

The problem of applicability of mathematics in natural sciences

Ali Seyedi*

Abstract

The wide application of mathematics in science raises the challenge of why and how mathematics is so effective and applicable in natural sciences. The explanation of this problem, especially after Wigner's famous article entitled "Unreasonable Effectiveness of Mathematics", has fascinated many scientists and philosophers of science. In this article, we examine different recent approaches to this issue. In addition, we show how metaphysical assumptions and different understandings of mathematics and physics have been involved in the formulation of this problem and the answers given to it. This review can help to a deeper understanding of the problem.

Keywords: effectiveness of mathematics in science, applicability of mathematics, relationship between physics and mathematics, Eugene Wigner.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

* Phd student of Philosophy of Science, Research Institute of Human Sciences and Cultural Studies,
asdehaghani@gmail.com

Date received: 16/02/2023, Date of acceptance: 14/05/2023





پروہشگاہ علوم انسانی و مطالعات فرہنگی
پرتال جامع علوم انسانی

مسئله کاربردپذیری ریاضیات در علوم طبیعی

علی سیدی دهاقانی*

چکیده

کاربرد گسترده‌ی ریاضیات در علوم، این چالش را مطرح می‌کند که چرا و چگونه ریاضیات تا بدین حد در علوم طبیعی موثر و کاربردپذیر است. توضیح این مسئله به ویژه پس از مقاله معروف ویگنر تحت عنوان «اثربخشی نامعقول ریاضیات»، بسیاری از دانشمندان و فلاسفه علم را مجذوب خود کرده است. در این مقاله رویکردهای مختلف اخیر به این مسئله را بررسی می‌نماییم. به علاوه، نشان می‌دهیم که چگونه پیش‌فرض‌های متافیزیکی و تلقی‌های متفاوت از ریاضیات و فیزیک در صورت بندی این مسئله و پاسخهایی که به آن داده شده دخالت داشته است. این بررسی می‌تواند تا حدی به فهم عمیق‌تر مسئله کمک کند.

کلیدواژه‌ها: اثربخشی ریاضیات در علوم، کاربردپذیری ریاضیات، ارتباط فیزیک و ریاضیات، یوجین ویگنر.

۱. مقدمه

آلبرت اینشتین در سال ۱۹۲۱ در سخنرانی اش در آکادمی علوم پروس در برلین، این سؤال را مطرح می‌کند: «چرا ریاضیات به شکل تحسین‌برانگیزی برای توصیف واقعیت مناسب است؟ ... در تمام اعصار، این معما ذهن‌های پرسشگر را به تأمل واداشته است» (Bonheure et al., 2019). یوجین ویگنر (Eugene P. Wigner) فیزیکدان مجاری-آمریکایی (۱۹۰۲-۱۹۹۵) و برنده نوبل فیزیک ۱۹۶۳، در مقاله‌ای با عنوان "اثربخشی نامعقول ریاضیات در علوم طبیعی" (The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences) بخش‌هایی از

* دانشجوی دکتری، فلسفه علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، asdehaghani@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۰۸، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۰۵



ریاضیات را مانند "حساب دیفرانسیل و انتگرال" مولودِ نیازهای فیزیک می‌داند، ولی بخش‌های دیگری از ریاضیات مثل "ماتریسها" و یا "اعداد مختلط" را که برای پاسخگویی به مشکلاتِ درونی ریاضیات ایجاد شده‌اند و به ناگهان کاربرد وسیعی در صورت‌بندی ماتریسی از مکانیک کوانتومی پیدا کرده‌اند، شگفت‌آور می‌داند. اثربخشی این بخش از ریاضیات در فیزیک، ویگنر را به تعجب واداشته است و کاربردپذیری آن در فیزیک را امری نامعقول و چیزی شبیه معجزه می‌داند (Wigner, 1960).

پس از انتشار این مقاله، مسئله کاربردپذیری ریاضیات، مورد توجه دوباره واقع گردید و از آن زمان تاکنون ادبیات فلسفی زیادی پیرامون این موضوع شکل گرفته است. دانشمندان و فلاسفه زیادی تلاش نموده‌اند که این مسئله را صورت‌بندی کنند و به آن پاسخ مناسبی بدهند (Steiner, 1995; Colyvan, 2001; Baker, 2011; Ye, 2010; Lützen, 2011; Islami, 2016; ...). هدف مقاله حاضر این است که از رهگذر مرور این تلاش‌ها نشان دهد مسئله کاربردپذیری صورت‌بندی واحدی ندارد و به همین دلیل منجر به پاسخ‌های متعددی نیز شده است. به علاوه، استدلال می‌کنیم که این صورت‌بندی‌های متفاوت، ناشی از پیش فرضهای فلسفی و نگرشهای متفاوتی است که نسبت به ریاضیات و فیزیک وجود دارد.

ساختار این مقاله بدین شرح است: بخش دوم به بیان صورت‌بندی اولیه مسئله که توسط خود ویگنر در مقاله سال ۱۹۶۰ ارائه شده است می‌پردازد و پس از آن قالبهای فلسفی صورت‌بندی مسئله آمده است. در بخش سوم به بررسی مشارکتهای شاخص در این زمینه می‌پردازد. بخش چهارم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲. اثربخشی ریاضیات در علوم طبیعی به مثابه امری نامعقول

ویگنر در مقاله تأثیرگذاری که در سال ۱۹۶۰ نوشت، کاربردپذیری ریاضیات در علوم طبیعی را شگفت‌آور خواند، چیزی که نمی‌توان توضیح معقولی برای آن ارائه کرد. به نظر او، ریاضیات علم عملیات ماهرانه (Skillful Operations) با مفاهیم و قواعدی است که فقط برای کاربرد در خود ریاضیات ابداع شده‌اند. به نظر ویگنر، هر چند بیشتر مفاهیم پیشرفته ریاضی، مانند اعداد مختلط، جبر، عملگرهای خطی، مجموعه‌های بورل (Borel Sets) و... مفاهیم و ابزارهای مناسبی است که ریاضیدان می‌تواند در آنها نبوغ و حس زیبایی‌شناختیِ صوری خود را نشان دهد، اما به نظر نمی‌رسد که چیزی در تجربه متناظر با موجوداتی از قبیل اعداد مختلط و توابع تحلیلی (Analytic functions) وجود داشته باشد (Wigner, 1960, pp. 3-4).

او سپس فیزیک را علمی تعریف می‌کند که به دنبال کشف قاعده‌مندیهایی طبیعت است که خود این قاعده‌مندیهایی ناشی از اصول ناوردا هستند. او نحوه احتمالی استفاده فیزیکدانان از ریاضیات برای تدوین قوانین طبیعت را غیرمسئولانه (Irresponsible) تعبیر می‌کند. به عبارتی فیزیکدانان از مشاهده شباهت روابطی بین دو کمیت با روابطی در ریاضیات نتیجه می‌گیرند که این رابطه همان رابطه‌ای است که در ریاضیات است. اما چنین استنتاجی صرفاً به این دلیل است که او هیچ رابطه مشابه دیگری را نمی‌شناسد. نکته مهمی که به نظر ویگنر باید به آن توجه کرد، این است که این تشبیه خام فیزیکدانان، در تعداد عجیبی از موارد منجر به توصیف دقیق و شگفت‌آور دسته‌بزرگی از پدیده‌ها می‌شود و به نظر ویگنر، این امر نشان می‌دهد که زبان ریاضی به معنای واقعی، زبان صحیحی است. ویگنر برای نشان دادن منظورش، چند نمونه ذکر می‌کند (Wigner, 1960, pp. 7-9).

اولین نمونه، فرمول جاذبه نیوتن است که تنها با اتکا به شواهد اندکی پیشنهاد شد. در این فرمول ریاضی از مشتق دوم استفاده شده است که تنها برای کسی که با ریاضیات آشنایی داشته باشد قابل درک است (Wigner, 1960, pp. 9-10). مثال دوم را از مکانیک کوانتومی ذکر می‌کند، آنجا که ماکس بورن (Max Born) متوجه شد برخی از قوانین محاسباتی ارائه شده توسط هایزنبرگ (Werner Heisenberg) از نظر صوری با قوانین محاسباتی ماتریس‌ها یکسان است. سپس بورن، جردن (Pascual Jordan) و هایزنبرگ پیشنهاد کردند که موقعیت و تکانه معادلات مکانیک کلاسیک با ماتریس‌ها جایگزین شوند. آنها قوانین مکانیک ماتریسی را برای چند مسئله بسیار ایده‌آل به کار بردند و نتایج کاملاً رضایت‌بخش بود. ولی استدلال محکمی دال بر اینکه مکانیک ماتریسی آنها در شرایط واقعی تر منجر به نتایج درست شود، وجود نداشت. اولین تلاش برای به کارگیری مکانیک آنها در یک مسئله واقعی (اتم هیدروژن) چندین ماه بعد توسط پائولی (Wolfgang Ernst Pauli) صورت گرفت و نتیجه رضایت‌بخش بود. این موفقیت قابل درک بود، زیرا در محاسبات هایزنبرگ از نظریه قدیمی اتم هیدروژن هم استفاده شده بود. اما زمانی که مکانیک ماتریسی برای اتم هلیوم یا اتم‌های سنگین‌تر که نمی‌شد قواعد هایزنبرگ^۱ را برایشان اعمال کرد، بکار برده شد، بطور ناباورانه‌ای محاسبات با داده‌های تجربی موافقت داشت (Wigner, 1960, pp. 10-11). در مثال سوم، ویگنر به این نکته اشاره می‌کند که برخی از نتایج بدست آمده از نظریه میدان کوانتومی آنچنان با تجربه همخوانی دارند که جزء دقیقترین نتایج در فیزیک به حساب می‌آیند. نمونه آن انتقال لمب^۲ در اتم هیدروژن است که نتایج تجربی تا ۱۱ رقم معنی‌دار با نظریه همخوانی داشته‌اند. نظریه انتقال لمب، نظریه‌ای در

