

Paper Type: Original Article



## Fair Allocation of Fixed Cost in One-and Two-Stage Systems Using Data Envelopment Analysis

Faranak Hosseinzade Saljooghi<sup>1,\*</sup> , Ali Reza Pishgouy<sup>1</sup>, Farhad Hamidi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department Mathematics-Statistics and Computer, Faculty of Mathematics, University of Sistan and Baluchistan, Zahedan, Iran; saljooghi@math.usb.ac.ir; Ali.pishgooy@gmail.com; F\_hamidi@math.usb.ac.ir.

### Citation:



Hosseinzade Saljooghi, F., Pishgouy, A. R., & Hamidi, F. (2024). Fair allocation of fixed cost in one- and two-stage systems using data envelopment analysis. *Innovation management and operational strategies*, 5(3), 348–367.

Received: 18/04/2024

Reviewed: 12/05/2024

Revised: 14/06/2024

Accepted: 23/08/2024

### Abstract

**Purpose:** The fair allocation and distribution of fixed costs in a set of competitive entities is one of the most important management issues. Fair cost allocation between stages is of particular importance.

**Methodology:** Data envelopment analysis plays an important role in evaluating and comparing between units, efficiency and fixed cost allocation between different units. In cost allocation, in addition to the approach of maintaining and increasing efficiency, attention should also be paid to the competitive conditions and cooperation. Since cross-efficiency in data envelopment analysis handles these conditions of competition and cooperation between units well.

**Findings:** In this article, using the improved cross-efficiency and the proposed algorithm, we allocate a unique fixed cost to the units under evaluation in single-stage and two-stage supply chain systems fairly. This method does not have the complexity of calculations of previous methods.

**Originality/Value:** The results of the proposed method have been analyzed on real data, 29 branches of Iranian banks in a one-stage. Cost allocation is obtained uniquely. Then, to generalize the model in a two-stage mode, the data of 24 insurance companies with input, intermediate and output indicators have been used.

**Keywords:** Fixed cost allocation, Two-stage system, Improved cross efficiency.



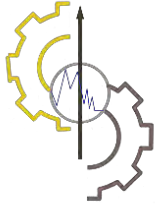
Corresponding Author: saljooghi@math.usb.ac.ir



10.22105/imos.2024.453236.1350



Licensee. **Innovation Management & Operational Strategies**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



## تخصیص منصفانه هزینه ثابت در سیستم‌های یک و دو مرحله‌ای با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

فرانک حسین زاده سلجوقی<sup>۱\*</sup>، علیرضا پیشگوی<sup>۱</sup>، فرهاد حمیدی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>گروه ریاضی-آمار و کامپیوتر، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

### چکیده

هدف: تخصیص عادلانه هزینه ثابت در یک مجموعه از واحدهای رقابتی، یکی از مسایل حایز اهمیت و مهم مدیریتی است. این مقاله به ارائه روشی جدید برای تخصیص منصفانه هزینه بین واحدها، وقتی به صورت یک بخشی هستند یا دارای دو زیربخش می‌باشند، می‌پردازد. در تخصیص هزینه، علاوه بر حفظ یا افزایش کارایی، باید به شرایط رقابتی و همکاری بین واحدهای تحت ارزیابی نیز توجه شود.

روش‌شناسی پژوهش: تحلیل پوششی داده‌ها، یکی از روش‌های مقایسه کارایی واحدها و تخصیص هزینه ثابت بین واحدهای مختلف است. کارایی متقاطع در تحلیل پوششی داده‌ها یکی از روش‌های تخصیص است که نمی‌تواند تخصیص منحصر به فردی ارائه دهد. در این مقاله با استفاده از معرفی روش کارایی متقاطع بهبود یافته و الگوریتم پیشنهادی، هزینه ثابت منحصر به فردی را به واحدهای تحت ارزیابی در سیستم‌های تک مرحله‌ای و زنجیره تامین دو مرحله‌ای به طور عادلانه تخصیص می‌دهیم. این روش پیچیدگی محاسبات روش‌های قبلی را ندارد.

یافته‌ها: نتایج حاصل از روش پیشنهادی بر روی داده‌های واقعی، ۲۹ شعبه بانک ایرانی و کارخانه آهن و استیل در کشور چین در حالت یک مرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با ارائه مثالی به منظور بررسی میزان کارایی پس از تخصیص هزینه و مقایسه با سایر روش‌های نویسندگان قبلی نیز مثالی ارائه شده است. سپس برای تعمیم مدل در حالت دو مرحله‌ای، از داده‌های ۲۴ شرکت بیمه با شاخص‌های ورودی، میانی و خروجی استفاده شده است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: روش جدید تخصیص منصفانه هزینه بین واحدها، بر اساس تحلیل پوششی داده‌های متقاطع، به نحوی ارائه شده که باعث بهبود و یا حفظ کارایی تمامی واحدها گردد. مطابق ساختار داخلی واحدها، کارایی کل و کارایی مراحل داخلی آن نیز در نظر گرفته شود.

کلیدواژه‌ها: تخصیص هزینه ثابت، سیستم دو مرحله‌ای، کارایی متقاطع بهبود یافته.

### ۱- مقدمه

تخصیص و توزیع عادلانه هزینه ثابت در یک مجموعه از نهادهای رقابتی یکی از مسایل مهم مدیریتی است که اغلب سازمان‌ها با آن مواجه هستند. در تخصیص هزینه علاوه بر رویکرد حفظ و افزایش کارایی باید به شرایط رقابتی و همکاری بین واحدهای تحت ارزیابی نیز توجه شود. تحلیل پوششی داده‌ها یک تکنیک برآورد کارایی است، اما می‌تواند برای حل بسیاری از مسایل تصمیم‌گیری از جمله مسائل تخصیص هزینه استفاده شود.

اولین روش تخصیص هزینه ثابت مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها برای سیستم‌های تک مرحله‌ای توسط کوک و کریس [1] پیشنهاد شد. مدل‌های تخصیص هزینه ثابت را بر اساس تاثیر روی کارایی به دو دسته می‌توان تقسیم کرد، اصل عدم تغییر کارایی و اصل موثر پس از تخصیص. دسته اول شامل مدل‌هایی است که پس از تخصیص کارایی را بدون تغییر حفظ می‌کند. از جمله این مدل‌ها می‌توان به مدل‌های کوک و ژو [2]، جهان‌شاه لو و

همکاران [3] و مدل لین [4] اشاره کرد. دسته دوم شامل مدل‌هایی است که موجب بهبود کارایی واحدها تصمیم‌گیری می‌شوند که اولین بار توسط بیزلی [5] پیشنهاد داده شد. سپس توسط لی و همکاران [6] توسعه داده شده است.

در اکثر مطالعات موجود بر تعیین تخصیص هزینه ثابت مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها، واحدهای تحت ارزیابی را به‌عنوان جعبه سیاه در نظر گرفته‌اند. در تعدادی از مطالعه اخیر مانند لی و همکاران [7]، چن و همکاران [8]، همچنین چو و همکاران [9] تخصیص هزینه ثابت را با در نظر گرفتن ساختار درونی، برای سیستم‌های دومرحله‌ای مورد ارزیابی قرار دادند. مطالعات اخیر هزینه ثابت را به‌عنوان ورودی اضافی برای کل سیستم دومرحله‌ای در نظر می‌گیرد؛ بنابراین ممکن است تضاد بین دو مرحله ناشی از هزینه ثابت را افزایش دهد. برای حل این مشکل، باید یک استاندارد تدوین کرد یا روند بازی بین دو مرحله را در نظر گرفت. به‌عنوان مثال، لی و همکاران [7]، [10] با در نظر گرفتن اندازه واحدهای عملیاتی طرح‌های تخصیص را بهینه می‌کنند. به‌طوری‌که نتیجه تخصیص از نقطه‌نظر اندازه متناسب با مصرف ورودی فعلی و تولیدات خروجی باشد. این نشان می‌دهد که هزینه ثابت تخصیص‌یافته به هر *DMU* بر اساس مقادیر ورودی و خروجی است. همچنین چو و همکاران [9] بازی چانه‌زنی بین دو مرحله را در نظر گرفته‌اند و برای محافظت از پیرو، مدل بازی چانه‌زنی درجه رضایت را برای به‌دست آوردن یک راه‌حل تعادل نش ارائه کردند که به این معنی است که یک طرح تخصیص منحصر به فرد تعیین شود. به‌هر حال ممکن است بین دو مرحله رهبر و پیرو رابطه تسلط وجود داشته باشد و در این مورد ممکن است حداقل هزینه خود را تا آنجا که ممکن است به خود تخصیص دهد و در نتیجه مقدار بیشتری از هزینه ثابت را به پیرو اختصاص دهد یعنی بین دو مرحله رابطه عدم همکاری است و برعکس بین دو مرحله رابطه برابری وجود داشته باشد یعنی دو مرحله در رابطه همکاری است. با توجه به این مفاهیم هر دو مرحله هزینه عادلانه می‌خواهند.

ژو و همکاران [11] با دیدگاه عادلانه در سال ۲۰۲۲ مدل‌ها را در حالت بازی مشارکتی و غیر مشارکتی را بررسی و با معرفی مدل جدید و الگوریتم‌هایی نشان دادند در شرایطی خاص می‌توان تخصیص منحصر به فردی ایجاد نمود. با این حال تخصیص، همواره منحصر به فرد نیست به‌خصوص در سیستم‌های دومرحله‌ای؛ بنابراین هدف این مقاله ارائه مدلی در تخصیص هزینه است که علاوه بر تخصیص عادلانه به تمامی واحد تحت ارزیابی، تخصیص هزینه به‌صورت منحصر به فرد به‌دست آید که این امر با استفاده از ارتباط اولیه و دوگان در برنامه‌ریزی خطی و تعمیم روش کارایی متقاطع اصلاح شده [12] انجام شده است همچنین روش پیشنهاد قابل استفاده برای سیستم‌های چندمرحله‌ای مانند زنجیره تامین می‌باشد که در این مقاله روش را برای سیستم‌های دومرحله‌ای مطرح و با اعمال آن بر مثال‌های کاربردی نحوه تعیین وزن‌های منحصر به فرد و طرح تخصیص ثابت برای تمامی واحدها و زیربخش‌های آن‌ها نشان داده شده است.

