بر اساس $C(t)$ یا ضریب ریسک گریزی نسبی است، به طوری که کشش جانشینی بین دوره‌ای $\sigma=\frac{1}{\delta}$ است.

اگر $N(t)$ اندازه‌ی خانوار و نرخ رشد نمائی آن $\eta(t)$ باشد و برای سادگی، $N(0)$ به یک نرمالایزه شود، در آن صورت $\eta(t)=e^{\eta t}$ مطلوبیت آنی خانوار در زمان t است که به صورت زیر تصریح می‌شود

$$U(C(t)) = exp \{-\int_0^t [\theta-\eta(\tau)]\, d\tau\} \qquad (2)$$

که در آن θ نشانگر نرخ تنزیل ذهنی است.

در حالت رقابت استاندارد که خانوارها همسان هستند و هیچ اثر جانبی وجود ندارد، حل رقابتی مدل در شرایط غیر متمرکز با حل مدل از طریق برنامه ریزی در حالت متمرکز منطبق می‌شود. بنابراین، در این مقاله ما تحلیل خود را بر روی مساله‌ی بهینه یابی خانوار محدود می‌کنیم، بدون اینکه این تمرکز از عمومیت مساله مورد بررسی بکاهد.

۲-۲- تکنولوژی

تکنولوژی به کار برده شده در این اقتصاد به وسیله‌ی تابع تولید $F : R_+^3 \rightarrow R_+$ به صورت زیر تصریح می‌گردد.

$$F(k(t), H(t), N(t))=k(t)^a H(t)^b L(t)^{1-(a+b)}$$

$$0<a<1,\ 0<b<1 \qquad (3)$$

در رابطه‌ی فوق $K(t)$ سرمایه‌ی فیزیکی، $H(t)$ سرمایه‌ی انسانی و $L(t)$ نیروی کار است. $F(k(t))$، $H(t)$ و $L(t)$ مقعر، به طور یکنواخت افزایشی و همگن از درجه‌ی یک هستند.

شرایط اینادا[۱۰] برای اجتناب از انحصار راه حل‌ها به راه حل‌های گوشه‌ای تأمین شده است و برای تقویت نتایج از نقطه نظر تجربی، شرایط رومر، ویل و منکیو[۱۱] (۱۹۹۲) در تصریح مدل تامین شده است.

لازم به توضیح است که هر فرد دارای یک زمان مشخص غیر فراغتی در هر دوره است که بین کار و تحصیل تقسیم می‌شود. ما $w(t)$ را به عنوان بخشی از زمان اختصاص داده شده به کاری توسط هر فرد در نظر می‌گیریم، به طوری که عرضه‌ی نیروی کار به صورت زیر است.

$$L(t)=W(t)N(t) \qquad (۴)$$

به دلیل همگنی درجه‌ی یک، تابع تولید سرانه می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$f(k(t),h(t)) \equiv \mathrm{F}(k(t),H(t),\frac{L(t)}{N(t)}) = k(t)^{a}\, h(t)^{b}\, w(t)^{۱-(a+b)} \qquad (۵)$$

در رابطه‌ی فوق $k(t)$ و $h(t)$ به ترتیب سرمایه‌ی فیزیکی سرانه و سرمایه‌ی انسانی را نشان می‌دهند.

تکنولوژی لازم برای رشد سرمایه‌ی سرانه را به تبعیت از لوکاس[۱۲] (۱۹۸۸) به صورت زیر تبیین می‌نماییم:

$$h(t) = \sigma\,(۱-w(t))h(t), \qquad \sigma > 0 \qquad (۶)$$

با حل این معادله‌ی دیفرانسیلی، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$h(t) = ge^{\varphi(t)} \qquad (۷)$$

---

[۱۰] شرایط اینادا (*Inada*) وقتی صادق است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(\infty) = 0 \\ f'(0) = \infty \end{cases}$$

[11] Romer, Weil and Mankiw
[12] Lucas

که در آن $\varphi(t)$ به صورت $\varphi(t) = \sigma \int (1 - w(t))dt$ تعریف می‌شود. مقدار ثابت g می‌تواند از شرط اولیه مشخص شود.