الکترو دینامیک کوانتومی است که با محاسبات ریاضی مبتنی بر آنالیز برداری به محاسبه انرژی پتانسیل الکترون می‌پردازد و اندازه‌گیریهایی آزمایشگاهی به طور شگفت‌آوری نتایج این محاسبات را تایید می‌نماید (Wigner, 1960, p. 12). بررسی مثال‌های دیگر نشان می‌دهد که از نظر او ریاضیات و فیزیک دو دیسپلین مجزا هستند. ریاضیات از نظر او علم عملیات ماهرانه با مفاهیم و قواعدی است که ریاضیدان بطور دلخواه و اختیاری آنها را وضع می‌کند. فرآیندی صوری است که در آن، ریاضیدان توجهی به طبیعت ندارد و صرفاً معیارهای زیبایی و سازگاری مورد نظر اوست.^۳ از طرفی فیزیکدان در علم فیزیک به دنبال کشف قوانین و اصول ناوردایی جهان است. در این راه او دائماً با آزمایش و تجربه، از طبیعت بازخورد می‌گیرد و تلاش می‌کند که نظراتش را اصلاح نماید. لذا از دید او ما با دو دیسپلین متفاوت سروکار داریم. بنابراین می‌توان تلقی دیگر از مسئله کاربردپذیری را به این شکل صورت‌بندی کرد که چگونه ریاضیاتی که ریاضیدان بدون توجه به طبیعت و صرفاً با معیارهایی مانند سازگاری و زیبایی خلق می‌کند، تا این اندازه در علوم طبیعی که قرار است توصیف و تبیینی برای طبیعت ارائه کنند، موثر است؟ به نظر او این چیزی شبیه به معجزه است.

با اینکه مسئله کاربردپذیری معمولاً به نام دیگر شناخته می‌شود، ولی با بررسی ادبیات موجود به نظر می‌رسد که صورت‌بندی‌های متنوعی از این مسئله وجود دارد که لزوماً با صورت‌بندی دیگر یکسان نیست.

مارک اشتاینر (Mark Steiner) رویکردهای مختلف به این مسئله را در چهار دسته تقسیم‌بندی نموده است: رویکرد سمانتیکی، رویکرد متافیزیکی، رویکرد توصیفی، و رویکرد معرفتی (Steiner, 1995). در ادامه اجمالاً به معرفی هر کدام می‌پردازیم:

۱.۲ رویکرد سمانتیکی

مسئله سمانتیکی کاربردپذیری ریاضیات این است که در علوم طبیعی با گزاره‌هایی سر و کار داریم که ترکیبی از واژگان (Terms) ریاضی و غیرریاضی هستند و این گزاره‌ها منجر به پیش‌بینی‌های تجربی صادقی درباره طبیعت می‌شوند. اما اگر واژگان ریاضی معنای ثابتی نداشته باشند و نتوان صدق آنها را احراز کرد، چگونه این جملات نامشخص منجر به نتایج تجربی صادقی می‌شوند؟ پس باید دنبال این باشیم که چگونه می‌توان برای عبارات ریاضیاتی (مثلاً اعداد) معنای ثابتی در نظر گرفت؟ گوتلوب فرگه (Gottlob Frege) با اعتقاد به اینکه اعداد ما را به اشیاء واقعی ریاضی (در یک جهان شبه افلاطونی) ارجاع می‌دهند، ادعا کرد که این مشکل را

حل کرده است (Frege, 1988). در واقع وجود همین موجودات ریاضی عامل صدق ساز برای عبارات ریاضی در جملات علمی می‌شوند و دیگر جای تعجب نخواهد بود که از جملات صادق، نتایج صادق حاصل شود. بنابراین قضایای ریاضیاتی محض و یا قضایای ترکیبی هر دو درست هستند و در اتکای ما به ریاضیات برای پیش‌بینی‌های تجربی رازی وجود ندارد؛ چون آنچه از واقعیت، و با استدلالهای منطقی حاصل می‌شود، نیز صادق است. فرگه بدین ترتیب مسئله سمانتیکی (صادق بودن قضایای ریاضی) کاربرد حساب را حل کرد (Frege, 1988). اما اگر ما وجود اعداد و مجموعه‌ها را قبول نداشته باشیم، نیاز داریم توضیح دهیم که چگونه این مقدمات نامشخص بطور سیستماتیک منجر به نتایج صادق می‌شوند (Steiner, 1995, pp. 4-10).

۲.۲ صورت‌بندی متافیزیکی

حتی اگر مانند فرگه با فرض وجود اشیاء ریاضی در یک جهان افلاطونی یا شبه افلاطونی موافق باشیم، هنوز یک مشکل باقی می‌ماند. چگونه اشیاء ریاضی این شکاف موجود بین دو جهان افلاطونی و جهان فیزیکی را طی می‌کنند و در جهان فیزیکی موثر می‌افتند؟ این شکاف متافیزیکی چگونه پُر می‌شود؟

پاسخ فرگه این است که اشیاء ریاضی در جهان فیزیکی تاثیر نمی‌گذارند بلکه در مفاهیمی که ما برای تبیین جهان استفاده می‌کنیم موثرند (Frege, 1988). او قوانین حساب را از نوع قوانین مرتبه دوم میدانست که حاکم بر همه مفاهیم‌اند. در نگاه او موجودات ریاضی بطور مستقیم با جهان فیزیکی ارتباط ندارند بلکه آنها با مفاهیمی مرتبط‌اند که برخی از آنها برای اشیاء فیزیکی بکار می‌روند. یعنی اینکه قوانین اعداد برای اشیاء فیزیکی کاربردپذیر نیستند، آنها برای احکامی که در مورد جهان فیزیکی برقرار هستند بکار می‌روند: آنها قوانین قوانین طبیعت هستند. مثلاً اگر ما نظریه مجموعه‌ها را پایه ریاضیات بدانیم، این نظریه، به این دلیل کاربردپذیر است که اشیاء فیزیکی عضوهای این مجموعه‌ها هستند. به این ترتیب، دیگر هیچ رازآلودگی در اینجا وجود ندارد. برای کاربردپذیری تنها به رابطه بین یک شیء (Object) فیزیکی و یک شیء ریاضی نیاز داریم، که با تشخیص عضویت شیء فیزیکی در یک مجموعه قابل احراز است (Steiner, 1995, pp. 10-13).

۳.۲ رویکرد توصیفی

برای درک رویکرد توصیفی به کاربردپذیری می‌توان با این مقدمه شروع کرد که کاربرد ریاضیات در فیزیک معمولاً به دو بخش "معقول" و "رازآلود" تقسیم می‌شود. مثلاً کاربردپذیری و سودمندی عمل جمع و عمل ضرب، چیز غیرمنتظره و عجیبی نیست و می‌توان آنها را ناشی از همان الگوهای قدیمی "جمع آوری و مرتب سازی" (Gathering & Arranging) تلقی کرد که در زندگی ما جاری بوده است. ویژگی خطی بودن (Linearity) نیز مشابه اصل برهم‌نهی (Superposition) گاليله است. هنگامی که مجموعه‌ای از علل متفاوت، در سیستمی عمل میکنند، تحول آن سیستم، مجموع اثرات ناشی از هر یک از آن عللها به تنهایی است. اشتاینر این نمونه‌ها را کاربردهای معقول ریاضیات در فیزیک می‌داند (Steiner, 1995, pp. 13-15). اما مواردی وجود دارد که به نظر می‌رسد توضیح معقولی برای آنها وجود ندارد. مثلاً انتظار داریم که توضیحی برای این امر وجود داشته باشد که چرا قانون عکس مجذور فاصله در قوانین گرانش نیوتن، قانون کولن، شدت نور و... کاربرد دارد. همچنین درمکانیک سیالات، مبنای کار، معادله کوشی-ریمان است که با توابع تحلیلی (توابع دیفرانسیل‌پذیر با یک متغیر مختلط) سر و کار دارد. با استفاده از خواص صوری این تابع، تمام ویژگیهای سیال را میتوانیم به دست آوریم. اما هیچ توضیح شناخته شده‌ای برای اینکه چگونه این توابع با متغیر مختلط می‌توانند خصوصیات سیال را بخوبی توصیف کنند، وجود ندارد (Steiner, 1995, p. 16).

به عنوان نمونه دیگر، درمکانیک کوانتومی هر بردار واحد منفرد در فضای هیلبرت وضعیت و اطلاعات و ویژگیهای فیزیکی سیستم را مشخص می‌کند. اما چون ما میخواهیم که تمامی خواص فیزیکی توسط یک بردار در یک فضای هیلبرت ثبت گردد (اصل حداکثری maximality principle)^۴، برای هر ویژگی فیزیکی، مجموعه مختصات متفاوتی را در همان فضا و به همان بردار واحد مرتبط میکنیم. اصل حداکثری که با هیچ ایده فیزیکی مطابقت ندارد، منجر به دوگانه موج-ذره و اصل عدم قطعیت هایزنبرگ می‌شود. و شگفت‌آور اینکه اگر بخواهیم اطلاعاتی از بردار حالت سیستم در مورد اندازه حرکت زاویه‌ای استخراج کنیم، ضروری است که اندازه حرکت زاویه‌ای کوانتیزه باشد. بنظر می‌رسد که فرمالیسم فضای هیلبرت با طبیعت مطابقت دارد و نقش آن عمیقتر از توصیف یک مفهوم است (Steiner, 1995, p. 20). مثال دیگر، کاربرد نظریه گروه در فیزیک است. گروه su_3 را که شامل ماتریسهای مختلط سه بعدی است که هیچ تبدیل فضازمانی با آنها مطابقت ندارد، ریاضیدانان برای طبقه‌بندی گروه‌های پیوسته توسعه دادند. اما بعداً در تئوری کوراکها و دسته‌بندی هادرونها بکار رفت و کاربرد آن بسیار

فراتر از انتظار ما بوده است (Steiner, 1995, pp. 23-24). در موارد اینچنینی مسئله توصیفی کاربردپذیری این است که چرا موجودات و سیستم‌های ریاضی که بمنظور خاصی ایجاد شده‌اند، در توصیف موجودات فیزیکی این قدر موفق عمل می‌کنند؟

۴.۲ رویکرد معرفتی

اگر ریاضیات و علوم طبیعی را دو معرفت مجزاً با دو دیسپلین متفاوت بدانیم، سؤال معرفتی این است که چگونه عناصر معرفت ریاضی در سایر معارف علمی ما موثر و کاربردپذیر هستند؟ چگونه ریاضیدانی که به هنگام خلق سیستم ریاضیاتی خود، توجهی به طبیعت ندارد و به هنرمند نزدیکتر است تا به کاشف، موفق به خلق چیزی می‌شود که بعداً به طور اتفاقی و غیرمنتظره در معرفت طبیعی ما کاربردی معجزه‌آسا پیدا می‌کند؟ به نظر می‌رسد صورت‌بندی خود و دیگران از مسئله کاربردپذیری یک صورت‌بندی معرفتی و نگاه او به ریاضیات، نگاهی فرمالیستی است.

۵.۲ ضرورت ریاضیات

نگاه دیگری نیز وجود دارد که بر اساس آن، تنها زمانی که ریاضیات را برای فیزیک ضروری بدانیم و از آن برای تبیین در فیزیک استفاده کنیم سوالی رازگونه و فلسفی مطرح می‌شود. با چنین ایده‌ای، آلن بیکر (Alan Baker) معتقد است برخی از نسخه‌های مسئله کاربردپذیری اصلاً مسئله نیستند و تنها آنجا که ریاضی را برای فیزیک ضروری و تبیین‌کننده بدانیم، مسئله واقعی ظاهر می‌شود و این مسئله را شاید تنها بتوان با نگاه واقع‌گرایانه پاسخ گفت (Baker, 2011):

از جمله کسانی که بر ضرورت ریاضیات در فیزیک تاکید می‌کنند، می‌توان به افراد ذیل اشاره نمود: مارک بالاگر (Mark Balaguer) ریاضیات را برای فیزیک ضروری می‌بیند (Balaguer, 2001). مارک کولیوان نیز در کتابش^۵ ریاضیات را برای فیزیک کاملاً ضروری دانسته و علوم طبیعی بدون ریاضیات را بی مفهوم می‌داند (Colyvan, 2001). سورین بانگو (Sorin Bangu) در کتاب منتشر شده‌اش در ۲۰۱۲^۶ با تاکید بر طبیعت‌گرایی و کل‌گرایی کوانتی، بر خلاف اشتاینر، نه تنها کاربرد ریاضیات در علوم طبیعی را انسان محور و معارض با طبیعت‌گرایی نمی‌داند بلکه آن را ضروری و اجتناب ناپذیر می‌بیند (Bangu, 2012).

۳. رویکردهای گوناگون در پاسخ به مسئله

پس از مرور صورت‌بندی‌ها و تلقی‌های مختلف از مسئله کاربردپذیری، اکنون به بررسی پاسخ‌هایی می‌پردازیم که به این مسئله داده شده است. فلاسفه علم با پیش فرض‌ها و رویکردهای متفاوتی به مسئله ورود کرده و تلاش نموده‌اند که پاسخی برای آن بیابند. برخی این مسئله را بی‌اهمیت و پیش‌پاافتاده و برخی آن را مهم و اساسی دانسته‌اند. عده‌ای نیز تنها جنبه ضروری و متافیزیکی کاربرد ریاضیات در علوم را مشکل‌ساز برشمرده‌اند. در این بخش تعدادی از پاسخها و نقدهای وارده به آنها را می‌آوریم.

۱.۳ ریاضیات و فیزیک انسان‌محور

اشتاینر در کتاب "کاربردپذیری ریاضیات به مثابه یک مسئله فلسفی"^۶ ریاضیات معاصر را با توجه به ماهیتش، انسان‌محور (Anthropocentric) می‌داند. او معتقد است که برای فیثاغورثیان ریاضیات فقط شامل حساب و هندسه و برهان بود. اما امروزه ریاضیدانان از دو معیار "زیبایی و مناسب بودن (یا سهولت)" (Beauty & Convenience) برای تصمیم‌گیری در مورد اینکه یک ساختار را به عنوان ساختار ریاضی مطالعه کنند یا خیر، استفاده می‌کنند. این دو معیار، مفاهیمی انسان‌محور یا "مختص به گونه زیستی"^۷ هستند (Steiner, 1998, pp. 5-7).

در پایان قرن نوزدهم مشکل فیزیکدانان این بود که چگونه می‌توان قوانین دنیای بسیار ریز را نوشت؟ آنها این راه حل نامیدکننده را یافتند: "باید معادلاتی شبیه به معادلات کلاسیک بیابیم". اما تشابه یا تفاوت، تنها در چهارچوب یک طرح و با داشتن معیاری برای طبقه‌بندی معنا پیدا می‌کند. استراتژی آنها این بود که قوانینی بنویسیم که شکل آنها از نظر ریاضی مشابه قوانین کلاسیک باشد. ریاضیات، زبان و طرح‌های طبقه‌بندی را در اختیارشان قرار داد و نهایتاً منجر به کشف موفقیت‌آمیز مکانیک کوانتومی گردید. اما استفاده از ریاضیات برای "شباهت و قیاس" (Similarity & Analogy) انسان‌محور و مبتنی بر معیارهای پذیرفته شده "زیبایی و مناسب بودن (یا سهولت)" است (Steiner, 1998, pp. 48-75).

بنابراین از نگاه او تکیه بر ریاضیات در حدس زدن قوانین طبیعت، تکیه بر معیارهای انسانی است. گویی از نظر فکری ما به دنبال جهانی کاربرپسند (User Friendly) هستیم. از نگاه اشتاینر انسان‌ها جایگاه ویژه‌ای در جهان دارند. به این معنا که یکی از محصولات اصلی ذهن انسان (ریاضیات)، به نحوی ویژگی‌های عمیق "لفظی/ساختاری" (Nomic/Structural) جهان فیزیکی را ردیابی می‌کند. در واقع ریاضیات واسطه یک مکاتبه سطح بالا بین ذهن انسان و کیهان است و

بدین جهت است که ریاضیات بر توسعه فیزیک تاثیر می‌گذارد (Bangu, 2012, pp.110-132). یعنی فیزیکدانها با باورهای انسان‌محورانه ریاضی عمل می‌کنند و از طرف مقابل بنظر می‌رسد که جهان برای تحقیقات انسان‌محور، قابل دسترسی است. از این منظر، مسئله تبدیل می‌شود به کاربرد معیارهای انسان‌محور در خصوص جهانی که به این معیارها پاسخ می‌دهد. اما جهان چه لزومی دارد که به این معیارها پاسخ بدهد؟ از طرفی ظاهراً در اینجا ما باید به دو مشکل پاسخ دهیم: ۱- پدیده‌های طبیعی فراوانی که هنوز توصیف ریاضی مناسب پیدا نکرده‌اند. ۲- مفاهیم ریاضیاتی که هرگز کاربردی نیافته‌اند.

مایکل لیستون به انتقاد از اشتاینر پرداخته و تنها دلیل استفاده دانشمندان از ریاضیات را در سابقه موفقیت‌های گذشته آن می‌بیند، نه به دلیل تعهد آنان به هر گونه جنبه انسان‌محورانه. او به عنوان مثال به اظهارات فیزیکدانان کوانتومی مانند ریچارد فاینمن اشاره می‌کند که اغلب به نقش الهام‌بخش تکنیک‌هایی که پیشینیانشان استفاده کرده‌اند، اعتراف کرده‌اند (Liston, 2000). پیترو سیمونز نیز با توجه به ناامیدی فیزیکدانان در کشف قوانین دنیای میکروسکوپی، به استفاده آنان از مقایسه‌های فیزیکی بی‌معنا و دستکاری‌های فرمال به عنوان تنها راهبرد برای کشف چیزهایی که به نظر غیرقابل کشف می‌آیند، اشاره کرده و این را یک روش کاملاً منطقی می‌پندارد. از نظر او، رفتار فیزیکدانان لزوماً نشان‌دهنده تعهدات انسان‌محورانه آنان نیست، بلکه نمایانگر این است که ظاهراً آنها راه حل ممکن دیگری نداشته‌اند (Simons, 2001).

۲.۳ تقارن و ناوردائی قوانین طبیعت

دیدگاه دیگری وجود دارد دایر بر اینکه ویگنر علاوه بر طرح مسئله، جوابی نیز برای آن عنوان کرده است. اسلامی در مقاله‌اش^۹ عنوان می‌کند ویگنر نقش اساسی تقارن‌ها و اصول ناوردا (Invariance Principles) را در شکل‌گیری فیزیک گوشزد کرده و نشان می‌دهد این ناوردائیها هستند که ما را قادر می‌سازند قوانین فیزیک را بطور ریاضی صورتبندی کنیم^{۱۰}. در واقع بدون این ناوردائی قوانین، داشتن فیزیک ناممکن است. این اصول ناوردا، ساختار قوانین طبیعت را مشخص می‌کنند. به تعبیری دیگر اینها قوانین حاکم بر قوانین طبیعت‌اند. این تقارن‌ها هستند که به قوانین طبیعت، جهان‌شمولی (Universality) می‌دهند و همین ویژگی است که صورتبندی ریاضی آنها را ممکن می‌سازد. چون ریاضیات به مطالعه کلی و صوری روابط بین اشیاء می‌پردازد. اگر قوانین طبیعت این ساختار ناوردا را نداشتند، ریاضیات سودمندی و کاربرد خودش را از دست می‌داد و دیگر زبان مناسبی برای فیزیک نبود. اکنون هم هیچ تضمینی وجود

ندارد که در آینده ریاضیات بتواند همین نقش را در علوم طبیعی بازی کند (Islami, 2016, pp. 13-16).

اسلامی معتقد است ویگنر سؤال متافیزیکی ارتباط ریاضیات با جهان را به یک سؤال معرفتی، یعنی ارتباط ریاضیات با فیزیک تبدیل کرده است. ویگنر جهان ما را یک شیء ریاضی نمی‌داند. اصلاً لزومی هم ندارد تمام مطالعات ما از جهان صورتبندی ریاضی داشته باشد و بسیار خطرناک است که ریاضیات را راهنمای حقیقت بدانیم (Islami, 2016, p. 10).

۳.۳ دو دیسیپلین با وابستگی تاریخی

جسپر لوتزن (Jesper Lützen) با نگاهی متفاوت نشان داده که چگونه فیزیک از دوران باستان تا قرن بیستم بر توسعه ریاضیات تاثیر داشته است. ریاضیات و فیزیک در ارتباطی دو طرفه بوده‌اند که این ارتباط موجب گسترش هر دو شده است. با این نگاه، شاید اثربخشی ریاضیات در فیزیک، دیگر امری نامعقول جلوه نکند (Lützen, 2011, pp. 8-13).

لوتزن گوشزد نموده که رویکرد ویگنر به مسئله کاربردپذیری تحت تأثیر نگرش فرمالیستی او به ریاضیات است. نگرشی که در حدود سال ۱۹۶۰ به اوج خود رسیده بود. در این سنت که اغلب به هیلبرت نسبت داده می‌شود، ریاضیات شبیه یک بازی دانسته می‌شود که در آن قوانین و نحوه بازی را ریاضیدان اختراع می‌کند. سوالات هستی‌شناختی و معرفت‌شناختی درباره ماهیت ریاضیات کنار گذاشته می‌شود و دیگر سؤال از ماهیت اشیاء ریاضی بی‌معنا می‌شود چون آنها نشانه‌هائی دلبخواه هستند. سؤال از صدق بدیهیات ریاضی نیز بی‌معنا می‌شود زیرا آنها تنها نقطه‌های شروع دلبخواه ما هستند (Lützen, 2011, pp. 2-4).

همانطور که در بخش ۲ اشاره شد ویگنر نیز چنین نگرشی به ریاضیات داشت. او بیشتر مفاهیم پیشرفته ریاضی مانند اعداد مختلط و توابع تحلیلی را زائیده نبوغ ریاضیدان و حس زیبایی‌شناختی‌اش می‌دید. این نگاه آشکارا رویکردی فرمالیستی به ریاضیات است و با این وصف قابل درک است که چرا او کاربردپذیری ریاضیات در فیزیک را شبیه معجزه می‌پنداشت.

۴.۳ رویکرد پدیدارشناختی و علوم شناختی

این انسان است که ریاضیات را می‌سازد و از آن بهره می‌گیرد، بنابراین یک ایده این است که برای توضیح مسئله کاربردپذیری ببینیم که در مغز او چه اتفاقاتی می‌افتد. چنین ایده‌ای منجر به ورود علوم شناختی به مسئله کاربردپذیری شده است. به نظر فنگ یی (Feng Ye) مغز انسان در پدیده ادراک، الگوهایی را از قبل دارد و الگوهایی را هم می‌سازد تا بتواند در مورد اطلاعات ورودی از حواس نتیجه‌گیری نماید. الگوهای ریاضی هم الگوهایی هستند که مغز از آنها بهره می‌برد تا بتواند در مورد اطلاعات رسیده از پدیده‌ها گمانه بزند. بنابراین یک پاسخ به مسئله کاربردپذیری ریاضیات می‌تواند این باشد که چون ریاضیات شامل یک سری داستان‌های منسجم است که در برخی موارد توانسته پدیده‌های عالم را برای ما بازنمائی کند، مغز الگوهای آن را حفظ می‌کند. البته هیچ تضمینی نیست و اگر در آینده این الگوها نتوانند از عهده پیشگویی درست برآیند، مغز الگوهای دیگری را جایگزین می‌کند (Ye, 2010, pp. 2-6).

از زمان انتشار مقاله ویگنر پیشرفتهای زیادی در علوم اعصاب و به ویژه در فهم بهتر ادراک در مغز، حاصل شده است. رولاند اومنس (Roland Omnès) شروع این تغییرات را از ادراک بصری می‌داند. شبکه شامل حدود ۱۴۰ میلیون گیرنده نوری و شبکه‌ای از نورونهای به هم پیوسته است که اطلاعات خود را از طریق عصب نوری به قشر مغز می‌فرستند و تمام اطلاعاتی را که مغز میتواند در مورد تصویر دریافت کند در اختیارش قرار می‌دهند. در واقع مقدار اطلاعات در شبکه برای انتقال بسیار زیاد است و باید برای انتقال نظمی ایجاد شود و این امر با همزمانی اتفاق می‌افتد. دسته‌هایی از نورونها سیگنالهای خود را بطور همزمان تنظیم می‌کنند و به مغز می‌فرستند. این عمل همزمان نورونها پیامد فوری بر بازنمائی ما از واقعیت دارد. این آشکارا یادآور بینش کانت از زمان به عنوان «شکل ناب شهود» است. گروه‌های مختلفی از نورونها که با هم کار می‌کنند در نواحی دایره‌ای شکلی از شبکه پراکنده‌اند و تصویر قابل دسترسی در این مناطق پخش می‌شود و این بر شهود ما از فضا نیز تاثیر می‌گذارد (Omnès, 2011, pp. 3-5). مغز اطلاعات وارده را با الگوهایی که در حافظه دارد (الگوهایی از تجارب گذشته و یا حتی الگوهایی که خودش ساخته) مقایسه می‌کند و سپس یک حدس می‌زند که این اساسی‌ترین و معمول‌ترین فرآیند مغزی است. آزمایشهای زیادی تایید می‌کنند که آگاهی نقش منحصر به فردی در ادراک دارد (به عنوان نمونه آزمایش تصاویر دوگانه که ما با آگاهی و زدن یک کلید گشتالتی قادریم آن را چیز دیگری ببینیم). با بررسی سیستم ادراکی و نقش مغز در مقایسه اطلاعات ورودی با الگوهای ذخیره شده، میتوان گفت که ریاضیات با

ساختن سیستمهای سازگار، در واقع همان الگوها را برای مقایسه در اختیار مغز قرار می‌دهد. یعنی پس از مشاهده پدیده‌های طبیعت توسط فیزیکدان، مغز او آنها را با الگوهای ریاضیاتی موجود در خودش مقایسه نموده و آن پدیده را مطابق با الگویی تشخیص می‌دهد و یا حدس می‌زند که بیشترین شباهت را داشته باشد و بتواند دقیقترین نتایج را حاصل نماید.

۵.۳.۳. مقدم ریاضیات بر شناخت

یک پاسخ متفاوت به مسئله کاربردپذیری ریاضیات این است که در یک انقلاب کوپرنیکی (به تعبیر کانت) گویی این جهان پدیداری است که مخلوق طرح ریاضیاتی عقلانی و یا تابع تار و پود دستگاه شناختی ماست و برای درک شدن توسط انسان، با این الگوهای ریاضیاتی انطباق و همخوانی پیدا کرده و قابل پیش‌بینی می‌شود.

ایمانونل کانت ویژگی اصلی علم پس از گالیله را پیشینی بودن آن، یعنی تعلق آن به عقل و اندیشه می‌دانست که از آنجا به طبیعت سرایت می‌کند. او در بند BXIII کتاب نقد عقل محض می‌گوید:

عقل فقط آن چیزی را می‌بیند که بر طبق طرح خود خلق می‌کند. عقل طبیعت را وادار می‌کند تا به پرسشهای او پاسخ گوید نه اینکه فقط به وسیله طبیعت به این سو و آن سو کشیده شود، چون مشاهدات تصادفی که بر طبق هیچ نقشه از پیش طراحی شده‌ای انجام نگرفته‌اند، به هیچ روی در یک قانون ضروری به هم مرتبط نمی‌شوند. یادگیری عقل از طبیعت به مثابه یادگیری یک قاضی است که شاهدها را ملزم می‌سازد تا به پرسشهای او پاسخ گویند. فیزیک باید بر طبق آنچه عقل، خود در طبیعت نهاده است، آنچه‌ای را در طبیعت بجوید که خرد در باره آن نمی‌تواند از خود فراگیرد (طالب زاده، تابستان ۱۳۸۴)

مارتین هایدگر، ویژگی اصلی علم جدید را متمتیکال (Mathematical) ^{۱۱} بودن آن می‌داند ^{۱۲} (Heidegger, 1977). متمتیکال طرحی از شیئیت است که عرصه‌ای می‌گشاید تا اشیاء خود را در آن نشان دهند و شناختی که در این طرح اخذ و وضع می‌شود، بگونه‌ای است که بنیاد اشیاء را از پیش معین می‌کند. او قانون اول نیوتن را مثال می‌زند. این قانون تعریفی از شیء ارائه می‌کند که به طریق تجربی از آن شیء استخراج نشده است ولی پایه هر تعریفی از اشیاء قرار می‌گیرد. هایدگر متمتیکال بودن را اساسی‌ترین حیث ماقدم در شناخت اشیاء می‌داند. از نظر او به همین دلیل است که افلاطون بر سر در آکادمی نوشته بود: "کسی که ریاضیات (هندسه) نمی‌داند وارد نشود" (طالب زاده، تابستان ۱۳۸۴).

۶.۳ تلقی سنت‌گرایان از جایگاه ریاضیات در علم جدید

اگر تلقی ما این باشد که بنیان علوم جدید بر کمیت و عدد است و با توجه به اینکه قواعد و اصول محاسبه اعداد در علم حساب متجلی گردیده‌اند، شاید بتوان نتیجه گرفت که اگر قواعد حساب را به درستی بکار گیریم، میتوانیم قواعد و اصول جوهری (جوهر ثانی) عالم را به دست آورده و یا پیش‌بینی کنیم. از این منظر حداقل کاربرد علم حساب در علوم طبیعی، امری بدیهی و ضروری بنظر می‌رسد و هیچ رازآلودگی و شگفتی در آن وجود ندارد.

رنه گنون (René Guénon) بعنوان یک سنت‌گرا معتقد است:

«کمیت و کیفیت» را میتوان از نخستین دوگانه‌های جهان هستی دانست. این دوگانه را «ذات و جوهر» و یا «صورت و ماده» نیز گفته‌اند. ذات یا صورت، مجموعه صفات و کیفیات یک موجود و حقیقت شمارش‌ناپذیر و مستقل از کمیت آن است. اما جوهر را به دو قسم اول و ثانی تقسیم کرده‌اند. جوهر اول (هیولی ارسطو) قوه محض و غیر قابل شناخت است، اما جوهر ثانی همان «ماده» فیزیکدانان و قابل شناخت علمی است. به قول توماس آکویناس، جوهر ثانی با کمیت مشخص شده و عدد از این جوهر ناشی میشود (گنون، ۱۳۶۵).

گنون کمیت و عدد را شرط اساسی علم جدید می‌داند:

کمیت به عنوان مقوم جنبه جوهری عالم ما، شرط پایه‌ای و اساسی علم جدید را تشکیل داده و مشخصه اساسی آن، عدد است. کمیت آن چیزی است که موجب فردیت موجودات می‌شود. یعنی آن تعیینی است که به نوع افزوده میشود تا افراد آن نوع متعین شوند (گنون، ۱۳۶۵).

۷.۳ رویکرد ساختارگرایان

ساختارگرایی ریاضی دیدگاهی فلسفی نسبت به ریاضیات است که ریاضیات را علمی می‌داند که به جای اشیاء و خصوصیات آنها، به ساختارها و روابط آنها می‌پردازد (Reck & Schiemer, 2019). در ساختارگرایی ریاضی تمرکز بر ساختارهای انتزاعی ریاضی مانند مجموعه‌ها، گروه‌ها و فضاها تئوپولوژیک بوده و هدف ساختارگرایان بررسی مفاهیم و قواعد بنیادی ریاضیات بدون وابستگی به واقعیت خارجی است. ساختارگرایی علمی نیز یک رویکرد در فلسفه علم است که بر اهمیت ساختارها در نظریه‌های علمی تأکید می‌کند، نه بر عناصر یا موجودات منفرد

درون آن ساختارها. ساختارگرایان علمی به جای تمرکز بر اشیاء مجزا، استدلال می کنند که روابط و تعاملات بین عناصر، کلیدی برای درک پدیده های علمی هستند (Culler, 1998).

مایکل رزنیک (Michael David Resnik) و استوارت شاپیرو (Stewart Shapiro) که از پیشگامان ساختارگرایی در فلسفه ریاضی هستند باور دارند که موضوع اصلی در ریاضیات، اشیای خاص نیستند، بلکه ساختارهایی اند که اشیاء درون آنها جای می گیرند. اشیاء ریاضی صرفاً مکانهایی در این ساختارند که خارج از این ساختار هویتی ندارند. این ساختارگرایی را "ساختارگرایی الگوئی" (Patternal Structuralism) می گویند. رزنیک و شاپیرو مفهوم ساختار را مفهومی اولیه و پیشاریاضی می دانند (منیری، ۱۳۹۷).

در دیدگاه ساختارگرایی، عدد ۲ به عنوان جایگاهی در ساختار اعداد طبیعی تعریف می شود که بعد از جایگاه عدد ۱ قرار دارد. به عبارت دیگر، عدد ۲ جایگاه دوم در دنباله اعداد ۰، ۱، ۲، ۳... است. بر اساس دیدگاه شاپیرو، پرسش از نحوه دسترسی به حقایق ریاضی به حوزه روانشناسی و علوم شناختی مربوط می شود. او باور دارد که ساختارها صرفاً طرح و الگو بوده و انسانها ذاتاً قادر به تشخیص الگوها هستند. ساختارگرایان برای توضیح کاربرد ریاضیات در فیزیک نیز به مفهوم یکرختی ساختارها استناد می کنند. به این معنا که ساختارهای ریاضی با ساختارهای فیزیکی جهان یکرخت (Isomorph) هستند (منیری، ۱۳۹۷).

در اینجا سوالی مطرح می شود: آیا طرحها، الگوها یا ساختارها بصورت ذاتی در طبیعت وجود دارند یا آنها حدسها و برساخته های ذهنی خود ما هستند؟ ساختارهای ریاضی چگونه؟ پاسخ رئالیسم ساختاری این است که اگر قرار باشد که نظریه ها را رئالیستی تفسیر کنیم، با توجه به اینکه در تحول نظریه ها، خصوصاً نظریه های جدید فیزیک، یک پیوستگی در ساختارها مشاهده می کنیم، می توانیم بگوییم که ساختارهای ریاضی بازنمایی ساختارهای فیزیکی در عالم هستند (Worrall, 1989).

۸.۳ انگاره نگاشت (Mapping Account)

استیون فرنچ (Steven French) و اتاویو بوئنو (Otavio Bueno) طرحی سه مرحله ای برای کاربردپذیری ریاضیات ارائه کرده و آن را "مفهوم استتاجی کاربرد ریاضیات" نامیدند:

مسئله کاربردپذیری ریاضیات در علوم طبیعی (علی سیدی دهقانی) ۱۰۱

مرحله ۱: ابتدا با استفاده از ایزومورفیسم (Isomorphisms) و همومورفیسم (Homomorphisms) یک نگاشت از وضعیت فیزیکی به یک ساختار ریاضی مناسب انجام می‌دهیم. این مرحله را "غوطه‌وری" (Immersion) می‌نامیم.^{۱۳}

مرحله ۲: با استفاده از فرمالیسم و قواعد ریاضی، پیامدها و نتایج را استخراج می‌کنیم. این مرحله "اشتقاق" (Derivation) نامیده می‌شود.

مرحله ۳: پیامدهای به دست آمده با استفاده از تفسیر به وضعیت فیزیکی برگردانده می‌شوند. این مرحله، "تفسیر" (Interpretation) نامیده می‌شود. در واقع در این مرحله یک نگاشت از نتایج ریاضی به وضعیت فیزیکی اتفاق می‌افتد. اما نباید تصور کرد که این نگاشت معکوس نگاشت مرحله ۱ است. اما ممکن است که ساختار ریاضی در دل یک ساختار ریاضی بزرگتر واقع شده باشد و یا موارد اضافی‌ای در آن باشد که در وضعیت فیزیکی مورد نظر نیست. این موارد اضافی نیز در مرحله تفسیر به وضعیت فیزیکی برگردانده می‌شوند. موارد اینچنینی را در فیزیک مدرن بسیار میتوان مشاهده کرد (Bueno & French, 2012).

مارک کولیوان (Mark Colyvan) به همراه بوئنو در مقاله‌ای در نقد انگاره نگاشت، ساختار ریاضی را به نقشه شهر تشبیه کردند که در آن میتوان مشابتهایی با ساختار شهر (نظیر موقعیت و تناسب فواصل مکانهای شهر با نقاط روی نقشه) مشاهده کرد. ولی شهر ویژگیهایی دارد که در نقشه نیست و یا در نقشه خواصی است که در شهر یافت نمی‌شود. آنها مشکلات دیگری نیز برای این طرح برشمردند (نظیر ایده‌آل‌سازی در مدل‌های ریاضی) ولی در نهایت، طرح نگاشت را در حال حاضر، مقبول‌ترین طرح برای کاربردپذیری ریاضیات دانستند (Colyvan & Bueno, 2011).

۹.۳ تقدم تشخیص ساختار تجربی بر ساختار ریاضی

بنظر می‌رسد که قبل از عمل نگاشت، ما یک ساختار تجربی را برای پدیده‌های مورد نظرمان انتخاب کرده‌ایم و برای انجام نگاشت، بسیار مهم است که ما ابتدا ویژگیهای صوری و روابط این ساختار تجربی را برجسته نمائیم تا بتوانیم نگاشت را انجام دهیم. دیوید ریزا (Davide Rizza) معتقد است که کاربرد ریاضیات به تشخیص این ویژگیهای فرمال در ساختار تجربی بستگی دارد. حتی در برخی موارد تشخیص همین ویژگیهای صوری ساختار تجربی ممکن است کافی باشد و ما نیازی به نگاشت نداشته باشیم. فرمولاسیون ریاضی، منبع ساختار نیستند و تنها به شکل مفهومی و استدلالی به ما کمک می‌کنند. دشوارترین مرحله این است که

ما تشخیص دهیم با استفاده از چه مفاهیم ریاضی مسئله را صورتبندی کنیم تا امکان استدلال از طریق ریاضی را برایمان فراهم کند. اینگونه ما میتوانیم به مسئله تجربی مان فکر کنیم. در انتها نتیجه‌گیری می‌کند که هر کاربرد ریاضی، کاربرد از طریق نگاهت نیست (Rizza, 2013).

از طرفی رئالیستهای ساختاری، ساختارهای عالم را مصون از تفسیرها، ذهنیتها و عوامل فرهنگی و اجتماعی می‌دانستند. اما مواجهه با این ایده شدند که قصد و نیت انسانها در مدلها و ساختارها دخالت دارد. یعنی فیزیکدان، قبل از مراجعه به ریاضیات، به نوعی فرم پیشاصوری می‌رسد که کاملاً ناشی از قصدمندی اوست. این کاملاً به ذهنیت او وابسته است که چه جنبه‌هایی را برجسته نموده و چگونه در ذهنش مرتب (Arrange) نماید. اطلاعات فی نفسه ساختارمند نیست، ما هستیم که به آن ساختار می‌دهیم و از داده (Data) خود، یک مدل داده (Model of Data) درست می‌کنیم. مدلها نیز مشابه تکنولوژی‌ها، تنها مواردی را که منظور سازنده آنها بوده است در بر می‌گیرند (Ladyman, 2014).

۱۰.۳ کاربردپذیری ریاضی دلیلی برای رئالیسم

برخی فلاسفه نظیر آلکس هاروی (Alex Harvey) کاربردپذیری ریاضیات در فیزیک را شهادی بسیار قوی برای رئالیسم دانسته و نتیجه می‌گیرند که ریاضیات و فیزیک هر دو بخشی از جهان عینی اند و در انتظار کشف. در واقع آنها از نامعقول بودن کاربرد ریاضیات، استدلالی برای تقویت نگاه رئالیستی می‌سازند. یعنی اینکه ریاضیات در فیزیک بسیار کاربردپذیر است به نفع تعبیر واقع‌گرایانه است و این کاربرد قوی نشان می‌دهد که ریاضیات با عالم، ارتباط واقعی و دلالت واقع‌گرایانه دارد. او موثر بودن ریاضیات را شهادی برای رئالیسم می‌بیند و آن را معقول می‌داند (Harvey, 2011).

در این نگرش رئالیستی، گوئی ریاضیات ابزاری صرف برای توصیف پدیده‌های فیزیکی نیست، بلکه عمیقاً با جهان در هم تنیده است و نقش اساسی در درک ما از جهان ایفا می‌کند. تیم مادلین (Tim Maudlin) مسئله و یگنر را بسیار مهم و پیچیده تلقی کرده و پیشنهاد می‌کند که ما باید دیدگاهی واقع‌گرایانه از ریاضیات اتخاذ کنیم و ساختارهای ریاضی را موجوداتی عینی بدانیم که مستقل از افکار و زبان انسان وجود دارند. او معتقد است که ریاضیات برای دنیای فیزیکی قابل استفاده است، زیرا به طور دقیق ساختار جهان را نشان می‌دهد. دلیل کارآمدی ریاضی در علوم طبیعی یک راز نیست، بلکه نتیجه شباهت ساختار ریاضیات و دنیای فیزیکی است (Maudlin, 2016).

۱۱.۳ مدل

غیرواقعگرایان علمی معتقدند که در علوم طبیعی ما با مدلها سر و کار داریم و مدلها نیز فقط بر اساس کارائیشان در توصیف و پیش‌بینی پدیده‌ها ارزیابی می‌شوند. از این منظر، تلاش برای پی بردن به ذات و نهاد عالم، کاری بی‌نتیجه است و یک فیزیکدان تنها باید به دنبال انتخاب یک مدل مناسب و موثر برای پدیده‌ها باشد و نه کنکاش در ماهیت عالم. بدینسان کسی مانند ون‌فراسن (Bas van Fraassen) تئوری‌های علمی را فقط مدل‌های موفق می‌داند (Van Fraassen, 1989).

مدلها محل تلاقی ریاضی و فیزیک هستند. از یک سو در فیزیک ما پدیده‌ها را در قالب مدل‌هایی که قابلیت بیان به شکل ریاضی دارند درمی‌آوریم، از طرفی در ریاضیات الگوها و مدل‌هایی داریم که ما در ذهنمان حدس زده‌ایم و آنها را با دستگاه صوری استنتاج کرده‌ایم و به دنبال این هستیم که ببینیم کدامیک از این مدلها با الگوهای فیزیکی ما قابل تطبیق‌اند. به عنوان مثال می‌توان هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی را در نظر گرفت. هنگامی که ما از اصول موضوعه اقلیدسی گذر کردیم توانستیم به هندسه دیگری دست پیدا کنیم که ظاهراً تطابق بهتری با پدیده‌های طبیعی عالم دارد. از آن به بعد با نااقلیدسی فرض کردن هندسه عالم، گویی پدیده‌ها مدل مناسبتری یافتند (Palmgren & Rasa, 2022).

از طرفی رونالد گی‌یری (Ronald.N. Giere) معتقد است که دانشمندان از مدلها برای جوهی از جهان، به منظور خاصی استفاده می‌کنند. در یک مثال او می‌گوید: اگر ما بخواهیم آب را به منظور استفاده در سیستمهای انتقال مایعات، بررسی کنیم، از مدلی برای آن استفاده می‌کنیم که آب را یک سیال پیوسته بدانند. ولی اگر منظور ما بررسی حرکت براونی در آب باشد، مدل گسسته‌ای از مولکولها برایمان مناسب‌تر است. او نتیجه می‌گیرد که قصد (intention) فیزیکدان، در مدلی که انتخاب می‌کند موثر است (Giere, 2004).

اینجا مسئله کاربردپذیری ریاضیات به این سوال تبدیل می‌شود "چرا مدل‌های ریاضیاتی اینقدر در فیزیک موثر و کاربردپذیرند؟". جواب مدل‌گرایان این است که این مدلها چون تا کنون توصیف و پیش‌بینی پدیده‌ها را با دقتی که برای ما قابل پذیرش است، انجام داده‌اند، هنوز استفاده می‌شوند. ولی هیچ تضمینی وجود ندارد و چنانچه روزی مدل مذکور نتواند از عهده این کار برآید، ممکن است آن را با مدل دیگری جایگزین نماییم (Gonzalez, 2014). شگفتی و تعجب زمانی بروز می‌کند که ما مدل خود را حقیقت‌نما بدانیم. اما اگر مدل را صرفاً ابزاری

بینیم که به مرور زمان و با تجارب فراوان، آن را پرداخته‌ایم تا کارگشا باشد، به نظر می‌رسد که دیگر اینقدر جای تعجب نمی‌ماند.

۱۲.۳ رویکرد معرفت‌شناسی تکاملی و عقلانیت نقاد به مسئله کاربردپذیری

معرفت‌شناسی تکاملی کارل پوپر (PopperKarl) بر تکامل دانش و نقش آزمون و خطا در پیشرفت علمی تأکید می‌کند. در این رویکرد، ماهیت تکاملی توسعه دانش، که توسط فرآیند حدس و ابطال شکل می‌گیرد، یک اصل اساسی است و با فلسفه گسترده‌تر عقلانیت نقاد او همسو می‌شود (Popper, 2002a, pp. 291-301). از این منظر سودمندی ریاضیات در مدل‌سازی و پیش‌بینی‌های دقیق، محصول تلاش مستمر و سعی و خطای فراوان و حکم و اصلاحات بیشمار است.

پوپر با ویگنر موافق است که ریاضیات نقش مهمی در علوم طبیعی ایفا می‌کند و ابزار قدرتمندی برای نظریه‌پردازی، پیش‌بینی و آزمایش ایده‌ها فراهم می‌کند. اما پوپر ریاضیات را توسعه مصنوعی بخشهایی از زبان معمولی می‌داند. ابزاری زبانی که با روندی تکاملی به قصد توصیف حقایق خاصی طراحی شده و دارای سیستمهای معنایی مختص به خود است. پس اگر معلوم شد که این زبان، در راستای این هدف تا حدودی موفق عمل می‌کند، نباید تعجب کنیم. او همچنین تأکید می‌کند که مدل‌های ریاضی، نمی‌توانند درستی چیزی را ثابت کنند و به طور بالقوه می‌توانند باطل شوند (Popper, 2002b, pp. 272-290). ریاضیدانها همچنان در حال خلق سیستمهای جدید ریاضی هستند. فیزیکدانها نیز در حال نظریه‌پردازیهای نو هستند. چیزی تمام نشده است.

۱۳.۳ لاکاتوش

فلسفه ریاضی ایمره لاکاتوش (Imre Lakatos) ملهم از دو نفر است، کارل پوپر و جرج پولیا. لاکاتوش ابطال‌گرایی پوپری را در قلمرو ریاضیات به کار می‌بندد. اثباتهای ریاضی از نظر او چیزی جز حدسها و ابطالها نیستند. اکتشاف ریاضی یک روند دیالکتیکی دارد. او در کتابش این روند را در تعامل بین معلم و شاگردانش برای ما تمثیل می‌کند. برهانهای ریاضی در ابتدا ناقص و یا اشتباه هستند و به تدریج با نقدهای وارده به آنها تکامل پیدا می‌کنند و در پاره‌ای موارد کنار گذاشته می‌شوند (سیاوشی، ۱۳۸۹).

مسئله کاربردپذیری ریاضیات در علوم طبیعی (علی سیدی دهاقانی) ۱۰۵

لاکاتوش پیش بینی می‌کند که مسئله ویگنر می‌تواند با در نظر گرفتن ریاضیات به عنوان یک برنامه تحقیقاتی دائماً در حال تکامل که با تعامل بین ریاضیدانان و دانشمندان دائماً در حال اصلاح و گسترش است، حل شود. یعنی اثربخشی ریاضیات در علوم طبیعی تنها به این دلیل نیست که ریاضیات زبان و ابزار مناسبی برای تجزیه و تحلیل و پیش بینی پدیده های طبیعی فراهم می‌کند، بلکه نتیجه توسعه مداوم نظریه ها و روش از طریق فرآیند تکراری حدس و گمان و ابطال است. همچنین نگرش های پیشاتئوریک در تحول اثبات ها و قضایای ریاضی نقش مهمی داشته اند (Lakatos, 1963). بنابراین، پاسخ لاکاتوش به مشکل ویگنر این خواهد بود که اثربخشی ریاضیات در علوم طبیعی چیزی نیست که بتوان آن را به عنوان یک رابطه ایستا یا ثابت درک کرد، بلکه فرآیندی پویا و مداوم از تأثیر و پالایش متقابل بین این دو حوزه است.

۱۴.۳ رویکرد زبانی

مهم ترین دغدغه فکری لودویگ ویتگنشتاین (Ludwig Wittgenstein) در رساله، رابطه زبان و جهان است. در آنجا زبان را تصویر جهان می‌داند و از نظر او گزاره های اصیل و صادق آنهایی هستند که اوضاع جهان را تصویر کنند. ریاضیات را یک امر کاملاً صوری و نحوی می‌داند و گزاره های ریاضی چون جهان را تصویر نمی‌کنند، از نظر او صدق صوری و نحوی دارند. یعنی ریاضیات کشف کردن نیست بلکه خلق کردن است. گزاره های ریاضی پیشینی و تحلیلی اند (زارع پور، ۱۳۹۶).

ویتگنشتاین در تراکتاتوس می‌گوید گزاره های ریاضی اساساً ارجاعی (Refrential) نیستند و چیزی در مورد چیزهای خارج از خود نمی‌گویند. این گزاره ها اگر معنایی داشته باشند از طریق قواعد و نحوی که وضع کرده ایم معین می‌شود و لاغیر. او برای احکام ریاضی نقش گرامری قائل است و این احکام را قواعد «بازی ریاضی» می‌داند. درست مانند فوتبال و بسکتبال که قواعد خاص خود را دارند. این قواعد سازنده فرآیند استنتاج ما هستند و نه چیزی بیشتر. او در کتاب "در باب یقین" (On Certainty) شک در احکام و گزاره های ریاضی را بی معنی می‌داند چون که آنها صرفاً قواعد «بازی ریاضی» یا «گرامر استنتاج و محاسبه» هستند. به عبارت دیگر قبول این احکام فقط قبول یک مهارت عملی برای محاسبه است و اصلاً ربطی به شناخت ما از نتایج کاربردی این احکام ندارد (زارع-پور، ۱۳۹۶).

تصویر سنتی، ریاضیات را دارای دو بخش می‌داند: ۱- مفاهیم و ساخته ها و اندیشه های ذهنی ۲- زبان که این اندیشه ها و ساخته ها در آن ریخته می‌شود و انتقال می‌یابد. ویتگنشتاین

وجود بخش اول را نمی‌پذیرد و به نظر می‌رسد که ریاضی از نظر او همان زبان ریاضی است. او در دوره متأخرش از کاربردپذیری ریاضیات برای مقایسه و کنار گذاشتن بازی‌های ریاضی بدون کاربرد استفاده می‌کند. مخالفت او با برخی ایده‌های ریاضی نظیر مجموعه‌های نامتناهی را شاید بتوان از همین منظر توجیه نمود (زارع-پور، ۱۳۹۶).

فردیناند سورسور (Ferdinand de Saussure) زبان‌شناس و فیلسوف سوئیسی معتقد بود زبان از دو مولفه تشکیل شده است. یکی وسیله‌ای است برای فرمولبندی و چهارچوبی برای مفاهیم و تعریف مفاهیم، که به آن Language گفته می‌شود. مولفه دیگر به کاربرد کلمات و واژه‌ها برای اشیاء و مفاهیم است که به آن speech می‌گوییم. جنبه اول همان چهارچوب ذهنی مفاهیم است که برای همه زبانها یکی است. تفاوت زبانها در جنبه دوم است. اگر ما ریاضیات را زبان بدانیم به نظر می‌رسد منظورمان همان Language است (شهشانی، س. ۱۳۹۶). فلسفه ریاضی). با این نگاه، زبان ریاضی آنگونه که ویتگنشتاین می‌گوید قراردادی و اختیاری و قابل جایگزین کردن با یک زبان دیگر نمی‌نماید.

بنظر می‌رسد پاسخ ویتگنشتاین به مسئله کاربرد ریاضیات در علوم تجربی و بخصوص در فیزیک این باشد که ما خودمان قواعد و نحو این دو بازی را به یکدیگر ربط داده‌ایم و اینگونه توانسته‌ایم مهارت‌های مفیدی بسازیم. از آنجاییکه این بازیها دلخواه هستند و ربطی به جهان خارج پیدا نمی‌کنند، هیچ رازآلودگی نیز در ارتباط آنها در میان نیست.

۴. نتیجه‌گیری

بر اساس باورهای پیشاتئوریک ما، مسئله کاربردپذیری ریاضیات در علوم طبیعی میتواند اشکال متفاوتی به خود بگیرد. مسئله ممکن است متافیزیکی، معرفتی، سمانتیکی و یا توصیفی باشد. همچنین، قبل از پاسخ به مسئله کاربردپذیری باید موضع خود را در قبال چیستی ریاضیات و فیزیک و تمایز معرفت‌شناختی آنها مشخص کنیم. ممکن است ما ریاضیات را صرفاً یک ابزار زبانی بدانیم. برخی نیز ممکن است آن را هم دارای مولفه زبانی و هم دارای مولفه تئوریک بدانند. در صورت اخیر باید نسبت وجه زبانی و وجه تئوریک ریاضیات روشن شود تا بتوانیم تفاوت و شباهت تئوریهای ریاضی و تئوریهای فیزیکی را نیز نشان دهیم.

واقع‌گرایی یا ناواقع‌گرایی نسبت به علم نیز می‌تواند بر پاسخ به این مسئله تأثیرگذار باشد. در نگاه رئالیستی ما به دنبال کشف واقعیتیم و در نگاه غیر رئالیستی حداکثر به دنبال پیدا کردن مدل‌هایی هستیم که خوب پیش‌بینی کنند. شاید به نظر برسد که سؤال ما از زمینه‌ای رئالیستی

مسئله کاربردپذیری ریاضیات در علوم طبیعی (علی سیدی دهاقانی) ۱۰۷

برمی‌خیزد و اگر ما نگاهی ابزارانگارانه و یا غیر رئالیستی به علوم داشته باشیم، مسئله منحل شود. اما اینطور نیست چون حتی در این صورت هم باید پاسخ دهیم که چرا این ابزار خاص بطور شگفت‌آوری در علوم کارآمد است؟ در هر حال چگونگی صورتبندی مسئله، می‌تواند بیان‌گر موضع‌گیری‌های مهم ما در فلسفه و فلسفه علم باشد.

پی‌نوشت‌ها

۱. منظور از قواعد هایزنبرگ، دو قاعده به شرح زیر است:

الف) مجموعه فرکانسهای تمام خطوط مشاهده پذیر در طیف گسیل شده از اتم در جهش از حالت مانای m به حالت n عبارتند از:

$$F_{mn} = E_m - E_n/h$$

ب) احتمال گذار از m به n بیانگر شدت طیف ارسالی با فرکانس F_{mn} است.

۲. لمب، ویلیس یوجین (۱۹۱۳-۲۰۰۸) Lamb, Willis Eugen فیزیک‌دان امریکایی. به طرح مجدد نظریه کوانتومی دیراک پرداخت. چنین تصور می‌شد که هر دو حالت اتم هیدروژن، با وجود تمایز، انرژی یکسانی دارند. در ۱۹۴۷، لمب به همراه رابرت رادرفورد با آزمایش‌هایی پیشرفته نشان دادند که دو تراز $2^1P_{1/2}$ و $2^3S_{1/2}$ انرژی یکسانی ندارند.

۳. در فلسفه ریاضی این ایده را نگاه فرمالیستی به ریاضیات مینامند.

۴. برای ثبت توزیع احتمال یک کمیت فیزیکی از یک بردار استفاده می‌شود. اگر بخواهیم دو کمیت را به طور همزمان ثبت کنیم، می‌توانیم دو بردار واحد بگیریم یا به طور معادل از دو فضای هیلبرت استفاده کنید. اما در مکانیک کوانتومی، ما اصرار داریم که یک فضا وجود داشته باشد و تمام کمیتها و ویژگی‌های فیزیکی دیگر در آن فضا توسط یک بردار ثبت شود. این اصل حداکثری است. اگر مختصات بردار واحد، اعداد مختلط باشند (که دارای مقدار و فاز هستند) بردار واحد می‌تواند این کار را انجام دهد. برای هر ویژگی فیزیکی، مجموعه متفاوتی از مختصات را در همان فضا به بردار واحد مرتبط می‌کنیم. بدین ترتیب، مختصات تکانه، مختصات موقعیت و غیره خواهیم داشت که اطلاعاتی در مورد تکانه، موقعیت و سایر کمیت‌های شیء می‌دهند.

5. The indispensability of mathematics

6. The Applicability of Mathematics in Science: Indispensability and Ontology

7. The Applicability of Mathematics As a Philosophical Problem

۸ Species Specific: معیارها و مفاهیم وابسته به ویژگیها و محدودیتهای یک موجود یا نوع خاص

9. A match not made in heaven: on the applicability of mathematics in physics

۱۰. منظور از تقارن و اصول ناوردا در اینجا این است که در فیزیک با همبستگی‌هایی بین اشیا یا امور مواجهیم که نسبت به زمان، مکان، ناظر، شیء و... حساس نبوده و یک ثباتی دارند و ما را به این باور می‌رسانند که در اینجا با قانونی جهان‌شمول مواجهیم.

۱۱. هایدگر ریاضیات را صورت خاصی از "متمتیکال" می‌داند.

۱۲. هایدگر در مقاله "عصر تصویر جهان" (۱۹۳۸) به ویژگی متمتیکال بودن علم جدید پرداخته و استدلال می‌کند که علم جدید با تبدیل جهان به مجموعه‌ای از اشیا قابل اندازه‌گیری و محاسبه‌پذیر، آن را به تصویری تبدیل می‌کند که می‌توان بر آن تسلط یافت.

۱۳. نمونه‌ای از ساختار فیزیکی که می‌توان آن را با استفاده از ایزومورفیسم یا همومورفیسم به یک ساختار ریاضی نگاشت، میدان مغناطیسی است.

در میدان‌های مغناطیسی، ساختار ریاضی را می‌توان با یک میدان برداری نشان داد که یک شیء ریاضی است که به هر نقطه از فضا یک بردار اختصاص می‌دهد. ساختار فیزیکی میدان مغناطیسی را می‌توان با استفاده از ایزومورفیسم به این ساختار ریاضی نگاشت. ایزومورفیسم تضمین می‌کند که خواص و روابط بین خطوط میدان مغناطیسی در ساختارهای فیزیکی و ریاضی یکسان می‌مانند. از طرف دیگر می‌توان از همومورفیسم برای نگاشت عملیات انجام شده بر روی میدان مغناطیسی به عملیات متناظر آن در میدان برداری استفاده کرد. برای مثال، عملیات محاسبه شدت میدان مغناطیسی در یک نقطه معین از فضا را می‌توان با عملیات محاسبه بزرگی بردار در آن نقطه از میدان برداری نگاشت کرد. این نگاشت عملیات انجام شده بر روی میدان مغناطیسی را حفظ می‌کند و اطمینان حاصل می‌کند که نتایج به دست آمده از ساختار ریاضی با نتایج به دست آمده از ساختار فیزیکی مطابقت دارد. به طور خلاصه، میدان مغناطیسی در فیزیک را می‌توان با استفاده از ایزومورفیسم و همومورفیسم به یک ساختار ریاضی نگاشت، که امکان درک و تجزیه و تحلیل بهتر پدیده فیزیکی را فراهم می‌کند.

کتاب‌نامه

- زارع‌پور، م. ص. (۱۳۹۶). فلسفه ریاضی ویتگنشتاین. دانشگاه شریف.
- سیاوشی، ا. (۱۳۸۹). فلسفه ریاضی لاکاتوش. فرهنگ و اندیشه ریاضی (۴۵)، ۵۱-۶۰.
- طالب زاده، س. ح. (تابستان ۱۳۸۴). تحلیل فلسفی از نسبت ریاضیات و علم جدید. فصلنامه فلسفه دانشگاه تهران (۱۰)، ۵۱-۷۶.
- گنون، ر. (۱۳۶۵). سیطره کمیت و علائم آخرالزمان (ترجمه ع. کاردان). مرکز نشر دانشگاهی.
- منیری، م. (۱۳۹۷). ساختارگرایی در فلسفه ریاضی معاصر. فرهنگ و اندیشه ریاضی (۶۳)، ۳۷-۵۰.

مسئله کاربردپذیری ریاضیات در علوم طبیعی (علی سیدی دهقانی) ۱۰۹

- Baker, A. (2011). Explaining the applicability of mathematics in science. *Interdisciplinary Science Reviews*, 36(3), 255-267 .
- Balaguer, M. (2001). *Platonism and anti-platonism in mathematics*. Oxford University Press, USA .
- Bangu, S. (2012). *The Applicability of Mathematics in Science: Indispensability and Ontology*. Basingstoke: Palgrave Macmillan .
- Bonheure, D., Gazzola, F., Maz'ya, V., & Hinshelwood, C. N. S. (2019). About mathematics and reality, Albert Einstein (1921 Nobel Prize in Physics), in his *Geometry and Experience* talk at the Prussian Academy of Sciences in Berlin .
- Colyvan, M. (2001). *The Indispensability of Mathematics*. Oxford university press
- Culler, J. (1998). *Structuralism*.
- Frege, G. (1988). *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Vol. 366). Felix Meiner Verlag .
- Giere, R. N. (2004). How Models Are Used to Represent Reality. *Philosophy of Science*, 71(5), 742-752 .
- Gonzalez, W. J. (2014). On representation and models in Bas van Fraassen's approach. *Bas van Fraassen's approach to representation and models in science*, 3-37 .
- Harvey, A. (2011). The reasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Springer Science+Business Media*, 43, 3657-3664 .
- Heidegger, M. (1977). The age of the world picture. In *Science and the Quest for Reality* (pp. 70-88). Springer .
- Islami, A. (2016). *A match not made in heaven: on the applicability of mathematics in physics*. Springer .
- Ladyman, J. (2014). Structural Realism. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University .
- Lakatos, I. (1963). *Proofs and refutations*. Nelson London
- Liston, m. (2000). Mark Steiner. The applicability of mathematics as a philosophical problem. *Philosophia Mathematica* .
- Lützen, J. (2011). The Physical Origin of Physically Useful Mathematics. *Interdisciplinary Science Reviews*, 36(3), 229-243 .
- Maudlin, T. (2016). *How Mathematics Meets the World*. Springer, 91-102
- Omnès, R. (2011). Wigner's "Unreasonable Effectiveness of Mathematics", Revisited. *Foundations of Physics*, 1729-1739 .
- Palmgren, E., & Rasa, T. (2022). *Modelling Roles of Mathematics in Physics*. Science & Education.
- Popper, K. R. (2002a). TRUTH, RATIONALITY, AND THE GROWTH OF SCIENTIFIC KNOWLEDGE. In *Conjectures and Refutations* (pp. 301-291). Routledge
- Popper, K. R. (2002b). Why are the Calculi of Logic and Arithmetic Applicable to Reality? In *Conjectures and Refutations*. Routledge .
- Reck, E., & Schiemer, G. (2019). *Structuralism in the Philosophy of Mathematics*

- Rizza, D. (2013). The applicability of mathematics: Beyond mapping accounts. *Philosophy of Science*, 80(3), 398-412 .
- Simons ,p. (2001). MARK STEINER The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 181-184 .
- Steiner, M. (1995). The applicabilities of mathematics. *Philosophia Mathematica*, 3(2), 129-156 .
- Steiner, M. (۱۹۹۸). *The Applicability of Mathematics As a Philosophical Problem*. Harvard University Press .
- Van Fraassen, B. C. (1989). *Laws and symmetry*. Clarendon Press
- Wigner, E. p. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1), 1-14 .
- Worrall, J. (1989). Structural realism: The best of both worlds? *dialectica*, 43(1-2), 99-124
- Ye, F. (2010). The Applicability of Mathematics as a Scientific and a Logical Problem. *Philosophia Mathematica*, 18, 144-165 .

