مجله علمی پژوهشی «پژوهش‌های برنامه درسی»
انجمن مطالعات برنامه درسی ایران
دوره چهاردهم، شماره اول، پیاپی ۲۷، بهار و تابستان ۱۴۰۳
صفحه‌های ۱۸۸- ۱۶۱

میزان انطباق درک دانش‌آموزان دختر و پسر پایه دهم از شکل‌های هندسی با مسائل کتاب درسی هندسه

نرگس یافتیان[۱]* و لادن پازوکی[۲]

چکیده

این مطالعه با هدف بررسی درک دانش‌آموزان پایه دهم از شکل‌های هندسی بر اساس نظریه دووال و هم‌چنین، بررسی کتاب درسی هندسه این پایه از نظر پرداختن به هر یک از ابعاد درک شکل‌های هندسی به روش‌های پیمایشی و تحلیل محتوا انجام شد. جامعه آماری در بخش پیمایشی، دانش‌آموزان پایه دهم رشته ریاضی شهرستان پاکدشت و نمونه شامل ۲۳۵ نفر از آن‌ها بود که به روش تصادفی خوشه‌ای انتخاب شدند. در بخش تحلیل محتوا، جامعه آماری، کلیه مسائل کتاب هندسه پایه دهم بود و حجم نمونه با جامعه یکسان در نظر گرفته شد. ابزار اندازه‌گیری در بخش پیمایشی، آزمونی بر اساس پژوهش‌های مرتبط بود که روایی آن توسط متخصصان و پایایی آن به کمک معیار آلفای کرونباخ تأیید شد. برای تجزیه و تحلیل داده‌ها، آمار توصیفی مورد استفاده قرار گرفت. یافته‌های پژوهش بیانگر آن بود که درصد پاسخ‌های نادرست و بدون پاسخ دانش‌آموزان در حل مسائل استدلالی و عملیاتی، بیش‌تر از مسائل ادراکی و مرحله‌ای است و بین عملکرد دختران و پسران، تفاوت قابل توجهی وجود ندارد. بررسی مسائل کتاب هندسه پایه دهم نیز نشان داد که بیش‌تر مسائل آن مرتبط با درک‌های استدلالی و عملیاتی هستند. در واقع، با وجود آنکه اکثر مسائل کتاب هندسه پایه دهم به مسائل استدلالی و عملیاتی اختصاص یافته است، اما عملکرد دانش‌آموزان در پاسخ‌دهی به مسائل مرتبط با این دو درک در حد انتظار نبود. پیشنهاد می‌شود تا نحوه ارائه مطالب در کتاب درسی و یا شیوه‌های تدریس هندسه به گونه‌ای اصلاح شود تا زمینه تقویت هر چهار درکِ دانش‌آموزان فراهم شود.

واژه‌ها کلیدی: هندسه، شکل‌های هندسی، نظریه درک شکل‌های هندسی، نظریه دووال

---

[۱] دانشیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.

[۲] دبیر ریاضی آموزش و پرورش استان تهران، دانشجوی دکتری آموزش ریاضی،گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.

* نویسنده مسئول مقاله: yaftian@sru.ac.ir

مقدمه

از گذشته تاکنون، مسیر آموزش و یادگیری هندسه با ناهمواری‌های بسیاری همراه بوده است و پژوهشگران زیادی در جهت تسهیل این مسیر، تلاش کرده‌اند. نتایج پژوهش‌ها بیانگر آن است که دانش آموزان در یادگیری هندسه با چالش‌ها و مشکلات متعددی روبه‌رو هستند (Burger & Shaughnessy, 1986; Safabakhsh, 2015; Reyhani et al., 2012; Bakhshalizadeh & Broojerdian, 2018; Adolphus, 2011; Barut & Retnawati, 2020). بسیاری از این مشکلات در حل مسائل هندسی و به ویژه مسائلی که نیاز به دست‌ورزی با شکل‌های هندسی دارند، نمایان می‌شوند (Fischbein, 1993). به طور کلی در حل مسائل هندسی، ارتباط با شکل‌های هندسی به شیوه‌های گوناگونی صورت می‌گیرد. برای مثال، گاهی لازم است که یک شکل هندسی شناسایی شود و سپس خواص آن مورد استفاده قرار گیرد. گاهی در صورت مسئله خواسته شده است که یک شکل هندسی رسم شود. گاهی لازم است تا بر اساس داده‌های موجود در شکل هندسی، استدلال‌هایی ارائه شود و در برخی از مسائل نیز باید با ایجاد تغییراتی در شکل داده شده به پاسخ صحیح دست یافت. هر یک از این توانایی‌ها برای یادگیری هندسه و حل مسائل آن ضروری است و باید در دانش‌آموزان تقویت شود (Duval, 1995).

به منظور بهبود عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل هندسی به ویژه مسائلی که به کمک شکل‌های هندسی حل می‌شوند، لازم است تا نظریات مرتبط با آن مورد مطالعه قرار گیرند. یکی از نظریاتی که به منظور توصیف درک دانش‌آموزان از شکل‌های هندسی ارائه شده است، نظریه درک شکل‌های هندسی دووال (Duval, 1995) است. این نظریه از آن جهت که با ارائه یک چارچوب، تمرکزی ویژه بر درک و بکارگیری شکل‌های هندسی در حل مسائل دارد توجه پژوهشگران را به خود جلب کرده است. پژوهش‌ها نیز نشان داده‌اند که تقویت ابعاد ارائه شده در این نظریه، موجب بهبود یادگیری هندسه می‌شود (Deliyianni et al., 2010) و هم‌چنین، خلاقیت ریاضی را پرورش می‌دهد (Gridos et al., 2021). در این نظریه، یادگیری هندسه و ارتباط با شکل‌های هندسی مستلزم چهار نوع درک است. در فرآیند تدریس و یادگیری هندسه لازم است تا به همه این ابعاد توجه شود (Gagatsis et al., 2015; Deliyianni et al., 2010; Duval 1999).

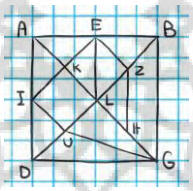
نظریه درک شکل‌های هندسی دووال

دووال (Duval, 1995) اهمیت زیادی برای توجه به شکل‌های هندسی در تجزیه و تحلیل مسائل هندسی قائل است زیرا به کمک این شکل‌ها می‌توان نمایشی کامل و شهودی از ویژگی‌ها و روابط یک موقعیت

هندسی ارائه کرد و در نتیجه فرآیند حل مسئله را هموارتر ساخت. او معتقد است که بکارگیری شکل‌های هندسی نیازمند چهار نوع درک[1] است که آن‌ها را ابعاد درک شکل‌های هندسی می‌نامد و عبارت‌اند از درک‌های ادراکی، مرحله‌ای، استدلالی و عملیاتی[2] که هر یک، ویژگی‌های مختص به خود را دارد. در ادامه به توضیح این درک‌ها پرداخته می‌شود.

الف) درک ادراکی: در نگاه اول به یک شکل هندسی باید بتوان نام شکل‌ها را تشخیص داد و هم‌چنین، با ویژگی‌ها و گروه‌بندی‌های آن‌ها آشنایی داشت. افزون بر تشخیص نام شکل‌ها گاهی لازم است که در یک شکل، چندین زیرشکل[3] یافت که بخشی از شکل اصلی هستند. به طور کلی، تشخیص نام شکل‌های هندسی و یافتن زیرشکل‌ها نیازمند درک ادراکی است و از آنجایی که حل یک مسئله هندسی به ویژه در آموزش مدرسه‌ای، بدون تشخیص شکل‌ها امکان‌پذیر نیست، پس می‌توان گفت که حداقل درک مورد نیاز برای حل هر مسئله هندسی، درک ادراکی است (Duval, 1995). یک نمونه از مسائل مرتبط با این درک در شکل ۱ مشاهده می‌شود.

مسئله ۱: با توجه به شکل زیر، KEZL, IEZU, EZHL, IKGU, LGU, BEL هر یک چه نوع شکل هندسی هستند؟



شکل ۱. نمونه‌ای از مسائل نیازمند درک ادراکی (Deliyianni et al., 2010)

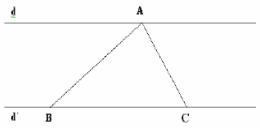
به منظور حل این مسئله، دانش‌آموز باید بتواند زیرشکل‌های مطرح شده در صورت مسئله را پیدا کرده و نام هر یک را بیان کند.

ب) درک مرحله‌ای: در حل برخی از مسائل هندسی گاهی لازم است تا یک شکل هندسی را ترسیم و یا روند ترسیم آن را توصیف کرد که درک مورد نیاز برای انجام آن را مرحله‌ای می‌نامند. علت این نام‌گذاری آن است که در انجام یک ترسیم و در ظاهر شدن اجزای هر شکل، ترتیب و اولویت خاصی وجود دارد که توجه به آن‌ها مهم است. در حالت کلی، زمانی می‌توان موفق به رسم صحیح یک شکل

[1] Apprehension
[2] Perceptual, sequential, discursive, operative
[3] Sub-figure

هندسی شد که با توجه به تعریف و خصوصیات یک شکل هندسی، ابزارهای مناسب به کار برده شوند (Duval, 1995). در شکل ۲ نمونه‌ای از مسائلی که حل آن‌ها نیازمند درک مرحله‌ای است، مشاهده می‌شود.

مسئله ۲: خطوط d و ´d موازی هستند. نقاط M و N را طوری قرار دهید که چهارضلعی AMNC متوازی‌الاضلاع و مساحت آن با مساحت مثلث ABC برابر باشد. M و N را چطور و با چه استدلالی مشخص کردید؟



شکل ۲. نمونه‌ای از مسائل نیازمند درک مرحله‌ای (Michael, 2013)

برای حل این مسئله، دانش‌آموز باید بتواند به کمک ابزارهایی مانند پرگار و خط‌کش، ترسیمی انجام دهد و سپس نحوه ترسیم خود را توضیح دهد بنابراین، این مسئله به کمک درک مرحله‌ای حل می‌شود.