با جایگزینی عبارت $h(t)$ در معادله‌ی (۳)، عبارت زیر حاصل می‌شود

$$f(k(t)) = \lambda(t)\, k(t)^{a} \qquad (۸)$$

که در آن $\lambda(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda(t) = g^{b} e^{b(\phi(t))} \left[w(t)\right]^{1-(a+b)} \qquad (۹)$$

۳- تعادل

برای ساده سازی و بدون اینکه از عمومیت مساله کاسته شود، فرض می‌کنیم که استهلاک سرمایه صفر باشد و خانوارها زندگی نامحدود دارند. بنابراین، مساله‌ی اصلی به شکل زیر خواهد بود.

$$max \int_0^{\infty} u(c(t)) exp\{-\int_0^{t}\left[\Theta - \eta(\tau)\right] d\tau\} dt \qquad (۱۰)$$

با توجه به اینکه $k^{\circ}(t)$ به صورت زیر است.

$$k^{\circ}(t) = f(k(t)) - c(t) - \eta(t)k(t) \qquad (۱۱)$$

بنابراین، ملاحظه می‌شود که نرخ تنزیل موثر، متغیر است.

به منظور حل این مساله‌ی بهینه سازی، به پیروی از اوزاوا[13] (۱۹۶۸) با برقراری زمان مجازی $\Delta(t) = \int_0^t[\theta - \eta(t)]dt$ یا معادل آن $\frac{d\Delta(t)}{dt} = \Theta - \eta(t)$ مساله‌ی بهینه سازی مورد نظر را مجددا می‌توان بر حسب زمان مجازی به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$max \int_0^{\infty} \{\frac{u(c(t))}{[\Theta - \eta(t)]}\} e^{-\Delta(t)} d\Delta(t) \qquad (۱۲)$$

با توجه به رابطه‌ی زیر

$$\frac{dk(t)}{d\Delta(t)} = \frac{[f(k(t)) - c(t) - \eta(t)R(t)]}{[\Theta - \eta(t)]} \qquad (۱۳)$$

---

13 Uzawa

ارزش حال (بر حسب زمان مجازی) هامیلتونی[۱۴] به صورت زیر است.

$$H(C,W,\eta,k,V)= \frac{1}{(\Theta-\eta)} \{U(C)+V[f(k)-c-\eta k]\} \quad (14)$$

با کاربرد اصل ماکزیمم پونتریاگین[۱۵] داریم:[۱۶]

$$u'(c)=v \quad (15)$$

$$W= [\frac{de^{abt}}{[1-(a+b)]}+1]^{-1} \quad (16)$$

در رابطه‌ی فوق d مقداری ثابت است.

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$U+V[F(K)-C-\Theta K]=0 \quad (17)$$

$$\overset{0}{V} = (\frac{dv}{d\Delta})(\frac{d\Delta}{dt}) = V[\Theta - f'(k)] \quad (18)$$

در روابط فوق فرض بر این است که شرط تراگردی[۱۷] برقرار است.

با ملاحظه‌ی این شروط و معادله‌ی (۱) به صورت زیر تغییرات مصرف و سرمایه در طول زمان به ترتیب توسط روابط زیر ارایه می‌شود.

$$\frac{\overset{0}{c}}{c} = \sigma[f'(k)-\theta] \quad (19)$$

$$k^\circ = \sigma[f(k)-\theta k] \quad (20)$$

علاوه بر این، از معادله‌های (۱) و (۱۵) و (۱۷) مصرف بهینه به عنوان تابعی از سرمایه‌ی فیزیکی سرانه‌ی R به صورت زیر به دست می‌آید.

$$C=(1-\sigma)[f(k)-\Theta K] \quad (21)$$

نهایتا، با جانشینی معادله‌ی (۲۰) و (۲۱) در معادله‌ی ۱۱، نرخ رشد بهینه‌ی جمعیت، یعنی $\eta(t)^*$ تعیین می‌شود.

---

[14] Hamiltony
[15] Pontriagine

[۱۶] برای توضیح بیشتر به کتاب اقتصاد ریاضی تاکایاما مراجعه شود.

[17] Transversality Condition

$$[\eta(t)]^* = \theta \qquad (۲۲)$$

این نرخ ثابت است و به زمان بستگی ندارد و دقیقا برابر با نرخ تنزیل ذهنی است.

۴- نتیجه گیری

ویژگی ترجیحات $CIES$ نقشی کلیدی در مدل بسیار ساده شده رمزی با افق نامحدود بازی می‌کند. در این متن، مصرف به طور خطی بر پایه‌ی کشش جانشینی بین دوره ای کاهش یا افزایش می‌یابد. در این مدل لازم است که مقدار بهینه‌ی منابع تخصیص یافته به گسترش سرمایه، دقیقاً متناسب با ذخیره‌ی سرانه‌ی موجودی (یعنی $\eta^* k = F(R) - C - K^\circ = \theta K$) باشد. بنابراین، نرخ رشد بهینه‌ی جمعیت ثابت که دقیقا برابر با نرخ تنزیل است، می‌تواند با تصمیمات پس اندازی مناسب حتی تحت عدم ملاحظه‌ی دولت در کار (بازرگانی) مردم، تأمین شود. این نرخ مشابه با نتایج ساموئلسون از تساوی شهودی بین η^* و θ است.

با بی‌صبری بیشتر افراد، لازم است که نرخ رشد جمعیت بالاتر یا نرخ زاد و ولد بیشتری داشت تا درآمد سرانه‌ی آتی تنزیل شده را تأمین کرد؛ زیرا سرمایه‌ی انسانی سرانه در طول زمان (معادله‌ی ۱۰) افزایش می‌یابد.

به طور تقریبی، اگر ما نرخ بهره‌ی واقعی را به عنوان نرخ تنزیل شرطی بگیریم، روابط حاصل می‌تواند به خوبی بر حسب هزینه‌های فرصتی سرمایه گذاری سرمایه‌ی فیزیکی با مصرف بیشتر امروز توضیح داده شود. اگر چه ممکن است استدلال قابل قبولی مطرح شود که برابری مقداری در یک محیط فراگیرتر برقرار نیست. لیکن برابری کیفی به طور عمده بدون تغییر برقرار است. مسلما، تحلیل‌های بیشتر و توجه به دیگر جنبه‌های مدل و تعمیم آن مطمئنا می‌تواند نتایج را تقویت نماید.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

فهرست منابع:

Barro, R.J., Becker, G.S., “Fertility Choice in a Model of Economic Growth,” Econometrica, No. 57, 1989, pp. 481-501.

Becker, G.S., Barro, R.J., “A Reformulation of the Economic Theory of Fertility,” Quarterly Journal of Economics, No. 103, 1988, pp. 1-25.

Becker, G.S., Lewis, H.G., “On the Interaction Between the Quantity and Quality of Children,” Journal of Political Economy, No. 81, 1973, pp. 279-288.

Becker, G.S., Murphy, K.M., Tamura, R., “Human Capital, Fertility, and Economic Growth,” Journal of Political Economy, No. 98, 1990, pp.12-37.

Cass, D., “Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation,” Review of Economic Studies, No. 32, 1965, pp. 233-240.

Koopmans, T.C., On the Concept of Optimal Economic Growth, in Koormans, T.C. (ed.), The Econometric Approach to Development Planning, North-Holland, Amsterdam, 1965.

Lehmijoki, U., Demographic Transition in the Ramsey Model: Do Countryspecific Features Matter? Working Paper, University of Helsinki and HECER, 2004.

Lucas, R.E, Jr., “On the Mechanics of Economic Development,” Journal of Monetary Economics, No. 22, 1988, pp. 3-42.

Mankiw, N.G., Romer, D., Weil, D.N., “A contribution to the Empirics of Economic Growth,” Quarterly Journal of Economics, No. 107, 1992, pp. 407-437.

Palivos, T., “Endogenous Fertility, Multiple Growth Paths, and Economic Convergence,” Journal of Economic Dynamics and Control, No. 19, 1995, pp. 1489-1510.

Samuelson, P.A., “The Optimum Growth Rate for Population,” International Economic Review, No. 16, 1975, pp. 531-538.

Uzawa, H., “Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset holdings,” in Wolfe, J. (ed.), Value, Capital, and Growth, Aldine, Chicago, 1968.

Wang, P., Yip, C.K., and Scotese, C.A., “Fertility Choice and Economic Growth: Theory and Evidence,” Review of Economics and Statistics, No. 75, 1994, pp. 255-266.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

The Optimum Population Growth with CIES Preferences in the Ramzi Model with an Unlimited Horizon

Ralph Wang (Ph.D.), Rahim Dalali (Ph.D.) and Leila Torki (MS.c.)
*

Abstract:

Using CIES and special form of human capital in production function, this paper investigates the optimum population growth in Ramsey's environment when the inter-period preferences are of CIES type. The results reveal that the rate of optimum population growth exactly equals the mental deductive decrease of Ramsey's model with an unlimited horizon.

JEL classification**: *J*11**

Keywords: Population growth, CIES, Ramzi model

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

* Faculty member, assistant professor and student of economic, Jiang University and Isfahan University, respectively