این مقاله دارای بخش‌های زیر است. ابتدا مروری بر کارایی متقاطع و بعضی از قضایای مسایل اولیه و دوگان و مساله آشوب، همچنین محاسبه کارایی متقاطع بهبود یافته خواهیم داشت. سپس در بخش سوم، الگوریتم پیشنهادی را معرفی کرده و مثال‌های عددی برای تخصیص هزینه در سیستم‌های یک‌مرحله‌ای، همچنین مقایسه و تجزیه و تحلیل نتایج بیان شده است. در بخش چهارم به‌مرور تخصیص هزینه ثابت در سیستم‌های دومرحله‌ای پرداخته و در بخش پنجم مدل تعمیم‌یافته کارایی متقاطع برای سیستم‌های دومرحله‌ای مطرح شده است. در بخش آخر نتایج حاصل از اعمال الگوریتم پیشنهادی بر سیستم‌های دومرحله‌ای با ارائه مثال‌های کاربردی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

## ۲- کارایی متقاطع

مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی، به هر *DMU* اجازه می‌دهد وزن‌های ورودی و خروجی بهینه را برای به حداکثر رساندن مقدار کارایی خود انتخاب کند. این دیدگاه باعث می‌شود وزن‌های حاصل از ارزیابی، منجر به بزرگ‌نمایی هرگونه مزایا و نادیده گرفتن معایب شود. همچنین اگرچه مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها می‌توانند واحدهای کارا از ناکارای تشخیص دهند اما قدرت تمیز دادن بین واحدهای کارا را ندارند. برای رفع این مشکل، رتبه‌بندی واحدهای کارا انجام می‌شود. یکی از معروف‌ترین روش‌های رتبه‌بندی بر اساس کارایی متقاطع، توسط سکستون و همکاران [13] ارائه شده است. در این روش ابتدا کارایی و وزن‌های شاخص‌های ورودی و خروجی مطابق مدل (۱)، محاسبه می‌شود. این مدل را مدل مضربی *CCR* می‌نامند.

$$\theta_o^* = \text{Max} \sum_{r=1}^s u_r y_{ro},$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \quad (1)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r \geq 0 \quad v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s.$$

اگر وزن‌های بهینه مدل (۱) را  $v_{1o}^*, \dots, v_{1m}^*, u_{1r}^*, \dots, u_{1s}^*$  بنامیم، مقادیر  $E_{pj}$  برای هر  $DMU_j$   $j = (1, \dots, n)$  به ازای وزن‌های  $DMU_p$  از رابطه (۲) تعیین می‌شوند.

$$E_{pj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rp}^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ip}^* x_{ij}}, \quad p, j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

که جدول ۱، حاصل می‌شود. اکنون کارایی متقاطع  $DMU_j$  از میانگین سطری ماتریس جدول ۱ به دست می‌آید.

جدول ۱- ماتریس کارایی متقاطع.

Table 1- Cross efficiency matrix.

	DMU1	DMU1	...	DMU1	کارایی متقاطع
DMU1	$E_{11}$	$E_{12}$	...	$E_{1n}$	$\bar{E}_1 = \sum_{j=1}^n E_{1j}$
DMU1	$E_{21}$	$E_{22}$	...	$E_{2n}$	$\bar{E}_2 = \sum_{j=2}^n E_{2j}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
DMU1	$E_{n1}$	$E_{n2}$	...	$E_{nn}$	$\bar{E}_n = \sum_{j=1}^n E_{nj}$

برای محاسبه کارایی متقاطع  $DMU_p$  باید وزن‌های بهینه استفاده شود، ولی به دلیل وجود جواب‌های دگرگین در جواب حاصل از مدل (۱)، وزن‌های حاصل منحصر به فرد نخواهد بود و از این رو با هر بار جواب شدنی مقادیر کارایی متفاوت به دست می‌آید. برای رفع این مشکل و محاسبه وزن‌های منحصر به فرد از کارایی متقاطع بهبود یافته که وزن‌های منحصر به فرد ایجاد می‌کند استفاده می‌کنیم.

### ۱-۲- کارایی متقاطع بهبود یافته

برای به دست آوردن وزن‌های منحصر به فرد در مدل‌های مضربی، ابتدا به یکی از مباحث مهم و اساسی در برنامه‌ریزی خطی، ارتباط بین مسایل اولیه و دوگان می‌پردازیم. سپس از این ارتباط و مساله آشوب استفاده می‌کنیم.

ارتباط بین جواب‌های بهینه مسایل  $P$  و  $D$ .

مسایل برنامه‌ریزی خطی پرایمال ( $P$ ) و دوآل ( $D$ ) را در نظر می‌گیریم

$$P: \text{Min } Z = cx,$$

$$D: \text{Max } W = wb,$$

$$\text{s. t. } Ax \geq b,$$

$$\text{s. t. } wA \leq c,$$

$$x \geq 0, \quad w \geq 0.$$

که در آن  $A$  ماتریسی  $m \times n$  است و  $m < n$  ( $\text{Rank } A$ ).

لم ۱- اگر مساله  $D$  دارای جواب بهینه دگرگین باشد و  $x^*$  جواب اساس شدنی بهینه مساله  $P$  باشد آنگاه  $x^*$  باید تباهیده باشد [12].

بنابراین اگر تباهدگی در مساله  $P$  را برطرف نماییم مساله  $D$  دارای جواب بهینه منحصر به فرد خواهد بود. در حالت تباهدگی مساله  $P$ ، بردار  $b$  به زیر فضای  $(m-1)$  بعدی از ستون‌های ماتریس ضرایب  $A$  تعلق دارد. برای رهایی از تباهدگی از آشوب مقادیر سمت راست استفاده می‌کنیم که به معنی حرکت دادن مختصر بردار  $b$  از وضعیت کنونی به وضعیتی است که از فضای مورد نظر خارج شود. برای این منظور قرار می‌دهیم

$$b(\varepsilon) = b + (\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^m)^t,$$

که در آن  $\varepsilon$  عدد مثبت بسیار کوچکی است.

**قضیه ۱-** برای هر بردار  $b \in R^m$  عدد مثبتی مانند  $\varepsilon_1$  وجود دارد که به ازای هر  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  مدل مضربی  $CCR$  غیر تباهدگی می‌باشد.

برهان: [12].

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= cx, \\ \text{s.t. } Ax &= b(\varepsilon), \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه فرم مضربی  $CCR$  (مدل (۱)) همواره دارای جواب بهینه دگرین است بنابراین ماتریس کارایی متقاطع منحصر به فرد نیست. در روش‌های موجود، با افزودن قیود جدید تحت عنوان اهداف ثانویه، تلاش شده است که پراکندگی مقادیر وزن‌ها را کاهش دهند ولی چون ماتریس اولیه از حالت چندگانگی خارج نمی‌شود لذا هنوز مشکل جواب‌های دگرین و به تبع آن عدم یکتایی وزن‌ها باقی است. چون مدل مضربی  $CCR$ ، یک برنامه‌ریزی خطی است بنا بر لم ۱، دوگان آن که مدل پوششی  $CCR$  نامیده می‌شود باید جواب بهینه تباهدگی داشته باشد؛ بنابراین می‌توان با استفاده از عکس نقیض لم ۱، نشان داد که اگر فرم پوششی  $CCR$  جواب غیر تبهگن داشته باشد آنگاه فرم مضربی آن جواب بهینه منحصر به فرد خواهد داشت. بر طبق قضیه ۱ و با استفاده از مساله آشوب، فرم پوششی  $CCR$  را به صورت مدل (۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} P: \text{Min } \theta, \\ \text{s.t. } - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + \theta x_{ip} &\geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{rp} + \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

دوگان مدل (۳) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} D: \text{Max } \varepsilon \sum_{i=1}^m v_i + \varepsilon \sum_{r=1}^s u_r + \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}, \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m v_r x_{ip} &= 1, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_r &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ v_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

**قضیه ۲-** جواب بهینه مدل (۴) منحصر به فرد است [12].

بر اساس قضیه‌های ۱ و ۲، اگر برای محاسبه وزن شاخص‌های ورودی و خروجی از مدل (۴) استفاده کنیم وزن‌های حاصل، منحصر به فرد به دست می‌آیند؛ بنابراین ماتریس کارایی متقاطع نیز منحصر به فرد خواهد بود و به موجب آن، تخصیص هزینه هر واحد تصمیم‌گیرنده، منحصر به فرد می‌باشد.

### ۳- الگوریتم تخصیص هزینه ثابت بر اساس کارایی متقاطع بهبودیافته

در الگوریتم کارایی متقاطع بهبودیافته، تخصیص هزینه ثابت را می‌توان از طریق جدول‌های متقاطع و روش‌های ساده الگوریتم به واحدهای تصمیم‌گیری نسبت داد.

در ادامه مراحل الگوریتم توضیح داده شده است.

گام ۱- وزن‌های کارا  $u_r^*$  و  $v_r^*$  و مقدار کارایی  $\theta_0^*$  برای هر  $DMU$  توسط مدل مضربی  $CCR$  بهبودیافته محاسبه می‌کنیم.

گام ۲- کارایی متقاطع بهبودیافته برای هر  $DMU$  محاسبه و جدول کارایی متقاطع بهبودیافته را تشکیل می‌دهیم.

گام ۳- شامل دو مرحله زیر است:

۱- ماکزیمم هر ستون را انتخاب می‌کنیم  $X_i$

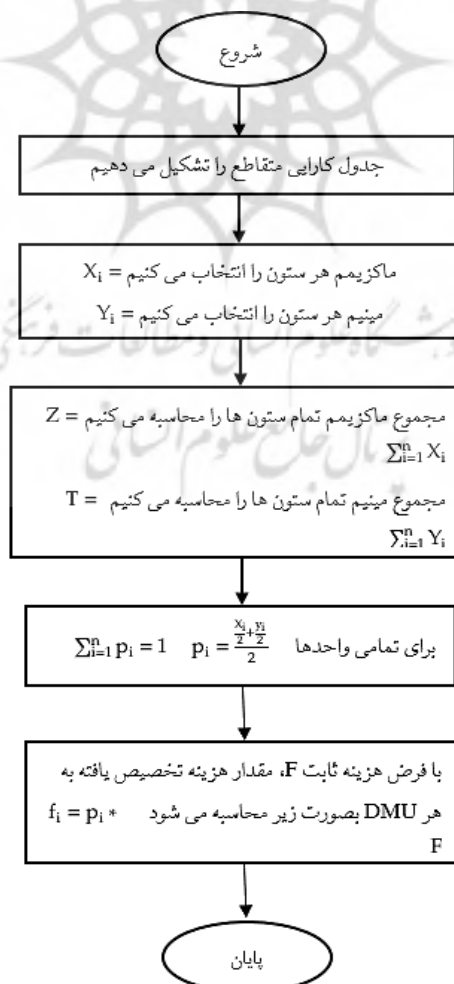
۲- مینیمم هر ستون را انتخاب می‌کنیم  $Y_i$

گام ۴- مجموع ماکسیمم و مینیمم ستون‌ها را محاسبه می‌کنیم ( $T = \sum_{i=1}^n Y_i$  و  $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ ).

گام ۵-  $P_i$  را برای هر  $DMU_i$  به صورت  $P_i = \frac{X_i Y_i}{Z T}$  محاسبه می‌کنیم.

در نهایت فرض کنیم هزینه ثابت  $F$  واحد باشد که قرار است بین  $DMU$  توزیع شود، در این صورت سهم هر  $DMU$  به صورت  $f_i = p_i * F$  محاسبه می‌شود.

مقدار  $f_i$ ، مقدار نهایی تخصیص عادلانه هزینه ثابت واحد تحت ارزیابی خواهد بود. شکل ۱، گام‌های الگوریتم پیشنهادی است.



شکل ۱- الگوریتم پیشنهادی تخصیص هزینه.

Figure 1- Proposed cost allocation algorithm.

## ۴- مثال‌های عددی

مثال ۱- به منظور نشان دادن سادگی الگوریتم پیشنهادی و سهم مجموع مقادیر که برابر عدد یک می‌شود الگوریتم ارائه شده را با یک مثال ساده مورد بررسی قرار می‌دهیم. جدول ۲، ۳ بازیکن با ۳ معیار مختلف برگرفته از مقاله ناکاباشی و همکاران را نشان می‌دهد [14]. در جدول ۳ میانگین حداکثر و حداقل مقدار ارزش عملکرد هر بازیکن را نشان می‌دهد که مشاهده می‌شود جمع میانگین حداکثر و حداقل مقدار برابر یک نمی‌شود. ولی با مشاهده آخرین عدد در سطر و ستون آخر در جدول ۴ با استفاده از الگوریتم پیشنهاد شده جمع کل مقدار یک می‌شود و می‌توان گفت که سهم هر واحد تحت ارزیابی از یک واحد چقدر است و با توجه به اینکه این سهم به نسبت، بر اساس وزن‌های ورودی و خروجی به هر واحد تخصیص یافته است می‌توان امیدوار شد که تخصیص عادلانه‌ای به هر واحد اختصاص یافته است؛ بنابراین در اکثر مسایل برای تعیین وزن‌های هر واحد مورد ارزیابی می‌توان از این الگوریتم استفاده کرد.

جدول ۲- داده‌های مربوط به مثال ۱.

Table 2- Data related to example 1.

	بازیکن‌ها		
	A	B	C
معیار ۱	0.25	0.3	0.45
معیار ۲	0.5	0.25	0.25
معیار ۳	0.125	0.5	0.375

جدول ۳- میانگین کمترین و بیشترین مقادیر.

Table 3- The average of the lowest and highest values.

	بازیکن‌ها			Sum
	A	B	C	
بیشترین مقدار	0.5	0.5	0.45	1.45
کمترین مقدار	0.125	0.25	0.25	0.625
میانگین	0.3125	0.375	0.35	1.0375

جدول ۴- اجرا مراحل الگوریتم پیشنهادی بر روی داده‌های مثال ۱.

Table 4- Implementation of the steps of the proposed algorithm on the data of example 1.

	بازیکن‌ها			Sum
	A	B	C	
$X_i = \text{Max}$	0.5	0.5	0.45	Z=1.45
$Y_i = \text{Min}$	0.125	0.25	0.25	T=0.625
$X_i = \text{Max}$	0.5	0.5	0.45	
$Z = \sum \text{Max}$	1.45	1.45	1.45	
$Y_i = \text{Min}$	0.125	0.25	0.25	
$T = \sum \text{min}$	0.625	0.625	0.625	
$\frac{X_i + Y_i}{Z + T}$	0.2724137931	0.3724137931	0.355172413793	1
$P_i = \frac{Z + T}{2}$				

مثال ۲- در این بخش به منظور ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی، آن را بر روی داده‌های واقعی ۲۰ شعبه بانکی در ایران برگرفته از مقاله امیر تیموری و کرد رستمی [15] که دارای ۳ ورودی و ۳ خروجی می‌باشد اجرا می‌کنیم. ورودی‌ها شامل کارمندان، پایانه‌های کامپیوتر و مساحت شعبه (متر مربع) و خروجی‌ها شامل مقدار سپرده‌ها، مبالغ وام‌ها و میزان کارمزد می‌باشند. مقادیر ورودی و خروجی در جدول ۵ آورده شده است. همچنین در ستون‌های دوم تا هفتم جدول ۶ وزن‌های بهینه حاصل از مدل (۷) و در ستون هشتم، میزان کارایی به دست آمده از این مدل آورده شده است.



جدول ۵- مقادیر ورودی و خروجی‌ها مثال ۲.

Table 5- Values of inputs and outputs example 2.

شعب	کارمند	پایانه‌های کامپیوتر	مساحت	سپرده‌ها	وام‌ها	کارمزد
1	0.9503	0.70	0.1550	0.1900	0.5214	0.2926
2	0.7962	0.60	1	0.2266	0.6274	0.4624
3	0.7982	0.75	0.5125	0.2283	0.9703	0.2606
4	0.8651	0.55	0.2100	0.1927	0.6324	1
5	0.8151	0.85	0.2675	0.2333	0.7221	0.2463
6	0.8471	0.65	0.5000	0.2069	0.6025	0.5689
7	0.7189	0.60	0.3500	0.1824	0.9000	0.7158
8	0.7853	0.75	0.1200	0.1250	0.2340	0.2977
9	0.4756	0.60	0.1350	0.0801	0.3643	0.2439
10	0.6782	0.55	0.5100	0.0818	0.1835	0.0486
11	0.7112	1	0.3050	0.2117	0.3179	0.4031
12	0.8113	0.65	0.2550	0.1227	0.9225	0.6279
13	0.6586	0.85	0.3400	0.1755	0.6452	0.2605
14	0.9763	0.80	0.5400	0.1443	0.5143	0.2433
15	0.6845	0.95	0.4500	1	0.2617	0.0982
16	0.6127	0.90	0.5250	0.1151	0.4021	0.4641
17	1	0.60	0.2050	0.0900	1	0.1614
18	0.6337	0.65	0.2350	0.0591	0.3492	0.0678
19	0.3715	0.70	0.2375	0.0385	0.1898	0.1112
20	0.5827	0.55	0.5000	0.1101	0.6145	0.7643

جدول ۶- وزن‌های ورودی، خروجی و نمره کارایی حاصل از مدل کارایی CCR بهبودیافته (۳).

Table 6- Weights of input, output and efficiency score obtained from the improved CCR efficiency model (3).

شعب	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	کارایی
1	2.6747	0.7319	0.3765	0	0	6.4516	1
2	1.3649	0.8344	0	0	1.6666	0	0.8328
3	0.6290	0.8732	0	1.2528	0	0	0.9909
4	1.9742	0.5403	0.2779	0	0	4.7190	1
5	0.9832	0.9272	0	0.6644	0	1.7135	0.8989
6	1.2866	0.5816	0.2304	0	1.5385	0	0.7477
7	1.1066	0.7817	0.1321	0.2885	0.6031	1.2306	1
8	3.4548	0.9454	0.4864	0	0	8.3333	0.7978
9	2.2237	1.4862	0.2834	0.7690	0	4.6979	0.7887
10	1.4890	0.9103	0	0	1.8181	0	0.2888
11	0.8473	0.3458	0.7808	1.2633	0	0.3328	0.6040
12	1.2205	0.8157	0.1555	0.4221	0	2.5785	1
13	0.7623	1.0583	0	1.5183	0	0	0.8166
14	1.0237	0.6258	0	0	1.2499	0	0.4696
15	0.8118	0.6172	0.2715	0.6444	0	1.2420	1
16	0.8880	0.6540	0.5905	1.6321	0	0	0.6392
17	1.6404	0.8524	0	0	0	4.8780	1
18	1.0477	1.1785	0	1.0563	0	1.4067	0.4734
19	1.3515	1.8762	0	2.6917	0	0	0.4081
20	1.2032	0.4455	0.7768	1.0285	0.7285	0	1

با توجه به اینکه، وزن‌های جدول ۶ بر اساس مدل (۴) محاسبه شده است و طبق قضایای ذکر شده، منحصر به فرد هستند بنابراین می‌توان الگوریتم پیشنهادی را بر روی این داده‌ها پیاده‌سازی کرد و مطمئن‌تر از اعمال الگوریتم پیشنهادی، مقدار هزینه ثابت منحصر به فردی به هر واحد خواهد رسید. جدول ۷ شامل ماتریس کارایی متقاطع بهبودیافته و همچنین مراحل الگوریتم پیشنهادی برای مثال ۲ می‌باشد. سطرها و ستون‌های ۱ تا ۲۱ شامل، ماتریس کارایی متقاطع بهبودیافته می‌باشد. سطرهای ۲۱ تا ۲۷ مراحل الگوریتم را نشان می‌دهد. سطر ۲۶ مقدار هزینه ثابت بر مبنای ۱۰۰ واحد را به هر  $DMU$  تحت ارزیابی نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌نمایید ستون و سطر آخر جدول ۷ مقدار مجموع هزینه‌ها را نشان می‌دهد که دقیقاً برابر ۱۰۰ واحد می‌باشد یعنی الگوریتم ارایه شده به‌طور کامل و دقیق هر ۱۰۰ واحد هزینه ثابت را به‌طور عادلانه و به‌صورت منحصر به فرد بین شعب تحت ارزیابی تقسیم کرده است. به‌عنوان مثال در جدول ۷ مشاهده می‌کنید سهم شعبه بانک یک مورد نظر برابر با مقدار  $4/0.320$  از مجموع ۱۰۰ واحد هزینه ثابت می‌باشد.



جدول ۷- نتایج تخصیص هزینه الگوریتم پیشنهادی برای مثال ۲.  
Table 7- Cost allocation results of the proposed algorithm for example 2.

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1.00	0.60	0.48	1.00	0.75	0.57	0.74	1.00	0.88	0.60	0.46	0.88	0.48	0.60	0.69	0.44	1.00	0.67	0.48	0.46
2	0.19	0.83	0.69	0.19	0.36	0.83	0.44	0.19	0.30	0.83	0.58	0.30	0.69	0.83	0.40	0.68	0.19	0.43	0.69	0.73
3	0.43	0.90	0.99	0.43	0.80	0.80	0.43	0.67	0.90	0.62	0.62	0.67	0.99	0.90	0.74	0.76	0.48	0.88	0.99	0.67
4	1.00	0.86	0.62	1.00	0.83	1.00	1.00	1.00	1.00	0.86	1.00	1.00	0.62	0.86	1.00	0.83	0.83	0.78	0.62	1.00
5	0.72	0.65	0.76	0.72	0.90	0.59	0.79	0.72	0.88	0.65	0.57	0.88	0.76	0.65	0.82	0.62	0.76	0.89	0.76	0.54
6	0.37	0.72	0.62	0.54	0.75	0.62	0.62	0.37	0.51	0.72	0.67	0.51	0.62	0.72	0.60	0.67	0.35	0.58	0.62	0.72
7	0.63	1.00	1.00	0.63	0.94	1.00	1.00	0.63	0.89	1.00	1.00	0.89	1.00	1.00	1.00	1.00	0.62	1.00	1.00	1.00
8	0.80	0.29	0.29	0.80	0.47	0.32	0.44	0.80	0.61	0.29	0.41	0.61	0.29	0.29	0.50	0.34	0.69	0.41	0.29	0.36
9	0.66	0.41	0.62	0.66	0.76	0.40	0.61	0.66	0.79	0.41	0.60	0.79	0.62	0.41	0.75	0.58	0.67	0.74	0.62	0.48
10	0.11	0.29	0.25	0.11	0.19	0.26	0.21	0.11	0.16	0.29	0.17	0.16	0.25	0.29	0.18	0.20	0.12	0.21	0.25	0.20
11	0.48	0.33	0.46	0.48	0.51	0.36	0.45	0.48	0.53	0.33	0.60	0.53	0.46	0.33	0.57	0.55	0.42	0.51	0.46	0.49
12	0.75	0.87	0.87	0.75	1.00	0.84	1.00	0.75	1.00	0.87	0.82	1.00	0.87	0.87	1.00	0.82	0.79	1.00	0.87	0.80
13	0.47	0.55	0.82	0.47	0.76	0.51	0.65	0.47	0.68	0.55	0.61	0.68	0.82	0.55	0.72	0.68	0.51	0.80	0.82	0.54
14	0.25	0.47	0.44	0.25	0.39	0.44	0.42	0.25	0.35	0.47	0.35	0.35	0.44	0.47	0.39	0.38	0.26	0.42	0.44	0.37
15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.85	1.00	1.00	1.00
16	0.23	0.33	0.55	0.23	0.37	0.35	0.37	0.23	0.34	0.33	0.63	0.34	0.55	0.33	0.45	0.64	0.21	0.43	0.55	0.53
17	0.78	0.96	0.74	0.78	1.00	0.80	1.00	0.78	1.00	0.96	0.41	1.00	0.74	0.96	0.82	0.51	1.00	0.95	0.74	0.46
18	0.29	0.34	0.43	0.29	0.46	0.29	0.40	0.29	0.42	0.34	0.34	0.42	0.43	0.34	0.40	0.31	0.34	0.47	0.43	0.25
19	0.19	0.18	0.41	0.19	0.33	0.17	0.25	0.19	0.28	0.18	0.24	0.28	0.41	0.18	0.33	0.37	0.19	0.36	0.41	0.24
20	0.32	0.72	0.83	0.32	0.55	0.80	0.63	0.32	0.49	0.72	1.00	0.49	0.83	0.72	0.68	1.00	0.29	0.64	0.83	1.00
Min/Sum	0.03	0.05	0.07	0.03	0.05	0.05	0.06	0.03	0.04	0.05	0.05	0.04	0.07	0.05	0.05	0.06	0.03	0.06	0.07	0.06
Max/Sum	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Average	0.04	0.05	0.06	0.04	0.05	0.05	0.05	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.05	0.05	0.05	0.04	0.05	0.06	0.05
f=F*P	4.03	5.01	5.98	4.03	5.15	4.87	5.42	4.03	4.73	5.01	4.87	4.73	5.98	5.01	5.01	5.29	4.17	5.42	5.98	5.29