پ) درک استدلالی: درک استدلالی زمانی مورد نیاز است که در فرآیند اثبات یک قضیه یا حل یک مسئله هندسی نتوان به طور مستقیم و به آسانی به نتیجه رسید و لازم باشد تا به کمک استدلال و بحث پیرامون تعاریف، قضایا و رویه‌ها به پاسخ صحیح دست یافت (Duval , ۱۹۹۵). مسئله ارائه شده در شکل ۳ برای سنجش درک استدلالی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مسئله ۳: توضیحات یک دانش‌آموز درباره مجموع زوایای داخلی مثلث در ادامه مشاهده می‌شود. آیا با او موافق هستید؟ دلایل خود را توضیح دهید.

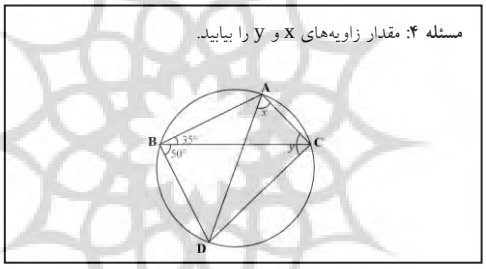
" من سه زاویه از مثلثی را اندازه گرفتم و آن‌ها را با هم جمع کردم و حاصل ۱۸۰ درجه شد. پس مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است."

شکل ۳. نمونه‌ای از مسائل نیازمند درک استدلالی (Michael, 2013)

به منظور پاسخ‌دهی به این مسئله، دانش‌آموز باید با ارائه استدلال‌های منطقی درباره درستی یا نادرستی استدلال دانش‌آموز دیگر اظهارنظر نماید. از این رو حل این مسئله نیازمند درک استدلالی است.

ت) درک عملیاتی: این درک به معنای توانایی لازم برای تغییر و تعدیل مناسب یک شکل هندسی به منظور دست یافتن به پاسخ صحیح مسئله است که به صورت‌های گوناگون مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای مثال، گاهی لازم است که یک شکل هندسی را به اجزا و زیرشکل‌های گوناگونی تقسیم کرد. گاهی نیز باید فراتر رفت و همه یا برخی از این اجزا را ترکیب کرد تا شکل یا شکل‌های دیگری ساخته شوند. برای مثال، یک متوازی‌الاضلاع می‌تواند به صورت ترکیب چند مثلث ظاهر شود. گاهی لازم است تا یک شکل هندسی را در ذهن خود بزرگ یا کوچک کنیم؛ یعنی باید اندازه اضلاع آن را تغییر دهیم تا یافتن پاسخ مسئله آسان‌تر شود. گاهی نیز حل مسئله موردنظر، نیازمند تغییر مکان یا جهت شکل در صفحه است. این عملیات می‌تواند به صورت ذهنی و یا فیزیکی بر روی شکل موردنظر ایجاد شود. در یک مسئله هندسی، یک یا چند مورد از این اعمال می‌توانند موجب تغییراتی در شکل اصلی شوند که یا راه‌حل مسئله را آشکار می‌سازند و یا در یافتن مراحل اصلی حل یا اثبات، ما را راهنمایی می‌کنند و از این راه است که یک شکل هندسی می‌تواند بینشی درباره راه‌حل مسئله به ما بدهد (Duval, 1995, 1999). برای مثال، حل مسئله ارائه شده در شکل ۴ نیازمند درک عملیاتی است.



شکل ۴. نمونه‌ای از مسائل نیازمند درک عملیاتی (Michael, 2013, p.361)

به منظور پاسخ‌دهی به این مسئله، لازم است تا شکل داده شده را به بخش‌های گوناگونی تقسیم کرد و با توجه به خصوصیات این بخش‌ها مقادیر x و y را یافت و در واقع نیازمند بکارگیری درک عملیاتی است.

پژوهش‌ها نشانگر آن هستند که ارتباط محکمی میان دو به دو ابعاد درک شکل‌های هندسی وجود دارد. برای مثال، تجسم در ارائه استدلال‌های هندسی کمک‌کننده است و این نشان‌دهنده ارتباط میان درک‌های عملیاتی و استدلالی است. هم‌چنین، درک ادراکی در بکارگیری سایر درک‌ها نقش پررنگی دارد. در واقع، در صورت نداشتن اطلاعات کافی از شکل‌های هندسی و خصوصیات آن‌ها نمی‌توان استدلال‌های درستی ارائه داد یا یک شکل هندسی را به درستی رسم کرد و هم‌چنین، نمی‌توان عملیات مناسبی بر روی شکل‌های هندسی پیاده ساخت (Michael, 2013). به طور کلی، تمامی مسائل هندسی که با استفاده از شکل‌های هندسی حل می‌شوند، حداقل به درک ادراکی نیاز دارند، زیرا حل یک مسئله

هندسی بدون شناخت شکل‌های ارائه شده در آن امکان‌پذیر نیست. با این وجود در تدریس و یادگیری هندسه، دووال اهمیتی ویژه برای درک عملیاتی قائل است زیرا از نظر او این درک، ارتباط مستقیمی با تجسم دارد و درک هندسه مدرسه‌ای بدون تجسم، امکان‌پذیر نیست. تقویت این بُعد، توانایی ایجاد تغییرات مناسب در شکل‌های هندسی و هم‌چنین، قدرت تجسم دانش‌آموزان را بالا خواهد برد (Deliyianni et al., 2010; Gagatsis et al., 2015).

پژوهش‌ها نشان می‌دهند که تمام درک‌ها به ویژه درک عملیاتی در بروز مؤلفه‌های خلاقیت در ریاضی تأثیر گذاشته و در نتیجه در ارتقاء و پرورش خلاقیت دانش‌آموزان سودمند هستند (Gagatsis et al., 2022; Gridos et al., 2021; Gridos et al., 2019). برای تقویت هر یک از این درک‌ها لازم است تا آموزش‌های ویژه‌ای طراحی شود. برای مثال، کار کردن با نرم‌افزارهای هندسی در تقویت درک‌های مرحله‌ای و عملیاتی نقش بسزایی دارد (Duval, 1995; Jones, 1998). دووال (Duval, 1995) معتقد است که داشتن یک نگاه ریاضی‌وار به شکل‌های هندسی تنها با هماهنگی میان این درک‌ها در یک مدت زمان طولانی حاصل می‌شود. این درک‌ها با وجود تفاوت‌های متعدد، به یکدیگر وابسته هستند. بنابراین، در تدریس هندسه نمی‌توان هیچ‌یک از آن‌ها را نادیده گرفت.

با وجود پژوهش‌های خارجی متعدد در زمینه نظریه دووال، به ندرت پژوهش داخلی یافت می‌شود که درک دانش‌آموزان از شکل‌های هندسی را بر اساس این نظریه، مورد بررسی قرار داده باشد. با این حال، در ارتباط با هندسه و هم‌چنین، چالش‌های فرآیند تدریس و یادگیری آن، پژوهش‌های داخلی متعددی انجام شده است (Reyhani et al., 2009; Reyhani et al., 2012, Lak, 2015; Mahdian et al., 2017; Bakhshalizadeh & Broojerdian, 2018). هم‌چنین، اکثر پژوهش‌های داخلی انجام شده در ارتباط با ارزیابی سطح تفکر هندسی و شناخت دانش‌آموزان از شکل‌های هندسی بر اساس نظریه فن‌هیلی بوده است (Safabakhsh, 2015; Bagheri, 2015; Alamian et al., 2018; Sabzali & Tavanaie, 2021). به طور کلی، نتایج پژوهش‌های داخلی و خارجی در زمینه هندسه و هم‌چنین، تجارب معلمان ریاضی نشان می‌دهند که بسیاری از مشکلات دانش‌آموزان مرتبط با مسائلی است که نیازمند بکارگیری شکل‌های هندسی هستند (Fischbein, 1993; Duval, 1995; Sabbaqi, 2014; Safabakhsh, 2015; Karpuz & Atasoy, 2019). بنابراین، لازم است بر نحوه بکارگیری شکل‌های هندسی توسط دانش‌آموزان تمرکزی ویژه صورت گیرد. بسیاری از دانش‌آموزان در آشنایی با خصوصیات اصلی شکل‌های هندسی، ترسیم صحیح یک شکل با استفاده از ابزارهای ترسیم، ایجاد تغییرات مناسب در شکل با هدف دستیابی به راه‌حل مسئله یا ارائه استدلال‌های منطقی با توجه به داده‌های موجود در شکل هندسی، مشکلات بسیاری

دارند (Clements et al., 1999; Karpuz & Atasoy, 2019; Barut & Retnawati, 2020). این مشکلات نشان‌دهنده عملکرد پایین دانش‌آموزان در حل مسائل مرتبط با چهار بُعد درک شکل‌های هندسی است. بنابراین، ارزیابی درک دانش‌آموزان بر اساس این چهار درک می‌تواند بسیاری از مشکلات و اشتباهات دانش‌آموزان در حل مسائل هندسی را آشکار سازد و در نهایت، به منظور ریشه‌یابی این مشکلات، لازم است تا کتاب درسی به عنوان اصلی‌ترین محتوای ارائه شده به دانش‌آموزان مورد بررسی قرار گیرد تا در صورت لزوم با اصلاح کتاب درسی، بسیاری از این مشکلات مرتفع شود. در مجموع، می‌توان گفت با توجه به نقشی مهم که شکل‌های هندسی در تمام پایه‌های تحصیلی دارند، آگاهی از میزان درک دانش آموزان از شکل‌های هندسی بر اساس نظریه دووال به معلمان و مؤلفان کتب درسی این امکان را می‌دهد تا تدریس بهتر و برنامه درسی دقیق‌تری تنظیم نمایند. معلمان باید در تمام مراحل تدریس خود تقویت هر یک از ابعاد درک را بگنجانند و از هیچ‌یک غافل نشوند (Gagatsis et al., 2015).

