

Higher-order sequent calculus for deRosset and Fine's impure logic of grounding

Davood Hosseini*

Abstract

deRosset and Fine's impure logic of grounding is a modification of Fine's impure logic of grounding. deRosset and Fine show that this modified impure logic of grounding (despite the original one) is sound and complete with respect to a semantics they develop. After presenting Fine's original impure logic of grounding, I argue that it has some proof-theoretic shortcomings concerning the primitive notions and the definition of deduction. I further argue that a version of these shortcomings persists in deRosset and Fine's modified impure logic. I further improve deRosset and Fine's impure logic of ground and set up a higher-order sequent calculus for it. I show that this improved system is semantically equivalent to deRosset and Fine's logic while avoiding all of the aforementioned shortcomings. The result is that although the improved logic is semantically as good as deRosset and Fine's logic, it is superior to their logic from a proof-theoretic point of view.

Keywords: impure logic of grounding, higher-order sequent calculus, deduction.

* Associate Professor of Philosophy, Department of Philosophy and Logic, Tarbiat Modares University,
davood.hosseini@modares.ac.ir

Date received: 08/04/2024, Date of acceptance: 04/06/2024



حساب رشته سطح بالاتر برای منطق ناسره ابتدای دروست و فاین

داود حسینی*

چکیده

منطق ناسره ابتدای دروست و فاین نسخه اصلاح شده‌ای از منطق ناسره ابتدای فاین است. دروست و فاین نشان داده‌اند که این منطق (به‌خلاف منطق اولیه فاین) نسبت به سمتیکی که برای آن تنظیم کرده‌اند صحت و تمامیت دارد. پس از معرفی سیستم استنتاجی منطق اولیه فاین استدلال می‌کنم که پاره‌ای از مشکلات نظریه‌برهانی در خصوص این منطق وجود دارد. بیش از این، استدلال می‌کنم که نسخه اصلاح شده دروست و فاین نیز (اگرچه برای اهداف سمتیکی یادشده مناسب است) با همان مشکلات نظریه‌برهانی دست به گریبان است. با اصلاح بیشتر سیستم استنتاجی دروست و فاین یک حساب رشته سطح بالاتر تنظیم می‌کنم. نشان می‌دهم که به لحاظ سمتیکی منطق پیشنهادی من معادل با منطق دروست و فاین است. همچنین دلایلی می‌آورم که در سیستم استنتاجی پیشنهادی مشکلات نظریه‌برهانی یادشده مرتفع می‌شوند. حاصل این مقاله ارائه یک سیستم استنتاجی مناسب برای منطق ناسره ابتدای دروست و فاین است بدون آن‌که از مزیت‌های سمتیکی منطق یادشده کاسته شود..

کلیدواژه‌ها: منطق ناسره ابتدا، حساب رشته سطح بالاتر، استنتاج.

۱. مقدمه

ابتنا در سال‌های اخیر محل توجه بسیاری از منطق‌دانان قرار گرفته است.^۱ یکی از معروف‌ترین سیستم‌های منطقی پیشنهادی برای ابتنا منطقی است که فاین پیشنهاد داده است (Fine 2012a،

* دانشیار فلسفه، گروه فلسفه و منطق، دانشگاه تربیت مدرس، davood.hosseini@modares.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۲۰، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۱۵



(2012b). سیستم اولیه منطق فاین منطقی سره بوده است. منطق سره ابتنا منطقی است که هیچ عملگری جز ابتنا ندارد. سپس او منطقی ناسره برای ابتنا تنظیم کرده است. منطق ناسره ابتنا ارتباط میان عملگر ابتنا و سایر عملگرهای منطقی را به تصویر می کشد. دروست و فاین اخیراً با اصلاح منطق ناسره ابتنا فاین، منطقی ناسره برای ابتنا و سمتیکی برای آن پیشنهاد کرده اند (deRosset and Fine 2023). ایشان قضایای صحت و تمامیت این منطق را نیز اثبات کرده اند.

به هر ترتیب، منطق دروست و فاین به لحاظ نظریه برهانی دچار کاستی هایی است. در این مقاله قصد دارم که ابتدا نشان دهم که این کاستی ها چیستند و از کجا نشأت گرفته اند. سپس سیستم استنتاجی مناسبی برای این منطق پیشنهاد کنم که چنان کاستی هایی را نداشته باشد. برای این منظور در بخش نخست ابتدا منطق ناسره فاین را معرفی می کنم و کاستی های آن را به تصویر می کشم. در بخش دوم منطق ناسره دروست و فاین را معرفی می کنم و نشان می دهم که چگونه همان مشکلات سابق را ندارد اما نسخه دیگری از آن مشکلات را به ارث برده است. سپس در بخش چهارم سیستم استنتاجی حساب رشته سطح بالاتری برای این منطق پیشنهاد می دهم که اولاً این مشکلات را ندارد و ثانیاً به لحاظ سمتیکی معادل با منطق دروست و فاین است.

۲. منطق ناسره فاین

فاین در مقاله «منطق سره ابتنا» نخستین سیستم منطقی از سری منطق های ابتنا را ارائه کرده است (Fine 2012a). این سیستم منطقی صرفاً شامل منطق سره ابتناست. فاین چهار مفهوم پایه برای ابتنا دارد. در این تعاریف، $A, B, \dots$ جملات یک زبان پایه هستند و $\Gamma, \Delta, \dots$ مجموعه هایی متناهی از جملات زبان پایه هستند.^۲

$$\Gamma \leq A \quad \Gamma \text{ مبنای ضعیف تام } A \text{ است.}$$

$$\Gamma < A \quad \Gamma \text{ مبنای اکید تام } A \text{ است.}$$

$$A \leq B \quad A \text{ مبنای ضعیف جزئی } B \text{ است.}$$

$$A < B \quad A \text{ مبنای اکید جزئی } B \text{ است.}$$

به هر یک از این گزاره ها یک اظهار ابتدایی گوئیم. در ادامه برای نشان دادن یک اظهار ابتدایی دلخواه از α استفاده می کنم.

حساب رشته سطح بالاتر برای منطق ناسرهٔ ابتدای دروست و فاین (داود حسینی) ۲۲۵

استنتاج منطقی در سیستم فاین میان اظهارهای ابتدایی برقرار است: مجموعه‌ای از اظهارهای ابتدایی یک اظهار ابتدایی دیگر را نتیجه می‌دهند. قواعد سیستم استنتاجی فاین در این مقاله از این قرار است:

$$\frac{A, \Gamma \leq B}{A \leq B}$$

$$\frac{A, \Gamma < B}{A < B}$$

تداخل

$$\frac{\Gamma < A}{\Gamma \leq A}$$

$$\frac{A < B}{A \leq B}$$

$$\frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C}$$

$$\frac{A \leq B \quad B < C}{A < C}$$

تعدیی

$$\frac{}{A \leq A}$$

بازتابی

$$\frac{A < A}{\alpha}$$

عدم دور

$$\frac{\Gamma_1 \leq A_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \leq A_n \quad A_1, \dots, A_n, \Delta \leq B}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \Delta \leq B}$$

برش

$$\frac{A_1, \dots, A_n \leq B \quad A_1 < B \quad \dots \quad A_n < B}{A_1, \dots, A_n < B}$$

تداخل معکوس

فاین در مقاله «راهنمایی برای ابتنا» سیستم منطقی پیشین خود را به یک منطق ناسره گسترش می‌دهد (Fine 2012b). در این جا زبان پایه را زبان منطق جملات با عملگرهای $\neg, \wedge, \vee$ در نظر می‌گیریم. استراتژی او برای این گسترش برگرفته از نظام‌های استنتاج طبیعی است، به این معنا که او برای هر عملگر منطقی قاعده‌هایی برای حذف و معرفی تنظیم می‌کند. قاعده‌های معرفی چندان پیچیدگی خاصی در تنظیم کردن ندارند. برای مثال، بدون هیچ فرضی می‌توان اظهار کرد که $A, B < A \wedge B$. به طور متناظر بدون هیچ فرضی می‌توان اظهار کرد که $A < A \vee B$ و همچنین $B < A \vee B$.

تنها مسئله‌ای که در قاعده‌های معرفی هست مربوط است به عملگر نقض. روشن است که در هیچ شرایطی $\neg A \not< A$. اما بدون هیچ فرضی داریم $A < \neg \neg A$. این قاعده معرفی، وضعیت تنظیم قواعد نقض را شبیه منطق‌های سه‌ارزشی می‌کند. در این منطق‌ها، ناگزیر باید برای رفتار عملگر نقض در ارتباط با سایر عملگرها نیز قواعدی تنظیم کرد.^۳ فاین قاعده‌هایی را برای معرفی عملگر نقض تنظیم می‌کند که شباهت بسیاری به منطق FDE دارند. این قاعده‌ها در ادبیات حول ابتنا کم‌وبیش پذیرفته شده هستند (Correia 2014, 2017, 2023, deRosset and Fine 2023, Lovett 2020, Poggiolesi 2018, 2024). قاعده‌های معرفی از این قرار هستند:

$$\frac{}{A < \neg \neg A}$$

$$\frac{}{A/B < A \vee B}$$

$$\frac{}{A, B < A \wedge B}$$

$$\frac{}{\neg A / \neg B < \neg(A \wedge B)}$$

$$\frac{}{\neg A, \neg B < \neg(A \vee B)}$$

در این قاعده‌ها، «/» به معنای آن است که دو قاعده تنظیم شده است. برای مثال قاعده دوم خلاصه‌نویسی این دو قاعده است:

$$\frac{}{A < A \vee B}$$

$$\frac{}{B < A \vee B}$$

قاعده‌های حذف اما، دشواری‌هایی دارند. ساده‌ترین حالت برای عملگر عطف است. قرار است ببینیم که از فرض $\Delta < A \wedge B$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت. از نگاه فاین، از این فرض صرفاً می‌توان نتیجه گرفت که Δ مبنای ضعیفی برای A و B فراهم می‌کند. توجه شود که نمی‌توان گفت که Δ مبنای اکیدی برای A و B فراهم می‌کند، زیرا مثال نقض روشنی در دست است. از این که $A, B < A \wedge B$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $\{A, B\}$ مبنای اکیدی برای A و B فراهم می‌کند. این مجموعه متشکل از خود A و B است. لذا نتیجه صرفاً می‌تواند اظهاری برای مبنای ضعیف باشد.

اما مشکل دیگری هم هست. نمی‌توان گفت که چه بخش از Δ و چگونه این مبنای ضعیف را فراهم می‌کند. به این سبب است که لازم است که مفهوم جدیدی از ابتدا وارد کار شود: ابتدای توزیعی (distributive grounding). از نگاه فاین Δ مبنای توزیعی ضعیف یا اکید Γ است، به ترتیب $\Delta \leq \Gamma$ یا $\Delta < \Gamma$ هرگاه چنین باشد که زیرمجموعه‌های Δ (که اجتماعشان خود Δ را می‌سازد) هر کدام مبنایی ضعیف یا اکید برای اعضای Γ فراهم کنند. با این تعریف $\{A, B\}$ یک مبنای توزیعی ضعیف برای خودش است. با این مفهوم، می‌توان قاعده حذف برای عملگر عطف را چنین تنظیم کرد:

$$\frac{\Delta < A \wedge B}{\Delta \leq \{A, B\}}$$

عملگر فصل دشواری بیشتری نیز دارد. قرار است ببینیم که از فرض $\Delta < A \vee B$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت. دشواری از این جهت است که مشخص نیست که Δ چه نسبتی با A یا B داشته است. حالات مختلفی ممکن است رخ داده باشد: ممکن است که Δ مبنای ضعیفی برای A فراهم کرده باشد و چون $\Delta < A \vee B$ آنگاه چنین شده است که $\Delta < A \vee B$ به طور مشابه، ممکن است که این وضعیت در قبال B رخ داده باشد. اما ممکن است که هیچ‌کدام از این دو حالت رخ نداده باشد. بلکه حالت دیگر که رخ داده است این بوده باشد که Δ مبنایی توزیعی برای $\{A, B\}$ فراهم کرده باشد. همه این حالات محتمل هستند. به این خاطر، نمی‌توان از فرض $\Delta < A \vee B$ نتیجه مشخصی گرفت؛ نتیجه صرفاً انفصال میان سه حالت مختلف است. به این سبب، علاوه بر این که به ابتدای توزیعی احتیاج است، به گسترشی در معنای استنتاج نیز نیاز افتاده است. این حالت انفصالی در نتیجه قاعده را با «؛» نمایش می‌دهیم. به این ترتیب، قاعده حذف فصل چنین خواهد شد:

$$\frac{\Delta < A \vee B}{\Delta \leq A; \Delta \leq B; \Delta \leq \{A, B\}}$$

تنظیم قاعده‌های حذف برای نقیض مشابه قاعده‌های معرفی است. باید ابتدا قاعده‌ای برای دو نقیض داشت و سپس رفتار نقیض با سایر عملگرها را جداگانه بررسی کرد. به دلایلی مشابه با آنچه برای قاعده حذف فصل گفته شد، می‌توان از $\Delta < \neg \neg A$ صرفاً نتیجه گرفت که $\Delta \leq A$ زیرا ممکن است که $\Delta = \{A\}$ تعامل عملگر نقض با عملگرهای عطف و فصل نیز به ترتیب رفتاری شبیه عملگرهای فصل و عطف دارند. این مشابهت دقیقاً متناظر است با مشابهت میان رفتار نقض با عطف و فصل به ترتیب با فصل و عطف در قاعده‌های معرفی. به این ترتیب، می‌توان قاعده‌های حذف سیستم ناسره ابتدا را که فاین تنظیم کرده است، در جدول زیر مشاهده کرد:

$$\frac{\Delta < \neg \neg A}{\Delta \leq A}$$

$$\frac{\Delta < A \wedge B}{\Delta \leq \{A, B\}}$$

$$\frac{\Delta < A \vee B}{\Delta \leq A; \Delta \leq B; \Delta \leq \{A, B\}}$$

$$\frac{\Delta < \neg (A \vee B)}{\Delta \leq \{\neg A, \neg B\}}$$

$$\frac{\Delta < \neg(A \wedge B)}{\Delta \leq \neg A; \Delta \leq \neg B; \Delta \leq \{\neg A, \neg B\}}$$

مشکلی که فاین با این سیستم منطقی ناسره دارد، از بحث مقاله حاضر خارج است. اما خوب است درباره این مشکل توضیحی دهم. زیرا این مشکل انگیزه‌ای است برای این که فاین سراغ سیستم منطقی دیگری برود که در بخش آتی به آن خواهیم پرداخت.

فاین در مقاله «منطق سره ابتنا» سمتیکی برای سیستم استنتاجی معرفی شده تنظیم می‌کند و نشان می‌دهد که این سیستم استنتاجی نسبت به آن سمتیک صحت و تمامیت دارد (Fine 2012a). در مقاله «راهنمایی برای ابتنا» فاین همان سمتیک را برای منطق ناسره گسترش می‌دهد (Fine 2012b). اما این گسترش مشکلی مهم دارد: منطق ناسره ابتنا نسبت به این سمتیک ناسره صحیح نیست. فارغ از جزئیات، مثال نقض سراسستی هست. در سیستم استنتاجی منطق ناسره ابتنا که معرفی شد، $A < A \wedge A$ یک قضیه است. اما در سمتیکی که فاین تنظیم کرده است، این جمله نمی‌تواند صادق باشد، بلکه صرفاً $A \leq A \wedge A$ صادق است. به این سبب است که برنامه پژوهشی فاین هنوز ناتمام است. در حقیقت، هنوز سمتیک مناسبی برای منطق ناسره ابتنا معرفی نشده است. دروست و فاین در مقاله «سمتیکی برای منطق ناسره ابتنا» قصد دارند چنین نقیصه‌ای را برطرف کنند (deRosset and Fine 2023).

فارغ از این انگیزه سمتیکی که دروست و فاین را به سمت سمتیک جدیدی سوق داده است، از نگاه من، مشکلات نظریه‌برهانی‌ای نیز در این منطق ناسره ابتنا هست که از ابتدا در منطق سره ابتنا نبوده است. به یاد آوریم که در منطق سره ابتنا، رابطه استنتاج منطقی رابطه‌ای میان مجموعه‌ای از اظهارهای ابتنایی و یک اظهار ابتنایی است. این تعریف در منطق ناسره ابتنا که معرفی شده است، نقض می‌شود: رابطه استنتاج منطقی رابطه‌ای میان مجموعه‌ای از اظهارهای ابتنایی و مجموعه دیگری از اظهارهای ابتنایی است. در حقیقت، رابطه استنتاج منطقی یک رابطه چندنتیجه است و نه صرفاً یک رابطه تک‌نتیجه. این گسترش در معنای رابطه استنتاج منطقی، به خودی خود، ایرادی ندارد، اما وقتی چنین گسترشی در معنای استنتاج داده می‌شود، باید قواعد استنتاج نیز متناظر با این مفهوم جدید از استنتاج گسترش یابند. این کاری است که فاین در مقاله «راهنمایی برای ابتنا» به هیچ وجه به آن نمی‌پردازد.

مسئله دیگر در نظریه برهان منطق ناسره ابتنا که در بالا معرفی شد، افزودن یک معنای جدید برای ابتناست: ابتنای توزیعی. دقت شود که اگرچه ابتنای توزیعی در فرانظریه منطق بر پایه ابتنا تعریف شده است، در خود زبان موضوعی این عملگر تعریف نشده در نظر گرفته می‌شود. اگر قرار باشد که عملگرهای ابتنای توزیعی متفاوت از چهار عملگر ابتنا باشند و پایه

در نظر گرفته شوند، لازم است که برای آن‌ها قاعده‌های استنتاج مجزایی تنظیم شود. اما فاین در مقاله یادشده هیچ اشاره‌ای به این نقیصه نمی‌کند، چه رسد به این‌که راهی برای حل آن پیشنهاد دهد.

با این حال، اگرچه انگیزهٔ دروست و فاین در مقاله «سمتیکی برای منطق ناسرهٔ ابتدا» کاملاً سمتیکی است، در این مقاله آن‌ها اصلاحاتی در سیستم استنتاجی منطق ناسرهٔ ابتدا اعمال کرده‌اند. البته دروست و فاین اشاره‌ای به مشکلات نظریه‌برهانی یادشده نکرده‌اند، بلکه اعمال این اصلاحات برای هدف سمتیکی‌ای که در پیش داشته‌اند ناگزیر بوده است. به هر ترتیب، برای این‌که دریابیم که این اصلاحات جزئی چگونه به مشکلات یادشده مربوط است و بتوانیم میزان موفقیت آن‌ها را ارزیابی کنیم، اجازه دهید تا وارد بخش بعدی شویم و این منطق را معرفی کنیم.

۳. منطق ناسرهٔ دروست و فاین

– منطق ناسرهٔ GG

دروست و فاین این منطق را GG می‌نامند. من نیز چنین خواهم کرد. رابطهٔ استنتاجی این منطق، رابطه‌ای میان مجموعه‌هایی از اظهارهای استنتاجی است. همچنین مفهوم ابتدای توزیعی از زبان منطق کنار گذاشته می‌شود. در حقیقت سعی شده است تا تعریف ابتدای توزیعی که در فرانظریه بیان شده بود، در زبان موضوعی بیان شود. برای این کار لازم است که مفهوم یک پوشش برای Δ تعریف شود. $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ یک پوشش برای Δ است هرگاه $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$ در این صورت این‌که Δ مبنای توزیعی برای $\{A, B\}$ است متناظر می‌شود با این‌که پوشش $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ از Δ وجود داشته باشد که Δ_1 مبنای A و همچنین Δ_2 مبنای B باشد. حالات دیگر ابتدای توزیعی (یعنی برای مجموعه‌های با بیش از دو عضو) در قواعد استنتاجی نیاز نیستند. از این رو، همین تعریف برای تنظیم سیستم استنتاجی کفایت خواهد کرد.

بنا بر تعریف دروست و فاین، رابطهٔ استنتاجی که با نماد $\Vdash$ نشان داده می‌شود، رابطه‌ای است میان مجموعه‌های متناهی از اظهارهای ابتدایی که به طور استقرایی در شرایط زیر صدق کند (دسته‌بندی شرایط و نام‌گذاری آن‌ها از مقالهٔ اصلی است):

Structural Rules

$$THINNING \frac{S \Vdash T}{S; S' \Vdash T; T'}$$

$$SNIP \frac{S \Vdash T; \alpha \quad \alpha; S' \Vdash T'}{S; S' \Vdash T; T'}$$

The Pure Logic of Ground

<i>Identity</i>	$\alpha \Vdash \alpha$	
<i>Subsumption</i>	$A, \Gamma \leq B \Vdash A \leq B$	$A, \Gamma < B \Vdash A < B$
	$\Gamma < A \Vdash \Gamma \leq A$	$A < B \Vdash A \leq B$
<i>Transitivity</i>	$A \leq B; B \leq C \Vdash A \leq C$	$A \leq B; B < C \Vdash A < C$
<i>Irreversibility</i>	$A \leq B \Vdash A < B; B \leq A$	
<i>Reflexivity</i>	$\Vdash A \leq A$	
<i>Non – circularity</i>	$A < A \Vdash$	
<i>Cut</i>	$\Gamma \leq A; A, \Delta \leq B \Vdash \Gamma, \Delta \leq B$	
<i>Reverse subsumption</i>	$A_1, \dots, A_n \leq B; A_1 < B; \dots; A_n < B \Vdash A_1, \dots, A_n < B$	

Introduction Rules

- $\Vdash A < \neg\neg A$
- $\Vdash A/B < A \vee B$
- $\Vdash A, B < A \wedge B$
- $\Vdash \neg A/\neg B < \neg(A \wedge B)$
- $\Vdash \neg A, \neg B < \neg(A \vee B)$

Elimination Rules

- $\Gamma < \neg\neg A \Vdash \Gamma \leq A$
- $\Gamma < A \vee B \Vdash \Gamma \leq A; \Gamma \leq B; \Gamma < A \wedge B$

$$\Gamma < A \wedge B \Vdash \Gamma_1 \leq A / \Gamma'_1 \leq B; \dots; \Gamma_k \leq A / \Gamma'_k \leq B$$

$$\Gamma < A \wedge B \Vdash \Gamma_1 \leq A; \Gamma'_1 \leq B \quad | \dots | \Gamma_k \leq A; \Gamma'_k \leq B$$

$$\Gamma < \neg(A \vee B) \Vdash \Gamma_1 \leq \neg A; \Gamma'_1 \leq \neg B \quad | \dots | \Gamma_k \leq \neg A; \Gamma'_k \leq \neg B$$

در دو قاعده اخیر $\langle \Gamma_1, \Gamma'_1 \rangle, \dots, \langle \Gamma_k, \Gamma'_k \rangle$ همه پوشش های مجموعه Γ را در بر می گیرد. دقت شود که چون Γ متناهی است، تعداد این پوشش ها نیز متناهی خواهد بود و از این رو، تعداد قاعده هایی که تنظیم شده است متناهی خواهند بود. همچنین «|» به معنای انفصال میان مجموعه هایی است که میان آن ها قرار گرفته است. به این ترتیب، دروست و فاین یک مفهوم استنتاج را بر اساس تعریفی بازگشتی تنظیم کرده اند که رابطه ای است میان مجموعه هایی از اظهارهای ابتدایی.

اجازه دهید ببینیم که آیا این اصطلاحات در سیستم استنتاجی مشکلاتی که در بخش پیشین گفته شد را حل می کند یا خیر. به نظر می رسد که تاحدی چنین باشد. اولاً در این سیستم استنتاجی صراحتاً رابطه استنتاج منطقی رابطه های چند به چند تعریف شده است و برخی ویژگی ها برای آن در نظر گرفته شده است. مشخصاً قاعده های ساختاری SNIP و THINNING چنین وظیفه ای به عهده دارند. ثانیاً در زبان این سیستم استنتاجی سخنی از ابتدای توزیعی نیست. از این رو، مشکلی که به ابتدای توزیعی و نامشخص بودن قاعده های استنتاج آن مربوط بود، منحل شده است.

– مشکلات GG

اما همه چیز این اندازه سرراست نیست. اجازه دهید که با یک پرسش آغاز کنم. در تعریف استقرایی استنتاج سیستم GG، یک رابطه استنتاج دیگر نیز ظاهر شد است که تعریفی برای آن داده نشده است: مشخصاً خط افقی که در قاعده های SNIP و THINNING ظاهر شده است. سوال این است که این خط افقی چه معنایی دارد؟ بدون داشتن معنای روشنی برای آن، نمی توان مدعی شد که مفهوم استنتاج در سیستم GG تعریف شده است. یک پیشنهاد می تواند این باشد که این خط افقی صرفاً بیان صوری معنای «اگر ... آنگاه» در زبان طبیعی است. به این ترتیب، خوانش قاعده های یادشده از این قرار است:

$$\text{SNIP: اگر } S \Vdash T; \alpha \text{ آنگاه } S' \Vdash T'; \text{ داریم } S; S' \Vdash T; T'$$

$$\text{THINNING: اگر } S \Vdash T \text{ آنگاه } S \Vdash T; T'; \text{ داریم } S; S' \Vdash T; T'$$

اما اگر چنین باشد تعریف استنتاج در سیستم GG بخشی غیرصوری خواهد داشت. عجیب است که سیستمی استنتاجی صوری بخش مهمی از معنای خود را از مفاهیم غیرصوری اخذ کرده باشد. با این حال در ادامه فرض می‌کنم که این مشکل به نحوی قابل حل باشد، زیرا این تمام مشکل یا حتی مهم‌ترین مشکل در این سیستم استنتاجی نیست.

در دو قاعده آخر از قاعده‌های حذف، مفهوم انفصال میان مجموعه‌ها، یعنی «|»، وارد تعریف شده است. ابتدا دقت شود که این انفصال همان «;» نیست که در بخش پیشین معرفی شده و در این جا نیز به کار گرفته شده است. «;» میان اظهارهای ابتدایی ظاهر می‌شود اما «|» میان مجموعه‌هایی از اظهارهای ابتدایی. به این خاطر، ساختار قاعده‌های اخیر $S \Vdash T$ است و نه $S \Vdash T$. مسئله این است که این ساختار جدید چیست؟

دروست و فاین توضیحی سمتیکی درباره چستی $|T_1| \dots |T_n$ و $|T_1| \dots |T_n$ با $S \Vdash T$ داده‌اند. فرض کنیم که سمتیکی در دست است که در آن صدق و کذب یک اظهار ابتدایی تعریف شده است. گوییم یک $S \Vdash T$ صادق است هرگاه اگر همه اعضای S صادق باشند آنگاه دست‌کم یکی از اعضای T صادق باشند. تا این جا درست و فاین تعریفی استاندارد از صدق یک استنتاج چندنتیجه‌ای را مفروض گرفته‌اند: بر طبق تفسیر استاندارد یک استنتاج چندنتیجه‌ای در مقدمات عطفی خوانده می‌شود و در نتیجه فصلی.

اما تعریف $|T_1| \dots |T_n$ متفاوت است. $S \Vdash |T_1| \dots |T_n$ صادق است هرگاه اگر همه اعضای S صادق باشند آنگاه برای دست‌کم یک i ، همه اعضای T_i صادق هستند. یعنی اگرچه «|» معنایی فصلی دارد اما مجموعه‌هایی که میان آن‌ها قرار می‌گیرد خوانشی عطفی دارند. همین نشان می‌دهد که معنای $|T_1| \dots |T_n$ و $S \Vdash T$ متفاوت است.

اما ممکن است تصور شود که بتوان $|T_1| \dots |T_n$ را بر حسب $S \Vdash T$ تعریف کرد. دلیلی خوبی در دست است که چنین تعریفی امکان ندارد. فرض کنیم که در $|T_1| \dots |T_n$ داشته باشیم $n = 1$. در این صورت به ساختاری شبیه به $S \Vdash T_1$ می‌رسیم. اما ظاهر این ساختار نباید ما را فریب دهد. این همان ساختار $S \Vdash T$ که پیش از این تعریف شده است، نیست. دلیل این تفاوت این است که در اولی مجموعه نتیجه عطفی تعریف شده است و در دومی این مجموعه فصلی فهمیده شد است. به این ترتیب، نمی‌توان ساختار جدید $|T_1| \dots |T_n$ را بر حسب ساختار پیشین یعنی $S \Vdash T$ تعریف کرد.

اما این چه اشکالی دارد؟ ظاهراً این طور است که ساختار جدیدی در زبان وارد شده است. اما دست‌کم دو مشکل اینجا هست. نخست این که این ساختار جدید در تعریف استنتاج نقش

بازی کرده است. به این سبب، اگر به لحاظ نظریه برهانی این ساختار تعریف روشنی نداشته باشد، هنوز تعریف روشنی از استنتاج در سیستم GG به دست داده نشده است.

مشکل دوم این است که این ساختار قواعد استنتاج به اندازه کافی روشنی ندارد. مثلاً در قاعده‌های استنتاج مشخص شده است که $T_1 \dots T_n$ چگونه در نتیجه $\vdash$ قرار می‌گیرد. اما هیچ قاعده‌ای به ما نمی‌گوید که $T_1 \dots T_n$ چگونه در مقدمات یک استنتاج ظاهر می‌شود. هم‌چنین در قاعده‌های ساختاری نیز هیچ اثری از $T_1 \dots T_n$ مشاهده نمی‌شود. بنابراین، سیستم منطقی GG هنوز یک سیستم استنتاجی کامل نیست.

به خاطر بیاوریم که سیستم منطقی ناسره ابتدای فاین که در بخش پیشین معرفی شد، مشکل مشابهی داشته است: ابتدای توزیعی مفهومی پایه در این سیستم استنتاجی بوده است بدون این‌که مشخص باشد دقیقاً چه قواعد استنتاجی بر آن حاکم است. در GG به برکت مفهوم پوشش، اثری از ابتدای توزیعی نیست اما مفهوم پایه دیگری در اثر همین مفهوم پوشش وارد سیستم شده است که همان مشکلات را به بار می‌آورد.

مرتبط با این مشکلات، مسئله دیگری نیز رخ می‌دهد. فرض کنیم که قرار است استنتاجی داشته باشیم که نتیجه‌اش $T_1 \dots T_n$ است. فارغ از این‌که این استنتاج بر چه مفروضاتی استوار است، هیچ‌یک از قاعده‌های استنتاج سیستم GG به کار نمی‌آیند. تنها می‌توان همان قاعده‌ای را به کار گرفت که نتیجه‌اش در تعریف استنتاج همان $T_1 \dots T_n$ بوده است. دلیل این امر این است که هیچ‌کدام از قاعده‌های استنتاج قاعده‌ای برای معرفی این معنای انفصالی ندارند و نیز هیچ‌کدام از قاعده‌های استنتاج مشخص نمی‌کنند که از این معنای انفصالی چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود. بنابراین، تنها یک حالت باقی می‌ماند: این‌که $T_1 \dots T_n$ را صرفاً با قاعده خودش به دست آوریم. به عبارتی دیگر، هیچ استنتاج نابدیهی برای $T_1 \dots T_n$ در سیستم استنتاجی GG یافت نمی‌شود. حاصل این‌که سیستم استنتاجی GG سیستمی نیست که در عمل بتوان از آن برای استنتاج نتایج نابدیهی در خصوص $T_1 \dots T_n$ استفاده کرد. و این یعنی این سیستم استنتاجی به لحاظ عملی ناکارآمد است.

نتیجه‌ای که از این مشکلات می‌گیریم از این قرار است: دروست و فاین برای اهداف سمتیکی سیستم منطقی‌ای طراحی کرده‌اند که اصلاحاتی بر سیستم پیشین فاین در خود دارد. برای اهداف سمتیکی (صحت و تمامیت) این سیستم مناسب است، چه این‌که ایشان این قضایا را اثبات کرده‌اند. اما سیستم منطقی معرفی شده یعنی GG نسبت به سیستم اولیه فاین به

لحاظ نظریه برهانی وضعیت بهتری ندارد. این سیستم استنتاجی نیز نظیر سیستم پیشین ناکارآمد است و با معیارهای متعارف سیستم‌های نظریه برهان هم‌خوانی ندارد.

۴. به سوی یک سیستم استنتاجی مناسب

در این بخش یک حساب رشته سطح بالاتر (higher-order sequent calculus) ^۴ با نام HGG معرفی می‌کنم که اولاً به لحاظ سمیاتی معادل با سیستم ناسره GG است و ثانیاً مشکلاتی که GG دارد در آن مرتفع شده است.

تعاریف ابتدایی از این قرار هستند. هر اظهار ابتدایی را یک رشته نامیم. لذا این سیستم نظیر سیستم اولیه منطق سره ابتدای فاین دارای چهار رشته پایه است. یک سیستم حساب رشته سطح بالاتر از تعدادی قاعده استنتاج و تعدادی اصل موضوع تشکیل شده است. هر اصل موضوع یک رشته سطح بالاتر است و هر قاعده استنتاج رابطه‌ای است میان تعدادی از رشته‌های سطح بالاتر و یک رشته سطح بالاتر. استنتاج به طور معمول بر اساس درختی از قاعده‌های استنتاج تعریف می‌شود. دقت شود که رابطه استنتاج (و نیز قاعده استنتاج) در این سیستم استنتاجی رابطه‌ای چند به یک است. یک سیستم حساب رشته را سطح بالاتر گوئیم هرگاه رابطه استنتاج آن رابطه‌ای میان رشته‌های سطح بالاتر باشد. اگر Γ و Δ مجموعه‌هایی از رشته‌ها باشند آنگاه $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یک رشته سطح بالاتر است. از $S, T, \dots$ برای رشته‌های سطح بالاتر استفاده می‌کنم. یک قاعده استنتاج در حالت کلی با n مقدمه به فرم زیر است.

$$\frac{S_1 \dots S_n}{S}$$

حال می‌توانیم سانتتاجی حساب رشته سطح بالاتر HGG را تعریف کرد. سیستم حساب رشته سطح بالاتر HGG از قاعده‌ها و اصول موضوع زیر تشکیل شده است.

Axioms

Identity

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

Subsumption

$$A, \Gamma \leq B \Rightarrow A \leq B$$

$$A, \Gamma < B \Rightarrow A < B$$

$$\Gamma < A \Rightarrow \Gamma \leq A$$

$$A < B \Rightarrow A \leq B$$

Transitivity

$$A \leq B; B \leq C \Rightarrow A \leq C$$

$$A \leq B; B < C \Rightarrow A < C$$

حساب رشته سطح بالاتر برای منطق ناسرهٔ ابتدای دروست و فاین (داود حسینی) ۲۳۵

$$\text{Irreversibility} \quad A \leq B \Rightarrow A < B; B \leq A$$

$$\text{Reflexivity} \quad \Rightarrow A \leq A$$

$$\text{Non - circularity} \quad A < A \Rightarrow$$

$$\text{Cut - axiom} \quad \Gamma \leq A; A, \Delta \leq B \Rightarrow \Gamma, \Delta \leq B$$

$$\text{Reverse subsumption} \quad A_1, \dots, A_n \leq B; A_1 < B; \dots; A_n < B \Rightarrow A_1, \dots, A_n < B$$

$$\Rightarrow A < \neg\neg A \quad \Gamma < \neg\neg A \Rightarrow \Gamma \leq A$$

$$\Rightarrow A/B < A \vee B \quad \Gamma < A \vee B \Rightarrow \Gamma \leq A; \Gamma \leq B; \Gamma < A \wedge B$$

$$\Rightarrow \neg A / \neg B < \neg(A \wedge B) \quad \Gamma < \neg(A \wedge B) \Rightarrow \Gamma \leq \neg A; \Gamma \leq \neg B; \Gamma < \neg(A \vee B)$$

$$\Rightarrow A, B < A \wedge B \quad \Gamma < A \wedge B \Rightarrow \Gamma_1 \leq A / \Gamma'_1 \leq B; \dots; \Gamma_k \leq A / \Gamma'_k \leq B$$

$$\Rightarrow \neg A, \neg B < \neg(A \vee B) \quad \Gamma < \neg(A \vee B) \Rightarrow \Gamma_1 \leq \neg A / \Gamma'_1 \leq \neg B; \dots; \Gamma_k \leq \neg A / \Gamma'_k \leq \neg B$$

Rules

$$\frac{S \Rightarrow T}{S, \alpha \Rightarrow T} \text{ Weakening}$$

$$\frac{S \Rightarrow T}{S \Rightarrow T; \alpha} \text{ Weakening}$$

$$\frac{S \Rightarrow T; \alpha \quad \alpha; S' \Rightarrow T'}{S; S' \Rightarrow T; T'} \text{ Cut - rule}$$

در خصوص این سیستم استنتاجی نکاتی نیاز به توضیح دارد تا نشان دهد که این سیستم معادل است با GG. نخست این که جز دو اصل اخیر، سایر اصول تناظر سراسری با قاعده‌های سیستم استنتاجی GG دارند. دوم این که در دو اصل اخیر، نظیر قاعده‌های مشابه در سیستم GG، زنجیرهٔ $\langle \Gamma_1, \Gamma'_1 \rangle, \dots, \langle \Gamma_k, \Gamma'_k \rangle$ همهٔ پوشش‌های مجموعهٔ Γ را در بر می‌گیرد. سوم این که قاعده‌های تضعیف (Weakening) در سیستم فعلی به شکل استانداردتری نوشته شده‌اند. البته این نسخه از قاعده‌ها معادل قاعدهٔ THINNING در سیستم GG هستند، زیرا مجموعه‌های رشته‌ها (اظهارات ابتدایی) همواره متناهی است.

همهٔ این تشابهات نشان می‌دهد که تنها تفاوت بنیادین در این دو سیستم حضور دو قاعدهٔ

$$\Gamma < A \wedge B \Rightarrow \Gamma_1 \leq A / \Gamma'_1 \leq B; \dots; \Gamma_k \leq A / \Gamma'_k \leq B$$

$$\Gamma < \neg(A \vee B) \Rightarrow \Gamma_1 \leq \neg A / \Gamma'_1 \leq \neg B; \dots; \Gamma_k \leq \neg A / \Gamma'_k \leq \neg B$$

در سیستم HGG به جای دو قاعده

$$\Gamma < A \wedge B \Vdash \Gamma_1 \leq A; \Gamma'_1 \leq B \quad | \dots | \Gamma_k \leq A; \Gamma'_k \leq B$$

$$\Gamma < \neg(A \vee B) \Vdash \Gamma_1 \leq \neg A; \Gamma'_1 \leq \neg B \quad | \dots | \Gamma_k \leq \neg A; \Gamma'_k \leq \neg B$$

در سیستم GG است. اکنون نشان می‌دهم که این دو سیستم معادل هستند.

مانند قبل فرض کنیم سمت‌یکی، نظیر آنچه دروست و فاین برای GG تدارک دیده‌اند، در دست است و تعریف صدق یک اظهار ابتدایی (یعنی یک رشته) معین شده است. حال فرض کنیم که $S \Vdash T_1 | \dots | T_n$ صادق است. در این صورت برای یک m داریم که اگر همه اعضای S صادق باشند آنگاه همه اعضای T_m صادق هستند. در این صورت اگر $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ چنان باشد که برای هر i داشته باشیم $\alpha_i \in T_i$ آنگاه $\alpha_1, \dots, \alpha_n \Vdash$ کبرایهر زنجیره $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ صادق خواهد بود. بالعکس اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n \Vdash$ کبرایهر زنجیره $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ صادق باشد روشن است که دست‌کم برای یک m باید چنان باشد که اگر همه اعضای S صادق باشند آنگاه همه اعضای T_m صادق هستند. این یعنی $S \Vdash T_1 | \dots | T_n$ صادق است. بنابراین، دوشروطی زیر برقرار است:

$S \Vdash T_1 | \dots | T_n$ صادق است اگر و تنها اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n \Vdash$ کبرایهر زنجیره $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ صادق باشد.

حال دقت کنیم که $S \Vdash \alpha_1, \dots, \alpha_n$ متناظر است با رشته سطح بالاتر $S \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$ در سیستم استنتاجی HGG. بنابراین دو شرطی زیر نیز برقرار خواهد بود:

$S \Vdash T_1 | \dots | T_n$ صادق است اگر و تنها اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n \Rightarrow$ کبرایهر زنجیره $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ صادق باشد.

اما تفاوت زوج قاعده سیستم GG و اصول متناظر در HGG دقیقاً در همین است. در سیستم GG در قاعده‌ها از ساختار $S \Vdash T_1 | \dots | T_n$ استفاده شده است و در سیستم HGG به جای آن از رده اصل‌های به شکل $S \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$ هم‌ارزی پیشین در کنار این که سایر قاعده‌ها و اصل‌های دو سیستم استنتاجی متناظر هستند نشان می‌دهد که سیستم استنتاجی HGG نسبت به همان سمت‌یکی که GG نسبت به آن صحت و تمامیت دارد، صحیح و تمام است. حاصل این که مدعای نخست این بخش به اثبات می‌رسد: سیستم استنتاجی HGG به لحاظ سمت‌یکی معادل است با سیستم استنتاجی GG.

حال زمان آن است که نشان دهم که مشکلات نظریه‌برهانی‌ای که GG با آن دست به گریبان بوده است، در سیستم HGG رخ نمی‌دهد. یادآوری می‌کنم که مشکلات از این قرار بوده‌اند: نخست تعریف نادقیق مفهوم استنتاج، دوم پایه بودن مفهوم انفصال میان مجموعه‌ها بدون این که قواعد استنتاج روشنی داشته باشند، و سوم این که این سیستم استنتاجی در عمل بی‌کاربرد است. برای این که ببینیم که این مشکلات در سیستم HGG رخ نمی‌دهد به برخی ویژگی‌های سیستم HGG باید توجه دهم. نخست این که در این سیستم استنتاجی صرفاً یک نماد برای استنتاج حضور دارد و آن همان خط افقی حاضر در قاعده‌هاست. این مفهوم استنتاج نیز به روشی کاملاً متعارف (درخت متشکل از قاعده‌ها) تعریف شده است. دوم این که در این سیستم استنتاجی هیچ نشانی از مفهوم پایه‌ای جز مفهوم رشته و رشته سطح بالاتر نیست. این مفاهیم نیز تعریف روشن و دقیقی دارند. بیش از این، همهٔ قاعده‌ها و اصل‌ها برای رشته‌های سطح بالاتر نوشته شده‌اند. همهٔ این ویژگی‌ها روشن می‌کند که اولاً سیستم استنتاجی HGG تعریف دقیقی دارد، ثانیاً مفهوم‌های پایهٔ آن قواعد روشنی دارند، و ثالثاً استنتاج در این سیستم به اندازهٔ هر سیستم استنتاجی دیگری که تاریخ منطق قرن بیستم بر اساس رشته‌ها تنظیم شده است، عملی است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم استنتاجی دروست و فاین برای منطق ناسرهٔ ابتدا را همراه با ریشه‌های اولیهٔ آن معرفی کردم. نشان دادم که مشکلات نظریه‌برهانی‌ای که در این سیستم استنتاجی هست نسخهٔ دیگری از مشکلاتی است که در سیستم استنتاجی‌ای که این سیستم اصلاح شدهٔ آن است وجود داشته‌اند و در این سیستم نیز باقی مانده‌اند. به این سبب، اگرچه سیستم استنتاجی دروست و فاین برای اهداف سمتیکی مناسب است، با معیارهای نظریه‌برهانی سیستمی نامناسب است. برای رفع این نقیصه در نظریهٔ برهان این منطق، سیستم استنتاجی‌ای پیشنهاد کردم که یک حساب رشته سطح بالاتر است. نشان دادم که این حساب رشته سطح بالاتر به لحاظ سمتیکی با سیستم دروست و فاین معادل است اما هیچ‌یک از مشکلات نظریه‌برهانی آن را ندارد.

پی‌نوشت‌ها

۱. برای یک مرور مقدماتی ببینید Raven 2020. نیز برای برخی بحث‌های دیگر در خصوص این منطق ببینید Hosseini 2022a, 2022b.
۲. در این مقاله بحث را به منطق گزاره‌های متناهیانه محدود خواهم کرد.
۳. برای بحثی در نحوه تنظیم قاعده‌ها در سیستم‌های چندارزشی، ببینید: Hosseini 2024.
۴. سیستم‌های حساب رشته سطح بالاتر برای نخستین بار در Došen 1985 برای منطق‌های موجهاتی به کار گرفته شده‌اند.

کتاب‌نامه

- Correia, F. (2014). Logical Grounds. *The Review of Symbolic Logic*, 7(1), 31–59.
- Correia, F. (2017). An Impure Logic of Representational Grounding. *Journal of Philosophical Logic*, 46(5), 507–538.
- Correia, F. (2023). A New Semantic Framework for the Logic of Worldly Grounding (and Beyond). In F. L. G. Faroldi & F. Van De Putte (Eds.), *Kit Fine on Truthmakers, Relevance, and Non-classical Logic* (Vol. 26, pp. 573–600). Springer International Publishing.
- deRosset, L., & Fine, K. (2023). A Semantics for the Impure Logic of Ground. *Journal of Philosophical Logic*, 52(2), 415–493.
- Došen, K. (1985). Sequent-systems for modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 50:149–159.
- Fine, K. (2012a). The Pure Logic of Ground. *The Review of Symbolic Logic*, 5(1), 1–25.
- Fine, K. (2012b). Guide to ground. In F. Correia & B. Schneider (Eds.), *Metaphysical Grounding* (1st ed., pp. 37–80). Cambridge University Press.
- Hosseini D. (2022a). A Note on Fine's Logic of Ground. *Philosophical Thought*. 2(1):1-8.
- Hosseini, D. (2022b). On the Interdefinability of Weak and Strict Full Ground, *Research in Logic*, 13(2), 71-85.
- Hosseini, D. (2024). *Proof Theory; Sequent Calculus: a Framework for Meaning and Logic*. SAMT.
- Lovett, A. (2020). The logic of ground. *Journal of Philosophical Logic*, 49(1), 13–49.
- Poggioli, F. (2018). On constructing a logic for the notion of complete and immediate formal grounding. *Synthese*, 195(3), 1231–1254.
- Poggioli, F. (2024). *(Conceptual) Explanations in logic*.
- Raven, M. J. (Ed.). (2020). *The Routledge handbook of metaphysical grounding*. Routledge Taylor & Francis Group.