**مثال ۳-** در این بخش به منظور ارزیابی و کاربردی بودن روش پیشنهادی، آن را بر روی داده‌های واقعی کارخانه آهن و استیل با ۱۰ خط تولید استان آنهوئی<sup>۱</sup> کشور چین پیاده‌سازی می‌کنیم. این مثال یک کاربرد واقعی در کارخانه آهن و استیل است. این داده‌ها برگرفته از مقاله لی و همکاران [10] می‌باشد. این شرکت دارای ده خط تولید است و با توجه به مقررات زیست‌محیطی و انرژی، این شرکت با فشار زیادی برای بهبود وضعیت ساختار تولید و افزایش کارایی مواجه است. در سال ۲۰۱۵، این شرکت ۲۰ میلیون یوان (RMB) را برای ارتقاء و مقاوم‌سازی برخی تجهیزات ضروری تولید هزینه کرد؛ بنابراین، مدیران خطوط تولید خود را ملزم می‌کند تا کل هزینه را پوشش دهند. در این کاربرد، هر خط تولید به‌عنوان یک DMU مستقل و همگن در نظر گرفته می‌شود که دارای چهار ورودی (زغال‌سنگ استاندارد، سنگ‌آهن، آب جدید و نیروی کار) و دو خروجی (تولید فولاد و آهن) است که در جدول ۷ نشان داده شده است. هزینه ارتقا را به‌طور کامل جبران کنید، در اینجا هزینه ثابتی که باید تخصیص داده شود معادل  $F = 2000$  واحد است (هر واحد معادل ده هزار یوان).

ورودی‌ها شامل زغال‌سنگ استاندارد، سنگ‌آهن، آب جدید و نیروی کار، خروجی‌ها شامل فولاد و آهن می‌باشد. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها در جدول ۷ آورده شده است. ستون‌های هشتم و نهم جدول ۷ به ترتیب میزان هزینه ثابت تخصیص یافته به هر خط تولید توسط روش لی و روش پیشنهادی ما می‌باشد. با توجه به تخصیص نهایی در هر دو روش چهار خط تولید پنجم، هفتم، هشتم و نهم بیشترین مقدار بودجه را به خود تخصیص داده‌اند و کمترین تخصیص هزینه ثابت در هر دو روش مربوط به واحدهای یک، چهارم و دهم می‌باشد. در روش ما، حداکثر تخصیص هزینه ثابت به واحد تحت ارزیابی ۵ تخصیص یافته است، در حالی که در مقاله ذکر شده بیشترین تخصیص هزینه به واحد ۷ اختصاص یافته است. با در نظر گرفتن این دو واحد، مشاهده می‌شود که واحد ۵ با ورودی کمتر، خروجی بیشتری نسبت به واحد ۷ تولید می‌کند؛ بنابراین تخصیص هزینه بیشتر به خط تولید ۵ عادلانه‌تر و منطقی‌تر خواهد بود که یکی از ویژگی‌های مطرح شده مدل پیشنهادی ما می‌باشد.

جدول ۸- مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها و تخصیص هزینه به هر واحد.

Table 8- Values of inputs and outputs and cost allocation to each unit.

DMU	زغال‌سنگ استاندارد	سنگ آهن	آب جدید	نیروی کار	فولاد	آهن	تخصیص هزینه یانگ لی و همکاران	تخصیص هزینه روش پیشنهادی
1	74,115	375,944	2420	374	150,236	41,917	87.1106	142.8732
2	84,713	381,974	3464	224	106,177	68,738	106.8298	174.4780
3	76,087	299,056	2848	363	224,356	42,603	154.3165	180.2188
4	109,150	420,650	1645	397	133,291	48,536	102.0796	178.3685
5	114,462	356,279	1661	324	301,229	60,390	314.1732	308.1870
6	104,493	427,276	3024	356	200,101	60,148	156.9450	157.4165
7	118,825	392,056	4220	351	253,604	125,641	400.4142	243.7236
8	159,620	283,154	3136	290	160,096	102,599	273.6742	245.6999
9	193,873	391,289	1976	341	160,441	120,832	351.0359	228.4449
10	146,680	278,386	2246	442	97,847	49,659	53.4210	140.5891

**مثال ۴-** در این مثال رویکرد پیشنهاد شده را به منظور مقایسه با روش‌های نویسندگان قبلی و همچنین تاثیر افزایش مقدار کارایی پس از تخصیص هزینه با استفاده از داده‌های ارائه شده در مقاله کوک و کریس [1] با دوازده واحد تحت ارزیابی با ۳ ورودی و ۲ خروجی مورد بررسی، تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. جدول ۹ مقادیر ورودی و خروجی و همچنین مقدار کارایی واحدهای تحت ارزیابی را قبل از تخصیص هزینه نشان می‌دهد.

جدول ۹- مقادیر ورودی و خروجی مثال ۴.

Table 9 - Input and output values of example 4.

DMU	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$\theta_{CCR}^*$
1	350	39	9	67	751	0.7567
2	298	26	8	73	611	0.9230
3	422	31	7	75	584	0.7470
4	281	16	9	70	665	1
5	301	16	6	75	445	1
6	360	29	17	83	1070	0.9612
7	540	18	10	72	457	0.8604
8	276	33	5	78	590	1
9	323	25	5	75	1074	1
10	4 4 4	64	6	74	1072	0.8318
11	323	25	5	25	350	0.3333
12	4 4 4	64	6	104	1199	1

<sup>1</sup> Anhui

جدول ۱۰- تخصیص هزینه با رویکردهای مختلف.

Table 10- Cost allocation with different approaches.

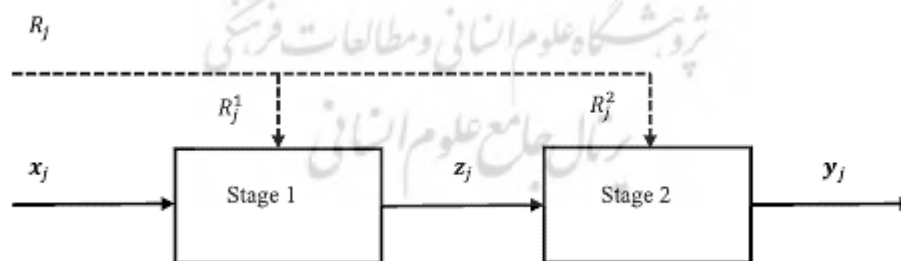
DMU	روش پیشنهادی	کوک و کریس (۱۹۹)	بیزیلی (۲۰۰۳)	کوک و ژو (۲۰۰۵)	دو و همکاران (۲۰۱۴)	خدابخشی همکاران (۲۰۱۴)	لی و همکاران (۲۰۱۸)	$\theta_{New}^*$
1	7.156	14.52	6.78	11.22	5.79	6.75	5.538	0.874
2	8.130	6.74	7.21	0	7.95	8.04	7.532	0.985
3	7.353	9.32	6.83	16.95	6.54	7.28	7.350	1
4	9.297	5.60	8.47	0	11.10	9.37	7.873	1
5	9.648	5.70	7.08	0	8.69	9.86	6.377	1
6	8.092	8.15	10.06	15.34	13.49	8.10	11.499	1
7	7.163	8.86	5.09	0	7.10	7	5.901	1
8	8.498	6.26	7.74	0	6.83	8.83	7.770	1
9	13.184	7.31	15.11	17.62	16.68	13.13	11.899	1
10	7.707	10.08	10.08	21.15	5.42	7.89	11.378	0.9691
11	4.338	7.31	1.58	17.62	0	4.32	2.735	0.6187
12	9.428	10.08	13.97	0	10.41	9.44	14.142	1

ستون دوم جدول ۱۰ رویکرد پیشنهادی ما را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنید بیشترین مقدار تخصیص یافته به  $DMU_9$  و کمترین مقدار به  $DMU_{11}$  تعلق گرفته است.  $DMU_9$  و  $DMU_{11}$  چون با ورودی یکسان خروجی متفاوتی دارند لذا اگر بر روی این  $DMUs$  تمرکز کنیم مشاهده می‌کنیم رویکرد ما به  $DMU_9$  که خروجی بالاتری دارد مقدار بیشتری تخصیص داده است. همچنین با مقایسه بین  $DMU_{10}$  و  $DMU_{12}$  نیز که ورودی یکسان و خروجی متفاوت دارند تفاوت قائل شده است و به  $DMU_{12}$  با خروجی بالاتر مقدار بیشتری اختصاص داده است. از دیگر مزیت‌های روش ما به هر  $DMU$  مقدار مثبت هزینه تخصیص داده و به هیچ  $DMU$  مقدار صفر مانند روش کوک و ژو [2] را تخصیص نداده است. همچنین در ستون ۹ جدول ۱۰ مشاهده می‌کنید، که کارایی  $DMU$  ناکارای پس از تخصیص هزینه بهبود یافته و  $DMUs$  کارا، کارایی خود را حفظ کرده‌اند.

## ۵- تخصیص هزینه ثابت در تحلیل پوششی داده‌ها دومرحله‌ای

عدم توجه به ساختار داخلی واحدها، تخصیص هزینه ثابت مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها جعبه سیاه نامیده می‌شود. در مطالعات اخیر منتشر شده توسط لی و همکاران [7]، چو و همکاران [9]، ژو و همکاران [11] تخصیص هزینه ثابت را با در نظر گرفتن ساختار درونی تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای مورد ارزیابی قرار داده‌اند.

ساختار کلی یک سیستم دومرحله‌ای با تخصیص هزینه ثابت در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- سیستم دومرحله‌ای با تخصیص هزینه ثابت.

Figure 2- Two-stage system with fixed cost allocation.

فرض کنید  $R$  هزینه ثابت، باید به هر  $DMU$  اختصاص داده شود و  $R_j$  نشان‌دهنده هزینه تخصیص داده شده به هر  $DMU_j$  می‌باشد.  $R_j^1, R_j^2$  به ترتیب نشان‌دهنده تخصیص هزینه به مرحله اول و مرحله دوم می‌باشد که  $R_j^1 + R_j^2 = R_j$  و در نهایت معادله (۵) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^n (R_j^1 + R_j^2) = R, \quad R_j^1, R_j^2 \geq 0, \quad (5)$$

که هزینه ثابت کل  $R$  به هر مرحله از هر  $DMU$  اختصاص داده شده است را نشان می‌دهد. بر اساس مدل چن و همکاران [8] مدل (۶) می‌تواند کارایی هر  $DMU_0$  را مورد ارزیابی قرار دهد.

$$\begin{aligned} & \max \frac{w_1 \sum_{d=1}^p w_d z_{do}}{\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_o^1\right)} + \frac{w_2 \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + v_{m+1} R_o^2\right)}, \\ \text{s. t. } & \frac{\sum_{d=1}^p w_d z_{dj}}{\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_j^1\right)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\left(\sum_{d=1}^p w_d z_{dj} + v_{m+1} R_j^2\right)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{j=1}^n (R_j^1 + R_j^2) = R, \end{aligned} \quad (۶)$$

در مدل (۶)، وزن  $v_{m+1} \geq 0$ . در غیر این صورت مقدار ورودی  $R_j^1, R_j^2$  تأثیری در کارایی واحد تحت ارزیابی نخواهد داشت و این ورودی‌ها نادیده گرفته خواهند شد. همچنین وزن‌های  $w_1, w_2$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$w_1 = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_o^1}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_o^1 + \left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + v_{m+1} R_o^2\right)}$$

$$w_2 = \frac{\left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + v_{m+1} R_o^2\right)}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_{m+1} R_o^1 + \left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + v_{m+1} R_o^2\right)}$$

با جایگزینی وزن‌های فوق در مدل (۶) و  $v_{m+1} = 1$  به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \max \frac{\left(\sum_{d=1}^p w_d z_{do} + \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}\right)}{\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + R_o^1 + \sum_{d=1}^p w_d z_{do} + R_o^2\right)}, \\ \text{s. t. } & \sum_{d=1}^p w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - R_j^1 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^p w_d z_{dj} - R_j^2 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{j=1}^n (R_j^1 + R_j^2) = R. \end{aligned} \quad (۷)$$

با حل مدل (۷) جواب‌های بهین  $(v_i^*, w_d^*, u_r^*, R_j^1, R_j^2 \forall i, j, d)$  به دست می‌آید، همچنین کارای کل و کارایی هر مرحله برای هر  $DMU_o$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_o^* = \frac{\left(\sum_{d=1}^p w_d^* z_{do} + \sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro}\right)}{\left(\sum_{i=1}^m v_i^* x_{io} + \sum_{d=1}^p w_d^* z_{do} + R_o^1 + R_o^2\right)}$$

$$E_1^* = \frac{\sum_{d=1}^p w_d^* z_{do}}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{io} + R_o^1}, \quad E_2^* = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro}}{\sum_{d=1}^p w_d^* z_{do} + R_o^2}$$

بدیهی است  $E_o^* = 1$  گر و فقط اگر  $E_o^{1*} = 1$  و  $E_o^{2*} = 1$  به دلیل

$$E_o^* = w_1 E_1^* + w_2 E_2^*, w_1 + w_2 = 1, w_1, w_2 \geq 0.$$

باین حال طرح تخصیص کارایی برای  $R_j^1, R_j^2$  باز هم منحصر به فرد نخواهد بود.

### ۶- تعمیم مدل کارایی متقاطع دومرحله‌ای

کانو و لیو [16] برای محاسبه کارایی متقاطع سیستم‌های دومرحله‌ای از دیدگاه دابل و گرین [17] که به صورت مدل (۸) می‌باشد استفاده نموده‌اند. در این دیدگاه هدف این است درحالی‌که مقدار کارایی  $DMU_d$  که از فرم مضربی مدل  $CCR$  در مرحله اول به دست می‌آید، حفظ شود و همچنین بالاترین کارایی برای  $n-1$   $DMUs$  دیگر حفظ شود.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \frac{\sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj}}{\sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}}, \\
 & \text{s. t.} \quad \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd} = E_{dd} \sum_{i=1}^m v_{id} X_{id}, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_{rd}, v_{id} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s. \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{۸}$$

فرم خطی مدل (۸) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj}, \\
 & \text{s. t.} \quad \sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd} = E_{dd} \sum_{i=1}^m v_{id} X_{id}, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_{rd}, v_{id} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s. \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{۹}$$

کائو و لیو [16] در ابتدا کارایی سیستم و بخش ها را بر اساس مقاله کائو و هانگ [18] برای سیستم سری به صورت زیر اندازه گیری نمودند:

$$\begin{aligned}
 E_{dd}^s &= \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd}, \\
 & \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^m v_{id} X_{id} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{g=1}^{h(1)} w_{gd} Z_{gj}^{(1)} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{g=h^{(p-1)+1}}^{h(p)} w_{gd} Z_{gj}^{(p)} - \sum_{g=h^{(p-2)+1}}^{h(p-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(p-1)} \leq 0, \quad p = 2, \dots, q-1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{g=h^{(q-2)+1}}^{h(q-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(q)} \leq 0, \\
 & u_{rd}, v_{id}, w_{gd} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s. \quad i = 1, \dots, m, \quad g = 1, \dots, h.
 \end{aligned} \tag{۱۰}$$

بنابراین مدل (۱۰) را می توان برای محاسبه کارایی سیستم های شبکه ای سری به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 E^s &= \text{Max} \frac{\sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj}}{\sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}}, \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd} = E_{dd}^s \sum_{i=1}^m v_{id} X_{id}, \\
 & \sum_{g=1}^{h(1)} w_{gd} Z_{gj}^{(1)} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{g=1}^{h(1)} w_{gd} Z_{gj}^{(1)} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{g=h^{p-1}+1}^{h(p)} w_{gd} Z_{gj}^{(p)} - \sum_{g=h^{p-2}+1}^{h^{p-1}} w_{gd} Z_{gj}^{(p-1)} \leq 0, \quad p = 2, \dots, q-1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{g=h^{q-2}+1}^{h^{q-1}} w_{gd} Z_{gj}^{(q)} \leq 0, \\
 & u_{rd}, v_{id}, w_{gd} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \quad g = 1, \dots, h.
 \end{aligned} \tag{11}$$

فرض کنید  $(u^*, v^*, w^*)$  جواب‌های بهینه مدل (۱۱) باشند در این صورت کارایی کل سیستم و کارایی هر بخش به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}
 E_{dk}^s &= \frac{\sum_{r=1}^s u_{rd}^* Y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{id}^* X_{ik}}, \\
 E_{dk}^{(1)} &= \frac{\sum_{g=1}^{h(1)} w_{gd}^* Z_{gk}^{(1)}}{\sum_{i=1}^m v_{id}^* X_{ik}}, \\
 E_{dk}^{(p)} &= \frac{\sum_{g=h^{p-1}+1}^{h(p)} w_{gd}^* Z_{gj}^{(p)}}{\sum_{g=h^{p-2}+1}^{h^{p-1}} w_{gd}^* Z_{gj}^{(p-1)}}, \quad p = 2, \dots, q-1, \\
 E_{dk}^{(p)} &= \frac{\sum_{r=1}^s u_{rd}^* Y_{rk}}{\sum_{g=h^{q-2}+1}^{h^{q-1}} w_{gd}^* Z_{gj}^{(q)}}.
 \end{aligned}$$

واضح است که کارایی کل سیستم برابر است با حاصل ضرب کارایی  $q$  بخش‌ها.

$$E_{dk}^s = \prod_{p=1}^q E_{dk}^{(p)}.$$

در صورت جواب دگرین در مدل (۱۱)، مدل کائو و لیو با استفاده از ایده مطرح شده در مقاله ۲۰۰۸ کائو و هانگ [18] برای یافتن ضریب‌هایی که بالاترین کارایی کل را از تمامی  $DMUs$  برای بخشی که مهم‌تر تلقی می‌شود، تولید می‌کنند، درحالی‌که کارایی سیستم کل  $E^s$  حفظ می‌شود. فرض کنید بخش یک مهم‌ترین بخش در نظر گرفته شود بنابراین مدل (۱۲) را می‌توان برای واحد تحت ارزیابی جهت تعیین ضرایب سایر واحدها برای محاسبه کارایی متقاطع استفاده نمود.

$$\begin{aligned}
 E^1 &= \text{Max} \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^s u_{rd} Z_{gj}^{(1)}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}}, \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rd} = E_{dd}^s \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}, \\
 & \sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} = E^s \sum_{j=1, j \neq d}^n \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij}, \\
 & \sum_{g=1}^{h(1)} w_{gd} Z_{gj}^{(1)} - \sum_{i=1}^m v_{id} X_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{g=h^{p-1}+1}^{h(p)} w_{gd} Z_{gj}^{(p)} - \sum_{g=h^{p-2}+1}^{h^{p-1}} w_{gd} Z_{gj}^{(p-1)} \leq 0, \quad p = 2, \dots, q-1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rd} Y_{rj} - \sum_{g=h^{q-2}+1}^{h(q-1)} w_{gd} Z_{gj}^{(q)} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u_{rd}, v_{id}, w_{gd} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \quad g = 1, \dots, h.
 \end{aligned} \tag{12}$$

توجه داشته باشید که بخش ۱،  $DMU_0$  نیز در تابع هدف گنجانده شده است. اگر ضریب‌های محاسبه شده از مدل (۹) با ضریب‌های به دست آمده از مدل (۱۱) متفاوت باشد، می‌توان یک مدل مشابه برای به حداکثر رساندن بازده کل استفاده نمود، درحالی که بالاترین کارایی کل سیستم  $E^s$  و کارایی بخش یک ( $E^1$ ) را حفظ می‌کند. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که ضریب‌های محاسبه شده از مدل فعلی با ضریب‌های به دست آمده از مدل ادامه دهنده یکسان شوند. سپس می‌دانیم که ضریب‌های فعلی راه حل منحصر به فرد هستند. با این حال، در کارایی متقاطع  $DEA$  کل واحد معمولی، تنها یک مدل هدف ثانویه معمولاً حل می‌شود، این احتمال که بهینه جایگزین هنوز وجود داشته باشد ناچیز در نظر گرفته می‌شود. علاوه بر این، از آنجایی که سیستم سری از قدرت تمایز قوی تری نسبت به سیستم کل واحد برخوردار است، زیرا محدودیت‌های بیشتری درگیر است، امکان بهینه جایگزین کمتر است و نتایج به دست آمده از حل مدل (۱۱) باید به اندازه کافی نماینده برای تجزیه و تحلیل‌های بعدی باشد.

## ۷- تعمیم الگوریتم پیشنهادی برای سیستم‌های دومرحله‌ای

در ادامه الگوریتم پیشنهادی را که بر مبنای کارایی متقاطع ساخته شده با بسط داده و با محاسبه کارایی متقاطع در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای معرفی شده توسط کائو و لیو [16]، مدل (۱۱) می‌توان تخصیص هزینه را برای سیستم‌هایی که دارای ساختار دومرحله‌ای هستند نیز اختصاص داد. مثال ۵- داده‌ها برگرفته از مقاله کائو و هانگ [18] یک مدل دومرحله‌ای برای اندازه‌گیری کارایی شرکت بیمه در تایوان می‌باشد و داده‌های ورودی، میانی و خروجی در جدول ۱۱ آورده شده است. این سیستم دومرحله‌ای دارای ساختار سری می‌باشد کل عملیات فرایند کسب حق بیمه در بخش اول و فرایند تولید سود در بخش دوم قرار دارد. شاخص‌های ورودی و خروجی به صورت زیر می‌باشد:

$x_1$ : هزینه عملیاتی.

$x_2$ : هزینه بیمه.

$y_1$ : سود پذیره نویسی.

$y_2$ : سود سرمایه‌گذاری.

$z_1$ : حق بیمه دریافتی از مشتریان بیمه شده.

$z_2$ : حق بیمه دریافتی از شرکت‌های واگذارنده.



جدول ۱۱- داده‌های ورودی و خروجی مثال ۵.

Table 11- Input and output data of example 4.

DMU	$x_1$	$x_2$	$z_1$	$z_2$	$y_1$	$y_2$
1	1178744	673512	7451757	856735	984143	681687
2	1381822	1352755	10020274	1812894	1228502	834754
3	1177494	592790	4776548	560244	293613	658428
4	601320	594259	3174851	371863	248709	177331
5	6699063	3531614	37392862	1753794	7851229	3925272
6	2627707	668363	9747908	952326	1713598	415058
7	1942833	1443100	10685457	643412	2239593	439039
8	3789001	1873530	17267266	1134600	3899530	622868
9	1567746	950432	11473162	546337	1043778	264098
10	1303249	1298470	8210389	504528	1697941	554806
11	1962448	672414	7222378	643178	1486014	18259
12	2592790	650952	9434406	1118489	1574191	909295
13	2609941	1368802	13921464	811343	3609236	223047
14	1396002	988888	7396396	465509	1401200	332283
15	2184944	651063	10422297	749893	3355197	555482
16	1211716	415071	5606013	402881	854054	197947
17	1453797	1085019	7695461	342489	3144484	371984
18	757515	547997	3631484	995620	692731	163927
19	159442	182338	1141950	483291	519121	46857
20	145442	53518	316829	131920	355624	26537
21	84171	26224	225888	40542	51950	6491
22	15993	10502	52063	14574	82141	4181
23	163297	28408	245910	49864	0.1	18980
24	1544215	235094	476419	644816	142370	16976

همان‌طور که در جدول ۱۲ تا جدول ۱۴ مشاهده می‌کنید در ابتدا پس از محاسبه وزن‌های بهینه  $(v_1, v_2, w_1, w_2, u_1, u_2)$  برای هر  $DMU$  تا ۲۴، جدول کارایی متقاطع را برای مرحله اول، مرحله دوم و کل سیستم محاسبه می‌کنیم، به‌عنوان مثال مقادیر سطرهای جدول ۶ تا جدول ۸ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$F_1 = \frac{u_1 y_{i1}}{v_1 x_{i1}} + \frac{(u_2 y_{i2})}{(v_2 x_{i2})}, F_2 = \frac{w_1 z_{i1}}{v_1 x_{i1}} + \frac{(w_2 z_{i2})}{(v_2 x_{i2})}, F_3 = \frac{u_1 y_{i1}}{w_1 z_{i1}} + \frac{(u_2 y_{i2})}{(w_2 z_{i2})} \quad i = 1, \dots, 24,$$

و در نهایت الگوریتم پیشنهادی را بر روی این داده‌های جدول کارایی متقاطع پیاده‌سازی می‌کنیم. با مشاهده آخرین عدد در ستون و سطر آخر هر ۳ جدول می‌بینیم که مجموع سهم تمام  $DMUs$  عدد یک می‌شود و می‌توان چنین برداشت کرد که سهم هر واحد تحت ارزیابی از یک واحد چقدر است و با توجه به اینکه این سهم به نسبت، بر اساس وزن‌های ورودی و خروجی به هر واحد تخصیص یافته است می‌توان امیدوار شد که تخصیص عادلانه‌ای به هر  $DMU$  اختصاص یافته است. به‌عنوان مثال در ستون  $B$  سطر ۱۹، سهم اختصاص یافته به  $DMU_1$  را در هر ۳ جدول می‌توان مشاهده کرد. جدول ۱۲ بر اساس وزن‌های خروجی مرحله دوم به ورودی‌های مرحله اول می‌باشد به اصلاح می‌توان گفت مانند یک جعبه سیاه عمل می‌کند و وزن‌های میانی را در نظر نمی‌گیرد؛ بنابراین تخصیص هزینه بر اساس ورودی اولیه و خروجی نهایی در جدول ۱۲ قابل مشاهده است. جدول ۱۳ و جدول ۱۴ به یکدیگر وابسته هستند و می‌توان تخصیص هزینه را بر اساس دیدگاه مدل‌های مشارکتی و غیر مشارکتی را بر اساس وزن‌های خروجی مرحله دوم به ورودی میانی و خروجی میانی به وزن‌های ورودی اولیه در نظر گرفت. با توجه به معادله زیر می‌باشد:

$$\sum_{j=1}^n (R_j^1 + R_j^2) = R, \quad R_j^1, R_j^2 \geq 0,$$

باید مجموع هزینه اختصاص داده‌شده مرحله اول و مرحله دوم برابر مقدار  $R$  باشد؛ بنابراین  $U_j = \alpha R_j^1 + (1 - \alpha) R_j^2$ .

به‌عنوان مثال اگر به سیستم شبکه‌ای از دیدگاه مشارکتی نگاه کنیم مقدار  $\alpha = 0.5$  در نظر گرفته و سهم هر  $DMU$  در هر مرحله را حساب می‌کنیم. همچنین اگر بخواهیم از دیدگاه غیر مشارکتی به سیستم دوم مرحله‌ای نگاه کنیم و مرحله اول را لیدر در نظر بگیریم هر اندازه مقدار  $\alpha$  کوچک‌تر باشد، هزینه ثابت اعمال‌شده به لیدر کمتر خواهد بود و سهم فالور از این هزینه ثابت بیشتر خواهد بود و بالعکس اگر مرحله دوم را لیدر در نظر بگیریم هر چه مقدار  $\alpha$  بزرگ‌تر باشد هزینه ثابت کمتری به فالور تحمیل می‌شود و در این حالت به نفع فالور خواهد بود.

فرض کنیم میزان هزینه تخصیص یافته مقدار ۱۰۰ واحد باشد در این صورت سهم  $DMU_1$  برای حالتی که سیستم را مانند جعبه سیاه در نظر بگیریم بر اساس جدول ۱۱ برابر است با

$$R^1 = 0.05741 \times 100 = 5.741.$$

همچنین هزینه ثابت تخصیص یافته به  $DMU_1$  در حالت مشارکتی بر اساس جدول ۱۲ و جدول ۱۳ با مقدار  $\alpha = 0.5$  برابر است با

$$R_1^1 = 0.5 \times 0.05515 \times 100 = 2.757, \quad R_1^2 = 0.5 \times 0.04431 \times 100 = 2.21, \quad R_1^K = 2.757 + 2.21 = 4.967.$$



جدول ۱۲ - کارایی متقاطع بر اساس وزن‌های مدل (۱۴) و تخصیص هزینه بر اساس دیدگاه جمعیه سیاه.

Table 12- Cross efficiency based on model weights (14) and cost allocation based on black box perspective.

شعب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0.70	0.51	0.72	0.24	0.77	0.33	0.28	0.27	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.30	0.36	0.26	0.33	0.47	0.18	0.57	0.41	0.09
2	0.60	0.63	0.58	0.30	0.62	0.18	0.27	0.20	0.19	0.47	0.04	0.37	0.14	0.27	0.31	0.19	0.34	0.25	0.42	0.27	0.10	0.46	0.34	0.14
3	0.70	0.51	0.72	0.24	0.76	0.33	0.28	0.27	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.54	0.30	0.36	0.26	0.33	0.47	0.18	0.57	0.41	0.09
4	0.60	0.62	0.58	0.30	0.62	0.18	0.26	0.20	0.19	0.46	0.04	0.37	0.13	0.27	0.30	0.19	0.33	0.25	0.41	0.27	0.10	0.44	0.34	0.13
5	0.70	0.51	0.72	0.25	0.77	0.34	0.28	0.28	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.31	0.36	0.26	0.34	0.47	0.18	0.58	0.41	0.09
6	0.56	0.35	0.59	0.17	0.64	0.39	0.21	0.24	0.18	0.26	0.09	0.76	0.18	0.22	0.60	0.31	0.28	0.20	0.24	0.48	0.19	0.49	0.33	0.06
7	0.70	0.51	0.72	0.25	0.77	0.34	0.28	0.28	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.31	0.36	0.26	0.34	0.47	0.18	0.58	0.41	0.09
8	0.66	0.45	0.68	0.21	0.74	0.37	0.26	0.27	0.21	0.34	0.09	0.72	0.20	0.27	0.60	0.32	0.34	0.24	0.31	0.51	0.19	0.58	0.39	0.08
9	0.70	0.51	0.72	0.25	0.77	0.34	0.28	0.28	0.22	0.39	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.31	0.36	0.26	0.34	0.48	0.18	0.59	0.41	0.09
10	0.60	0.63	0.58	0.30	0.62	0.18	0.27	0.20	0.19	0.47	0.04	0.37	0.14	0.27	0.31	0.19	0.34	0.25	0.42	0.27	0.10	0.46	0.34	0.14
11	0.11	0.07	0.04	0.03	0.17	0.19	0.12	0.16	0.08	0.10	0.17	0.18	0.20	0.11	0.39	0.15	0.22	0.09	0.21	0.50	0.15	0.59	0.00	0.05
12	0.56	0.35	0.60	0.17	0.64	0.39	0.21	0.24	0.18	0.26	0.09	0.76	0.18	0.22	0.60	0.31	0.28	0.20	0.24	0.48	0.19	0.49	0.33	0.06
13	0.59	0.38	0.61	0.18	0.67	0.38	0.24	0.27	0.20	0.30	0.11	0.72	0.21	0.25	0.62	0.32	0.33	0.22	0.29	0.54	0.20	0.60	0.34	0.07
14	0.70	0.51	0.72	0.25	0.77	0.34	0.28	0.28	0.22	0.39	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.31	0.36	0.26	0.34	0.48	0.18	0.59	0.41	0.09
15	0.59	0.38	0.61	0.18	0.67	0.38	0.24	0.27	0.20	0.30	0.11	0.72	0.21	0.25	0.62	0.32	0.33	0.22	0.29	0.54	0.20	0.59	0.34	0.07
16	0.66	0.45	0.68	0.22	0.74	0.37	0.26	0.28	0.21	0.34	0.10	0.72	0.21	0.27	0.60	0.32	0.35	0.24	0.31	0.52	0.19	0.59	0.39	0.08
17	0.12	0.09	0.09	0.04	0.15	0.09	0.09	0.10	0.06	0.09	0.07	0.12	0.11	0.08	0.19	0.09	0.15	0.07	0.16	0.24	0.07	0.35	0.04	0.04
18	0.70	0.51	0.72	0.24	0.77	0.33	0.28	0.27	0.22	0.38	0.08	0.66	0.20	0.29	0.55	0.30	0.36	0.26	0.33	0.47	0.18	0.58	0.41	0.09
19	0.60	0.62	0.58	0.30	0.62	0.18	0.26	0.20	0.19	0.46	0.04	0.37	0.13	0.27	0.31	0.19	0.33	0.25	0.41	0.27	0.10	0.45	0.34	0.13
20	0.43	0.26	0.42	0.13	0.51	0.36	0.19	0.23	0.16	0.22	0.14	0.62	0.21	0.20	0.59	0.28	0.28	0.17	0.25	0.55	0.20	0.59	0.23	0.06
21	0.59	0.38	0.61	0.18	0.67	0.38	0.24	0.27	0.20	0.30	0.11	0.72	0.21	0.25	0.62	0.32	0.33	0.22	0.29	0.54	0.20	0.59	0.34	0.07
22	0.59	0.38	0.61	0.18	0.67	0.38	0.24	0.27	0.20	0.30	0.11	0.72	0.21	0.25	0.62	0.32	0.33	0.22	0.29	0.54	0.20	0.59	0.34	0.07
23	0.66	0.48	0.72	0.23	0.71	0.28	0.22	0.21	0.19	0.33	0.01	0.62	0.10	0.24	0.41	0.25	0.25	0.21	0.21	0.27	0.12	0.27	0.42	0.06
24	0.60	0.62	0.58	0.30	0.62	0.18	0.26	0.20	0.19	0.46	0.04	0.37	0.13	0.27	0.31	0.19	0.33	0.25	0.41	0.27	0.10	0.45	0.34	0.13
MIN/SUM	0.05	0.03	0.02	0.01	0.06	0.04	0.04	0.04	0.03	0.04	0.01	0.05	0.04	0.03	0.08	0.04	0.06	0.03	0.06	0.10	0.03	0.11	0.00	0.02
MAX/SUM	0.07	0.06	0.07	0.03	0.08	0.04	0.03	0.03	0.02	0.05	0.02	0.08	0.02	0.03	0.06	0.03	0.04	0.03	0.04	0.06	0.02	0.06	0.04	0.01
Average	0.06	0.05	0.04	0.02	0.07	0.04	0.03	0.03	0.02	0.04	0.01	0.06	0.03	0.03	0.07	0.03	0.05	0.03	0.05	0.08	0.03	0.09	0.02	0.01
f=100*P	5.74	4.51	4.34	2.16	6.96	3.89	3.18	3.36	2.38	4.24	1.12	6.32	3.17	3.14	6.95	3.41	4.84	2.82	5.29	7.66	2.45	8.60	2.09	1.43

جدول ۱۳- کرایه متقاطع بر اساس وزن‌های مدل (۱۴) و تخصیص هزینه مرحله اول.  
Table 13- Cross efficiency based on model weights (14) and first stage cost allocation.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
F2=w/v	0.99	0.86	0.69	0.57	0.83	0.87	0.67	0.72	1.00	0.62	0.74	0.88	0.81	0.67	1.00	0.91	0.63	0.79	1.00	0.63	0.64	0.58	0.84	0.65	
	0.86	0.99	0.55	0.72	0.76	0.51	0.75	0.62	1.00	0.86	0.50	0.73	0.72	0.65	0.63	0.72	0.66	0.99	1.00	0.30	0.37	0.45	0.62	0.42	
	0.99	0.86	0.69	0.57	0.83	0.87	0.67	0.72	1.00	0.62	0.74	0.88	0.81	0.67	1.00	0.91	0.63	0.79	1.00	0.63	0.64	0.58	0.84	0.65	
	0.86	0.99	0.55	0.72	0.76	0.50	0.75	0.62	0.99	0.85	0.50	0.49	0.72	0.72	0.65	0.63	0.72	0.66	0.99	0.30	0.37	0.45	0.61	0.42	
	1.00	0.87	0.69	0.58	0.84	0.87	0.67	0.73	1.01	0.63	0.75	0.89	0.82	0.67	1.01	0.91	0.63	0.80	1.00	0.63	0.65	0.58	0.85	0.66	
	0.78	0.60	0.57	0.38	0.63	0.95	0.46	0.57	0.72	0.39	0.70	0.99	0.62	0.47	0.99	0.84	0.42	0.63	0.75	0.69	0.68	0.48	0.72	0.55	
	0.99	0.86	0.69	0.57	0.83	0.86	0.67	0.72	1.00	0.62	0.74	0.88	0.81	0.67	1.00	0.90	0.62	0.79	1.00	0.63	0.64	0.58	0.84	0.66	
	0.92	0.78	0.66	0.50	0.74	0.91	0.57	0.66	0.87	0.52	0.73	0.94	0.73	0.58	1.00	0.88	0.53	0.79	1.00	0.73	0.69	0.58	0.84	0.74	
	1.00	0.87	0.70	0.58	0.84	0.88	0.68	0.73	1.01	0.63	0.75	0.89	0.82	0.68	1.01	0.92	0.64	0.80	1.01	0.63	0.65	0.58	0.85	0.66	
	0.86	0.99	0.55	0.72	0.76	0.51	0.75	0.62	1.00	0.86	0.50	0.73	0.72	0.65	0.63	0.72	0.66	0.99	1.00	0.30	0.37	0.45	0.62	0.42	
	0.76	0.66	0.56	0.37	0.51	0.93	0.39	0.50	0.59	0.33	0.66	1.01	0.53	0.40	0.90	0.76	0.34	0.77	1.01	0.94	0.76	0.59	0.82	0.89	
	0.78	0.60	0.57	0.38	0.63	0.95	0.46	0.57	0.72	0.39	0.70	0.99	0.62	0.47	0.99	0.84	0.42	0.64	0.75	0.69	0.68	0.48	0.73	0.55	
	0.89	0.74	0.64	0.46	0.68	0.96	0.52	0.62	0.79	0.46	0.73	1.00	0.68	0.52	1.01	0.87	0.47	0.79	1.00	0.82	0.73	0.59	0.85	0.79	
	0.98	0.86	0.68	0.57	0.82	0.86	0.66	0.72	0.99	0.62	0.73	0.87	0.80	0.66	0.99	0.90	0.62	0.79	0.99	0.62	0.64	0.57	0.83	0.65	
	0.89	0.75	0.64	0.46	0.68	0.96	0.52	0.62	0.79	0.46	0.74	1.01	0.68	0.53	1.01	0.88	0.47	0.79	1.00	0.82	0.74	0.59	0.86	0.79	
	0.94	0.79	0.66	0.50	0.75	0.92	0.58	0.67	0.88	0.52	0.74	0.95	0.74	0.59	1.01	0.90	0.54	0.80	1.01	0.74	0.70	0.59	0.86	0.75	
	1.00	0.87	0.69	0.58	0.84	0.87	0.68	0.73	1.01	0.63	0.75	0.89	0.82	0.67	1.01	0.91	0.63	0.80	1.00	0.63	0.64	0.58	0.85	0.65	
	1.00	0.87	0.69	0.58	0.84	0.87	0.68	0.73	1.01	0.63	0.75	0.89	0.82	0.67	1.01	0.91	0.63	0.80	1.00	0.63	0.65	0.58	0.85	0.66	
	0.92	1.09	0.59	0.77	0.78	0.53	0.78	0.64	1.02	0.89	0.53	0.53	0.75	0.75	0.68	0.66	0.74	0.75	1.20	0.36	0.40	0.51	0.68	0.69	
	0.75	0.65	0.55	0.37	0.50	0.92	0.38	0.49	0.58	0.33	0.65	1.00	0.52	0.39	0.88	0.74	0.33	0.76	1.00	0.93	0.75	0.58	0.81	0.88	
	0.89	0.74	0.64	0.46	0.68	0.96	0.52	0.62	0.79	0.46	0.73	1.01	0.68	0.52	1.01	0.88	0.47	0.79	1.00	0.82	0.74	0.59	0.86	0.79	
	0.89	0.74	0.64	0.46	0.68	0.96	0.52	0.62	0.79	0.46	0.73	1.01	0.68	0.52	1.01	0.88	0.47	0.79	1.00	0.82	0.74	0.59	0.86	0.79	
	1.00	0.87	0.69	0.58	0.84	0.87	0.67	0.73	1.01	0.63	0.74	0.89	0.82	0.67	1.01	0.91	0.63	0.80	1.00	0.63	0.64	0.58	0.85	0.65	
	0.87	1.00	0.56	0.73	0.76	0.51	0.75	0.62	1.00	0.86	0.50	0.73	0.73	0.73	0.65	0.63	0.72	0.66	1.00	0.30	0.37	0.45	0.62	0.43	
MIN	0.75	0.60	0.55	0.37	0.50	0.50	0.38	0.49	0.58	0.33	0.50	0.49	0.52	0.39	0.65	0.63	0.33	0.63	0.75	0.30	0.37	0.45	0.61	0.42	
MAX	1.00	1.09	0.70	0.77	0.84	0.96	0.78	0.73	1.02	0.89	0.75	1.01	0.82	0.75	1.01	0.92	0.74	0.80	1.20	0.94	0.76	0.59	0.86	0.89	
MIN/SUM	0.06	0.05	0.05	0.03	0.04	0.04	0.03	0.04	0.05	0.03	0.04	0.04	0.04	0.03	0.05	0.05	0.03	0.05	0.06	0.02	0.03	0.04	0.05	0.03	
MAX/SUM	0.05	0.05	0.03	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04	0.04	0.06	0.05	0.04	0.03	0.04	0.04	
Average	0.06	0.05	0.04	0.03	0.04	0.04	0.03	0.04	0.05	0.03	0.04	0.04	0.04	0.03	0.05	0.05	0.03	0.05	0.06	0.03	0.03	0.03	0.05	0.04	
f=100*p	5.52	5.10	3.95	3.35	4.11	4.38	3.44	3.79	4.85	3.49	3.86	4.48	4.12	3.42	5.10	4.80	3.15	4.54	6.00	3.50	3.33	3.27	4.59	3.88	

جدول ۱۴- کارایی متقاطع بر اساس وزن‌های مدل (۱۴) و تخصیص هزینه مرحله دو.

Table 14- Cross efficiency based on model weights (14) and second stage cost allocation.

شعب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0.70	0.59	1.04	0.43	0.92	0.39	0.41	0.38	0.22	0.61	0.11	0.75	0.24	0.43	0.55	0.34	0.57	0.33	0.33	0.74	0.27	1.00	0.49	0.14
2	0.69	0.63	1.05	0.42	0.82	0.36	0.36	0.32	0.19	0.55	0.08	0.74	0.19	0.38	0.48	0.30	0.47	0.38	0.42	0.91	0.27	1.02	0.55	0.32
3	0.70	0.59	1.04	0.43	0.92	0.38	0.41	0.38	0.22	0.61	0.11	0.75	0.24	0.43	0.55	0.33	0.57	0.33	0.33	0.74	0.27	0.99	0.49	0.14
4	0.69	0.63	1.05	0.42	0.82	0.35	0.35	0.32	0.19	0.54	0.07	0.74	0.19	0.38	0.47	0.30	0.46	0.37	0.41	0.89	0.27	0.99	0.55	0.32
5	0.70	0.59	1.04	0.43	0.92	0.39	0.41	0.38	0.22	0.61	0.11	0.75	0.24	0.43	0.55	0.33	0.57	0.33	0.34	0.75	0.28	1.00	0.48	0.14
6	0.72	0.57	1.05	0.44	1.01	0.41	0.46	0.42	0.25	0.67	0.13	0.77	0.29	0.48	0.61	0.37	0.66	0.31	0.31	0.70	0.28	1.02	0.46	0.11
7	0.71	0.59	1.05	0.43	0.93	0.39	0.42	0.38	0.23	0.62	0.11	0.75	0.25	0.43	0.55	0.34	0.58	0.33	0.34	0.75	0.28	1.01	0.49	0.14
8	0.71	0.57	1.04	0.43	1.00	0.41	0.45	0.41	0.25	0.66	0.13	0.76	0.28	0.47	0.60	0.36	0.65	0.31	0.31	0.69	0.28	1.00	0.46	0.11
9	0.70	0.58	1.03	0.42	0.92	0.38	0.41	0.38	0.22	0.61	0.11	0.74	0.24	0.43	0.55	0.33	0.57	0.33	0.34	0.75	0.28	1.01	0.48	0.14
10	0.69	0.63	1.05	0.42	0.82	0.36	0.36	0.32	0.19	0.55	0.08	0.74	0.19	0.38	0.48	0.30	0.47	0.38	0.42	0.91	0.27	1.02	0.55	0.32
11	0.14	0.10	0.07	0.08	0.32	0.21	0.30	0.31	0.14	0.29	0.25	0.18	0.37	0.27	0.43	0.20	0.64	0.12	0.21	0.53	0.20	1.00	0.00	0.05
12	0.72	0.57	1.05	0.44	1.01	0.41	0.46	0.42	0.25	0.67	0.13	0.77	0.29	0.48	0.61	0.37	0.66	0.31	0.31	0.70	0.28	1.02	0.46	0.11
13	0.67	0.52	0.96	0.41	1.00	0.40	0.46	0.43	0.25	0.66	0.15	0.72	0.31	0.47	0.61	0.36	0.70	0.28	0.29	0.66	0.27	1.01	0.40	0.09
14	0.71	0.59	1.05	0.43	0.94	0.39	0.42	0.39	0.23	0.62	0.11	0.76	0.25	0.44	0.56	0.34	0.59	0.33	0.34	0.76	0.28	1.02	0.49	0.14
15	0.67	0.51	0.96	0.40	0.99	0.40	0.46	0.43	0.25	0.66	0.15	0.71	0.31	0.47	0.61	0.36	0.70	0.28	0.29	0.66	0.27	1.00	0.40	0.09
16	0.71	0.56	1.03	0.43	0.99	0.40	0.45	0.41	0.24	0.66	0.13	0.75	0.28	0.46	0.59	0.36	0.65	0.31	0.31	0.70	0.28	1.00	0.45	0.11
17	0.12	0.10	0.13	0.07	0.18	0.11	0.13	0.13	0.06	0.15	0.09	0.14	0.13	0.12	0.19	0.10	0.23	0.09	0.16	0.38	0.11	0.59	0.05	0.06
18	0.70	0.58	1.03	0.42	0.92	0.38	0.41	0.37	0.22	0.61	0.11	0.74	0.24	0.43	0.54	0.33	0.57	0.32	0.33	0.74	0.27	0.99	0.48	0.14
19	0.65	0.57	0.98	0.40	0.79	0.33	0.34	0.31	0.18	0.52	0.07	0.69	0.18	0.36	0.45	0.28	0.45	0.33	0.34	0.74	0.24	0.87	0.50	0.19
20	0.57	0.41	0.77	0.34	1.00	0.39	0.50	0.47	0.27	0.67	0.21	0.62	0.40	0.50	0.67	0.38	0.85	0.23	0.25	0.59	0.26	1.01	0.28	0.07
21	0.67	0.52	0.96	0.40	0.99	0.40	0.46	0.43	0.25	0.66	0.15	0.71	0.31	0.47	0.61	0.36	0.70	0.28	0.29	0.66	0.27	1.00	0.40	0.09
22	0.67	0.52	0.96	0.40	0.99	0.40	0.46	0.43	0.25	0.66	0.15	0.71	0.31	0.47	0.61	0.36	0.70	0.28	0.29	0.66	0.27	1.00	0.40	0.09
23	0.66	0.55	1.04	0.40	0.84	0.32	0.32	0.28	0.18	0.53	0.02	0.70	0.13	0.35	0.41	0.27	0.39	0.27	0.21	0.43	0.19	0.47	0.50	0.09
24	0.69	0.62	1.04	0.42	0.81	0.35	0.35	0.32	0.19	0.54	0.07	0.73	0.18	0.37	0.47	0.29	0.46	0.37	0.41	0.88	0.27	0.99	0.55	0.31
Min/Sum	0.04	0.03	0.02	0.02	0.06	0.03	0.04	0.04	0.02	0.05	0.01	0.04	0.04	0.04	0.06	0.03	0.07	0.03	0.05	0.12	0.03	0.14	0.00	0.02
Max/Sum	0.05	0.05	0.08	0.03	0.07	0.03	0.04	0.03	0.02	0.05	0.02	0.06	0.03	0.04	0.05	0.03	0.06	0.03	0.03	0.07	0.02	0.07	0.04	0.02
Average	0.04	0.04	0.05	0.03	0.06	0.03	0.04	0.04	0.02	0.05	0.01	0.05	0.03	0.04	0.05	0.03	0.07	0.03	0.04	0.09	0.03	0.11	0.02	0.02
f=p*100	4.43	3.81	4.79	2.68	6.40	3.12	3.77	3.70	1.91	4.65	1.20	4.87	3.35	3.65	5.23	2.82	6.59	2.76	3.87	9.01	2.67	10.83	1.99	1.93

## ۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله با ارایه الگوریتمی پیشنهادی و مفاهیم کارایی متقاطع بهبودیافته، روش جدیدی برای رتبه‌بندی و تخصیص هزینه برای واحدهای تصمیم‌گیرنده ارایه شده است، هزینه ثابت را به‌طور عادلانه و منحصر به فردی به هر واحد تحت ارزیابی اختصاص می‌دهد. از ویژگی‌های الگوریتم پیشنهادی، قابلیت آن برای تخصیص هزینه در تحلیل پوششی داده‌های سنتی و تحلیل پوششی داده‌های دو یا چند مرحله‌ای، با در نظر گرفتن ورودی و خروجی‌های میانی است. همچنین در روش پیشنهادی تخصیص هزینه به نحوی است که ضمن حفظ کارا بودن واحدهای کارا، موجب بهبود کارایی واحدهای ناکارا نیز می‌شود. با استفاده از جداول کارایی متقاطع بهبودیافته و مراحل ساده الگوریتم می‌توان تخصیص هزینه ثابت را بین واحدهای تصمیم‌گیری به‌طور عادلانه توزیع کرد. از مزیت‌های این رویکرد سهم هر  $DMU$  از میانگین بیشترین و کمترین مقدار (خوش‌بینانه و بدبینانه) وزن‌های  $DMU$  تحت ارزیابی می‌باشد و نیازی به حل دو مدل جداگانه برای محاسبه بیشترین و کمترین مقدار وزن‌ها نیست. نتایج را با ارایه مثال‌های کاربردی واقعی از شعب بانک ایرانی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌ایم.

## منابع

- [1] Cook, W. D., & Kress, M. (1999). Characterizing an equitable allocation of shared costs: a DEA approach. *European journal of operational research*, 119(3), 652–661. DOI:10.1016/S0377-2217(98)00337-3
- [2] Cook, W. D., & Zhu, J. (2005). Allocation of shared costs among decision making units: a DEA approach. *Computers and operations research*, 32(8), 2171–2178. DOI:10.1016/j.cor.2004.02.007
- [3] Jahanshahloo, G. R., Lotfi, F. H., Shoja, N., & Sanei, M. (2004). An alternative approach for equitable allocation of shared costs by using DEA. *Applied mathematics and computation*, 153(1), 267–274. DOI:10.1016/S0096-3003(03)00631-3
- [4] Lin, R. (2011). Allocating fixed costs or resources and setting targets via data envelopment analysis. *Applied mathematics and computation*, 217(13), 6349–6358. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.008>
- [5] Beasley, J. E. (2003). Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 147(1), 198–216.
- [6] Li, Y., Yang, M., Chen, Y., Dai, Q., & Liang, L. (2013). Allocating a fixed cost based on data envelopment analysis and satisfaction degree. *Omega (United Kingdom)*, 41(1), 55–60. DOI:10.1016/j.omega.2011.02.008
- [7] Li, F., Zhu, Q., & Chen, Z. (2019). Allocating a fixed cost across the decision making units with two-stage network structures. *Omega (United Kingdom)*, 83, 139–154. DOI:10.1016/j.omega.2018.02.009
- [8] Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., & Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European journal of operational research*, 196(3), 1170–1176.
- [9] Chu, J., Wu, J., Chu, C., & Zhang, T. (2020). DEA-based fixed cost allocation in two-stage systems: leader-follower and satisfaction degree bargaining game approaches. *Omega (United Kingdom)*, 94, 102054. DOI:10.1016/j.omega.2019.03.012
- [10] Li, Y., Li, F., Emrouznejad, A., Liang, L., & Xie, Q. (2019). Allocating the fixed cost: an approach based on data envelopment analysis and cooperative game. *Annals of operations research*, 274(1–2), 373–394. DOI:10.1007/s10479-018-2860-9
- [11] Xu, G., Wu, J., & Zhu, Q. (2022). Fixed cost allocation in two-stage system: a data-driven approach from the perspective of fairness concern. *Computers and industrial engineering*, 173, 108647. DOI:10.1016/j.cie.2022.108647
- [12] Khoshandam, L. (2020). Ranking by using improved cross efficiency based on perturbation problem: an application to Iranian commercial banks. *Journal of operational research and its applications*, 17(2), 127–144. (In Persian). <http://jamlu.liau.ac.ir/article-1-1889-fa.html>
- [13] Sexton, T. R., Silkman, R. H., & Hogan, A. J. (1986). Data envelopment analysis: critique and extensions. *New directions for program evaluation*, 1986(32), 73–105. DOI:10.1002/ev.1441
- [14] Nakabayashi, K., Sahoo, B. K., & Tone, K. (2009). Fair allocation based on two criteria: a DEA game view of “ADD them up and divide by two.” *Journal of the operations research society of japan*, 52(2), 131–146. DOI:10.15807/jorsj.52.131
- [15] Amirteimoori, A., & Kordrostami, S. (2005). Efficient surfaces and an efficiency index in DEA: a constant returns to scale. *Applied mathematics and computation*, 163(2), 683–691. DOI:10.1016/j.amc.2004.04.009
- [16] Kao, C., & Liu, S. T. (2019). Cross efficiency measurement and decomposition in two basic network systems. *Omega (United Kingdom)*, 83, 70–79. DOI:10.1016/j.omega.2018.02.004
- [17] Doyle, J., & Green, R. (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA derivations, meanings and uses. *Journal of the operational research society*, 45(5), 567–578. DOI:10.1057/jors.1994.84
- [18] Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: an application to non-life insurance companies in Taiwan. *European journal of operational research*, 185(1), 418–429.