هدف از این پژوهش آن است که با تمرکز بر نظریه دووال، میزان درک دانش‌آموزان پایه دهم رشته ریاضی از شکل‌های هندسی مورد بررسی قرار گیرد و با بررسی مسائل کتاب درسی هندسه این پایه، امکان مقایسه درک دانش‌آموزان با محتوای ارائه شده به آن‌ها فراهم شود. هم‌چنین، تلاش شده است تا برخی از اشتباهات و مشکلات رایج دانش‌آموزان در پاسخ‌دهی به مسائل هندسی شناسایی شود. علت انتخاب پایه دهم رشته ریاضی در این پژوهش آن است که در این پایه، دانش‌آموزان برای نخستین بار مباحث هندسی را در یک کتاب مجزا می‌آموزند.

پرسش‌های پژوهش

۱- درک دانش‌آموزان دختر و پسر پایه دهم رشته ریاضی از شکل‌های هندسی چگونه است و در ارتباط با این شکل‌ها چه اشتباهاتی دارند؟

۲- تا چه میزان درک دانش‌آموزان پایه دهم از شکل‌های هندسی با مسائل کتاب هندسه این پایه، متناسب است؟

روش پژوهش

با توجه به سؤالات پژوهش، فرآیند انجام پژوهش شامل دو بخش است. در بخش اول، درک دانش‌آموزان از شکل‌های هندسی و اشتباهات آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت و در بخش دوم به بررسی مسائل کتاب درسی پرداخته شد. در بخش اول و به منظور ارزیابی درک دانش‌آموزان از شکل‌های هندسی از روش پیمایشی یا زمینه‌یابی استفاده شد. جامعه آماری، دانش‌آموزان دختر و پسر پایه دهم رشته ریاضی شهرستان

پاکدشت با جمعیت تقریباً ۴۷۰ نفر بود و ۲۳۵ نفر (۱۲۶ دختر و ۱۰۹ پسر) از آن‌ها به روش تصادفی خوشه‌ای انتخاب شدند. برای تعیین تعداد شرکت‌کنندگان از جدول مورگان استفاده شد. نمونه‌گیری به روش تصادفی خوشه‌ای نیز به این صورت انجام شد که از بین دبیرستان‌های دخترانه و پسرانه ابتدا هشت مدرسه به صورت تصادفی انتخاب شدند و سپس کلاس‌های پایه دهم رشته ریاضی در آن‌ها برای اجرای آزمون پژوهش مورد استفاده قرار گرفت. برای گردآوری داده‌های این بخش از پژوهش، یک آزمون تشریحی به کار گرفته شد و برای اعتبارسنجی آن، روایی صوری و محتوایی کیفی مورد بررسی قرار گرفت. به این صورت که در تدوین و ارزیابی مسائل از نظرات توصیفی متخصصان آموزش ریاضی و هندسه بهره گرفته شد. به منظور بررسی پایایی آزمون پژوهش، ابتدا پاسخ‌های دانش‌آموزان مشابه با دو پژوهش مرتبط (Karpuz & Atasoy, 2019; Michael, 2013) دسته‌بندی و سپس نمره‌گذاری شدند. به این صورت که پاسخ‌ها به سه دسته درست، ناقص و هم‌چنین، نادرست و بدون پاسخ تقسیم شدند و به پاسخ‌های مربوط به هر دسته به ترتیب امتیاز ۲، ۱ و صفر اختصاص داده شد. سپس بر اساس یکی از پژوهش‌های مرتبط که آزمون تشریحی مشابهی را جهت ارزیابی درک‌های چهارگانه بر اساس نظریه دووال مورد استفاده قرار داده بود (Michael, 2013) برای بررسی پایایی، ضریب آلفای کرونباخ محاسبه شد و مقدار ۰/۷۹ به دست آمد. آزمون پژوهش شامل هشت مسئله بر اساس پژوهش‌های مرتبط (Fischbein, 1993; Burger & Shaghnessy, 1986; Michael, 2013) بود. در واقع، برای ارزیابی هر یک از ابعاد چهارگانه درک شکل‌های هندسی، دو مسئله در نظر گرفته شد. مسائل آزمون در پیوست مقاله، قابل مشاهده است. حل مسائل هندسی ممکن است نیازمند بیش از یک درک باشد، اما در این پژوهش، مشابه با پژوهش‌های مرتبط، بارزترین درک مورد نیاز برای حل هر مسئله مورد توجه قرار گرفت و در این مورد با متخصصان هندسه نیز مشورت شد. بنابراین، مسائل ۲ و ۳ آزمون پژوهش به منظور ارزیابی درک ادراکی، مسائل ۱ و ۴ برای ارزیابی درک مرحله‌ای، مسائل ۵ و ۸ به منظور ارزیابی درک استدلالی و مسائل ۶ و ۷ برای ارزیابی درک عملیاتی بکار گرفته شدند. آزمون پژوهش در انتهای سال تحصیلی و پس از اتمام تدریس کتاب هندسه برگزار شد. جهت بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائل آزمون پژوهش، پاسخ‌ها به سه دسته درست، ناقص و نادرست یا بدون پاسخ تقسیم شدند. برای تجزیه و تحلیل داده‌ها از آمار توصیفی استفاده شد.

در بخش دوم پژوهش و به منظور ارزیابی کتاب درسی هندسه پایه دهم از روش تحلیل محتوا استفاده شد. جامعه آماری، کتاب هندسه پایه دهم چاپ سال ۱۴۰۲ است و حجم نمونه و جامعه یکسان در نظر گرفته شد. واحد زمینه، مسائل داخل متن درس و تمرین‌های انتهای درس در هر فصل از کتاب تعیین

شد و هر یک از مسائل موجود در این بخش‌ها، یک واحد ثبت تلقی شده است. واحد تحلیل نیز محتوای مسائل کتاب هندسه پایه دهم که در بخش‌های داخل متن درس و تمرین‌های انتهای درس قرار گرفته‌اند، در نظر گرفته شد. به منظور تحلیل کتاب درسی، ابتدا تمامی فعالیت‌ها، کاردرکلاس‌ها، مثال‌ها و تمرین های کتاب هندسه پایه دهم که شامل چهار فصل است، مورد بررسی قرار گرفت. دسته‌بندی مسائل کتاب بر اساس چهار بُعد درک شکل‌های هندسی که توسط دووال (Duval, 1995) ارائه شده است، صورت گرفت. در واقع، از فرم‌های تحلیل محتوایی استفاده شد که روایی صوری و محتوایی کیفی آن توسط چند متخصص آموزش ریاضی و هندسه تأیید شد. به طور کلی، مسائلی که نیازمند تشخیص شکل‌های هندسی و استفاده از خواص و روابط مرتبط با آن‌ها است و هم‌چنین، مسائلی که نیازمند تشخیص زیرشکل‌های یک شکل هندسی است، در دسته مسائل درک ادراکی قرار گرفتند. مسائلی که نیازمند رسم شکل و یا توضیح مراحل رسم هستند در دسته مسائل درک مرحله‌ای قرار داده شدند. مسائلی که نیازمند ارائه استدلال و توجیه برای یک ادعا هستند، در دسته مسائل درک استدلالی و مسائلی که نیازمند ایجاد تغییر در شکل هندسی و یا نگاه به یک شکل از زوایا و بخش‌های گوناگون هستند نیز در دسته مسائل درک عملیاتی قرار گرفتند. مشابه با مسائل آزمون پژوهش، برخی از مسائل کتاب درسی نیز ممکن است نیازمند بیش از یک درک باشند اما با توجه به پژوهش‌های مرتبط، بارزترین درک موردنیاز برای حل آن‌ها در نظر گرفته شد. جهت بررسی پایایی ابزار گردآوری داده‌ها جهت تحلیل محتوای کتاب، یکی از فصل‌های کتاب هندسه پایه دهم (فصل سوم) به صورت تصادفی انتخاب شد و مسائل آن توسط دو کدگذار که با موضوع پژوهش آشنا بودند، کدگذاری شد. سپس ضریب پایایی هولستی محاسبه شد و ضریب توافق بین کدگذاران مقدار ۰/۷۶ به دست آمد.

نتایج پژوهش

سؤال اول پژوهش: درک دانش‌آموزان دختر و پسر پایه دهم رشته ریاضی از شکل‌های هندسی چگونه است و در ارتباط با این شکل‌ها چه اشتباهاتی دارند؟

به منظور ارزیابی درک دانش‌آموزان از شکل‌های هندسی بر اساس نظریه دووال، توانایی آن‌ها در پاسخ‌دهی به مسائل مرتبط با چهار درک ادراکی، مرحله‌ای، استدلالی و عملیاتی مورد بررسی قرار گرفت. داده‌های حاصل از پاسخ‌های دانش‌آموزان با توجه به درک مورد نیاز هر مسئله و بر اساس فراوانی در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. فراوانی و درصد انواع پاسخ‌ها به مسائل آزمون (n=۲۳۵)

نوع درک	شماره مسئله	فراوانی و درصد شیوه‌های پاسخ‌دهی					
		درست		ناقص		نادرست یا بدون پاسخ	
		فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
درک ادراکی	۲	۱۰۱	٪۴۳	۹۱	۳۸/٪۷	۴۳	۱۸/٪۳
	۳	۱۵۸	۶۷/٪۲	۶۸	۲۸/٪۹	۹	۳/٪۸
درک مرحله‌ای	۱	۱۰۸	٪۴۶	۱۱۳	٪۴۸	۱۴	٪۶
	۴	۹۳	۳۹/٪۶	۵۳	۲۲/٪۶	۸۹	۳۷/٪۹
درک استدلالی	۵	۱۰۳	۴۳/٪۸	۱۵	۶/٪۴	۱۱۷	۴۹/٪۸
	۸	۸۶	۳۶/٪۶	۲۱	۸/٪۹	۱۲۸	۵۴/٪۵
درک عملیاتی	۶	۱۲۳	۵۲/٪۳	۵	۲/٪۱	۱۰۷	۴۵/٪۵
	۷	۱۰۱	٪۴۳	۲۸	۱۱/٪۹	۱۰۶	۴۵/٪۱

همان‌گونه که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، بیش‌ترین درصد پاسخ‌های درست مربوط به مسئله ۳ یعنی ۶۷/۲ درصد و بیش‌ترین درصد پاسخ‌های نادرست یا بدون پاسخ، مربوط به مسئله ۸ یعنی ۵۴/۵ درصد بوده است. در حالت کلی، بیش‌ترین تعداد پاسخ‌های نادرست یا بدون پاسخ مربوط به مسائلی است که نیازمند درک استدلالی و عملیاتی هستند. در جدول ۲ نتایج حاصل از عملکرد دانش‌آموزان به تفکیک جنسیت مشاهده می‌شود.

جدول ۲. فراوانی و درصد انواع پاسخ‌ها به مسائل آزمون به تفکیک جنسیت (دختران=۱۲۶، پسران=۱۰۹)

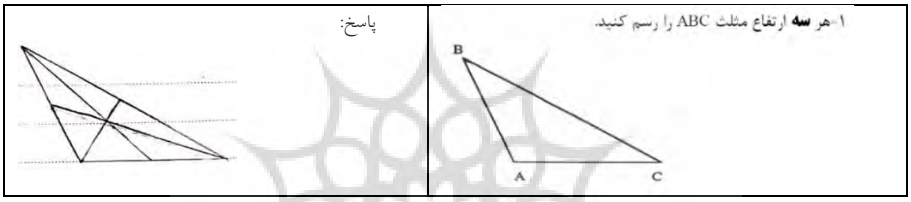
نوع درک	شماره مسئله	جنسیت	فراوانی و درصد شیوه‌های پاسخ‌دهی					
			درست		ناقص		نادرست یا بدون پاسخ	
			فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
درک ادراکی	۲	دختر	۵۴	۴۲/٪۹	۵۴	۴۲/٪۹	۱۸	۱۴/٪۳
		پسر	۴۷	۴۳/٪۱	۳۷	۳۳/٪۹	۲۵	۲۲/٪۹
	۳	دختر	۸۵	۶۷/٪۵	۳۴	٪۲۷	۷	۵/٪۶
		پسر	۷۳	٪۶۷	۳۴	۳۱/٪۲	۲	۱/٪۸
درک مرحله‌ای	۱	دختر	۴۹	۳۸/٪۹	۶۹	۵۴/٪۸	۸	۶/٪۳
		پسر	۵۹	۵۴/٪۱	۴۴	۴۰/٪۴	۶	۵/٪۵
		دختر	۵۰	۳۹/٪۷	۲۶	۲۰/٪۶	۵۰	۳۹/٪۷

	۴	پسر	۴۳	۳۹/۴٪	۲۷	۲۴/۸٪	۳۹	۳۵/۸٪
درک استدلالی	۵	دختر	۵۶	۴۴/۴٪	۳	۲/۴٪	۶۷	۵۳/۲٪
		پسر	۴۷	۴۳/۱٪	۱۲	٪۱۱	۵۰	۴۵/۹٪
	۸	دختر	۴۲	۳۳/۳٪	۸	۶/۳٪	۷۶	۶۰/۳٪
		پسر	۴۴	۴۰/۴٪	۱۳	۱۱/۹٪	۵۲	۴۷/۷٪
درک عملیاتی	۶	دختر	۶۰	۴۷/۶٪	۳	۲/۴٪	۶۳	٪۵۰
		پسر	۶۳	۵۷/۸٪	۲	۱/۸٪	۴۴	۴۰/۴٪
	۷	دختر	۴۵	۳۵/۷٪	۱۹	۱۵/۱٪	۶۲	۴۹/۲٪
		پسر	۵۶	۵۱/۴٪	۹	۸/۳٪	۴۴	۴۰/۴٪

همان‌گونه که در جدول ۲ مشاهده می‌شود در پاسخ به برخی از مسائل، درصد پاسخ‌های درست دختران و در برخی نیز درصد پاسخ‌های درست پسران بیش‌تر است و تقریباً دختران و پسران عملکرد مشابهی داشته‌اند. بیش‌ترین درصد پاسخ‌های درست، هم در دختران و هم در پسران، مربوط به مسائل مرتبط با درک ادراکی و بیش‌ترین درصد پاسخ‌های نادرست و بدون پاسخ هر دو گروه، مربوط به مسائل مرتبط با درک استدلالی است. بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائل آزمون نشانگر اشتباهات متعددی بود که در ادامه تنها به برخی از رایج‌ترین آن‌ها پرداخته می‌شود. در شکل ۵ پاسخ یک دانش‌آموز به مسئله ۲ آزمون پژوهش (پیوست) مشاهده می‌شود. این مسئله نیازمند درک ادراکی است.

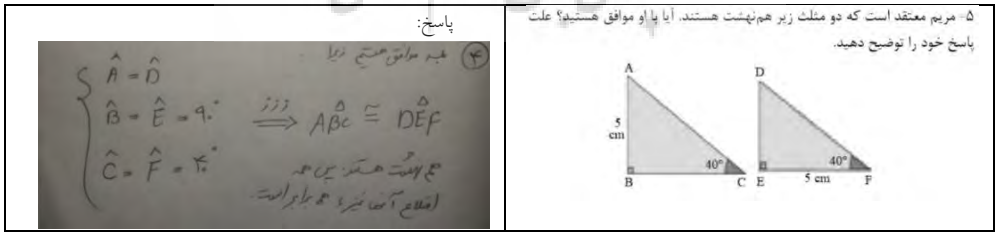
شکل ۵. پاسخ یک دانش‌آموز به مسئله ۲ آزمون پژوهش

همان‌گونه که از پاسخ این دانش‌آموز پیداست، شکل شماره ۲ که شبیه یک کایت است را لوزی در نظر گرفته است و به طور کلی این رایج‌ترین اشتباه دانش‌آموزان در پاسخ به این مسئله است. احتمالاً علت این اشتباه تصور نادرست دانش‌آموزان و تعریف نادرستی است که از شکل لوزی به خاطر سپرده‌اند و با توجه به دلایلی که ارائه کرده است، دانش‌آموز این تصور را دارد که لوزی شکلی است که دو زاویه و دو قطر برابر دارد. در واقع تصور نادرست دانش‌آموزان از شکل لوزی و خصوصیاتی که دارد موجب اشتباه در تشخیص آن شده است. نمونه‌ای دیگر از پاسخ‌های دانش‌آموزان در پاسخ‌دهی به مسئله ۱ آزمون (پیوست) در شکل ۶ مشاهده می‌شود. این مسئله به منظور ارزیابی درک مرحله‌ای دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گرفته است.



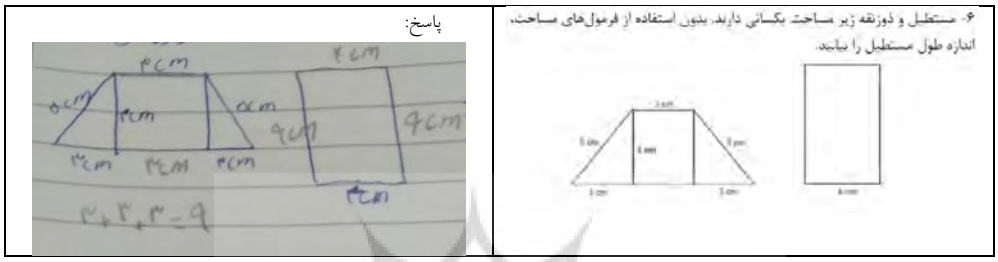
شکل ۶: پاسخ یک دانش‌آموز به مسئله ۱ آزمون پژوهش

پاسخ این دانش‌آموز اشتباه رایجی را نشان می‌دهد. بسیاری از دانش‌آموزان تصور می‌کنند که ارتفاع های مثلث باید حتماً درون آن قرار گیرند و همان‌گونه که در شکل۳ نیز پیداست به نظر می‌رسد که به جای ارتفاع، میانه‌های مثلث موردنظر را رسم می‌کنند. در واقع این افراد توجهی به عمود بودن ارتفاع بر ضلع مقابل، که در تعریف ارتفاع به آن تأکید شده است، ندارند. نمونه‌ای دیگر از پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسئله۵ آزمون پژوهش (پیوست) در شکل ۷ مشاهده می‌شود. این مسئله به منظور ارزیابی درک استدلالی دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گرفته است.



شکل ۷. پاسخ یک دانش‌آموز به مسئله ۵ آزمون پژوهش

همان‌گونه که در پاسخ این دانش‌آموز مشاهده می‌شود، برخی از دانش‌آموزان این تصور را دارند که تساوی سه زاویه در دو مثلث که نشان‌دهنده تشابه آن‌هاست، یکی از حالت‌های هم‌نهشتی نیز هست و همان‌گونه که در انتهای پاسخ نیز مشاهده می‌شود، از برابری سه زاویه، برابری سه ضلع نتیجه گرفته شده است. نمونه‌ای دیگر از پاسخ‌های دانش‌آموزان در پاسخ‌دهی به مسئله ۶ آزمون پژوهش (پیوست) در شکل ۸ مشاهده می‌شود که به منظور ارزیابی درک عملیاتی دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گرفته است.



شکل ۸. پاسخ یک دانش‌آموز به مسئله ۶ آزمون پژوهش

همان‌گونه که در پاسخ این دانش‌آموز نیز پیداست، برخی از دانش‌آموزان ارتباط میان مستطیل و ذوزنقه داده شده در مسئله را درک نکرده‌اند و برای محاسبه طول مستطیل، اندازه برخی از اضلاع موجود در شکل‌ها را با هم جمع کرده‌اند. در پاسخ این دانش‌آموز نیز مشاهده می‌شود که بدون هیچ استدلال منطقی، این تصور را داشته است که طول مستطیل با اندازه قاعده ذوزنقه برابر است.

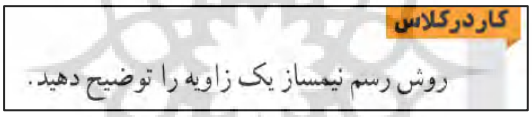
سؤال دوم پژوهش: تا چه میزان درک دانش‌آموزان پایه دهم از شکل‌های هندسی با مسائل کتاب هندسه این پایه، متناسب است؟

همان‌گونه که در پاسخ به سؤال اول پژوهش بیان شد، نتایج نشان می‌دهد که درصد پاسخ‌های نادرست یا بدون پاسخ دانش‌آموزان به مسائل مرتبط با درک‌های استدلالی و عملیاتی در مقایسه با مسائل مرتبط با درک‌های ادراکی و مرحله‌ای، بیش‌تر است و می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ‌دهی به این مسائل، برای دانش‌آموزان دشواری بیش‌تری داشته است. به منظور بررسی تناسب محتوای ارائه شده به دانش‌آموزان در کتاب درسی با میزان درک آن‌ها از شکل‌های هندسی، به بررسی و دسته‌بندی مسائل کتاب درسی هندسه پایه دهم بر اساس چهار بُعد درک شکل‌های هندسی پرداخته شد. در ادامه، نتایج حاصل از تحلیل محتوای کتاب به ترتیب فصل‌ها یعنی از فصل یک تا چهار ارائه می‌شود. توزیع مسائل مرتبط با هر درک در فصل اول کتاب (ترسیم‌های هندسی و استدلال) در جدول ۳ ارائه شده است. مسائل داخل متن شامل کلیه کاردرکلاس‌ها، فعالیت‌ها، مثال‌ها، قضایای اثبات شده و غیره است.

جدول ۳. توزیع مسائل فصل اول بر اساس درک مورد نیاز آن‌ها

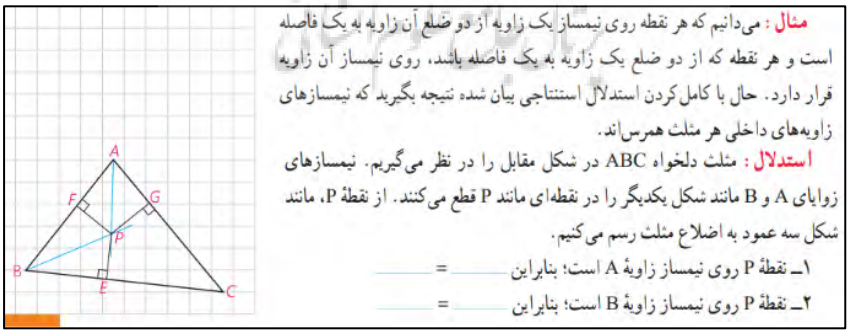
	مسائل داخل متن		تمرین‌ها		کل مسائل	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
درک ادراکی	۲	۴/٪۳	۰	٪۰	۲	۳/٪۷
درک مرحله‌ای	۲۳	٪۵۰	۴	۴۴/٪۴	۲۷	٪۴۹
درک استدلالی	۱۸	۳۹/٪۲	۵	۵۵/٪۶	۲۳	۴۱/٪۸
درک عملیاتی	۳	۶/٪۵	۰	٪۰	۳	۵/٪۵
مجموع	۴۶	٪۱۰۰	۹	٪۱۰۰	۵۵	٪۱۰۰

در جدول ۳ مشاهده می‌شود که بیش‌تر مسائل فصل اول متمرکز بر تقویت درک مرحله‌ای و هم‌چنین، درک استدلالی هستند و حضور مسائل مرتبط با درک‌های ادراکی و عملیاتی در این فصل کمرنگ‌تر است. نمونه‌ای از مسائل فصل اول که نیازمند درک مرحله‌ای است، در شکل ۹ مشاهده می‌شود.



شکل ۹. کاردرکلاس صفحه ۱۲ کتاب هندسه پایه دهم

از آنجایی که در این کاردرکلاس از دانش‌آموزان خواسته شده است تا مراحل رسم نیمساز را توصیف کنند، پاسخ‌گویی به آن نیازمند درک مرحله‌ای است. در شکل ۱۰ نمونه‌ای از مسائل فصل اول که نیاز به درک استدلالی دارد، مشاهده می‌شود.



شکل ۱۰. مثال صفحه ۱۹ کتاب هندسه پایه دهم

در این مثال از دانش‌آموزان خواسته شده است تا جاهای خالی را پر کنند؛ به طوری که در نهایت استدلال استنتاجی درستی شکل گیرد. از این رو، حل این مسئله نیازمند درک استدلالی است. توزیع مسائل فصل دوم (قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن) بر اساس درک مورد نیاز آن‌ها در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول ۴. توزیع مسائل فصل دوم بر اساس درک مورد نیاز آن‌ها

	مسائل داخل متن		تمرین‌ها		کل مسائل	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
درک ادراکی	۱۳	۳۷/٪۱	۱۴	۶۰/٪۹	۲۷	۴۶/٪۶
درک مرحله‌ای	۰	٪۰	۰	٪۰	۰	٪۰
درک استدلالی	۱۵	۴۲/٪۹	۳	٪۱۳	۱۸	٪۳۱
درک عملیاتی	۷	٪۲۰	۶	۲۶/٪۱	۱۳	۲۲/٪۴
مجموع	۳۵	٪۱۰۰	۲۳	٪۱۰۰	۵۸	٪۱۰۰

همان‌گونه که در این جدول ارائه شده است تقریباً نیمی از مسائل این فصل نیازمند درک ادراکی و تعدادی نیز نیازمند درک استدلالی و عملیاتی هستند و هیچ مسئله مرتبط با درک مرحله‌ای در این فصل مشاهده نمی‌شود. در شکل ۱۱ نمونه‌ای از مسائل فصل دوم که نیازمند درک ادراکی است ارائه شده است.

فعالیت ۲

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A′H′ در دو مثلث ABC و A′B′C′ هم‌اندازه‌اند (AH = A′H′)

با برگردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید.

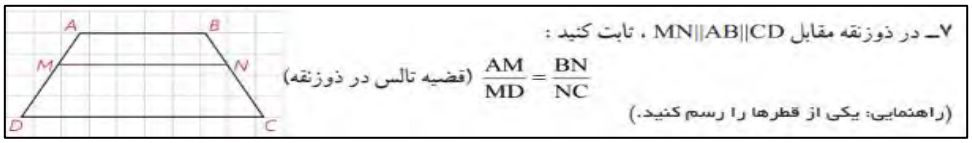
S_{ABC} = مساحت ABC = $\frac{1}{2}\cdots\times\cdots$

$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\cdots\times\cdots$

$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}\cdots\times\cdots}{\frac{1}{2}\cdots\times\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

شکل ۱۱. فعالیت صفحه ۳۱ کتاب هندسه پایه دهم

حل این مسئله نیازمند آشنایی با شکل مثلث و نحوه محاسبه مساحت آن است. بنابراین، حل آن نیازمند درک ادراکی است. در شکل ۱۲ نمونه‌ای از مسائل فصل دوم که به کمک درک عملیاتی حل می‌شود، ارائه شده است.



شکل ۱۲. تمرین ۷ صفحه ۳۷ کتاب هندسه پایه دهم

همان‌گونه که در قسمت راهنمایی این مسئله نیز اشاره شده است به منظور حل آن باید ابتدا یکی از قطرهای ذوزنقه را رسم کرد و سپس روابط قضیه تالس را برای مثلث‌های ایجاد شده نوشت. بنابراین، حل این مسئله نیازمند درک عملیاتی است. در جدول ۵ نتایج حاصل از بررسی فصل سوم (چندضلعی‌ها) مشاهده می‌شود.

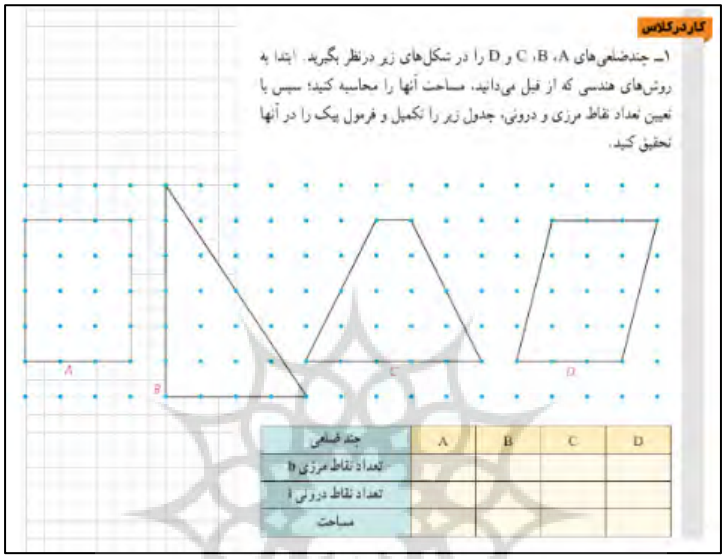
جدول ۵. توزیع مسائل فصل سوم بر اساس درک مورد نیاز آن‌ها

	مسائل داخل متن		تمرین		کل مسائل	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
درک ادراکی	۱۶	۲۹/٪۶	۴	٪۲۵	۲۰	۲۸/٪۶
درک مرحله‌ای	۰	٪۰	۰	٪۰	۰	٪۰
درک استدلالی	۲۷	٪۵۰	۷	۴۳/٪۷	۳۴	۴۸/٪۶
درک عملیاتی	۱۱	۲۰/٪۴	۵	۳۱/٪۳	۱۶	۲۲/٪۸
مجموع	۵۴	٪۱۰۰	۱۶	٪۱۰۰	۷۰	٪۱۰۰

همان‌گونه که از جدول پیداست اغلب مسائل فصل سوم نیازمند درک استدلالی هستند و در این فصل نیز هیچ مسئله‌ای مرتبط با درک مرحله‌ای یافت نشد. نمونه‌ای از مسائل فصل سوم که نیازمند درک استدلالی است در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود.

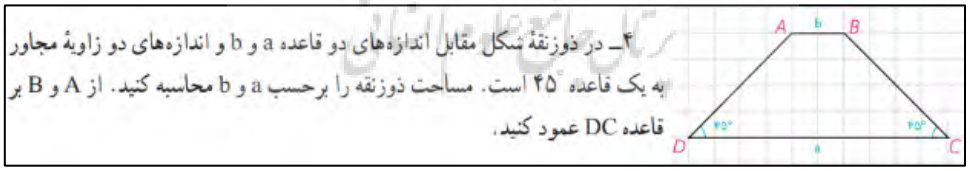
شکل ۳. کاردرکلاس صفحه ۵۶ کتاب هندسه پایه دهم

در هر سه قسمت این کاردرکلاس از دانش‌آموزان خواسته شده است تا با ارائه استدلال‌های منطقی، عبارت‌هایی را توجیه نمایند. بنابراین، حل این مسئله، نیازمند درک استدلالی است. نمونه‌ای از مسائل فصل سوم که مستلزم درک ادراکی است، در شکل ۱۴ ارائه شده است.



شکل ۱۴. کاردرکلاس صفحه ۷۱ کتاب هندسه پایه دهم

حل این مسئله نیاز به آشنایی با شکل‌های مستطیل، مثلث، ذوزنقه و متوازی‌الاضلاع و هم‌چنین، آشنایی با نحوه محاسبه مساحت آن‌ها دارد. بنابراین، حل آن نیازمند درک ادراکی است. نمونه‌ای از مسائل فصل سوم که به کمک درک عملیاتی حل می‌شود، در شکل ۱۵ ارائه شده است.



شکل ۱۵. تمرین ۴ صفحه ۷۲ کتاب هندسه

برای حل این مسئله دانش‌آموزان باید از دو رأس A و B بر قاعده DC عمودهایی رسم نمایند و سپس با استفاده از شکل‌های ایجاد شده و روابط آن‌ها، مسئله را حل کنند. بنابراین، حل این مسئله نیازمند درک عملیاتی است. در جدول ۶ نتایج حاصل از بررسی فصل چهارم (تجسم فضایی) ارائه شده است.

جدول ۶. توزیع مسائل فصل چهارم بر اساس درک مورد نیاز آن‌ها

	مسائل داخل متن		تمرین‌ها		کل مسائل	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
درک ادراکی	۲	۳/٪۶	۰	٪۰	۲	۲/٪۶
درک مرحله‌ای	۱	۱/٪۸	۰	٪۰	۱	۱/٪۳
درک استدلالی	۰	٪۰	۰	٪۰	۰	٪۰
درک عملیاتی	۵۲	۹۴/٪۶	۲۳	٪۱۰۰	۷۵	۹۶/٪۱
مجموع	۵۵	٪۱۰۰	۲۳	٪۱۰۰	۷۸	٪۱۰۰

همان‌گونه که در جدول نیز مشاهده می‌شود، اکثر مسائل فصل چهارم نیازمند درک عملیاتی هستند و حضور مسائلی که به سایر درک‌ها نیاز دارند، بسیار کمرنگ است. در شکل ۱۶ نمونه‌ای از مسائل فصل چهارم که نیازمند درک عملیاتی است ارائه شده است.

شکل ۱۶. کار در کلاس صفحه ۸۹ کتاب هندسه پایه دهم

برای پاسخ‌گویی به این مسئله، دانش‌آموزان باید بتوانند به کمک توانایی تجسم فضایی از جهات گوناگون به شکل داده شده نگاه کنند. بنابراین، حل این مسئله نیازمند درک عملیاتی است. در جدول ۷ فراوانی کلیه مسائل کتاب درسی بر اساس درک مورد نیاز آن‌ها ارائه شده است.

جدول ۷. فراوانی و درصد مسائل کتاب هندسه بر اساس ابعاد درک شکل‌های هندسی

	مسائل داخل متن		تمرین‌ها		مجموع	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
درک ادراکی	۳۳	۶۴/٪۷	۱۸	۳۵/٪۳	۵۱	٪۱۰۰
درک مرحله‌ای	۲۴	۸۵/٪۷	۴	۱۴/٪۳	۲۸	٪۱۰۰
درک استدلالی	۶۰	٪۸۰	۱۵	٪۲۰	۷۵	٪۱۰۰
درک عملیاتی	۷۳	۶۸/٪۲	۳۴	۳۱/٪۸	۱۰۷	٪۱۰۰

با توجه به جدول ۷ بررسی مسائل کتاب درسی هندسه پایه دهم نشان داد که از بین ابعاد گوناگون درک شکل‌های هندسی، کم‌ترین فراوانی متعلق به مسائلی است که به درک مرحله‌ای نیاز دارند و مسائل مرتبط با دو درک عملیاتی و استدلالی بیش‌ترین فراوانی را دارند. از طرفی، با توجه به جدول ۱ مشاهده شد که درصد پاسخ‌های نادرست یا بدون پاسخ دانش‌آموزان به مسائلی که نیازمند این دو درک هستند نسبت به دو درک دیگر، بیش‌تر است. بنابراین، می‌توان گفت که درک دانش‌آموزان با محتوای ارائه شده به آن‌ها در کتاب درسی، انطباق ندارد.

بحث و نتیجه‌گیری

هندسه برای ریاضی‌دانان و علاقمندان به ریاضیات جذاب است اما به نظر می‌رسد که برای بسیاری از دانش‌آموزان این‌طور نیست. آموزش هندسه در عمل بسیار پیچیده‌تر و دشوارتر از آموزش جبر و حساب است (Duval, 1998) و پژوهش‌ها نشان می‌دهند که بسیاری از دانش‌آموزان حتی در مقطع دبیرستان، توانایی ارائه استدلال در ارتباط با ایده‌های هندسی خود را ندارند (Carroll, 1998; Reyhani et al., 2012; Karpuz & Atasoy, 2019). به منظور رفع مشکلات فرآیند تدریس و یادگیری هندسه لازم است تا پژوهش‌های بیش‌تری انجام شود. یکی از مهم‌ترین چارچوب‌هایی که در ارتباط با هندسه و با تمرکز بر شکل‌های هندسی ارائه شده است نظریه درک شکل‌های هندسی نام دارد و در فرآیند یاددهی و یادگیری هندسه، تمرکز بر هر چهار درک معرفی شده در این نظریه ضرورت دارد. از آنجایی که در پایه دهم، دانش‌آموزان مباحث هندسی را برای نخستین بار به صورت رسمی در یک کتاب درسی مجزا می‌آموزند، در این پژوهش درک دانش‌آموزان و کتاب درسی هندسه این پایه مورد بررسی قرار گرفته است.

نتایج این پژوهش، بیانگر آن است که در پاسخ‌دهی به مسائل مربوط به درک‌های استدلالی و عملیاتی، درصد پاسخ‌های نادرست و بدون پاسخ دانش‌آموزان، بیش‌تر از مسائلی است که به کمک درک‌های ادراکی و مرحله‌ای حل می‌شوند. از طرفی، نتایج حاصل از تحلیل محتوای کتاب هندسه پایه دهم نشان داد که بیش از نیمی از مسائل این کتاب، نیازمند بکارگیری دو درک استدلالی و عملیاتی است. بنابراین، می‌توان گفت که بین درک دانش‌آموزان و محتوای ارائه شده به آن‌ها در کتاب درسی، تناسب وجود ندارد.

هم‌چنین، نتایج نشان می‌دهد که درصد فراوانی انواع پاسخ‌های دانش‌آموزان دختر و پسر تفاوت قابل توجهی ندارند و تقریباً دختران و پسران در پاسخ‌دهی به مسائل آزمون عملکرد مشابهی داشتند. در ارتباط با اشتباهات دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به مسائل آزمون، نتایج نشانگر آن هستند که در ارتباط با مسائلی که نیازمند درک ادراکی بودند، بسیاری از دانش‌آموزان در تشخیص شکل‌های هندسی اشتباهاتی داشتند. برای مثال، برخی از آن‌ها مثلثی که خیلی باریک و کشیده است را به عنوان مثلث در نظر نگرفتند. بررسی ویژگی‌های نادرستی که دانش‌آموزان برای هر یک از شکل‌های لوزی و مثلث ارائه کرده‌اند، نمایانگر علت اشتباهات آن‌ها در تشخیص این شکل‌های هندسی است. طبق پیشینه پژوهش، عدم توانایی تشخیص شکل‌های هندسی و عدم آشنایی یا خصوصیات آن‌ها نشان‌دهنده درک ادراکی پایین دانش‌آموزان است (Michael, 2013). در ارتباط با مسائلی از آزمون که نیازمند ترسیم و در واقع درک مرحله‌ای هستند، اکثر اشتباهات دانش‌آموزان به دلیل درک نادرست آن‌ها از مفاهیم و خصوصیات شکل‌های هندسی بود. برای مثال، اشتباهات دانش‌آموزان در رسم ارتفاع‌های مثلث حاکی از درک نادرست آن‌ها از تعریف و مفهوم ارتفاع بود و این نشان‌دهنده درک مرحله‌ای پایین دانش‌آموزان است. در ارتباط با مسائلی از آزمون که نیازمند درک عملیاتی بودند، به نظر می‌رسید که اشتباه بسیاری از دانش‌آموزان تکیه بر شهود صرف بوده است. بسیاری از دانش‌آموزان نیز با در نظر گرفتن حالات خاص اقدام به اثبات ادعای خود کرده‌اند و نتوانستند به کمک درک عملیاتی و با ایجاد تغییرات مناسب در شکل هندسی به راه‌حل مسئله یا شیوه صحیح اثبات دست یابند. در پاسخ به مسائل استدلالی آزمون نیز به نظر می‌رسد که بسیاری از دانش‌آموزان توانایی ارائه استدلال‌های منطقی برای توجیه ادعاهای خود را نداشتند. برخی از آن‌ها نیز لزومی برای اثبات نمی‌دیدند و حکم مسئله را امری بدیهی تلقی می‌کردند. عده‌ای نیز بر اساس مشاهدات ظاهری خود از شکل داده شده در مسئله، استدلال کرده‌اند. تعدادی از دانش‌آموزان نیز به دلیل اطلاعات هندسی نادرست خود، استدلال‌های نامربوطی ارائه داده‌اند. عدم توانایی در ارائه استدلال‌های منطقی به منظور توجیه ادعاهای هندسی، نشان‌دهنده درک استدلالی پایین دانش‌آموزان است.

بررسی و مطالعه پژوهش‌های مرتبط که در حوزه نظریه دووال انجام شده‌اند، بیانگر هم‌سویی و شباهت یافته‌های آن‌ها با نتایج این پژوهش است. برای مثال، پژوهش مایکل (Michael, 2013) نیز حاکی از آن است که برای دانش‌آموزان پایه نهم، دهم و یازدهم مسائل مرتبط با درک‌های مرحله‌ای و استدلالی نسبت به دو درک دیگر دشواری بیش‌تری دارند. نتایج پژوهش کارپوز و آتاسوی (Karpuz & Atasoy, 2019) نیز نشان می‌دهد که بسیاری از دانش‌آموزان در پاسخ به مسائلی که نیازمند درک‌های استدلالی و عملیاتی هستند، عملکرد پایین‌تری دارند و اشتباهات و مشکلات بیان شده در پژوهش کارپوز و آتاسوی مشابه اشتباهات دانش‌آموزان در این پژوهش است. نتایج پژوهش مایکل و همکاران (Michael et al., 2011) نیز نشان می‌دهد که حل مسائل مرتبط با درک عملیاتی به ویژه مسائلی که با تجزیه شکل اصلی به زیرشکل‌ها و سپس ایجاد شکل‌های جدید، حل می‌شوند، برای دانش‌آموزان پایه‌های نهم و دهم دشوار است. بنابراین، به طور کلی، پژوهش‌های مرتبط نیز دشواری مسائلی که نیازمند درک‌های استدلالی و عملیاتی هستند را تأیید می‌کنند.

با توجه به پیشینه پژوهش و نقش ابعاد درک شکل‌های هندسی در فرآیند تدریس و یادگیری هندسه و تقویت خلاقیت ریاضی، ارزیابی درک دانش‌آموزان در چهار بُعد معرفی شده ضرورت دارد و می‌تواند بسیاری از اشتباهات دانش‌آموزان در حل مسائل هندسی را آشکار سازد. هم‌چنین، بررسی کتاب درسی هندسه و طبقه‌بندی مسائل آن بر اساس این چهار درک، امکان مقایسه درک دانش‌آموزان با محتوای ارائه شده به آن‌ها را فراهم می‌سازد و از این راه می‌تواند معلمان را از نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان خود و هم‌چنین، کاستی‌های کتاب‌های درسی آگاه سازد تا مطابق با نیازهای دانش‌آموزان اقدام به طراحی تدریس خود نمایند و با تأکید بر همه ابعاد درک شکل‌های هندسی، مسائل ارائه شده به دانش‌آموزان را بر اساس نقاط قوت و ضعف آن‌ها دسته‌بندی و اولویت‌بندی کنند. به طور کلی، با توجه به یافته‌های پژوهش می‌توان نتیجه گرفت سیستم آموزشی که دانش‌آموز در آن به تحصیل پرداخته است و مهم‌ترین عناصر آن معلم و کتاب درسی هستند، به درستی قادر نبوده است درک عملیاتی و استدلالی دانش‌آموزان را تا حد قابل‌قبولی پرورش دهد و پس از انجام پژوهش‌هایی بیش‌تر در این زمینه، لازم است تا شیوه‌های تدریس و یا کتاب‌های درسی اصلاح گردند. با وجود آن‌که این نظریه در پژوهش‌های جهانی بسیار مورد استفاده قرار گرفته است، منابع پژوهشی داخلی به ندرت به آن پرداخته‌اند و آشنایی با این نظریه برای معلمان و دست اندرکاران آموزش ریاضی قابل‌توجه خواهد بود. از این رو، بحث پیرامون چنین نظریه هایی می‌تواند در بازبینی فرآیند آموزش هندسه و برنامه‌ریزی برای دوره‌های ضمن خدمت معلمان ریاضی کشورمان سودمند باشد. در صورتی که معلمان و اساتید با این نظریه آشنا شوند، می‌توانند از علل

برخی از اشتباهات رایج در حل مسائل هندسی و ارتباط آن‌ها با چهار درک موردنظر آگاهی یابند و هم‌چنین، از راه چارچوب معرفی شده و با تمرکز بر درک‌هایی که دانش‌آموزان عملکرد پایین‌تری در پاسخ‌دهی به مسائل مرتبط با آن‌ها دارند، تدریس خود را سازماندهی نمایند. هم‌چنین، نتایج حاصل از چنین پژوهش‌هایی می‌تواند مؤلفان کتاب‌های درسی و برنامه‌ریزان آموزشی را در راستای اصلاح خط مشی‌های آموزشی یاری رساند. در واقع، آگاهی از نقاط ضعف دانش‌آموزان و بررسی محتوای ارائه شده به آن‌ها می‌تواند توجه برنامه‌ریزان آموزشی را به سمت اصلاح کتاب‌های درسی، نحوه ارائه مطالب در آن‌ها و هم‌چنین، بهبود شیوه‌های آموزشی و تدریس هندسه در راستای رفع مشکلات رایج دانش‌آموزان جلب کند. برای مثال، با توجه به نتایج حاصل از نحوه پاسخ‌دهی دانش‌آموزان به مسائل آزمون، نحوه تدریس مفاهیم هندسی مرتبط با دو درک استدلالی و عملیاتی در کلاس‌های درس، نیازمند بازنگری است. این پژوهش با محدودیت‌هایی همراه بوده است. برای مثال، در این پژوهش، تنها دانش‌آموزان پایه دهم مورد بررسی قرار گرفتند و بررسی درک دانش‌آموزان پایه‌های قبل و بعد در پژوهش‌های بعدی به منظور مقایسه درک دانش‌آموزان در گذر از متوسطه اول به دوم می‌تواند سودمند باشد. با توجه به اهمیت هندسه و مشکلات متعدد دانش‌آموزان در یادگیری آن، توصیه می‌شود که پژوهش‌های بیش‌تری در این حوزه و با محوریت بررسی نحوه ارائه و ترتیب صحیح مطالب در کتاب‌های درسی و هم‌چنین، میزان درک دانش‌آموزان در پایه‌های گوناگون صورت گیرد.

تقدیر و تشکر

این مطالعه با حمایت مالی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی براساس ابلاغ گرنت شماره ۵۹۷۳/۱۴۹ مورخ ۱۴۰۳/۴/۱۴ انجام شده است، بدین وسیله از این دانشگاه تشکر و قدردانی می‌شود.

منابع

Alamian, V., Seyyedi, M., & Habibi, M. (2018). Identifying the misconceptions of eighth grade students on geometry skills and the use of Van Hiele theory to improve their geometry skills. *Quarterly Journal of Educational Innovations*, 17(3), 123-147. [Persian]

Adolphus, T. (2011). Problems of teaching and learning of geometry in secondary schools in Rivers State, Nigeria. *International Journal of Emerging Sciences*, *1*(2), 143-152.

Bagheri, G. (2015). *Identifying common misconceptions in geometry1 and using van Hiele method to improve students' geometry reasoning.* Master Thesis in Mathematics Education. University of Shahid Chamran, Ahvaz. [Persian]

Bakhshalizadeh, S., Broojerdian, N. (2018). Identifying the primary school fourth grade students' common misconceptions in content area of geometry and measurement: A comparison of their performance with the mean performance at international level. *Quarterly Journal of Educational Innovations*, 16(4), 101-126. [Persian]

Barut, M. E. O., & Retnawati, H. (2020). Geometry learning in vocational high school: Investigating the students' difficulties and levels of thinking. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1613, No. 1, p. 012058). IOP Publishing.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, *17*(1), 31-48.

Carroll, W. (1998). Middle school students' reasoning about geometric situations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(6), 398-403.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2010). A theoretical model of students'geometrical figure understanding. In *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 696-705).

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for Learning (Plenary address). In F. Hitt and M. Santos (Eds), *Proc. 21st PME-NA Conference*, (1, pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*, (pp. 37–52), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings, In R. Suttherland and J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*, (pp. 142-157). Springer, Berlin, Heidelberg.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Gagatsis, A., Elia, I., Geitona, Z., Deliyianni, E., & Gridos, P. (2022). How could the presentation of a geometrical task influence student creativity?. *Journal of Research in Science Mathematics and Technology Education*, *5*(1), 93-116.

Gagatsis, A., Michael-Chrysanthou, P., Deliyianni, E., Panaoura, A., & Papagiannis, C. (2015). An insight to students' geometrical figure apprehension through the context of the fundamental educational thought .*Communication & Cognition*, *48*(3 & 4), 89 – 128.

Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2021). Geometrical figure apprehension, construction of auxiliary lines, and multiple solutions in problem solving: Aspects of mathematical creativity in school geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19*(4), 1-18.

Gridos, P., Gagatsis, A., Elia, I. & Deliyianni, E. (2019). Mathematical creativity and geometry: The influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 4* (pp. 789–796). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University, Netherlands and ERME.

Jones, K. (1998), Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1&2), 29-34.

Karpuz, Y., & Atasoy, E. (2019). Investigation of 9th grade students' geometrical figure apprehension. *European Journal of Educational Research*, 8(1), 285-300.

Lak, R. (2015). *The effect of spatial ability training on performance geometry, Technical drawing and spatial visualization of the seventh graders of the city of Dezful*. Master Thesis in Psychology. University of Shahid Chamran, Ahvaz. [Persian]

Mahdian, M., Liaghatdar, J., & Arizi, H. (2017). Model for Geometric growth thinking: the impact of visual memory on the Geometric thinking through Geometry scientific epistemology. *Journal of Educational Sciences*, 24(1), 45-68. [Persian]

Michael, P. (2013). *Geometrical figure apprehension: Cognitive processes and structure* (Unpublished doctoral thesis). The University of Cyprus, Cyprus.

Michael, P., Gagatsis, A., Avgerinos, E. & Kuzniak, A. (2011). Middle and high school students' operative apprehension of geometrical figures. *Acta Didactica Universitatis Comenianae–Mathematics, 11*, 45-55.

Reyhani, E., Hamidi, F., Kolahdouz, F. (2012). Grade 10 Students' Conception of Mathematical Reasoning and Proof. *Journal of Curriculum Studies*, 6(24), 157-182. [Persian]

Reyhani, E., Mesgarani, H., & Farmehr, F. (2009). Investigation of the Roles of Dynamic Geometry Software in Problem Solving Skills and Conjecture Making. *Journal of Educational Technology*, 3(2), 73-86. [Persian]

Sabbaqi, Z. (2014). *Students' Errors about Concept in Congruence of Triangles*. Master Thesis in Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran. [Persian]

Sabzali, N., Tavanaie, N. (2021). Investigating the Effect of Teaching Geometry Based on Van Hiele Theory on the learning of Students. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-11.

Safabakhsh, A. (2015). *The study of 8th grade students' level of understanding and reasoning according to the Van Hiele model*, Master Thesis in Mathematics Education, Shahid Rajaee teacher training University, Tehran. [Persian]

Journal of Curriculum Research
Vol.14, No.1, 2024, Ser 27

Extended abstract

The degree of Conformity of Tenth Grade Male and Female Students' Apprehensions of Geometrical Figures with the Problems of Geometry Textbook

Narges Yaftian[1], Ladan Pazoki[2]

Introduction: The research results show that students face many challenges and difficulties in learning geometry, and many of these difficulties appear in solving geometric problems, especially problems that require the use of geometrical figures. To improve students' performance in solving geometric problems, it is necessary to study related theories. One of the theories presented to describe students' understanding of geometrical figures is the theory of figural apprehension. In this theory, the correct use of geometrical figures in solving problems requires perceptual, sequential, discursive, and operative apprehensions, whose strengthening improves geometry learning and fosters mathematical creativity. The current study aims to investigate the tenth grade mathematics students' apprehensions of geometrical figures and also to examine the problems of the geometry textbook of this grade to compare the students' apprehensions with the content presented to them. Also, some of the students' common mistakes in response to geometry problems are pointed out.
Research Questions: How able are the 10th grade male and female mathematics students to solve geometric problems corresponding to each type of apprehension and what mistakes do they make while solving geometric problems?

2- To what extent do the 10th grade students' apprehension of geometrical figures correspond to the problems of the geometry textbook of this grade?

Methods: According to the research questions, the research process consists of two phases. In the first phase, the students' apprehensions of geometrical figures and their mistakes were investigated by survey method. The statistical population was male and female 10th grade mathematics students in Pakdasht city, and 235 of them were selected by cluster random method as the sample. To collect the data for this phase of the research, a descriptive test including eight problems was used. For its validation, face and content qualitative validity were examined. To check the reliability of the research test, first, the students' responses were assigned to three parts: correct, incomplete, and incorrect or no response, then scored and Cronbach's

[1] Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.
[2] Mathematics Teacher in Tehran Province. Ph.D. Student in Mathematics Education. Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.
*Corresponding Author: yaftian@sru.ac.ir

alpha coefficient was calculated. Descriptive statistics were used to analyze the data. In the second phase of the research, the content analysis method was used to examine the 10th grade geometry textbook. The statistical population was all the problems of the 10th grade geometry textbook published in 2023. The sample and the population size were considered the same. To analyze the textbook, first, all the problems were classified based on the four apprehensions. Content analysis forms were used, whose qualitative face and content validity were confirmed by several mathematics and geometry experts. To check the reliability of the data collection instrument to analyze the content of the book, one of the chapters of the 10th grade geometry textbook (the third chapter) was randomly selected and its problems were coded by two coders who were familiar with the research subject. Then the Holsti reliability coefficient was calculated and the value was 0.76.

Results: According to the frequency of the students' responses to the test, the highest number of incorrect or no responses were related to discursive and operative problems, and there was no significant difference between the performance of girls and boys. Regarding the students' mistakes, the results show that many students are unable to recognize geometrical figures, draw them correctly by drawing instruments, make logical reasoning to justify geometric claims and make appropriate changes to the geometrical figures to find the solution to the problems. The results of the content analysis of the 10th grade geometry textbook also revealed that more than half of the problems in this book require discursive and operative apprehensions.

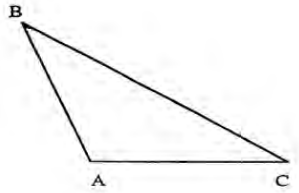
Discussion: In the process of teaching and learning geometry, it is necessary to focus on all four apprehensions introduced in the theory of figural apprehension. In the present study, the 10th grade students' apprehensions and the geometry textbook have been investigated based on the theory of figural apprehension. The results of the present study indicated that in response to discursive and operative problems, the percentage of incorrect and no responses is more than the perceptual and sequential problems. On the other hand, the results of the content analysis of the 10th grade geometry textbook showed that solving more than half of the problems in this book requires discursive and operative apprehensions. Therefore, students' apprehension and the content presented to them in the textbook do not match. Also, the results of this research revealed some of the students' mistakes in response to geometric problems. The reason for these mistakes seems to be misunderstanding the concepts and characteristics of geometrical figures, relying on mere intuition, considering special situations in the process of proving, and sometimes considering geometrical claims as obvious without any need to be proved, etc.

If teachers and professors get familiar with this theory, they can learn about the causes of the students' common mistakes in solving geometric problems and its link to the four apprehensions. Also, they can organize teaching steps regarding the students' weak points. The results of such research can also help textbook authors and educational planners to reform educational policies.

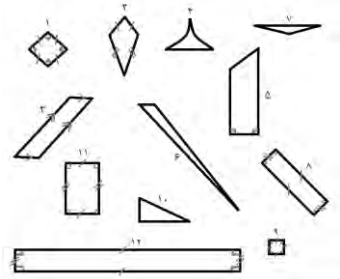
Keywords: Geometry, Geometrical Figures, Theory of Figural Apprehension, Duval's Theory.

پیوست: مسائل آزمون پژوهش

۱- هر سه ارتفاع مثلث ABC را رسم کنید.



۲- با توجه به شکل‌های زیر، شماره شکل‌هایی که لوزی هستند را بنویسید و دلیل انتخاب خود را توضیح دهید.



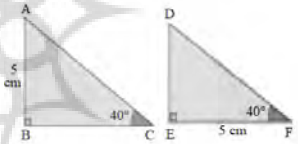
۳- با توجه به مسئله۲، شماره شکل‌هایی که مثلث هستند را بنویسید و دلیل انتخاب خود را توضیح دهید.

۴- دایره‌ای به شعاع ۲ واحد رسم کنید و نقطه k را روی دایره در نظر بگیرید.

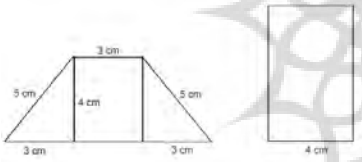
الف) چند دایره در صفحه با شعاع ۲ می‌توان رسم کرد که از نقطه k عبور کنند؟ چرا؟

ب) مرکز این دایره‌ها چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

۵- مریم معتقد است که دو مثلث زیر هم‌نهشت هستند. آیا با او موافق هستید؟ علت پاسخ خود را توضیح دهید.



۶- مستطیل و ذوزنقه زیر مساحت یکسانی دارند. بدون استفاده از فرمول‌های مساحت، اندازه طول مستطیل را بیابید.

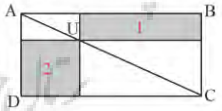


۷-با توجه به شکل زیر، اگر AC قطر مستطیل ABCD باشد، در مورد مساحت دو مستطیل رنگی کدام گزینه درست است؟ درباره پاسخ خود توضیح دهید.

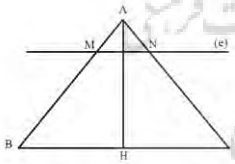
۱) مساحت مستطیل ۱ از مستطیل ۲ بزرگتر است.

۲) مساحت دو مستطیل ۱ و ۲ با هم برابر است.

۳) مساحت مستطیل ۲ از مستطیل ۱ بزرگتر است.



۸- در مثلث ABC، اضلاع AB و AC هم‌اندازه هستند. اگر خط e با خط BC موازی و AH بر BC عمود باشد، آیا اندازه NH با MH برابر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی