۵۱-۷۰

طراحی و اعتباریابی الگویی برای آموزش مفهوم حد مبتنی بر ریاضیات واقعیت‌مدار همسو با برنامه درسی ملی

عبدالامیر عباس‌زاده[۱] ◉ دکتر علیرضا مدقالچی[۲*] ◉ دکتر نسیم اصغری[۳]

چکیده: **پژوهش حاضر با هدف طراحی و اعتباریابی الگویی برای آموزش مفهوم حد مبتنی بر ریاضیات واقعیت‌مدار، همسو با برنامه درسی ملی انجام شـــده است. روش پژوهش از نوع تکوینی و رویکرد مورد استفاده از نوع آمیخته (کیفی ـ کمی) با طرح تدوین مدل بود. در بخش کیفی ابتدا با جست‌وجوی نظام‌مند ادبیات پژوهشی رویکرد ریاضیات واقعیت‌مدار و اسناد بالادستی نظام تعلیم وتربیت جمهوری اســـلامی ایران، مدل اولیه‌ای برای آموزش مفهوم حد تدوین شد و طرح درســـهای روزانه برای آموزش مفهوم حد براساس چارچوب مورد نظر و برمبنای عناصر پنجگانه برنامه درسی ملی (تعقل، ایمان، علم، عمل و اخلاق) در عرصه‌های چهارگانه (خدا، خود، خلق و خلقت) و همچنین سطوح یادگیری واقعیت‌مدار (بازآفرینی هدایت‌شده، پدیدارشناسی تعلیمی و خلق پلهای نوظهور) تنظیم شد. یافته‌های حاصل از تحلیل داده‌های تکوینی طی برگزاری پنج جلســـه کارگاه با دبیران باســـابقه به اصلاح و تدوین مدل اولیه و طراحی الگوی نهایی انجامید. اعتباریابی الگوی نهایی طراحی‌شده از نظر افراد مطلع و از طریق پرسشنامه محقق‌ســـاخته صورت گرفت. برای بررسی معنادار بودن میانگین نظری و تجربی به‌دست آمده از آزمون تی تک‌نمونه‌ای استفاده شد. نتایج بخش کمی نشان می‌دهد که الگوی طراحی‌شده اعتبار لازم را از نظر افراد مطلع داراست.**

کلید واژگان: **حسابان، آهنگ تغییر، حد، ریاضیات واقعیت‌مدار، برنامه درسی ریاضی**

☑ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۲/۲۸ ☑ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۱۹

این مقاله مستخرج از رساله دکتری نویسنده اول است.

۱. دانش‌آموخته دوره دکتری ریاضی، گرایش آموزش ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاداسلامی، واحد تهران مرکزی، تهران، ایران.
۲. استاد گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران (نویسنده مسئول). **E-mail:** a_medghalchi@khu.ac.ir
۳. استادیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، تهران، ایران.

مقدمه و تبیین مسئله

برنامه درسی ملی یکی از زیرنظامهای اصلی سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و به‌منزلهٔ نقشه جامع یادگیری است که از جمله مهم‌ترین اهداف حوزه تربیت و یادگیری ریاضیات را ایجاد توانایی به‌کارگیری ریاضیات در حل مسائل روزمره، توصیف دقیق موقعیتهای پیچیده، پیش‌بینی و کنترل وضعیتهای ممکن مادی، طبیعی، اقتصادی و اجتماعی می‌داند و تأکید دارد که در ریاضیات مدرسه‌ای فعالیتهای آموزشی باید برخاسته از ریاضیات محیط پیرامون باشد و به دانش‌آموزان کمک کند تا مفاهیم وگزاره‌های ریاضی را در محیط پیرامونی خود مشاهده، درک و سپس تجزیه و تحلیل کنند (برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، ۱۳۹۱). حسابان یکی از دروس مهم دوره دوم متوسطه است که قدرت و توانایی بالقوه آن در مدلسازی بسیاری از پدیده‌های دنیای واقعی، این حوزه را به‌صورت یکی از مهم‌ترین حوزه‌های کاربردی ریاضی تبدیل کرده است. شورای ملی معلمان ریاضی[1] (۲۰۰۰) حدرا به‌منزلهٔ زیربنایی‌ترین مفهوم حسابان در استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضی معرفی کرده است. اندیشه حد نه‌تنها در حسابان بلکه برای خلق بسیاری از اندیشه‌های ریاضی فراتر از حسابان، مهم و حیاتی است. هر مفهوم و اندیشه منفرد از حسابان به یک معنا، خودش یک حد است و یا حدِ یک مفهوم و اندیشه دیگری است (کولا وگوزل[2]،۲۰۱۴). از دیدگاه آموزشی اینکه در حسابان، چه مطلبی و به چه شیوه‌ای باید تدریس شود، از مباحثی است که همواره مورد مناقشه بوده (کلاینر[3]، ۱۳۹۸) و هنوز هم از دغدغه‌های جاری است (حق‌جو و همکاران،۲۲۰۲). سابقه تاریخی نشان می‌دهد که ورود حسابان به برنامه درسی ریاضیات مدرسه‌ای در بسیاری از کشورها با وسواس و تأنی بسیار انجام شده است (رودی[4]، ۱۹۸۶). به باور گویا و سرشتی (۱۳۸۵) جستجوی روشهای مؤثر یاددهی ـ یادگیری حسابان دلواپسی بسیاری از آموزشگران ریاضی در طول نیم قرن گذشته بوده است. با وجود توسعه و به‌کارگیری روشهای نوین آموزشی در دوره متوسطه نتایج پژوهشهای داخلی و بین‌المللی گواهی می‌دهد که دانش‌آموزان مشکلات بسیار در یادگیری مفاهیم حسابان دارند و حتی بعد از سپری کردن تحصیلات دانشگاهی درک درستی از مفهوم حد به عنوان اساسی‌ترین مفهوم حسابان ندارند (حق‌جو و همکاران،۲۰۲۲). به‌اعتقاد سبسیب و فزا[5](۲۰۲۲) امروزه در بیشتر کلاسهای درس حسابان هنگام تدریس مفهوم حد ایده شکل‌گیری آن زیر کوهی از فرمولها و دستورالعملهای ابزاری مدفون می‌ماند. کاپوت[6](۱۹۹۴) اصلی‌ترین چالش یاددهی ـ یادگیری حوزه حسابان را شکاف میان جزیره ریاضیات رسمی و سرزمین اصلی تجربه واقعی دانش‌آموزان می‌داند. در تأیید او مندس[7] (۲۰۲۱) عقیده دارد که جهان‌بینی بسیاری

1. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
2. Kula & Güzel
3. Kliner
4. Rodi
5. Sebsibe & Feza
6. Kaput
7. Mendes

از دانش‌آموزان در رویارویی با مفهوم حد مجموعه‌ای از فرمولها و محاسبات جبری پیش روی آنهاست که البته کاملاً بی‌ارتباط با دنیای واقعی است و با فعالیتهای روزمره دانش‌آموزان هیچ ارتباط معناداری ندارد. نتایج پژوهش زولمان[1] (۲۰۱۴) گویای آن اســـت که تضاد میان «تعریف مفهومی» و «تصور مفهومی» در بعضی مفاهیم حســـابان مانند حد برای دانش‌آموزان موجب بدفهمی خواهد شد. به‌معنای دقیق‌تر، چون دانش‌آموزان معمولاً حد را به شیوه‌ای غیررسمی می‌آموزند یک تصویر ذهنی از مفهوم حد پیش از هر تعریف رسمی از این مفهوم، در ذهن آنها تشکیل می‌شود و این موضوع سبب می‌شود که ویژگیهای ضمنی معینی که در تعریف جایی ندارند بخشی قابل‌توجه از تصویر ذهنی مفهوم شوند. نتایج پژوهشهای تجربـــی تال[2] (۲۰۰۲) گواهی می‌دهد که دانش‌آموزان تصورات ذهنـــی خود از مفهوم حد را به‌گونه‌ای می‌سازند که ممکن است منسجم و پایدار نباشد و تناقض موجود میان روشی که حد از سوی ریاضیدانان حرفه‌ای درک می شـــود و فرایندهای شـــناختی درک این مفهوم از سوی دانش‌آموزان موضوعی جدی در یادگیری این مفهوم است. وجود اصطلاحات متعدد در تعریف مفهوم حد مانند میل کردن، نزدیک شدن و همســـایگی دسته‌ای دیگر از مشکلات آموزشـــی حد است به‌گونه‌ای که سبب ایجاد تصورات ناقص یا تصورات جانشینی خواهد شد و بعضی مواقع این اصطلاحات متعدد حس روزمرگی بدون دقت در معنای ریاضـــی در ذهن دانش‌آموزان ایجاد می‌کنند (ســـلطانی،۱۳۹۱). همچنین لزوم اســـتفاده از ایده‌های بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ در مفاهیم حدی سبب وجود ابهام و پارودوکسهایی با پیشینه تاریخی بسیار قدیمی در ریاضیات شـــده است (وو[3]،۲۰۲۰). هرچندکه استفاده به‌دقت کنترل شده از بی‌نهایت رمز موفقیت در حسابان و منبع قدرت آن است، چنانچه به اعتقاد هیلبرت و کوهن ـ وسن[4] (۱۹۵۲) تفکر دربارهٔ بی‌نهایت ژرف‌ترین تحرک را در اندیشه آدمی به‌وجود آورده است، اما مفهوم بی‌نهایت بزرگ‌ترین دردسر حسابان محسوب می‌شود و چالشی اساسی در یادگیری حد از سوی دانش‌آموزان است (وو،۲۰۲۰). به‌خلاف ســـیر تکاملی پیدایش مفهوم حد امروزه یاددهی مفهـــوم حد ارتباطی تنگاتنگ با مفهوم تابع دارد. به عقیده مک‌کومز[5] (۲۰۱۴) بخش قابل‌توجه مشکلات یادگیری حد ازسوی دانش‌آموزان به درک نادرست آنها از مفهوم تابع برمی‌گردد و طرحواره‌های پیشین دانش‌آموزان از مفهوم تابع و تحلیل نمودار توابع، معمولاً ناکافی و ناقص‌اند و بر دشـــواریها و مشـــکلات یادگیری حد می‌افزایند. همراه با مشکلات معرفتی و شناختی حد که در نتیجه کسب دانش جدید و ماهیت انتزاعی حد ناشی می‌شوند، بعضی دیگر از چالشـــهای یاددهی ـ یادگیری حد، از ویژگیهای فردی دانش‌آموزان در پردازشهای ذهنی، انگیزشها و نگرشهـا سرچشمـه می‌گـیرد (ایچلر و ارنز[6]، ۲۰۱۴). علاوه بر آن مطالعـات چـان و اسفـارد[7] (۲۰۲۰)

1. Zollman
2. Tall
3. Wu
4. Hilbert & Cohn-Vossen
5. McCombs
6. Eichler & Erens
7. Chan & Sfard

گواهـــی می‌دهد که عوامل فرهنگی، محیطی اجتماعی و روشـــهایی که معلـــم به‌کار می‌گیرد در نحوه یادگیری حد مؤثرند. بسیاری از پنداشتهای نادرست و بدفهمیهای دانش‌آموزان دربارۀ مفهوم حد ریشه در روشـــهای تدریس معلم دارند و ضمن آموزش منتقل می‌شـــوند و بسیاری از باورهای معلمان درباره مفهوم حد در دانش‌آموزان آنها نیز دیده می‌شود.

بر این اساس پرسش این است که با اتخاذ چه رویکرد و چه راهکار عملی می‌توان راهی به سوی رفع موانع یاددهی ـ یادگیری مفهوم حد گشـــود؟ از این‌رو این پژوهش در جست‌وجوی رویکردی است که پیوندی معنادار و محکم میان جنبه‌های معرفتی، شناختی و آموزشی مفهوم حد ایجاد کند.

در دهه‌های گذشته پژوهشگران بسیاری از کشور نتیجه گرفته‌اند که آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار[1] به عنوان یک نظریه یاددهی ـ یادگیری، نویدبخش ارتقای سطح یادگیری ریاضیات در مدرسه و دانشگاه بوده اســـت (آکادیا و ویجایا[2]،۲۰۱۷؛ فوزن[3] و همکاران، ۲۰۱۸؛ محسنی،۱۳۹۴)، به‌گونه‌ای که با ادغام مفاهیم انتزاعی ریاضیات با دنیای پیش رو انتظار می‌رود که دانش‌آموزان تشـــویق شـــوند تا بر اســـاس تجربیات کسب‌شـــده خود، پایه‌های مفاهیم ریاضی را بنیان نهند. پیشـــینه تاریخی نظریه واقعیت‌مدار در آموزش ریاضی به ســـال ۱۹۷۰ و در پی فعالیتهای فرودنتال[4] و همکارانش (۱۹۷۸) در کشور هلند در تقابل با رویکرد ریاضیات جدید که در آن سالها از آمریکا شروع شده و تب تند آن بسیاری از کشورها را فراگرفته بود، برمی‌گردد (عباس‌زاده و همکاران، ۱۴۰۲). توجه به این نکته ضروری به‌نظر می‌رسد که واژه واقعیت‌مداری در این نظریه لزوماً به‌معنای اتصال ریاضیات با جهان واقعی نیست، بلکه در بسیاری مواقع جهان خیالی و حتی افســـانه‌ها و اســـتعاره‌ها می‌توانند بستری مناســـب برای ارائه مفاهیم باشند (فوزان و همکاران، ۲۰۱۸). مهم آن اســـت که ایده‌های به‌کار گرفته شده در ذهن دانش‌آموزان باورپذیر باشـــند. بنیان منطقی رویکرد واقعیت‌مدار مکتب انسان‌گرایی است (شیخ‌الاسلامی، ۱۳۹۷)، که معرفت ریاضی را بامعنا، خطاپذیر، اصلاح‌پذیر، درحال توســـعه و بخشـــی از فرهنگ و فعالیت بشری می‌داند و به‌ویـــژه حقایق ریاضی را مطلق و حتمی نمی‌پندارد. لذا در این رویکرد قطعیت ریاضی به مفهوم مکتب مطلق‌گرایی نفی می‌شـــود و پدیده‌های آموزش و یادگیری ریاضی به‌مثابه یک رویداد جامعه‌شناسی و انسان‌شناسی بررسی می‌شوند. چنانچه بیشاپ[5] و همکاران (۲۰۰۶) اظهار می‌دارند که برای انسان‌سازی کلاس درس ریاضیات، معلمان باید نوعی خاص از محیط اجتماعی را ایجاد کنند تا در حالی‌که فراگیران ایده‌های خود را می‌ســـازند آنها را در تعامل با محیط اصلاح کنند. فرودنتال (۱۹۷۸) ویژگی متصل به واقعیت بودن، نزدیک به دانش‌آموز ماندن و در ارتباط با مســـائل روز جامعه بودن را برای واقعیت‌مداری آمـــوزش ریاضی لازم می‌داند (به نقـــل از یافتیان و ملکی، ۱۳۹۹). علاوه بر این مبنای روان‌شـــناختی

1. Realistic Mathematics Education (RME)
2. Akhadya & Wijaya
3. Fauzan
4. Freudental
5. Bishop

رویکـــرد ریاضیات واقعیت‌مدار از رویکرد اجتماعی فرهنگی ویگوتســـکی[1] پیروی می‌کند که جنبه‌های فرهنگی، اجتماعی و تاریخی را در رشـــد شـــناختی بســـیار با اهمیت می‌داند (داس[2]، ۲۰۲۰). به باور ویگوتسکی کنش متقابل میان یادگیرنده و محیط اجتماعی، تعیین‌کننده اصلی رشد شناختی او است. از این منظر دانش‌آموزان برای تخصیص یا از آن خودسازی کارکردهای عالی ذهن، ابتدا این مفاهیم را در یک کنش اجتماعی یا میان ـ فردی، درخلال تعامل با دیگران، تجربه، سپس این مفاهیم تعاملی را از طریق درونی‌سازی به کنشهای فردی یا درون روان‌شناختی یا درون‌ذهنی تبدیل می‌کنند. در آموزش مبتنی بر واقعیت‌مداری به‌جای دیدن ریاضی به‌مثابه یک نظام بســـته و موضوعی که باید منتقل شود، لازم اســـت فرصتهایی هدایت‌شـــده در اختیار دانش‌آمـــوزان قرارداد تا ریاضـــی را از طریق انجام دادن و در تعامـــل با محیط بازآفرینی کنند (فـــان دن هوول ـ پانهوزن و درایـــورس[3]،۲۰۱۴). از این‌رو باید بر فعالیت و فرایند ریاضی‌ورزی تکیه شـــود. ارتباط میان مســـائل دنیای واقعی با جهان نمادین ریاضی، ریاضـــی‌ورزی افقی و حرکت در دنیای نمادین ریاضی، ریاضی‌ورزی عمودی نامیده می‌شـــود (لارنس[4] و همکاران، ۲۰۱۸). ریاضی‌ورزی با پدیده‌های در دســـترس و مدلســـازی ریاضی تا خلق یک مفهوم در دیدگاه واقعیت‌مدار ازاین جهت قابل‌تامل است که دانش‌آموزان می‌آموزند، چگونه نسبت به موقعیتهای واقعی زندگی، نگاهی ریاضی‌وار داشـــته باشند. فان دن هوول ـ پانهوزن (۲۰۲۰) معتقد است که فرایند یادگیری مفاهیم ریاضی در رویکرد واقعیت‌مدار طی سه مرحله حاصل می‌شود:

سطح اول یادگیری، بازآفرینی هدایت‌شده[5]: در مرحله نخست دانش‌آموزان ریاضیات را به‌مثابه یک فعالیت انسانی در زمینه‌ای واقع‌گرایانه تجربه می‌کنند و برای مسائل راه‌حلهایی غیر رسمی از دنیای واقعی ابداع می‌کنند. در این مرحله ضروری اســـت که فعالیتهای یاددهی ـ یادگیری شـــامل در اختیار قرار دادن فرصتهایی به فراگیران باشد تا بتوانند ویژگی شناخته شدهٔ الگویی را که برای آنها آشنا است، دستکاری کنند.

سطح دوم یادگیری، پدیدارشناسی تعلیمی[6]: در مرحله دوم دانش‌آموزان ویژگیهای کشف‌شده در مرحله نخست را به هم مرتبط می‌کنند. در این مرحله تمرکز اصلی بر تفسیر ریاضی‌وار از پدیده‌های در دسترس است تا به عنوان یک بستر اکتشافی، دانش‌آموزان دربارهٔ راه‌حلهای پیچیده از مسائل واقعی، از طریق فعالیتهای فردی یا گروهی بحث کنند.

سطح ســـوم یادگیری، خلق پلهای نوظهور[7]: در این مرحله مدلها به‌مثابه پلی میان تجرید و واقعیت مورد اســـتفاده قرار می‌گیرند، اگر چه مدلهای طراحی‌شـــده را می‌توان با گذشت زمان تغییر و

1. Vygotsky
2. Das
3. Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers
4. Laurens
5. Guided reinvention through progressive mathematization
6. Didactical phenomenology
7. Emergent models

توسعه داد. به‌این ترتیب که ابتدا دانش‌آموزان مدلی از یک فعالیت مستقل را توسعه می‌دهند و این مدل خود به یک مدل برای اســـتدلال ریاضی پیچیده‌تر تبدیل می‌شود. مدلهای طراحی‌شده باید این قابلیت را داشته باشند تا دانش‌آموزان بتوانند برای تعمیم آنها به سطوح پایین‌تر برگردند و میان سطوح حرکت کنند.

همان‌گونه‌که پیشـــتر اشاره شـــد، الگوی طراحی‌شـــده برای تدریس مفهوم حد در این پژوهش از منزلگاه واقعیت‌مداری می‌گذرد. درمیان مقالات جست‌وجو شده که به ابعاد مختلف رویکرد واقعیت‌مدار در آموزش پرداخته‌اند، پژوهشـــی مشـــخص و مستقلی یافت نشـــد تا به طراحی و ایجاد الگویی برای تدریس مفهوم حد بینجامد، اگر چه پژوهشـــهای بســـیار در گوشـــه و کنار جهان دربارۀ نقش و تأثیر ریاضیات واقعیت‌مدار در آموزش دانش‌آموزان و دانشجویان صورت گرفته است. سبسیب و فزا (۲۰۲۰) در پژوهشـــی نیمه‌تجربی پس از بررسی مشکلات حوزه حســـابان، به طراحی الگوی تدریسی بر اساس رویکرد واقعیت‌مدار و کاربرد آن در تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال پرداخته و نتیجه گرفته‌اند که به‌کارگیری این رویکرد تأثیری مثبت در یادگیری دانش‌آموزان در درس حســـاب دیفرانسیل و انتگرال می‌گذارد. همچنین وو (۲۰۲۰) در مطالعات پژوهشـــی خود معنابخشی به مفهوم بی‌نهایت کوچکها را ازطریق به‌کارگیری رویکرد واقعیت‌مدار در یاددهی مفهوم حد در درک دقیق دانش‌آموزان از این مفهوم مؤثر می‌داند. پایادنیا[1] و همکاران (۲۰۲۱) با هدف تجزیه و تحلیل توانایی دانش‌آموزان در حل مســـائل واقع‌گرایانه با اولویت بر ریاضیات فرهنگی، در بخشی از پژوهش کیفی خود به تحلیل شرایط لازم برای مســـائل واقع‌گرایانه پرداخته‌اند. مادرازو و دیو[2] (۲۰۲۰) در پژوهشـــی توصیفی ـ توســـعه‌ای به بررسی شکافهای یادگیری دانش‌آموزان در گذر از مقطع ابتدایی به دوره متوسطه پرداخته و نتیجه گرفته‌اند که بیان بعضی مفاهیم ریاضی مانند حد به‌صورت رویه‌ای یکی از مهم‌ترین دلایل عدم توانایی دانش‌آموزان در یادگیری معنادار این مفاهیم اســـت. یافته‌های پژوهش گواهی می‌دهند که بســـیاری از پژوهشهای داخلـــی در زمینۀ ریاضیات واقعیت‌مدار بر تحلیل محتوای کتابهای درســـی در این زمینه تمرکز دارند. بااین‌حال شـــهرکی و فدایی (۱۴۰۲) به‌منظور ایجاد پلی بین ریاضیات رسمی دانش‌آموزان و فرهنگ و فعالیتهای روزانه، با بهره‌گیری از قوم‌نگاری در پژوهشی با عنوان «جستاری در ریاضیات قومی: استخراج محاسبات ریاضی سنتی مقنیان»، نتیجه گرفته‌اند که گذشتگان برای حل و فصل کردن مسائل روزمره خود از فعالیتهای ریاضی اســـتفاده می‌کرده‌اند. از این‌رو گنجاندن این فعالیتها در برنامه درسی ریاضی می‌تواند جریان یاددهی ـ یادگیری را بهبود بخشد. شیخ‌الاسلامی (۱۳۹۷) در رساله دکتری برنامه‌ریزی درســـی با عنوان «طراحی و اعتبارسنجی الگوی برنامه درسی ریاضیات زمینه‌محور به‌منظور ارزشیابی برنامه درسی ریاضیات پایه دهم انسانی»، در نتایج حاصل از پژوهش کاربردی خود مدعی شده است که

1. Payadnya
2. Madrazo & Dio

اصول و معیارهای رویکرد زمینه ـ محور تأکید شـــده در برنامه درسی ملی در ریاضیات پایه دهم رشته انسانی از سوی مؤلفین این کتاب لحاظ نشده است. همچنین عباس‌زاده و همکاران (۱۴۰۲) در پژوهشی کاربردی به روش آمیخته (کمی و کیفی) با عنوان «طراحی و اعتبارسنجی الگوی برنامه درسی ریاضیات مبتنی بر رویکرد واقعیت‌مدار برای دانش‌آموزان دوره دوم متوســـطه» مؤلفه‌های دهگانه برنامه درســـی تارعنکبوتی اکر را تبیین و مورد ارزیابی افراد مطلع قرار داده‌اند.

این پژوهش به چند دلیل حائز اهمیت است. نخست اینکه اولین پژوهش در کشور است که منجر به طراحی الگویی برای تدریس مفاهیم ریاضی با رویکرد واقعیت‌مدار می‌شود. دوم اینکه تلاش صورت‌گرفته در راستای برنامه درسی ملی و در حمایت از این برنامه مبنی بر تأکید بر ارتباط مفاهیم ریاضی با بستر واقعیات روزمره دانش‌آموزان اســـت و ســـوم اینکه با توجه به عدم وجود پژوهشهای کافی در این زمینه طراحی چنین الگویی ضروری به نظر می‌رسد. از این‌رو پژوهش حاضر با هدف طراحی الگویی برای آموزش مفهوم حد مبتنی بر ریاضیات واقعیت‌مدار همســـو با برنامه درسی ملی انجام گرفته است. برای حرکت در مسیر دستیابی به هدف موردنظر پژوهش، دو پرسش زیر مد نظر قرار دارند:

۱. الگوی آموزشی مبتنی بر رویکرد ریاضیات واقعیت‌مدار همسو با برنامه درسی ملی برای آموزش مفهوم حد به دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه چیست ؟

۲. اعتبار الگوی طراحی‌شده از نظر افراد مطلع چگونه است؟

روش‌شناسی پژوهش

روش بـــه‌کار گرفته شـــده در این پژوهش از نـــوع تکوینی و رویکرد مورد اســـتفاده از نوع آمیخته (کیفی ـ کمی) از گویه متوالی اکتشـــافی با طرح تدوین مدل بود. تحقیق آمیخته، یک طرح پژوهشی با مفروضات فلسفی و مبتنی بر روش کاوشگری است که به‌منزلهٔ یک روش بر گردآوری، تحلیل و تلفیق داده‌های کمی و کیفی در یک مطالعه منفرد یا مجموعه‌ای از مطالعات تمرکز می‌یابد (کرسول[1]، ۲۰۱۲). همچنین پژوهش تکوینی ماهیتاً رویکردی کیفی دارد و از نوع پژوهش توسعه‌ای است و با هدف بسط و بهبود پایه دانش درباره آموزش صورت می‌گیرد و بر چرخه طراحی، اجرا و اصلاح تأکید دارد (رایگلوث و فریک[2]، ۱۹۹۹). به عقیده گویا (۱۳۷۲) از آنجایی‌که معلم در کلاس درس خود همیشه با انسانهایی که سراسر پیچیدگی و اعجازند درحال واکنش است و عموماً با موقعیتهای پیش‌بینی‌نشده مواجه می‌شود، کار تدریس احتیاج مداوم به بازتاب روی عمل دارد. به گفته صفی‌خانی و همکاران (۱۴۰۰) امروزه بیش از هر زمان دیگر به اهمیت استفاده از پژوهشهای عملی در آموزش و پرورش برای خدمت به دانش‌آموزان و معلمان تأکید می‌شـــود. دراین‌زمینه حسنی (۱۳۹۸) عقیده دارد که موقعیت معلمان به‌سبب آشنایی

1. Creswell
2. Reigeluth & Frick

آنها با مشـــکلات و نیازهای دانش‌آموزان و محیط آموزشی و تجربیات ارزشمندی که در سایه تعامل با یادگیرندگان به‌دست می‌آورند، یک موقعیت حل مسئله است. در چنین موقعیتی می‌توانند برای مسائل جاری کلاســـها و دانش‌آموزان راهکارهای عملی ارائه کنند. در ادامه مراحل پژوهش به‌ترتیب شرح داده می‌شود:

۱. تنظیم سؤالات پژوهش

۲. جست‌وجوی نظام‌مند ادبیات پژوهشی: این مرحله از پژوهش در قالب گردآوری منابع فارسی و انگلیسی صورت گرفته است. جامعه آماری این مرحله شامل همه اسناد و منابع علمی و پژوهشی مرتبط با موضوع پژوهش بود. به‌این منظور پایگاههای معتبر داخلی مانند جهاد دانشگاهی، ایرانداک، نورمگز، مگیران و پایگاههای معتبر خارجی مانند Google Scholar, Springer, ProQuest و Science Direct به‌عنوان منابع گردآوری اطلاعات انتخاب شدند. برای جست‌وجوی منابع در این پایگاهها از واژگان کلیدی سند تحول بنیادین، برنامه درسی ملی، برنامه درسی ریاضی، ریاضیات واقعیت‌مدار، ریاضیات در متن، حسابان، مفهوم حد concept of limit, Realistic Mathematics Education و Calculus استفاده و منابع مرتبط در بازه زمانی ۱۳۸۰ (۲۰۰۱) تا ۱۴۰۲ (۲۰۲۳) گردآوری شد.

۳. تدوین مدل اولیه و تنظیم طرح درس: بر اساس جســت‌وجـوی نظام‌منـد ادبیـات پـژوهشی رویکرد ریاضیات واقعیت‌مدار و اسناد بالادستی نظام تعلیم و تربیت جمهوری اسلامی ایران و نیز تجربه زیسته نویسنـده اول که طی دوره بـیست ساله تدریـس حسـابان در محیط واقعی کلاس درس و اجرای مسـتمر دوره‌های آموزشی معلمـان در سطح کشور حاصل شد، مدل اولیه‌ای برای آموزش مفهوم حد تـدوین شد و بر اساس آن طرح‌درسهای روزانـه بر مبنـای پنج عنصر تفکر و تعقل، ایمـان و باور، علم و معرفت، عمل و اخلاق، در حکم ویـژگیهای هر انسان تربیت یافته در نظام تعلیم و تربیت اسلامی و عرصه‌های چهارگانه رابطه با خود، رابـطه با خدا، رابطه با خلق خدا و رابطه با خلقت به‌منزلهٔ رفتار و عملکرد انسان تربیت‌یافته در مواضع گوناگون و همچنین سطوح یادگیری RME (بازآفرینی هدایت‌شده، پدیدارشناسی تعـلیمی و خـلق پلهای نوظهور) تنظیم شد. در واقع این طرح‌درسها پیش‌بینی است از آنچـه باید میـان معلـم و دانش‌آموزان طی زمان ۷۵ دقیقه‌ای کلاس درس اتفاق بیفتد و به‌منزلهٔ خط‌مشی کلاس درس بوده است. اگرچه به سبب وجود عوامل غیرقابل‌پیش‌بینی در کلاس درس و پیچیدگی رفتارهای انسانی، پای‌بندی به اجرای کامل طرح‌درسهای تنظیم شـده ممکن به نظر نمی‌رسید، امـا تلاش بر آن بود تا این پای‌بندی به شکل حداکثری باشد. جدول شماره ۱ نمونه طرح‌درس روزانه را نشان می‌دهد.

جدول ۱. نمونه طرح درس روزانه آموزش مفهوم حد مبتنی بر رویکرد واقعیت‌مدار همسو با برنامه درسی ملی

طرح درس روزانه بر اساس برنامه درس ملی بر بستر واقعیت مدار (RME)

عنوان درس: حسابان ۱	**موضوع:** (اندیشه حد)	**جلسه: اول** (تمرکز بر آهنگ تغییر)	**تاریخ اجرا:**	**دبیر:**
	آموزشگاه:	**پایه: یازدهم**	**تعداد دانش‌آموز:**	**مدت تدریس: ۷۵ دقیقه**

فعالیتهای قبل از تدریس

هدف کلی جلسه: تمرکز بر پدیده‌های در دسترس برای خلق مفهوم آهنگ تغییر

	رئوس مطالب	سطوح تفکری RME	اهداف جزئی	حیطه‌ها و اهداف	انتظارات از دانش‌آموزان در این درس: (سطوح شناختی)	عرصه‌ها: وظایف دانش‌آموز در قبال خدا	خلقت	خود	دیگران
۱.	**اندیشه تغییر از چشم حکیم با نگاهی دقیق از فراز قله‌ای رفیع**	**سطح اول:** (بازآفرینی هدایت‌شده)	تمرکز بر مفهوم تغییر در جسم و بدن در قدرت تعقل و تفکر، تمرکز بر مفهوم تغییر در پدیده‌های پیرامون	**تعقل**	● به اهمیت موضوع تغییر در پدیده‌های جهان هستی پی ببرند. (فهمیدن)	*	*		
					● با تفکر و تدبر در محیط پیرامون (کلاس درس، محیط مدرسه، محیط خانه، محیط شهر) پدیده‌هایی برای بررسی تغییر یک متغیر نسبت به متغیر دیگر که آهنگ ثابت دارد را شناسایی کنند. (دانش)		*	*	*
۲.	**تمرکز بر پدیده‌ها با آهنگ تغییر ثابت**	**سطح اول:** (بازآفرینی هدایت‌شده)	طرح مسئله از جهان پیرامون در ارتباط با آهنگ تغییر ثابت	**ایمان**	● (هذا خلق‌الله) به نشانه‌های عظمت خالق از طریق توجه به تغییرات خود و تغییر در ذره‌ای‌ترین موجودات تا عظیم‌الجثه‌ترین آنها پی‌ببرد. (دانش)	*	*	*	*
۳.	**خلق مدلهای خطی از پدیده‌های در دسترس**	**سطح دوم:** (پدیدارشناسی تعلیمی)	بیان مسائل تغییر از جهان واقعی و معنادار به جهان اندیشه	**علم**	● برای بررسی پدیده‌های در دسترس، با تغییرات ثابت، مدل ریاضی بنویسد. (کاربرد)		*	*	*
					● درباره جوابهای به‌دست آمده از طریق مدل طراحی شده بحث فردی و گروهی کند. (تحلیل)		*		*
۴.	**آهنگ تغییر ثابت همه آن چیزی نیست که در پی آن هستیم**	**سطح اول:** (بازآفرینی هدایت‌شده)	ارائه مدلی ریاضی برای حل مسائل در دسترس از آهنگ تغییرات ثابت (مدلسازی خطی)	**عمل**	● فیلمی از سیل اخیر اهواز تهیه کند و درباره آهنگ تغییر بالا آمدن آب کارون نسبت به زمان بارش اظهارنظر کرده و بحث کند. (روانی حرکتی)	*	*	*	*
۵.	**سرعت واقعاً چیست؟**	**سطح دوم:** (پدیدارشناسی تعلیمی)		**اخلاق**	● در انجام فعالیتها و کارهای کلاس شرکت کند. (روانی حرکتی)			*	*
					● در کار گروهی نسبت به اعضای گروه احساس مسئولیت کند. (روانی حرکتی)				*
					● با اندیشه در ارتباط بین پدیده‌های مختلف و تغییر هر یک از آنها بر دیگری به عظمت خداوند فکر کند و شکرگزار باشد. (روانی حرکتی)	*	*	*	

مفاهیم کلیدی:	فضای آموزشی:	روش تدریس:	وسایل آموزشی:
آهنگ تغییر ـ مدلسازی خطی ـ سرعت	چیدمان کلاس به‌صورت گروهی با توجه به تسلط بر تابلوی کلاس	**روش اصلی:** روش تیمی **روش فرعی:** ایفای نقش ـ توضیح ـ پرسش و پاسخ	ماژیک ـ تخته وایت‌برد تخته هوشمند محتوای الکترونیکی

۴. اجرای مدل، گردآوری و تحلیل داده‌های تکوینی حاصل از اجرا: از روش پژوهش تکوینی به عنوان یک روش پژوهشی برای توسعه و همچنین بهسازی الگوی اولیه طراحی‌شده استفاده شده است. به‌همین‌منظور در فاصله زمانی پنج هفته، پنج کارگاه ۷۵ دقیقه‌ای (هرهفته یک کارگاه) برگزار شد. جامعه آماری این بخش عبارت بود از ۴۸ نفر (همه سرگروههای ریاضی دوم متوسطه استان خوزستان در سال تحصیلی ۱۴۰۲) که شش نفر (۳ دبیر زن و ۳ دبیر مرد)، از افراد جامعه آماری به‌صورت هدفمند از میان کسانی انتخاب شدند که حداقل ۲۵ سال سابقه تدریس داشتند و در ده سال اخیر درس ریاضی ۳ یا حسابان را تدریس کرده بودند. تلاش بر آن بود که دبیران انتخاب‌شده از نظر نوع مدرسه و ناحیه درحال تدریس پراکندگی لازم را داشته باشند. دبیران منتخب تمایل خود را برای حضور در کارگاهها اعلام کردند. در پایان هر کارگاه با افراد شرکت‌کننده مصاحبه می‌شد و داده‌ها یادداشت و ضبط می‌شدند. روش به‌کار گرفته‌شده در مصاحبه‌ها نیمه‌ساختاریافته بود، زیرا این امکان را برای پژوهشگران فراهم می‌کرد که از پاسخ شرکت‌کنندگان، با رویکردی که باز ـ پاسخ است و کمترساختارمند، مطلع شوند. مصاحبه‌ها به‌صورت تک‌به‌تک و به شکل پرسش و پاسخ و با تمرکز بر ارزیابی فعالیتهای طراحی‌شده و میزان اثربخشی چارچوب طراحی‌شده براساس رویکرد موردنظر صورت گرفت. زمان هر مصاحبه ۱۵ تا ۲۰ دقیقه بود و تحلیل داده‌های حاصل از مصاحبه به روش تحلیل تفسیری صورت گرفت. براساس اطلاعات گردآوری شده و بازخورد حاصل از اجرای مدل، چارچوب طراحی‌شده مورد بازبینی و بازنگری قرار می‌گرفت و اصلاحات انجام می‌شد و مجدداً براساس مدل اصلاحی طرح درسهای دیگری طراحی می‌شدند. چرخه طراحی، اجرا و اصلاح تا کارگاه پنجم ادامه پیدا کرد. در جدول شماره ۲ نمونهٔ سؤالات مطرح شده در مصاحبه آمده است.

جدول ۲. نمونه سؤالات مطرح‌شده در مرحله تکوین مدل

ردیف	متن سؤال
۱	آیا فعالیتهای طراحی‌شده قابلیت اجرایی در کلاس درس را دارند؟ توضیح دهید.
۲	آیا فعالیتهای طراحی‌شده برای یاددهی مفهوم حد ارتباط معناداری با زندگی روزمره دانش‌آموزان دارد ؟ توضیح دهید.
۳	نقاط ضعف و قوت الگوی طراحی‌شده برای یاددهی مفهوم حد چیست؟ توضیح دهید.

۵. طراحی الگوی نهایی: براساس یافته‌های به‌دست‌آمده از تحلیل داده‌های تکوینی و در پی‌اصلاحات انجام‌شده، الگوی نهایی برای آموزش مفهوم حد با رویکرد واقعیت‌مدار همسو با برنامه درسی ملی طراحی شده است.

۶. اعتبارسنجی الگوی نهایی طراحی‌شده : الگوی نهایی را کارشناسان زبده اعتبارسنجی کرده‌اند. این نوع اعتبارسنجی که از اوایل قرن بیستم مورد استفاده قرار گرفته امروزه به فراوانی در پژوهشهای حوزه آموزش و پرورش استفاده می‌شود (امانی طهرانی و همکاران، ۱۳۹۵). پرسشنامه محقق‌ساخته به همین منظور طراحی شده است. جامعه آماری این بخش ۱۰۵ نفر شامل همه سرگروههای ریاضی دوره دوم متوسطه کشور بود که از میان آنها ۳۰ معلم که حداقل ۱۰ سال سابقه تدریس متوالی درس حسابان ۱ و ریاضی ۲ رشته ریاضی فیزیک و تجربی در پایه یازدهم نظام فعلی یا سوم دبیرستان نظام قدیم را دارا بودند به‌صورت هدفمند انتخاب شدند. افراد انتخاب شده هیچ نقشی در طراحی چارچوب اولیه و نهایی نداشتند و همچنین علاقه‌مندی خود را به شرکت در پژوهش اعلام کرده بودند. در یک گردهمایی کشوری، دو کارگاه ۷۵ دقیقه‌ای برگزار شد و الگوی نهایی طراحی‌شده را یکی از پژوهشگران تدریس کرد. در پایان کارگاه دوم پرسشنامه محقق‌ساخته شامل ۱۵ سؤال با طیف پنج‌درجه‌ای لیکرت (بسیار کم تا خیلی زیاد) در اختیار شرکت‌کنندگان قرار گرفت. برای حصول اطمینان از روایی پرسشنامه روایی محتوایی مورد تأیید پنج تن از استادان برنامه‌ریزی درسی و آموزش ریاضی قرار گرفت. برای پایایی پرسشنامه از ضریب آلفای کرونباخ استفاده شد که این مقدار برابر ۰/۸۵ بود. برای بررسی معنادار بودن میانگین نظری و تجربی به‌دست آمده از نظرات افراد مورد پژوهش از آزمون تی تک‌نمونه‌ای استفاده شد.

یافته‌های پژوهش

این مطالعه در پاسخ به دو پرسش طراحی شده است.

- **پرسش اول: الگوی آموزشی مبتنی بر رویکرد ریاضیات واقعیت‌مدار همسو با برنامه درسی ملی برای آموزش مفهوم حد به دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه چیست؟**

آنالیز یافته‌های حاصل از مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته که در پایان هر کارگاه با ارزیابان صورت گرفت نقاط قوت و ضعف فعالیتهای طراحی‌شده برای آموزش مفهوم حد را معلوم می‌کرد. نمونه پاسخ ارزیابان در بررسی نقاط ضعف و قوت فعالیتهای طراحی‌شده در جدول شماره ۳ آمده است.

جدول ۳. نمونه پاسخ به نقاط ضعف و قوت الگوی طراحی‌شده از نظر معلمان با تجربه

ارزیاب	نمونه پاسخ: (نقاط ضعف)	نمونه پاسخ: (نقاط قوت)
شماره ۱	● خیلی پرحرفی دارد. جریان فعالیتها به کندی پیش می‌رود.	● زمینه تدریس به زندگی روزمره متصل است. انگیزهٔ دانش‌آموزان در یادگیری بالا می رود.
شماره ۲	● در این روش تکلیف ارزشیابی پایانی معلوم نیست. درک بعضی فعالیتها برای دانش‌آموز دشوار است.	● بعضی فعالیتهای ارائه شده افکار و تجارب مختلف را درمعرض دید قرار می‌دهند.

جدول ۳. (ادامه)

ارزیاب	نمونه پاسخ: (نقاط ضعف)	نمونه پاسخ: (نقاط قوت)
شماره ۳	● اهداف بعضی فعالیتها مشخص نیست. بازده‌های یادگیری مشخص نیست.	● اینکه بر مدلسازی تأکید شده بسیار مفید است. آغاز اولین جلسه تدریس حد با آهنگ تغییرات جذاب است.
شماره ۴	● با ساعت تدریس هفتگی ریاضیات هماهنگی ندارد. انجام بعضی فعالیتها از حوصله دانش‌آموزان خارج است.	● اینکه به جنبه تربیتی توجه شده عالی است. رویکرد استفاده شده یادگیری دانش‌آموزان از مفهوم حد را بهبود می بخشد.
شماره ۵	● معلمان با مدل‌سازی ریاضی آشنا نیستند. در این روش آموزش حد به مفهوم تابع کمتر توجه شده است.	● طراحی فعالیتها با تجربیات دانش‌آموزان گره خورده است.
شماره ۶	● اگرچه روش فعالی است اما نگرانی در مدیریت رفتاری کلاس وجود دارد.	● ارتباط بین ریاضی و علوم دیگر به خوبی نمایان است. تأکید خوبی بر مسیر تاریخی حد شده است.

تلاش شده است که فعالیتهای طراحی‌شده برای یاددهی مفهوم حد به‌صورت شبکه‌ای مفهومی، مرتبط و به هم تنیده تبیین شوند و در فرایند عملی هر کدام، عناصر پنجگانه و عرصه‌های چهارگانه برنامه درسی ملی و همچنین سطوح یادگیری ریاضیات واقعیت‌مدار متناسب با نیازها و شرایط دانش‌آموزان لحاظ شود. در زیر نمونه فعالیت طراحی‌شده درسطح بازآفرینی هدایت‌شده معرفی شده است.

عنوان فعالیت:	**اندیشه تغییر از چشم حکیم با نگاهی بلند، از فراز قله‌ای رفیع!**
هدف کلی:	**فرصت بازآفرینی هدایت‌شدهٔ مفهوم ریاضی تغییر، در یک زمینه معنادار**

◉ شرح فعالیت

معلم: *«به خودتان نگاه کنید، زمانی جنین بودید در رحم مادر، رشد و نمو کردید. به‌تدریج دست و پا و سر و دیگر اندامتان شکل گرفت، رشد و نمو ادامه یافت و زمان مقرر تولدتان فرا رسید و پا به دنیای بسیار بزرگ‌تری گذاشتید. اگر کمی دقیق‌تر باشیم متوجه می‌شویم که تغییر و دگرگونی در طول زمان فقط محدود به جسم و بدن نیست، قدرت عقلانی و تفکر ما، قدرت خلاقیت ما، مجموعه آگاهیها و دانشهای ما در حال تغییر و دگرگونی است. اما مهم‌تر از تغییر، سرعت رشد است که موجب پیشرفت بیشتر می‌شود. قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ثُمَّ‌اللهُ يُنشِئُ النَّشْأَةَ الْآخِرَةَ إِنَّ‌اللهَ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ. بگو: در زمین بگردید و*

بنگرید خداوند چگونه آفرینش را آغاز کرده است. سپس خداوند (به‌همین‌گونه) جهان آخرت را ایجاد می‌کند. (سوره عنکبوت، آیه ۲۰).»

● **پرسش اساسی: سرعت واقعاً چیست؟ چگونه در لحظه سرعت معنا می‌شود؟**

در پاسخ به پرسش مطرح‌شده دانش‌آموزان توضیحاتی می‌دهند. توضیح یکی از دانش‌آموزان:

- *«سرعت را که همه می‌فهمند! همه با اتومبیل، دوچرخه، موتورسیکلت آشنا هستند، یکی سریع‌تر از دیگری حرکت می‌کند، خوب سرعتش بیشتر است. در زمان دوچرخه‌سواری من تجربه کرده‌ام که در سربالایی سرعت کم می‌شود.»*
- **معلم:** *«این نظرها نشانه این است که ما هنوز تفاوت عظیم بین درک شهودی و فهم عمومی با شناخت دقیق علمی را نیاموخته‌ایم. درواقع عموم افراد درک شهودی و فیزیکی از سرعت دارند. اما فقط درک شهودی و فیزیکی! نه چیز بیشتر و دقیق‌تر! این خبر ورزشی را در نظر بگیرید: در مسابقه اسب‌سواری، اسب پیشتاز در لحظه‌ای که از خط پایان گذشت با سرعت ۷۶/۵ کیلومتر بر ساعت می‌دوید. چگونه می‌توان برای این ادعا مدرک و دلیل آورد و آن را ثابت کرد؟»*

- دانش‌آموزان توضیحاتی می‌دهند. توضیحات یکی از دانش‌آموزان: *«معمولاً عکاسان نزدیک خط پایان می‌ایستند تا از اسب برنده عکس بگیرند.»*
- **معلم:** *«اگر عکسهای مربوط به لحظه عبور اسب برنده از خط پایان را بررسی کنیم در عکسها، اسب بدون حرکت دیده می‌شود. بنابراین عکسهای مربوط به لحظه عبور از خط پایان هیچ کمکی به تشخیص و درک سرعت اسب نمی‌کنند. این وضعیت توأم با تناقض است زیرا وقتی تلاش می‌کنیم عددی را به ویژگی حرکت اسب در لحظه عبور از خط پایان نسبت بدهیم، مجبوریم بر آن لحظه تمرکز کنیم، اما وقتی روی یک لحظه تمرکز می‌کنیم حرکت متوقف می‌شود!»*

- یکی از دانش‌آموزان: *«راستش این وضعیت متناقض، جالب به نظر می‌رسد. می‌خواهم بدانم سرعت واقعاً چیست؟»*
- **معلم:** *«امروزه به وسیله حسابان معلوم شده است که نباید به دنبال یک مفهوم ساده از سرعت در یک لحظه بود، بلکه باید سرعت را در فاصله‌های زمانی بی‌نهایت کوچک شامل لحظه موردنظر، در نظر گرفت. این روش از درگیر شدن با مسائل فلسفی طفره می‌رود، ولی مسائل جدیدی مخصوص خودش را به بار می‌آورد! ما این اندیشه را با یک کار گروهی بررسی می‌کنیم. در واقع ما یک پدیده واقعی را به‌صورت یک آزمایش ایده‌آل و فکورانه تبدیل*

می‌کنیم. ایده‌آل به این معنا که فرض می‌کنیم می‌توانیم مسافت و زمان را تا هر درجه‌ای از دقت اندازه‌گیری کنیم. در صورتی که می‌دانیم در شرایط واقعی تا چند رقم اعشار می‌توان دقت اندازه‌گیری را بالا برد و تا هر دقتی نمی‌توان اندازه‌گیری کرد.»

● **آزمایش گروهی:** دانش‌آموزان پس از پوشیدن لباس ورزشی (ازجلسه پیش به دانش‌آموزان گفته شده بود که لباس ورزشی همراه داشته باشند) به حیاط مدرسه هدایت می‌شوند و برای مسابقه دو ۲۰۰ متر آماده می‌شوند. نقطه شروع و پایان مشخص شده است و در طول مسیر نقاط (۱۹۵، ۱۸۰، ۱۲۰، ۸۰، ۵۰) علامت‌گذاری می‌شوند. زمان لحظه عبور هر دونده از نقاط تعیین‌شده را پنج داور که از میان دانش‌آموزان انتخاب شده بودند، به کمک زمان‌سنج در طول مسیر ثبت می‌کنند. پس از پایان مسابقه معلم از داوران می‌خواهد که با تکمیل جدول زیر به سؤالات مطرح‌شده پاسخ دهند.

مسافت طی‌شده (متر)	زمان (ثانیه)	سرعت متوسط
۵۰ متر		در ۱۵۰ متر پایانی=
۸۰ متر		در ۱۲۰ متر پایانی=
۱۲۰ متر		در ۸۰ متر پایانی =
۱۸۰ متر		در ۲۰ متر پایانی =
۱۹۵ متر		در ۵ متر پایانی =

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

- کدام‌یک از مقدارهای به‌دست آمده تخمین بهتری برای سرعت دونده در لحظه عبور از خط پایان است؟
- آیا می‌شود تا هرچقدر که بخواهیم بازه زمانی لحظات پایانی را کوچک و کوچک‌تر (بی‌نهایت کوچک) کنیم؟
- آیا بالاخره می‌توان یک عدد دقیق را برای سرعت لحظه‌ای دونده در لحظه عبور از خط پایان در نظر گرفت؟

بر اساس یافته‌های حاصل از تحلیل داده‌های تکوینی طی برگزاری پنج جلسه کارگاه و اصلاح و تدوین مدل اولیه، الگوی نهایی شکل شماره ۱ طراحی شده است.

شکل ۱. الگوی نهایی آموزش مفهوم حد مبتنی بر رویکرد واقعیت مدار همسو با برنامه درسی ملی

● **پرسش دوم: اعتبار الگوی طراحی‌شده از نظر افراد مطلع چگونه است؟**

به‌منظور پاسخگویی به پرسش دوم پژوهش از آزمون تی تک استفاده شده است . نتایج این آزمون در جدول شماره ۴ نشان داده شده است.

جدول ۴. نتایج حاصل از پژوهش کمی

ردیف	گویه‌ها	میانگین تجربی	انحراف استاندارد	میانگین نظری	
				t	sig
۱	● در فعالیتهای طراحی‌شده به شکوفاسازی حقیقت و فطرت الهی تأکید شده است.	۴/۵۰۰	۰/۶۷۷۳۲	۴/۲۹۱	۰/۰۰۱
۲	● فعالیتهای حین درس با واقعیتهای زندگی دانش‌آموزان در ارتباط است.	۴/۶۰۰	۰/۵۶۷۲۱	۵/۳۴۲	۰/۰۰۰

جدول ۴. (ادامه)

ردیف	گویه‌ها	میانگین تجربی	انحراف استاندارد	میانگین نظری	
				t	sig
۳	الگوی طراحی‌شـــده فرصتهای هدایت‌شده‌ای در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهد به‌گونه‌ای که آنها با انجام ریاضی، مفهوم حد را بازآفرینی می‌کنند.	۴/۴۰۰	۰/۹۸۳۲۱	۶/۰۱۸	۰/۰۰۳
۴	الگوی طراحی‌شده بر ارتباط مفهوم حد و علوم دیگر توجه دارد.	۴/۶۰۰	۰/۸۷۴۵۸	۴/۱۷۳	۰/۰۱۵
۵	الگوی طراحی‌شده به ریاضیات به عنوان یک علم زنده تأکید دارد.	۴/۷۰۰	۰/۶۰۹۱۲	۶/۸۳۶	۰/۰۰۰
۶	فعالیتهای طراحی‌شـــده به‌گونه‌ای اســـت که دانش‌آموزان می‌توانند مفهوم حد را در زندگی روزمره به‌کار بگیرند.	۴/۸۰۰	۰/۶۵۱۴۹	۲/۶۲۵	۰/۰۰۳
۷	الگوی آموزشی به‌گونه‌ای سازماندهی شده که دانش‌آموزان فرایندی مشابه آنچه را که ریاضیدانان در هنگام خلق مفهوم حد، انجام داده‌اند را تجربه می‌کنند.	۴/۶۰۰	۰/۹۸۴۰۱	۲/۴۱۸	۰/۰۰۰
۸	فعالیتهای طراحی‌شده بر فرایند مدل‌سازی تأکید دارند.	۴/۲۰۰	۰/۸۷۶۰۳	۲/۵۲۷	۰/۰۱۵
۹	الگوی طراحی‌شـــده بر مفید بودن مفهوم حد در دنیای واقعی تأکید دارد.	۴/۵۰۰	۰/۷۰۲۵۱	۳/۵۱۳	۰/۰۱۲
۱۰	من یقین دارم که دانش‌آموزان کلاسم از این‌روش تدریس حد لذت خواهند برد.	۴/۷۰۰	۰/۶۹۷۲۱	۶/۰۳۲	۰/۰۰۰
۱۱	الگوی طراحی شده تأکید دارد که دانش‌آموزان، دانش به‌وجود آمده در ذهن خودشـــان را دانشی خودســـاخته تلقی کرده و در قبال آن احساس مسئولیت کنند.	۴/۵۰۰	۱/۲۴۸۷۱	۴/۶۷۱	۰/۰۱۰
۱۲	ترتیب فعالیتها به گونه ای اســـت که دانش‌آموزان را به‌طور تدریجی و کاملاً طبیعی از مفاهیم شـــهودی بـــه مفهوم انتزاعی حد هدایت می‌کند.	۴/۴۰۰	۰/۹۹۳۰۲	۵/۲۰۵	۰/۰۰۲
۱۳	الگوی طراحی‌شـــده به زمینه فرهنگی اجتماعی دانش‌آموزان تأکید دارد.	۴/۸۰۰	/۶۴۹۳۱	۶/۴۷۱	۰/۰۰۰
۱۴	الگوی طراحی‌شده قابلیت اجرایی در کلاس درس را دارد.	۴/۳۰۰	۱/۱۵۶۷۱	۵/۳۷۳	۰/۰۱۲
۱۵	در الگوی طراحی‌شـــده جنبه تعادل بیـــن بازنماییهای چندگانه در آموزش مفهوم حد رعایت شده است.	۴/۴۰۰	۱/۰۴۳۱۶	۶/۲۹۱	۰/۰۰۰

■ بحث و نتیجه‌گیری ■

پژوهش حاضر با هدف طراحی و اعتباریابی الگویی برای آموزش مفهوم حد مبتنی بر رویکرد واقعیت‌مدار همسو با برنامه درسی ملی شکل گرفته است. در مرحله تکوین مدل اولیه و دستیابی به الگوی نهایی موردنظرکه قابلیت اجرایی در کلاسهای درس را داشته باشد، تلاش بر آن بود که الگوی طراحی‌شده حاصل دیدگاههای معلمان ریاضی با تجربه در فرایندی تعاملی باشد. الگوی نهایی با در نظر گرفتن ظرفیتهای دانش‌آموزان برای تجسم و به کمک فعالیتهایی عملی از پدیده‌های محیط پیرامون برای تعمل و تفسیر بیشتر بر روی آن پدیده‌ها، طراحی شده است. بر اساس اسناد بالادستی نظام تعلیم و تربیت جمهوری اسلامی ایران هدف کلی برنامه‌های درسی و تربیتی، تربیت یکپارچه عقلی، ایمانی، علمی، عملی و اخلاقی دانش‌آموزان است، به‌گونه‌ای که بتوانند موقعیت خود را نسبت به خدا، دیگر انسانها و نظام خلقت، به درستی درک کنند. از این رو نخستین جلسه در تدریس مفهوم حد با تلاش برای معنابخشی به مفهوم آهنگ تغییر و با تمرکز بر مفهوم تحول در جسم و بدن، در قدرت تعقل و تفکر و پس از آن در پدیده‌های پیرامون آغاز شد و با در نظر گرفتن سیر آگاهانه در سطوح تفکری (RME) به‌مدل‌سازی پدیده‌ها با آهنگ تغییر ثابت و به بهانه یافتن پاسخی دقیق به پرسش (سرعت واقعاً چیست؟ چگونه در لحظه سرعت معنا می‌شود؟) ورود معنادار به دنیای بی‌نهایت کوچکها صورت گرفت و تلاشی برای بازآفرینی هدایت‌شده‌ای از مفهوم حد در پی توجه به بی‌نهایت کوچکها صورت پذیرفت.

پشتوانه نظری این بخش اسناد بالادستی نظام تعلیم و تربیت جمهوری اسلامی ایران و پژوهشهایی است که معتقدند خلق یک مفهوم باید از جهان مجسم آغاز شده و پس از آن از طریق تفکر عمیق همراه با بازخورد به ایجاد مدل برای آن مفهوم پرداخت (برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، ۱۳۹۱؛ کلاینر، ۱۳۹۸؛ وو، ۲۰۲۰ ؛ بیشاب، ۲۰۰۶؛ شهرکی و فدایی، ۱۴۰۲).

نتایج حاصل از پژوهش کمی که به‌منظور بررسی اعتبار الگوی نهایی طراحی‌شده از نظر افراد مطلع صورت گرفته بیانگرآن است که بین میانگین نظری و میانگین تجربی به‌دست آمده از نظرات افراد مطلع، تفاوت معنادار در سطوح ($P<۰/۰۱$) و ($P<۰/۰۵$) وجود ندارد، از این‌رو می‌توان نتیجه گرفت که الگوی طراحی‌شده از نظر آماری دارای اعتبار لازم است. به‌سبب زیربنایی بودن مفهوم حد در گستره مفاهیم حسابان این مطالعه با تمرکز بر طراحی و اعتباریابی الگویی برای آموزش مفهوم حد به انجام رسیده است، حال آنکه می‌تواند در مفاهیم دیگر حسابان و حتی سایر دروس پژوهشهای مشابه صورت گیرد و پژوهش حاضر می‌تواند آغازی بر پژوهشهای مرتبط و نقشه راهی برای سیاستگذاران حوزه تربیت و یاددهی ریاضیات باشد. همچنین اجرای پژوهشهایی در زمینه تأثیر به‌کارگیری این الگو در عملکرد دانش‌آموزان دوره متوسطه پیشنهاد می‌شود. برگزاری دوره‌های ضمن‌خدمت آموزشی برای معلمان ریاضی برای آشنایی هرچه بهتر آنها با مبانی و اصول رویکرد واقعیت‌مدار نیز می‌تواند مفید باشد.

منابع

REFERENCES

امانی طهرانی، محمود؛ علی‌عسگری، مجید و عباسی، عفت. (۱۳۹۵). طراحی و تدوین مدلی کارآمد برای آموزش علوم در دوره اول متوسطه. *فصلنامه تعلیم و تربیت*، ۳۲ (۱)، ۹-۳۲.

Dor: 20.1001.1.10174133.1395.32.1.2.8

حسنی، حسین. (۱۳۹۸). اقدام‌پژوهی، راهبردی برای توسعه حرفه‌ای معلمان فکور. دو *فصلنامه پویش در آموزش علوم تربیتی و مشاوره*، ۵ (۱۰)، ۲۴-۴۵.

Dor: 20.1001.1.2783154.1398.1398.10.2.1

دبیرخانه شورای عالی آموزش و پرورش. (۱۳۹۱). *برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران*. تهران: وزارت آموزش و پرورش.

سلطانی، محمد. (۱۳۹۱). *بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان سال سوم تجربی و ریاضی در مورد مفهوم حد*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

شهرکی، علی و فدایی، محمدرضا. (۱۴۰۲). جستاری در ریاضیات قومی: استخراج محاسبات ریاضی سنتی مقنیان. *فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران*، ۱۷ (۷۰)، ۱۵۷-۱۷۶.

Dor: 20.1001.1.17354986.1402.18.70.6.1

شیخ‌الاسلامی، هاله. (۱۳۹۷). *طراحی و اعتبارسنجی الگوی برنامه درسی ریاضیات زمینه‌محور به‌منظور ارزشیابی برنامه درسی ریاضیات پایه دهم رشته انسانی*. رساله دکتری، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

صفی‌خانی، یحیی؛ عباسیان، حسین؛ آراسته، حمید و عبدالهی، بیژن. (۱۴۰۰). آسیب‌شناسی برنامه معلم‌پژوهنده در آموزش و پرورش ایران. *فصلنامه مطالعات آموزشی و آموزشگاهی*، ۱۰ (۲)، ۳۳۹-۳۶۶.

Dor: 20.1001.1.2423494.1400.10.2.14.1

عباس‌زاده، عبدالامیر؛ مدقالچی، علیرضا و اصغری، نسیم. (۱۴۰۲). طراحی و اعتبارسنجی الگوی برنامه درسی ریاضی مبتنی بر رویکرد واقعیت‌مدار برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه. *فصلنامه پژوهش در برنامه‌ریزی درسی*، ۲۰ (۴۹)، ۸۴-۹۸.

کلاینر، ایسرائل. (۱۳۹۸). تاریخچه بی‌نهایت کوچک‌ها و بی‌نهایت بزرگ‌ها در حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه روح‌الله جهانی‌پور و سعید مقصودی. *فرهنگ و اندیشه ریاضی*، ۳۸ (۲)، ۷۷-۱۲۱.

Dor: 20.1001.1.10226443.1398.38.65.5.9

گویا، زهرا. (۱۳۷۲). تاریخچه تحقیق عمل و کاربرد آن در آموزش. *فصلنامه تعلیم و تربیت*، ۳۵ و ۳۶ (۳ و ۴)، ۲۳-۴۰.

گویا، زهرا و سرشتی، حمیده. (۱۳۸۵). آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی. *مجله رشد آموزش ریاضی*، ۲۴ (۱)، ۲۰-۲۶ .

محسنی، مریم. (۱۳۹۴). *ساخت مفهوم تابع توسط دانش‌آموزان پایه نهم، با رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

یافتیان، نرگس و ملکی، فاطمه. (۱۳۹۹). میزان همسویی کتاب ریاضی پایهٔ هشتم با دیدگاه ریاضیات واقعیت‌مدار. *فصلنامه مطالعات آموزشی و آموزشگاهی*، ۹ (۱)، ۲۱۸-۱۹۳.

Dor: 20.1001.1.2423494.1399.9.1.9.7

Akhadya, W. N., & Wijaya, A. (2017). The effectiveness of team assisted individualization learning model with realistic mathematics approach on mathematical problem-solving ability of junior high school students. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *6*(1), 37-42.

Bishop, A., Clarke, B., Corrigan, D., & Gunston, D. (2006). Values in mathematics and science education: Researchers' and teachers' views on the similarities and differences. *For the Learning of Mathematics*, *26*(1), 7-11.

Chan, M. C. E., & Sfard, A. (2020). On learning that could have happened: The same tale in two

cities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *60*, Article 100815. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100815

Creswell, J. (2012). *Educational research: Planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research* (4th ed.). Boston: Pearson.

Das, K. (2020). Realistic mathematics & Vygotsky's theories in mathematics education. *Shanlax International Journal of Education, 23*(9), 18-38. https://doi.org/10.34293/EDUCATION.V9I1.3346

Eichler, A., & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM Mathematics Education*, *46*(1), 647-659. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0606-y

Fauzan, A., Armiati, A., & Ceria, C. (2018). A learning trajectory for teaching social arithmetic using RME approach. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, *335*(1),112-136. DOI 10.1088/1757-899X/335/1/012121

Haghjoo, S., Radmehr, F., & Reyhani, A. (2022). Analyzing the written discourse in calculus textbooks over 42 years: The case of primary objects, concrete discursive objects, and a realization tree of the derivative at a point. *Educational Studies in Mathematics*, *112*, 73-102. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10168-y

Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1952). *Geometry and imagination*. New York: Chelsea.

Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 77-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kula, S., & Güzel, E. (2014). Misconceptions emerging in mathematics students teachers' limit instruction and their reflections. *Journal of Quality and Quantity*, *48*(6), 3355-3372. DOI: 10.1007/s11135-013-9961-y

Laurens, T., Batlolona, F. A., Batlolona, J. R., & Leasa, M. (2018). How does realistic mathematics education (RME) improve students' mathematics cognitive achievement?. *EURASIA Journal of Mathematics, Science, and Technology Education*, *14*(2), 569-578. DOI: 10.12973/ejmste/76959

Madrazo, A. L., & Dio, R. V. (2020). Contextualized learning modules in bridging students' learning gaps in calculus with analytic geometry through independent learning. *Journal on Mathematics Education*, *11*(3), 457-476. http://doi.org/10.22342/jme.11.3.12456.457-476

McCombs, P. (2014). *Analysis of second semester calculus students' understanding of series and series convergence*. Unpublished doctoral dissertation, Northern Illinois University, DeKalb, IL.

Mendes, I. A. (2021). Historical creativities for the teaching of functions and infinitesimal calculus. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *16*(2), em0629. https://doi.org/10.29333/iejme/10876

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Payadnya, I., Suwija, I., & Wibawa, K. (2021). Analysis of students' abilities in solving realistic mathematics problems using "what-if"-ethnomathematics instruments. *Mathematics Teaching Research Journal*, *13*(4),131-149.

Reigeluth, C. M., & Frick, T. W. (1999). Formative research: A methodology for creating and improving design theory. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional design theories and models: A new paradigm of instructional theory*, Volume II (pp. 633–651). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rodi, S. B., Jr. (1986). Some systematic weaknesses and the place of intuition and applications in calculus instruction. In R. G. Douglas (Ed.), *Toward a lean and lively calculus: Report of the conference/workshop to develop curriculum and teaching methods for calculus at the college level* (pp.115-127). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sebsibe, A. S., & Feza, N. N. (2020). Assessment of students' conceptual knowledge in limit of functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2), em0574. https://doi.org/10.29333/iejme/6294

Tall, D. O. (2002). Differing modes of proof and belief in mathematics. In F. C. Lin (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Understanding Proving and Proving to Understand* (pp. 91–107). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). *International reflections on the Netherlands didactics of mathematics: Visions on and experiences with realistic mathematics education*. Springer International Publishing.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521-525). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170

Wu, W. (2020). A definite explanation of the concept of limit in teaching. *Creative Education*, *11*(2), 2832-2836. DOI: 10.4236/ce.2020.1112208

Zollman, A. (2014). University students' limited knowledge of limits from calculus through differential equations. *The mathematics education for the future project: Proceedings of the 12th International Conference*, *15*(3), 693-698.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

Quarterly Journal of
Education

The Design and Validation of a Realistic Model for Teaching the Concept of Limit

A. Abbaaszaadeh[1] ◉ A. R. Medghaalchi, Ph.D.[2*] ◉ N. Asghari, Ph.D.[3]

Abstract

Assuming the inadequacy of current teaching models in relationship to the concept of limit, it was deemed necessary to design a realistic model of teaching that is compatible with the national curriculum. To this end, initially the characteristics of such a model were identified and then a preliminary draft of the model as well as daily lesson plans were constructed. This draft was then taken to a workshop with experienced teachers who edited and improved the model in 5 sessions leading to the final edition. Through a questionnaire and cooperation of informed individuals, the validity of the final edition was assessed to be adequate.

Keywords: **Math curriculum, realistic mathematics, limit, calculus**

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

Date Received: May 17, 2024 **Date Accepted:** Nov. 9, 2024

This paper is derived from the first author's Doctoral Dissertation.

1. Doctoral graduate in Mathematics, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran.

2. Professor of Mathematics, Faculty of Math and Computer Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran (Corresponding Author).
E-mail: a_medghalchi@khu.ac.ir

3. Assistant Professor of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran.