



<https://amf.ui.ac.ir>

Journal of Asset Management and Financing
E-ISSN: 2383-1189
Vol. 11, Issue 4, No. 43, Winter 2024, p 47- 64
Received: 13/11/2023 Accepted: 02/03/2024

Research Paper

Option Pricing Error: Evidence from Nonlinear Markets based on Probabilistic Neural Networks and Multilayer Perceptron

Mohammad Hossein Seifi

MSc Student, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
mh.Seifi79@gmail.com

Elham Dastranj* 

Associate Professor, Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
elham.dastranj@shahroodut.ac.ir

Abdolmajid Abdolbaghi

Assistant Professor, Department of Management, Faculty of Industrial Engineering and Management, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
abdolbaghi@shahroodut.ac.ir

Sanaz Lamei

Assistant Professor, Department of Mathematical Sciences, University of Guilan, Rasht, Iran
lamei@guilan.ac.ir

Abstract

This study aims to compare the pricing error of Barles-Soner and Bakstein-Howison equation, in the S&P500 index option market. Option pricing equations are solved using Lie algebra. Using the historical data of the S&P500 index from August 18, 2022, to August 18, 2023, the price of this asset has been calculated with each model considered. In the sequel, the obtained data are classified using multilayer Perceptron and Probabilistic neural networks. The networks show which model is closest to the real market. In addition, the prices obtained from Lie algebra have been compared with the actual values of the options in the market. PNN and MLP have been tested with statistical data after August 18, 2023. Two assumed models were priced with the same data and then compared with the real market. In testing the networks, MLP put 60% of the test data and PNN put all the data into the Barles-Soner category. By calculating the difference between the results of the Lie groups and the real data, 80% of the data were less different from the Barles-Soner model. With the results obtained in S&P option pricing, the Barles-Soner model has less error than other models.

Keywords: Nonlinear Markets, Lie Groups, Neural Networks, Options.

Introduction

Options are created to manage risk, control, and prevent loss. In trading, one party's gain means the other party's loss. To eliminate these gains and losses, option pricing must be fair. In other words, the price must be determined so that neither party suffers a loss. In this study, two nonlinear models Barles-Soner (Barles, 1998) and Bakstein-Howison (Bakstein, 2003) were used. By including transaction costs, these two models are closer to market reality than the Black-Scholes model. According to the two models, European option pricing was performed using Lie and symmetric groups. In this method, by order reduction, the partial differential equation is converted into a solvable ordinary differential equation. After evaluating two nonlinear Black-Scholes models, their responses are classified using a Probabilistic neural network (Specht, 1990) and a multilayer Perceptron, and it is predicted that the market is closer to which model.

In the section part, after introducing the two nonlinear Black-Scholes models, the basic concepts, and theoretical foundations of Lie groups, Probabilistic neural networks, and Perceptron are stated. In the second part, the method used in the research is explained. In this section, after finding the exact solutions of the equations of Barles-Soner (1998) and Bakstein-Howison (2003), the European the S&P500 index option is priced. The findings obtained from this pricing are presented in the next section and finally, the results obtained in this research are presented in the last section.

*Corresponding author

Seifi, M. H., Dastranj, E., Abdolbaghi, A., & Lamei, S. (2024). Option pricing error: Evidence from nonlinear markets based on probabilistic neural networks and multilayer perceptron. *Journal of Asset Management and Financing*, 11(4), 47-64.



2383-1189 © University of Isfahan

This is an open access article under the CC BY-NC-ND/4.0/ License (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



<https://doi.org/10.22108/amf.2024.139784.1838>

Materials and Methods

The pricing of the European option on the S&P500 index has been done using false groups, based on the nonlinear equations of Barles-Soner (1998) and Bakstein-Howison (2003). Next, Perceptron and Probabilistic neural networks were explained. To find the exact solution, Lie and symmetry groups were used. In this method, by order reduction, the partial differential equations are converted into ordinary differential equations. Then, an exact solution of this equation is provided by solving ordinary differential equations. Then by flowing the solutions, other new solutions were found (Dastranj & Hejazi, 2017).

Neural networks consist of three layers. The three main layers of all models are the input layer, hidden layer, and output layer. In some models, the hidden layer is divided into multiple layers. Each layer has several nodes whose number is tested in the hidden layer by trial and error. All nodes in each layer are connected to the next and previous layers. This relationship is established by the weights being multiplied by the previous layer's output, and the result is considered as the input of the current layer. The most important process in a neural network is learning and training the network. The goal of training the network is to accurately determine the weights so that the network output is closer to the true value of the output (Hagan, 1997).

After pricing with the solutions obtained from Lie algebra, we classify the data using neural networks to determine which model is closest to the actual market price.

Findings

Table 1 presents the results of market model prediction by comparing Lie Algebra Pricing, PNN, and MLP.

Table 1. Market Model Prediction by Comparing Lie Algebra Pricing, PNN, and MLP

x	t	Market price	Barles-Soner	Error	Bakstein-Howison	Error	Lie algebra	PNN	MLP
4467.71	0.087649	2488.09	2597.26	109.17	2644.69	156.60	0	0	0
4404.33	0.087302	2446.57	2596.79	150.22	2607.17	160.60	0	0	0
4518.44	0.134387	2511.83	2602.91	91.08	2674.72	162.89	0	0	0
4399.77	0.114173	2379.87	2599.80	219.93	2604.47	224.60	0	0	1
4405.71	0.186508	2405	2608.06	203.06	2607.99	202.99	1	0	1

In Table 1, x is the S&P500 index and t is the remaining time until the option expires. Using the following equation and for the values of x and t presented in Table 1, pricing was done under the Barles-Soner (1998) model, the result of which is presented in the column related to Barles-Soner (1998).

$$B(x, t) = \frac{e^{rt-\epsilon}}{a^2} \left[-\frac{1}{2} e^{-rT} \ln(xe^{-rt\epsilon}) + \frac{1}{2} \ln(xe^{rt\epsilon(-1+\exp(-\epsilon))}) e^{-Tr+\epsilon} - \frac{1}{4} t \left(-\frac{\sigma^2}{2} + r \right) e^{-Tr+\epsilon} + \frac{3}{4} \left(-\frac{\sigma^2}{6} + r \right) t e^{-Tr-\epsilon} - \frac{1}{2} r t e^{-rT} + a^2 c \right].$$

In the Bakstein-Howison column, the pricing solutions of the Bakstein-Howison (2003) are described with the following equation.

$$H(x, t) = \frac{x e^{(rt\epsilon - \epsilon - 1)\epsilon}}{\rho(rt\epsilon - \epsilon - 1)} \left[\frac{1}{4} \left((-1 + \ln(xe^{-rt\epsilon})) e^{-\epsilon(rt\epsilon \exp(-\epsilon) + rt - 1)} - \left(\frac{\sigma^2}{2} + r \right) t e^{-rt\epsilon(\exp(-\epsilon) + 1)} \right) + t e^{-\epsilon(rt+1)} \left(c\rho + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r}{4} \right) - e^{-rt\epsilon} \left(c\rho + \frac{\ln(xe^{-rt\epsilon})}{4} - \frac{1}{4} \right) \right].$$

Finally, the differences between the solutions under the two mentioned models have been compared with the real market prices, and the results are presented in the column related to Lie algebra. When the Barles-Soner (1998) price is closer to the market price, zero is placed in the table, and if the Bakstein-Howison (2003) price is close to it, one is placed. PNN and MLP columns show the results of Probabilistic neural networks and multilayer Perceptron, respectively. In these two columns, the one in the table indicates that the data is in the Bakstein-Howison (2003) category, and the zero is used to indicate that the data belongs to the Barles-Soner (1998) category.

Discussion and Conclusions

First, using Lie and symmetric groups for two nonlinear models, Barles-Soner (1998) and Bakstein-Howison (2003), European option pricing was performed. After pricing the S&P500 index between August 18, 2022, and August 18, 2023, a multi-layer perceptron and probabilistic neural network were trained and the data were classified into two classes, Barles -Soner (1998) and Bakstein-Howison (2003). Then, to find the model closest to the real market, the network is tested with 5 data points. Additionally, the answers obtained from the Lie algebra are evaluated using test data, and their differences from the real data are calculated to determine which answer is closest to the real data. The Perceptron neural network assumes that 3 out of 5 data items belong to the Barles-Soner (1998) model and the Probabilistic neural network places those 5 data items into the Barles-Soner (1998) category. By calculating the difference between the Lie group's response and the actual market price, 4 out of 5 data are close to the Barles-Soner (1998) model. Therefore, according to the results obtained, the S&P500 options market with a maturity of one year and an exercise price of 2,000 USD is close to the Barles-Soner (1998) model.

خطای قیمت گذاری اختیار معامله: شواهدی از بازارهای غیرخطی مبتنی بر شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه

محمدحسین سیفی

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

Mh.Seifi79@gmail.com

الهام دسترنج*

دانشیار، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

elham.dastranj@shahroodut.ac.ir

عبدالمجید عبدالباقی

استادیار، گروه مدیریت، دانشکده مهندسی صنایع و مدیریت، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

abdolbaghi@shahroodut.ac.ir

ساناز لامعی

استادیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

lamei@guilan.ac.ir

چکیده

هدف: هدف از انجام این پژوهش مقایسه خطای قیمت گذاری دو مدل بارلزسونر و باکستین-هاویسون در بازار اختیار معامله شاخص S&P500 است. این مقایسه برای مشخص کردن نزدیکترین مدل به بازار اختیار معامله انجام شده است. روش: در ابتدا پس از معرفی دو مدل بارلزسونر و باکستین-هاویسون به حل معادلات دیفرانسیل جزئی با گروه‌های لی پرداخته شده است. سپس با داده‌های تاریخی شاخص S&P500 از ۱۸ آگوست ۲۰۲۲ تا ۱۸ آگوست ۲۰۲۳، قیمت اختیار معامله این دارایی تحت هر دو مدل محاسبه شده است. سپس داده‌های به دست آمده با شبکه‌های عصبی پرسپترون چندلایه و احتمالی دسته‌بندی شده‌اند. بعد از آموزش، شبکه‌ها با ارائه داده‌های آزمون بررسی شده و نشان داده‌اند که بازار به کدام مدل نزدیک‌تر است. در ادامه، علاوه بر دسته‌بندی داده‌ها با شبکه‌های عصبی، به روش جبرلی به قیمت گذاری اختیار معامله S&P500 پرداخته و جواب حاصل با مقادیر واقعی اختیار معامله در بازار مقایسه شده است. یافته‌ها و نوآوری: با داده‌های آماری بعد از ۱۸ آگوست ۲۰۲۳، شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه آزموده شده‌اند. سپس به کمک همان داده‌ها معادلات بارلزسونر و باکستین-هاویسون قیمت گذاری و اختلاف آنها از قیمت واقعی بازار محاسبه شده است. در آزمون شبکه‌ها، شبکه عصبی پرسپترون چندلایه ۶۰ درصد از داده‌های آزمون و شبکه عصبی احتمالی تمامی داده‌ها را در دسته بارلزسونر قرار داد. در محاسبه اختلاف جواب‌های گروه‌های لی با داده‌های واقعی بازار، ۸۰ درصد داده‌ها اختلاف کمتری با مدل بارلزسونر داشت. در نتیجه، قیمت واقعی اختیار معامله S&P500 در بازار به مدل بارلزسونر نزدیک‌تر بوده است. به عبارت دیگر، در این بازار مدل بارلزسونر خطای کمتری نسبت به مدل باکستین-هاویسون داشته است. کلید واژه‌ها: بازارهای غیرخطی، گروه‌های لی، شبکه‌های عصبی، اختیار معامله.

¹ Option

* نویسنده مسئول

سیفی، محمدحسین، دسترنج، الهام، عبدالباقی عطاآبادی، عبدالمجید، لامعی، ساناز. (۱۴۰۲). خطای قیمت گذاری اختیار معامله: شواهدی از بازارهای غیرخطی مبتنی بر شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه. مدیریت دارایی و تأمین مالی، ۱۱ (۴)، ۴۷-۶۴.



مقدمه

وجود ریسک در بازارها سبب شده است تا مهندسين مالی برای مدیریت و کاهش ریسک ابزارهای مالی جدیدی ایجاد کنند و ابزارهای قبلی را نیز توسعه دهند (Cuthbertson & Nitzsche, 2001). یکی از این ابزارها قراردادهای آتی اختیار معامله است. اختیار معامله، قراردادی است که اختیار انجام معامله خرید یا فروش را به خریدار آن می‌دهد. شرایط این معامله که در آینده انجام می‌شود در زمان حال تعیین می‌شود و از آنجایی که قیمت‌گذاری این قرارداد براساس قیمت دارایی پایه انجام می‌شود به آن ابزار مشتقه نیز می‌گویند. به قیمت توافق شده در هنگام عقد قرارداد برای خرید یا فروش دارایی پایه، قیمت اعمال^۱ و به تاریخ تعیین شده برای انجام معامله، تاریخ انقضا^۲ گویند (دسترنج و همکاران، ۱۳۹۹؛ Hull et al., 2017).

اختیار معامله به دو دسته اختیار خرید و فروش تقسیم می‌شود. خریدار اختیار خرید آن را دارد که در تاریخ انقضای قرارداد دارایی پایه را به قیمت توافق‌شده بخرد یا نخرد و خریدار اختیار فروش این اختیار را دارد که دارایی پایه را بفروشد یا نفروشد. فروشنده اختیار خرید یا فروش اختیاری برای انجام معامله ندارد و متعهد است که تحت هر شرایطی این معامله را بنابه درخواست خریدار انجام دهد. اختیار معامله براساس دارایی پایه به اختیار معامله روی سهام، کالا، شاخص و... تقسیم می‌شود. اختیار معامله از نظر اعمال قرارداد مدل‌های مختلفی دارد، مانند اختیار معامله اروپایی، آمریکایی، اسپرد و... اختیار اروپایی مدلی از اختیار است که خریدار آن تنها می‌تواند در لحظه توافق‌شده در آینده معامله را اجرا کند نه زودتر یا دیرتر از زمان مقرر (تهرانی و همکاران، ۱۳۹۹؛ Hull et al., 2017).

معامله‌گری در بازارهای مالی یک بازی مجموع صفر است (Bjork, 2020)؛ یعنی مجموع سود و زیان معامله‌گران برابر است با صفر. در هر معامله کسب سود یک طرف به معنای ضرر طرف مقابل است. اختیار معامله با هدف مدیریت ریسک و برای کنترل و جلوگیری از زیان ایجاد شده است. در معامله برای جلوگیری از زیان نباید فرصت کسب سود به معامله‌گران دیگر داده شود. برای از بین رفتن این سود و زیان‌ها قیمت‌گذاری اختیار باید عادلانه باشد. به عبارتی قیمت به‌گونه‌ای تعیین شود که هیچ‌کدام از طرفین معامله ضرر نکنند.

بلک و شولز موفق شدند بازار را با معادله دیفرانسیلی تصادفی مدل‌سازی کنند و با آن به قیمت‌گذاری بپردازند (Black & Scholes, 1973). با ارائه مدل بلک-شولز (Black & Scholes, 1973) تحولی در بازار ایجاد شد؛ اما وجود فرض‌هایی برای این مدل باعث شد که پس از مدتی کارایی خود را از دست بدهد. برای رفع ناکارآمدی این مدل، مدل‌های جدیدی ارائه شده است که به واقعیت بازار نزدیک‌تر هستند. مدل‌های بازار را می‌توان به دسته‌های مختلفی تقسیم کرد. بعضی از مدل‌ها با الگوبرداری از مدل بلک-شولز (1973) هزینه‌های معاملاتی را در قیمت‌گذاری لحاظ کردند. برخی دیگر نرخ بهره را ثابت فرض نکردند و مدل‌هایی تلاطم بازار را تصادفی در نظر گرفتند.

در بازارهای مالی معامله‌گران بزرگ با حجم‌های معاملاتی بالا تا حدودی روند و مدل بازار را مشخص می‌کنند. تمام این معامله‌گران از یک مدل استفاده نمی‌کنند؛ بنابراین، در هر دوره بازار به یک مدل شباهت بیشتری دارد. با اهمیت یافتن قیمت‌گذاری اختیار معامله و پیروی بازار از چندین مدل در یک دوره زمانی، شبکه‌های عصبی می‌توانند مشخص کنند بازار به کدام یک از این مدل‌های قیمت‌گذاری نزدیک‌تر است.

یکی از قابلیت‌های انسان آموزش دیدن و استفاده از آموزش‌ها در تصمیمات خود است. از این رو، پژوهش‌گران با پژوهش روی سلول‌های عصبی مغز، اقدام به ساخت ابزاری کردند که با آموزش دیدن و کسب تجربه بتواند در تصمیم‌گیری‌ها به آنها کمک کند و خطاهای آنها را کاهش دهد. با انجام پژوهش‌ها روی این ایده، سرانجام اولین مدل از شبکه‌های عصبی مصنوعی ایجاد شد که

¹ Exercise Price

² Exercise Date

قابلیت آموزش دیدن و یادگیری داشت. از شبکه‌های عصبی در تشخیص دست خط، سرطان، پیش‌بینی برخی پدیده‌ها و... استفاده می‌شود. با پیشرفت علم و افزایش نیاز به کاربردهای مختلفی از شبکه‌های عصبی، مدل‌های جدیدی به وجود آمدند که دقت و سرعت یادگیری بالاتر و کاربردهای متنوع‌تری نسبت به مدل‌های اولیه ارائه می‌دهند (Hagan et al., 1997).

در این پژوهش از دو مدل غیرخطی بارلزسونر (Barles & Soner, 1998) و باکستین-هاویسون (Bakstein & Howison, 2003) استفاده شده است. این دو مدل با احتساب هزینه‌های معاملاتی، نسبت به مدل بلک-شولز به واقعیت بازار نزدیک‌تر شده‌اند. تحت دو مدل ذکر شده با کمک گروه‌ها و تقارن‌های لی قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی انجام شده است. در این روش با کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادله دیفرانسیل معمولی، که حل شدنی است، تبدیل شده است. اختیار معامله اروپایی مدلی از اختیار است که تا لحظه سررسید قرارداد نمی‌توان آن را اعمال کرد. بعد از قیمت‌گذاری، با کمک شبکه‌های عصبی به دست‌بندی داده‌های قیمتی به دست آمده پرداخته شده است. در این مقاله از شبکه‌های عصبی احتمالی^۱ (Specht, 1990) و پرسپترون چندلایه برای دست‌بندی داده‌های قیمتی استفاده شده است. شبکه عصبی پرسپترون که یکی از پرکاربردترین شبکه‌های ایجاد شده در اواخر دهه ۱۹۵۰ است. برای پیش‌بینی، تخمین تابع و دست‌بندی استفاده می‌شود. این شبکه محدودیت‌هایی داشت که در دهه ۱۹۸۰ با ارائه شبکه پرسپترون چندلایه برطرف شد (Hagan et al., 1997). شبکه عصبی احتمالی یک شبکه عصبی است که مختص دست‌بندی داده‌ها است. یکی از مزیت‌های شبکه عصبی احتمالی این است که نیاز به آموزش ندارد. این مزیت باعث بالا رفتن سرعت عمل شبکه می‌شود. پس از قیمت‌گذاری بازار با دو مدل غیرخطی بلک-شولز جواب‌های آن با شبکه‌های عصبی دست‌بندی شده است و پیش‌بینی شده که بازار به کدام مدل نزدیک‌تر است.

در ادامه و در بخش اول، بعد از معرفی دو مدل بلک-شولز غیرخطی مفاهیم اولیه و مبانی نظری گروه‌های لی و شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون بیان شده است. در بخش دوم، روش به‌کار رفته در پژوهش توضیح داده شده است. در این بخش بعد از پیدا شدن جواب‌های دقیق معادلات بارلزسونر (1998) و باکستین-هاویسون (2003) اختیار معامله اروپایی شاخص S&P500 قیمت‌گذاری شده است. یافته‌های به دست آمده از این قیمت‌گذاری در بخش بعد ارائه و در نهایت نتایج به دست آمده در این پژوهش بیان شده است.

مبانی نظری

برای قیمت‌گذاری بازار از دو مدل غیرخطی بارلزسونر (1998) و باکستین-هاویسون (2003) استفاده شده است. بارلزسونر با پیروی از رویکرد تابع سودمندی هاجز (Hodges, 1989)، که دیویس و همکاران آن را توسعه دادند (Davis et al., 1993)، از یک تابع مطلوب نمایی استفاده و با استفاده از نظریه کنترل بهینه تصادفی ثابت کردند (Fleming & Soner, 1993) که وقتی ϵ و K به 0 بروند، B جواب منحصر به فرد زیر را دارد.

$$B_t + \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2 B_{xx} + rx B_x - rB = 0, \quad (1)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 (1 + \Psi(e^{r(T-t)} a^2 x^2 B_{xx})), \quad (2)$$

$$\Psi(x) = \frac{\Psi(x) + 1}{2\sqrt{x\Psi(x) - x}}, \quad x \neq 0, \quad \Psi(0) = 0,$$

¹ Probabilistic Neural Network

² Multilayer Perceptron Neural Network

که در آن x قیمت دارایی پایه، r نرخ بهره بدون ریسک، σ تلاطم بازار، t زمان باقی مانده تا سر رسید، T زمان سر رسید، $a = \frac{\kappa}{\sqrt{\epsilon}}$ و κ نشان دهنده هزینه تراکنش رفت و برگشت به ازای هر واحد دلار معامله شده است و برای مقادیر بزرگ x $\Psi(x) = x$ بنابراین،

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + e^{r(T-t)} a^2 x^2 B_{xx}), \quad (۳)$$

(Ankudinova & Ehrhardt, 2008) و معادله مدل غیرخطی بارلزسونر (1998) به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$B_t + \frac{1}{2} e^{r(T-t)} a^2 x^4 \sigma^2 B_{xx}^2 + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 B_{xx} + rx B_x - rB = 0. \quad (۴)$$

معادله مدل باکستین—هاویسون (2003) با پارامتر نقدینگی ρ و متغیرهای مشابه معادله بارلزسونر (1998) به صورت زیر است:

$$H_t + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 H_{xx} + x^3 \sigma^2 \rho H_{xx}^2 + rx H_x - rH = 0. \quad (۵)$$

اهمیت قیمت گذاری صحیح اختیار معامله سبب شده است که پژوهش های زیادی مانند مهردوست (Mehrdoust et al., 2022) و سامیمیا (Samimia & Mehrdoust, 2022) در این باره انجام شود. در این مقاله از روش های گروه های لی و شبکه های عصبی استفاده شده است. گروه ها و تقارن های لی یک روش هندسی برای پیدا کردن جواب های دقیق معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. در مقالات نادری فرد (Naderifard et al., 2018) و حبیبی (Habibi et al., 2019) از گروه ها و تقارن های لی برای یافتن جواب های دقیق و حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده شده است.

از شبکه های عصبی برای دسته بندی داده های به دست آمده از جواب های دقیق تقارن های لی استفاده شده است. به طور کلی، شبکه های عصبی از سه لایه تشکیل می شوند. سه لایه اصلی تمامی مدل ها لایه ورودی، پنهان و خروجی هستند. لایه پنهان در بعضی از مدل ها به چند لایه تقسیم می شود. هر لایه چند گره دارد که تعداد آنها در لایه پنهان با آزمون و خطا بررسی می شود. تعداد کم گره ها دقت شبکه را پایین می آورد و تعداد زیاد آنها زمان یادگیری را بالا می برد و هزینه های شبکه را افزایش می دهد. تمامی گره های هر لایه با لایه بعد و قبل خود در ارتباط است. این ارتباط را وزن هایی برقرار می کنند که در خروجی های لایه قبل ضرب شده اند و حاصل آن ورودی لایه فعلی خواهد بود. خروجی هر لایه به نسبت وزن های ارتباطی بین گره های لایه فعلی تقسیم می شوند.

مهمترین فرآیند در شبکه عصبی یادگیری و آموزش شبکه است. هدف از یادگیری شبکه تعیین درست وزن ها است، به گونه ای که خروجی شبکه به مقدار واقعی خروجی نزدیک تر شود و شبکه به حداقل خطای خروجی برسد (Hagan et al., 1997).

دسته بندی داده ها یکی از کاربردهای مهم و اصلی شبکه های عصبی است. در تان (Tan et al., 2022) به دلیل سخت بودن تشخیص خرابی نشت گاز با شبکه های عصبی احتمالی به دسته بندی خطای حسگر نشت گاز پرداخته شده است. پیش بینی دقیق کاهش ظرفیت باتری برای مدیریت سلامت باتری حیاتی است. در چه (Che et al., 2022) با شبکه های عصبی روش جدیدی برای بالا بردن دقت پیش بینی سلامت باتری پیشنهاد شده است. در این پژوهش علاوه بر شبکه عصبی احتمالی، شبکه پرسپترون چندلایه نیز استفاده شده است. در طلعتیان آزاد (Talatian et al., 2022) روشی مؤثر برای تشخیص سرطان بیان شده است. در روش معرفی شده با شبکه عصبی پرسپترون چندلایه، داده های پزشکی و اطلاعات مرتبط به سرطان طبقه بندی شده است. بعد از پیدا شدن جواب های دقیق معادلات بارلزسونر (1998) و باکستین—هاویسون (2003)، اختیار معامله اروپایی شاخص S&P500 قیمت گذاری شده است. پیش از این در بهنداری (Bhandari et al., 2022) با شبکه عصبی LSTM

به پیش‌بینی قیمت پایانی شاخص S&P500 پرداخته شده است. در این مقاله نشان داده شده است که شبکه عصبی LSTM^۱ تک‌لایه پیش‌بینی قوی‌تری نسبت به شبکه LSTM چندلایه دارد.

روش پژوهش

در این بخش ابتدا با استفاده از گروه‌های لی تحت معادلات غیرخطی بارلز—سونر (1998) و باکستین—هاویسون (2003) قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی شاخص S&P500 انجام و جواب‌های دقیق آنها بیان شده است. سپس شبکه‌های عصبی پرسپترون و احتمالی توضیح داده شده‌اند. برای یافتن جواب‌های دقیق قیمت‌گذاری از گروه‌ها و تقارن‌های لی استفاده شده است. در این روش با کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. در ابتدا سیستم معادله دیفرانسیلی از مرتبه β با متغیر مستقل x^i , $1 \leq i \leq n$ و متغیر وابسته u^β , $1 \leq \beta \leq m$ به صورت زیر فرض شده است:

$$\Delta^f(x^i, u^\beta, u_i^\beta, u_{ij}^\beta, \dots) = 0, \quad 1 \leq f \leq l, \quad (6)$$

که در آن $u_{ij}^\beta = \partial^2 u^\beta / \partial x^i \partial x^j$ تبدیلات بی‌نهایت کوچک لی برای معادله دیفرانسیل فرض شده به صورت زیر است (Olver & Rosenau, 1987):

$$\tilde{x}^i = x^i + \varepsilon \xi^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \tilde{u}^\beta = u^\beta + \varepsilon \lambda^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (7)$$

که سیستم معادلات را به $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ تغییر نمی‌دهد و مشتقات مرتبه اول و دوم آن بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{u}_i^\beta = u_i^\beta + \varepsilon \eta_i^\beta, \quad \tilde{u}_{ij}^\beta = u_{ij}^\beta + \varepsilon \eta_{ij}^\beta, \quad (8)$$

که در آن

$$\eta_i^\beta = \mathcal{D}_i \hat{\lambda}^\beta + \xi^f u_{fi}^\beta, \quad \eta_{ij}^\beta = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \hat{\lambda}^\beta + \xi^f u_{fij}^\beta, \quad (9)$$

و

$$\hat{\lambda}^\beta = \lambda^\beta - \xi^f u_f^\beta, \quad (10)$$

مربوط به تبدیل متعارف لی است که در آن $\tilde{x}^i = x^i + \varepsilon \hat{\lambda}^\beta$ و $\tilde{u}^\beta = u^\beta + \varepsilon \hat{\lambda}^\beta$ نماد \mathcal{D}_i نشان‌دهنده مشتق کلی عملگر نسبت به x^i است که به صورت زیر محاسبه می‌شود (Bluman et al., 2010):

$$\mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta} + u_{ij}^\beta \frac{\partial}{\partial u_j^\beta} + \dots \quad (11)$$

برای آنکه تبدیلات (7) سیستم معادلات دیفرانسیل مفروض را به $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ تغییر ندهد، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{L}_v \Delta^f \equiv \tilde{v}(\Delta^f) = 0, \quad \text{whenever } \Delta^f = 0, 1 \leq f \leq l, \quad (12)$$

که در آن

$$\tilde{v} = v + \eta_i^\beta \frac{\partial}{\partial u_i^\beta} + \eta_{ij}^\beta \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\beta} + \dots, \quad (13)$$

¹ Long-Short-Term Memory

امتدادیافته میدان برداری

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^m \lambda^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}, \quad (14)$$

برای تبدیلات بی‌نهایت کوچک (۷) است. نماد $\mathcal{L}_v \Delta^f$ نشان‌دهنده مشتق لی Δ^f نسبت به میدان برداری v است. برای حل معادله با تقارن‌های لی باید پارامترهای معادله کاهش داده شود. برای این کار، پس از پیدا شدن میدان‌های برداری باید ناوردهای آنها حساب شود. برای محاسبه ناوردهای میدان برداری (۱۴) باید دستگاه مشخصه زیر حل شود (Dastranj & Hejazi, 2017):

$$\frac{dx^1}{\xi^1} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n} = \frac{du^1}{\lambda^1} = \dots = \frac{du^m}{\lambda^m}. \quad (15)$$

برخی از میدان‌های برداری جواب مطلوبی برای معادله دیفرانسیل پیدا نمی‌کند. به همین دلیل، با شار دادن آن میدان برداری و قرار دادن آن در یکی از جواب‌های مطلوب پیدا شده می‌توان جوابی جدید برای معادله پیدا کرد. اگر مولد گروه لی پیدا شود، به کمک سری تیلور تابع exp می‌توان گروه تبدیلات جدیدی با شار دادن میدان‌های برداری ساخت که به آن گروه تبدیلات تک‌پارامتری می‌گویند. این گروه تبدیلات به صورت زیر فرض می‌شود:

$$(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) = exp(\varepsilon v)(x, t, u), \quad (16)$$

که در آن

$$exp(\varepsilon v)(x, t, u) = 1 + \frac{\varepsilon}{1!} v + \frac{\varepsilon^2}{2!} v^2 + \dots, \quad (17)$$

و (Olver, 1993)

$$v^2(x, t, u) = v(v(x, t, u)). \quad (18)$$

معادله بارلزسونر (1998) با متغیر مستقل x و t و متغیر وابسته B تبدیلات بی‌نهایت کوچک زیر را دارد.

$$\bar{x} = x + \varepsilon \xi^x + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (19)$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon \xi^t + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (20)$$

$$\bar{B} = B + \varepsilon \phi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (21)$$

و

$$\xi^x = \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon}, \quad \xi^t = \frac{d\bar{t}}{d\varepsilon}, \quad \phi = \frac{d\bar{B}}{d\varepsilon}. \quad (22)$$

باتوجه به آنکه معادله دیفرانسیل (۴) از مرتبه ۲ است، میدان برداری آن نیز تا مرتبه دوم امتداد پیدا می‌کند. میدان برداری

امتدادیافته تبدیلات (۱۹-۲۱) به صورت زیر است:

$$v^{(2)} = v + \phi^x \frac{\partial}{\partial B_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial B_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial B_{xx}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial B_{tt}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial B_{xt}}, \quad (23)$$

¹ Invariant

² Flow

که در آن

$$v = \xi^x(x, t, B) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x, t, B) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, B) \frac{\partial}{\partial B}, \quad (24)$$

و

$$\phi^x = \mathcal{D}_x(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t) + \xi^x B_{xx} + \xi^t B_{xt}, \quad (25)$$

$$\phi^t = \mathcal{D}_t(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t) + \xi^x B_{tx} + \xi^t B_{tt}, \quad (26)$$

$$\phi^{xx} = \mathcal{D}_x(\mathcal{D}_x(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t)) + \xi^x B_{xxx} + \xi^t B_{xxt}, \quad (27)$$

$$\phi^{tt} = \mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t)) + \xi^x B_{xtt} + \xi^t B_{ttt}, \quad (28)$$

$$\phi^{xt} = \mathcal{D}_x(\mathcal{D}_t(\phi - \xi^x B_x - \xi^t B_t)) + \xi^x B_{xxt} + \xi^t B_{xtt}, \quad (29)$$

میدان برداری امتدادیافته مرتبه دوم معادله (۴) برابر است با:

$$\begin{aligned} & \xi^x (2a^2 x^3 \sigma^2 B_{xx}^2 + \sigma^2 x B_{xx} r B_x) - \frac{1}{2} \xi^t e^{r(T-t)} r a^2 x^4 \sigma^2 B_{xx}^2 - \phi r + \phi^x r x + \phi^t \\ & + \phi^{xx} \left(e^{r(T-t)} a^2 x^4 \sigma^2 B_{xx} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

که

$$\xi^x = x(c_1 r t + c_3), \quad \xi^t = c_1 t + c_2, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{4ra^2} [c_1(\sigma^2 - 2r)(rt - 1)e^{-r(T-t)} + 2c_1 r \ln(x) e^{-r(T-t)} \\ & + 4a^2(c_4 e^{rt} + (rZ(c_1 t + c_2) + c_5 x - c_1 B)r)]. \end{aligned} \quad (32)$$

و C_1, C_2, C_3, C_4 و C_5 ثابت‌های دلخواه هستند. با استفاده از رابطه (۱۲) مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه لی معادله

بارلزسونر (1998) به دست آمده است که برابر است با:

$$\begin{aligned} v_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad v_2 = e^{rt} \frac{\partial}{\partial B}, \quad v_3 = x \frac{\partial}{\partial B}, \quad v_4 = \frac{\partial}{\partial t} + rB \frac{\partial}{\partial B}, \quad (33) \\ v_5 = xrt \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2e^{-r(T-t)} \ln(x) - 2te^{r(t-T)} \left(-\frac{\sigma^2}{2} + r \right) + 4B(rt - 1)a^2}{4a^2} \frac{\partial}{\partial B}. \end{aligned}$$

برای محاسبه جواب‌های دقیق معادله قیمت گذاری دیفرانسیل بارلزسونر (1998) با گروه‌های لی باید ناوردهای میدان‌های برداری را، که مولد گروه لی این معادله هستند، محاسبه کرد و پس از جای گذاری آنها در معادله تعداد پارامترهای آن را کاهش داد. کاهش پارامتر معمولاً معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند. اگر پس از کاهش پارامتر معادله مفروض به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل نشود، بار دیگر فرآیند کاهش پارامتر اعمال می‌شود. این روند تا جایی تکرار می‌شود که معادله کاهش یافته حل شدنی شود.

۱. برای مولد v_1 ناوردای تبدیلات عبارتند از $t = y$ و $B = u(y)$. با جای گذاری ناوردها در معادله (۴) و کاهش

پارامترهای آن، معادله به صورت یک معادله دیفرانسیل معمولی کاهش می‌یابد:

$$u' - ru = 0, \quad (34)$$

با حل این معادله و بازگرداندن متغیرهای اصلی، جواب معادله به صورت $B = ce^{rt}$ است که در آن c ضریب انتگرال گیری است. مابقی مولدهای گروه لی جواب مطلوبی از طریق محاسبه ناوردها ارائه نمی‌دهند. اما با استفاده از گروه‌های یک پارامتری (شار) می‌توان جواب جدیدی برای (۴) پیدا کرد.

۲. گروه یک پارامتری برای مولد v_5 به صورت $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{B}) = \exp(\epsilon v_5)(x, t, B)$ است که

$$\bar{x} = xe^{rt\epsilon}, \quad \bar{t} = te^\epsilon, \quad (35)$$

$$\bar{B} = -\frac{e^{-\epsilon+rt\epsilon}}{2a^2} \left[\frac{1}{4}\sigma^2 te^{-rT} + \ln(x) e^{-rT} - \frac{1}{4}\sigma^2 te^{-Tr+2\epsilon} - 2e^{-rt} a^2 B + \frac{1}{2}rte^{-Tr+2\epsilon} - \frac{3}{2}rte^{-rT} - e^{-Tr+\epsilon} \ln(xe^{rt\epsilon}) + e^{-Tr+\epsilon} rt \right]. \quad (36)$$

با جای گذاری در $B = ce^{rt}$ می توان نوشت:

$$B(x, t) = \frac{e^{rt-\epsilon}}{a^2} \left[-\frac{1}{2}e^{-rT} \ln(xe^{-rt\epsilon}) + \frac{1}{2} \ln(xe^{rt\epsilon(-1+\exp(-\epsilon))}) e^{-Tr+\epsilon} - \frac{1}{4}t \left(-\frac{\sigma^2}{2} + r \right) e^{-Tr+\epsilon} + \frac{3}{4} \left(-\frac{\sigma^2}{6} + r \right) te^{-Tr-\epsilon} - \frac{1}{2}rte^{-rT} + a^2 c \right]. \quad (37)$$

میدان برداری امتدادیافته تا مرتبه دوم معادلهٔ باکستین-هاویسون (2003) برابر است با:

$$\xi^x (\sigma^2 x H_{xx} + 3\sigma^2 x^2 \rho H_{xx}^2 + rH_x) - r\zeta + rx\zeta^x + \zeta^t + \zeta^{xx} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + 2\sigma^2 x^3 \rho H_{xx} \right) = 0. \quad (38)$$

ضرایب میدان برداری فوق با کمک روابط (۲۵-۲۹) برای

$$\xi^x = x(c_1 rt + c_3), \quad \xi^t = c_1 t + c_2, \quad (39)$$

$$\zeta = (c_1(rt - 1) + c_3)H + \frac{c_4 e^{rt}}{r} + \frac{c_1 xt(\sigma^2 + 2r)}{8\rho} + \left(-\frac{c_1 \ln(x)}{4\rho} + c_5 \right) x, \quad (40)$$

به دست آمده است. به طور مشابه، با مدل بارلز-سونر (1998) مولدهای گروه لی معادله باکستین-هاویسون (2003)، برابر

است با:

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad v_2 = x \frac{\partial}{\partial H}, \quad v_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + H \frac{\partial}{\partial H}, \quad v_4 = e^{rt} \frac{\partial}{\partial H}, \quad (41)$$

$$v_5 = xrt \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{8\rho} [-2x \ln(x) + (2 + (\sigma^2 + 2r)t)x + 8\rho H(rt - 1)] \frac{\partial}{\partial H}.$$

پس از کاهش پارامترهای معادله (۵) جوابهای دقیق زیر را به دست آمده است:

۱. از مولد v_3 ناوردهای $x = q, t = y$ و $H = v(y)q$ محاسبه شده است. با جای گذاری ناوردها،

$$v_y \cdot q = 0. \quad (42)$$

با حل این معادله و بازگرداندن متغیرهای اصلی، $H(x, t) = c_1 x$

با شار دادن مولدها، مولدهای گروه تک پارامتری محاسبه شده است. با این گروه جواب جدیدی برای معادله

باکستین-هاویسون (2003) ارائه شده.

۲. گروه یک پارامتری برای مولد v_5 ، $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{H}) = \exp(\epsilon v_5)(x, t, H)$ عبارت است از:

$$\bar{x} = xe^{rt\epsilon}, \quad \bar{t} = te^\epsilon, \quad (43)$$

$$\bar{H} = e^{(r-1)\epsilon} \left[\frac{xrte^{-(rt-1)\epsilon}(-\sigma^2 t - 2rt + 2 \ln(xrt) - 2)}{8\rho(rt - 1)} - \frac{-xt^2 r \sigma^2 - 2xt^2 r^2 + 2xrt \ln(xrt) - 8Htr\rho - 2xrt + 8H\rho}{8\rho(rt - 1)} \right] \quad (44)$$

با جای گذاری این شار در جواب قبلی، جواب جدید زیر به دست آمده است:

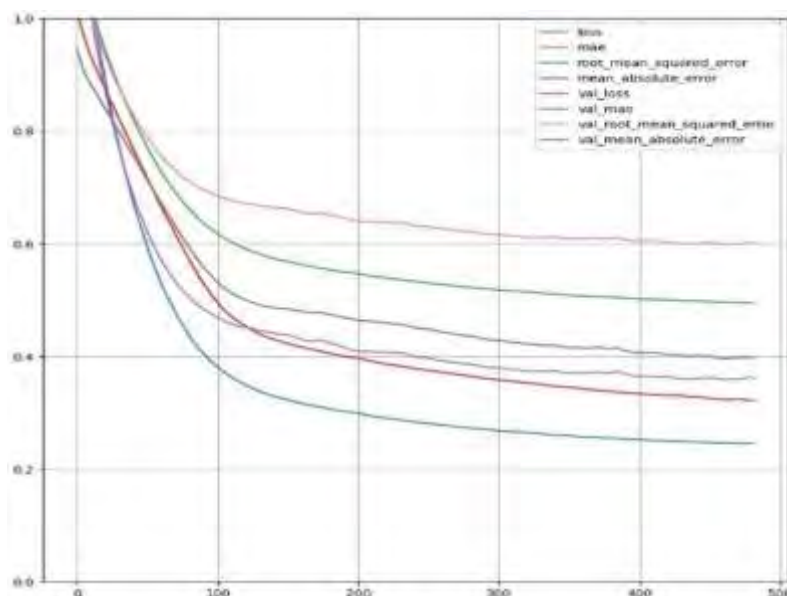
$$H(x, t) = \frac{xe^{(rte^{-\epsilon}-1)\epsilon}}{\rho(rte^{-\epsilon} - 1)} \left[\frac{1}{4} \left((-1 + \ln(xe^{-rte^{-\epsilon}})) e^{-\epsilon(rt \exp(-\epsilon) + rt - 1)} - \left(\frac{\sigma^2}{2} + r \right) te^{-rte^{-\epsilon}(\exp(-\epsilon) + 1)} \right) + te^{-\epsilon(rt+1)} \left(c\rho + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r}{4} \right) - e^{-rte^{-\epsilon}} \left(c\rho + \frac{\ln(xe^{-rte^{-\epsilon}})}{4} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (45)$$

پس از قیمت گذاری اختیار تحت مدل بارلز—سونر (1998) و باکستین—هاویسون (2003)، با کمک شبکه‌های عصبی بررسی شده است که بازار واقعی به کدام مدل نزدیک تر است. برای این کار از شبکه عصبی پرسپترون چندلایه (MLP) و احتمالی (PNN) استفاده شده است. شبکه عصبی پرسپترون برای طبقه بندی و پیش بینی داده‌ها استفاده می شود. در این شبکه خروجی هر لایه ورودی لایه بعد است. این ورودی‌ها در وزن‌های ارتباطی بین گره‌های لایه فعلی و لایه ماقبل آن ضرب و سپس بین گره‌ها تقسیم می شود. حاصل ضرب ورودی‌ها در وزن‌ها وارد تابع فعال ساز شبکه می شود. تابع فعال ساز داده‌هایی را که در دامنه اش قرار ندارد، از فرآیند آموزش حذف می کند و مابقی داده‌های شبکه را آموزش می دهد. آموزش شبکه به معنای به روز شدن وزن‌های مابین لایه‌ها است. در الگوریتم نظارت شده ورودی‌ها با خروجی‌های آنها برای آموزش و به روزرسانی وزن‌ها به شبکه ارائه می شود. با کمک گرادینان کاهش می شود تابع خطای خروجی شبکه مینیمم سازی و باتوجه به وزن‌ها شبکه به روزرسانی می شود تا خطای شبکه به حداقل برسد (Zhang & Lou, 2021). خروجی‌های لایه‌ها در این شبکه به صورت زیر هستند:

$$O_{i+1} = AF((W_i \times O_i) + B_{i+1}) = \begin{bmatrix} AF \left(\left(\sum_{a=1}^n W_i^{a1} \times O_i^a \right) + B_{i+1} \right) \\ AF \left(\left(\sum_{a=1}^n W_i^{a2} \times O_i^a \right) + B_{i+1} \right) \\ \vdots \\ AF \left(\left(\sum_{a=1}^n W_i^{am} \times O_i^a \right) + B_{i+1} \right) \end{bmatrix} \quad (46)$$

در این رابطه با فرض آنکه m تعداد گره‌های لایه i و n تعداد گره‌های لایه بعدی است، O_i خروجی لایه i و W_i وزن بین لایه i و لایه ماقبل آن است. در این رابطه تابع فعال ساز و سوگیری لایه i به ترتیب با AF و B_i نمایش داده می شود (Popescu et al., 2009). در این پژوهش شبکه پرسپترون چهارلایه با دو لایه پنهان استفاده و تابع فعال ساز Elu ، که تعمیم یافته تابع $Relu$ است، برای هر دو لایه پنهان به کار گرفته شده است. این دو لایه پنهان به ترتیب ۱۰ و ۵ گره دارد. عملکرد یادگیری این شبکه در شکل (۱) نمایش داده شده است. در این شبکه پس از حدود ۴۰۰ تکرار (انجام فرآیند پس‌انتشار)

به دلیل ثابت ماندن و کاهش نیافتن خطا فرآیند آموزش شبکه متوقف شده است.



شکل (۱) عملکرد یادگیری شبکه عصبی پرسپترون چندلایه

Figure (1) Learning performance of multilayer Perceptron neural network

علاوه بر شبکه پرسپترون از شبکه عصبی احتمالی نیز استفاده شده است. شبکه‌های عصبی احتمالی برای مسائل مرتبط با دسته‌بندی داده‌ها کاربرد دارند. در مدل استاندارد شبکه عصبی احتمالی شبکه آموزش داده نمی‌شود و این یکی از مزیت‌های شبکه عصبی احتمالی است (Hagan et al., 1997). شبکه‌های عصبی سه لایه اصلی ورودی، پنهان و خروجی دارند. در این مدل لایه اول لایه ورودی است که داده‌های جدید را دریافت می‌کند؛ لایه دوم از دو لایه الگو و تجمیع تشکیل می‌شود. خروجی گره x_{ij} از لایه الگو با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

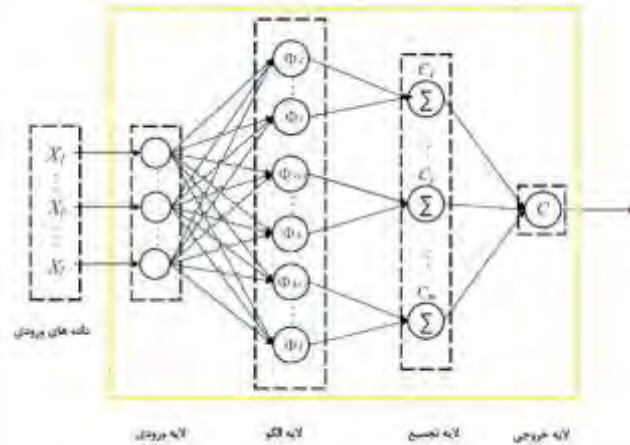
$$\Phi_{ij}(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x - x_{ij})^T(x - x_{ij})}{2\gamma^2}\right)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\gamma^n}, \quad (47)$$

در این رابطه n ابعاد بردار الگوی x که از لایه ورودی وارد لایه الگو می‌شود، و γ انحراف معیار تابع توزیع نرمال است. در لایه تجمیع به کمک رابطه (۴۸) فواصل نمایی محاسبه شده برای هر نمونه i در دسته C_i ام باهم جمع و بر تعداد کل آنها تقسیم می‌شود و یک مقدار جدید تحویل می‌دهد. در لایه آخر، تابع انتقال رقابتی حداکثر مقدار احتمال از بردار احتمالی تولیدشده را مشخص می‌کند و داده ورودی را در آن دسته قرار می‌دهد.

$$p_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} \exp\left(-\frac{(x - x_{ij})^T(x - x_{ij})}{2\gamma^2}\right)}{N_i(2\pi)^{\frac{n}{2}}\gamma^n}. \quad (48)$$

N_i تعداد نمونه‌های آموزشی مربوط به طبقه C_i ام است. در شکل (۲) لایه‌های شبکه عصبی احتمالی نمایش داده شده

است (Mao et al., 2000; Specht, 1990):



شکل (۲) نمای کلی شبکه عصبی احتمالی (Mao et al., 2000)

Figure (2) Overview of the Probabilistic neural network

نمونه آماری

در این مقاله اختیار معامله S&P500 به روش گروه‌ها و تقارن‌های لی قیمت‌گذاری شده است. قیمت توافقی ۲۰۰۰ دلار و تاریخ انقضا یک ساله از ۱۸ آگوست ۲۰۲۲ تا ۱۸ آگوست ۲۰۲۳ در نظر گرفته شده است. داده‌های آماری شامل اطلاعات شاخص S&P500 و اختیار معامله‌های این شاخص است که به ترتیب از investing.com و barchart.com استخراج شده‌اند. این داده‌ها یک دوره ۲۵۱ روزه را شامل شده است. برای قیمت‌گذاری از رابطه‌های (۳۷) و (۴۵) استفاده شده است. متغیرهای پژوهش در جدول (۱) به شرح زیر هستند:

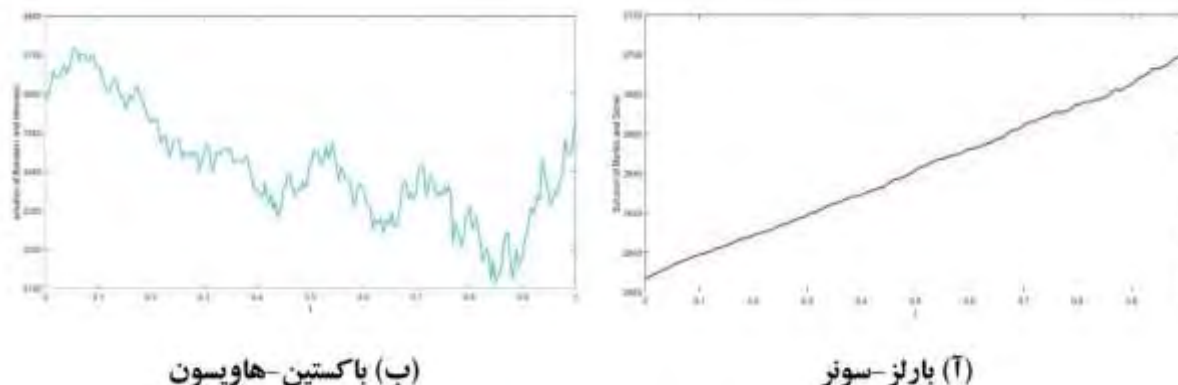
جدول (۱) نحوه محاسبه پارامترهای روابط (۳۷) و (۴۵)

Table (1) How to calculate the parameters of relationships (37) and (45)

پارامتر	نماد پارامتر	مقدار عددی پارامتر (%)	نحوه محاسبه پارامتر
تلاطم بازار	σ	۱/۱۶۹۸۶۳	تلاطم بازار به روش تلاطم تاریخی حساب شده است.
نرخ بهره بدون ریسک	r	۴/۴۴	نرخ بهره بدون ریسک، میانگین نرخ بهره اعلام شده توسط فدرال رزرو آمریکا از جولای ۲۰۲۲ تا جولای ۲۰۲۳ فرض شده است.
هزینه‌های معاملاتی	a, ρ	۰/۱	هزینه‌های معاملاتی ۰/۱ دلار به ازای هر دلار معامله شده در نظر گرفته شده است.

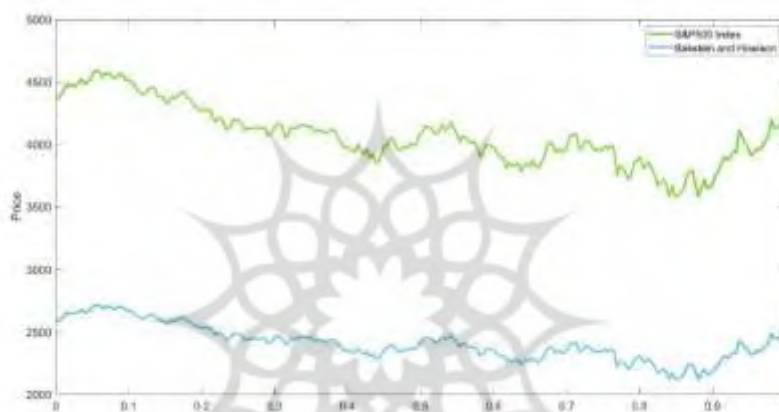
یافته‌ها

در شکل (۳) نتایج قیمت‌گذاری با رابطه‌های (۳۷) و (۴۵) ارائه شده است. معادله (۳۷) با شار دادن معادله $B = ce^{rt}$ به دست آمده است. چون $B = ce^{rt}$ ، جواب مدل بارلز-سونر (1998) وابستگی بیشتری به زمان دارد و معادله (۴۵)، که با شار دادن معادله $H(x, t) = c_1x$ به دست آمده است، وابستگی بیشتری به قیمت دارد که این وابستگی در شکل (۴) به وضوح دیده می‌شود.



شکل (۳) قیمت گذاری اختیار معامله S&P500 برای $\sigma = 0/0169863$ ، $r = 0/0444$ ، $K = 2000$ ، $T = 1$ ، و $a = \rho = 0/1$

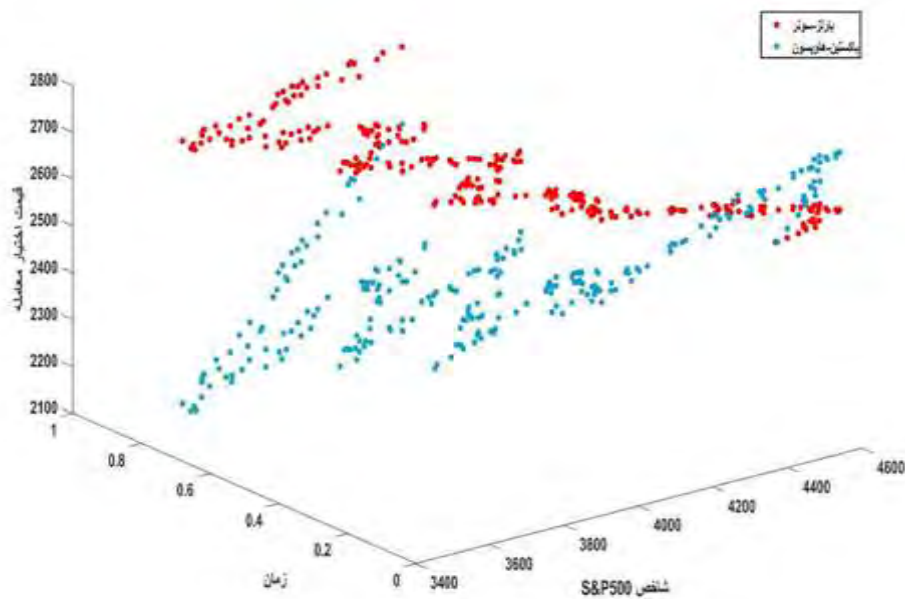
Figure (3) S&P500 option pricing for $\sigma = 0/0169863$, $r = 0/0444$, $K = 2000$, $T = 1$, and $a = \rho = 0/1$



شکل (۴) مقایسه شاخص S&P500 با معادله (۴۵)

Figure (4) Comparing the S&P500 index with equation (45)

وزن لایه‌های شبکه عصبی با جواب‌های به‌دست‌آمده از دو معادله پیش‌گفته تعیین شده است. در شکل (۵) داده‌های آموزشی شبکه عصبی آمده است که در دو دسته طبقه‌بندی شده‌اند. داده‌های قرمز جواب‌های معادله بارلز-سونر (1998) و داده‌های آبی جواب‌های معادله باکستین-هاویسون (2003) هستند. از این شبکه برای پیش‌بینی مدل بازار استفاده شده است. برای این کار چند داده از ۱۸ آگوست ۲۰۲۳ به بعد انتخاب شده است. در ابتدا این داده‌ها با هر دو مدل بارلز-سونر (1998) و باکستین-هاویسون (2003) قیمت‌گذاری و سپس شبکه عصبی با این داده‌ها آزموده که نتیجه مقایسه آن در جدول (۲) ارائه شده است.



شکل (۵) طبقه‌بندی داده های آموزشی

Figure (5) Classification of training data

جدول (۲) پیش‌بینی مدل بازار با مقایسه قیمت گذاری جبرلی، شبکه عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه

Table (2) Market model prediction by comparing Lie algebra pricing, Probabilistic neural network, and multilayer Perceptron

MLP	PNN	جبرلی	خطا	باکستین-هاویسون	خطا	بارلزسونر	قیمت بازار	t	x
0	0	0	۱۵۶/۶۰	۲۶۴۴/۶۹	۱۰۹/۱۷	۲۵۹۷/۲۶	۲۴۸۸/۰۹	۰/۰۸۷۶۴۹	۴۴۶۷/۷۱
0	0	0	۱۶۰/۶۰	۲۶۰۷/۱۷	۱۵۰/۲۲	۲۵۹۶/۷۹	۲۴۴۶/۵۷	۰/۰۸۷۳۰۲	۴۴۰۴/۳۳
0	0	0	۱۶۲/۸۹	۲۶۷۴/۷۲	۹۱/۰۸	۲۶۰۲/۹۱	۲۵۱۱/۸۳	۰/۱۳۴۳۸۷	۴۵۱۸/۴۴
۱	0	0	۲۲۴/۶۰	۲۶۰۴/۴۷	۲۱۹/۹۳	۲۵۹۹/۸۰	۲۳۷۹/۸۷	۰/۱۱۴۱۷۳	۴۳۹۹/۷۷
۱	0	۱	۲۰۲/۹۹	۲۶۰۷/۹۹	۲۰۳/۰۶	۲۶۰۸/۰۶	۲۴۰۵	۰/۱۸۶۵۰۸	۴۴۰۵/۷۱

در جدول (۲)، x شاخص S&P500 و t زمان باقی مانده تا سررسید اختیار معامله است. با استفاده از معادله (۳۷) و برای مقادیر x و t ارائه شده در جدول (۲)، تحت مدل بارلزسونر (1998) قیمت گذاری انجام شده که نتیجه آن در ستون مربوط به بارلزسونر (1998) ارائه شده است. در ستون مربوط به باکستین-هاویسون جواب‌های قیمت گذاری تحت مدل باکستین-هاویسون (2003) شرح داده شده است. در نهایت، اختلاف جواب‌ها تحت دو مدل مذکور با قیمت‌های واقعی بازار مقایسه شده‌اند و نتایج آن در ستون مربوط به جبرلی ارائه شده‌اند. زمانی که قیمت بارلزسونر (1998) به قیمت بازار نزدیک‌تر است، در ستون جبرلی صفر و در صورت نزدیک بودن قیمت باکستین-هاویسون (2003) به آن، عدد یک قرار داده شده است. در ستون‌های MLP و PNN به ترتیب نتایج شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه ذکر شده‌اند. در این دو ستون عدد یک در جدول نشان‌گر این است که داده در دسته باکستین-هاویسون (2003) قرار دارد و عدد صفر برای نشان دادن تعلق داده به دسته بارلزسونر (1998) به کار گرفته شده است.

نتیجه گیری

ابتدا به کمک گروه‌ها و تقارن‌های لی، تحت دو مدل غیرخطی بارلز-سونر (1998) و باکستین-هاویسون (2003) قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی انجام شده است. بعد از قیمت‌گذاری شاخص S&P500 در بازه ۱۸ آگوست ۲۰۲۲ تا ۱۸ آگوست ۲۰۲۳، شبکه عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه آموزش داده و داده‌ها در دو کلاس بارلز-سونر (1998) و باکستین-هاویسون (2003) دسته‌بندی شده‌اند. سپس برای یافتن نزدیک‌ترین مدل به بازار واقعی، شبکه با ۵ داده آزموده شده است. علاوه بر این، جواب‌های به دست آمده از جبرلی با داده‌های آزمون قیمت‌گذاری و اختلاف‌های آنها از داده‌های واقعی محاسبه شده است تا مشخص شود که داده‌های واقعی به کدام جواب نزدیک‌تر هستند. شبکه عصبی پرسپترون ۳ داده از ۵ داده را متعلق به مدل بارلز-سونر (1998) دانست و شبکه عصبی احتمالی تمامی ۵ داده را در دسته بارلز-سونر (1998) قرار داد. در محاسبه اختلاف جواب‌های گروه‌های لی با قیمت واقعی بازار، ۴ داده از ۵ داده به مدل بارلز-سونر (1998) نزدیک‌تر بودند. بنابراین، طبق نتایج به دست آمده، بازار اختیار معامله S&P500 با سر رسید یک ساله و قیمت توافقی ۲۰۰۰ دلار به مدل بارلز-سونر (1998) نزدیک‌تر بوده است.

منابع

تهرانی، رضا، میرلوحی، سیدمجتبی، و گل‌کانی، محمدرضا (۱۳۹۹). محاسبه ارزش اختیارهای واقعی با رویکردهای متفاوت در بورس اوراق بهادار تهران. *مدیریت دارایی و تأمین مالی*، ۸(۲)، ۱-۱۲.

<https://doi.org/10.22108/amf.2019.115211.1372>

دسترنج، الهام، صاحبی‌فرد، حسین، عبدالباقی، عبدالمجید، و لطیفی، رقیه (۱۳۹۹). مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله سقف و توانی در جلوگیری از فضای آربیتراژی: شواهدی از شرایط مبتنی بر نوسانات تصادفی، دو پرش و اندازه شدت تصادفی. *مدیریت دارایی و تأمین مالی*، ۸(۲)، ۸۹-۱۰۳.

<https://doi.org/10.22108/amf.2020.119750.1479>

References

- Ankudinova, J., & Ehrhardt, M. (2008). On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3), 799-812. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.02.005>
- Bakstein, D., & Howison, S. (2003). A non-arbitrage liquidity model with observable parameters for derivatives. Working Paper, *Oxford center for industrial and applied mathematics*, Oxford, 1-52.
- Barles, G., & Soner, H. M. (1998). Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation. *Finance and Stochastics*, 2, 369-397. <https://doi.org/10.1007/s007800050046>
- Bhandari, H. N., Rimal, B., Pokhrel, N. R., Rimal, R., Dahal, K. R., & Khatri, R. K. (2022). Predicting stock market index using LSTM. *Machine Learning with Applications*, 9, 100320. <https://doi.org/10.1016/j.mlwa.2022.100320>
- Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- Bluman, G. W., Cheviakov, A. F., & Anco S. C. (2010). Applications of symmetry methods to partial differential equations. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-68028-6>
- Che, Y., Zheng, Y., Wu, Y., Sui, X., Bharadwaj, P., Stroe, D. I., Yang, Y., Hu, X., & Teodorescu, R. (2022). Data efficient health prognostic for batteries based on sequential information-driven probabilistic neural network. *Applied Energy*, 323, 119663. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119663>
- Cuthbertson, K., & Nitzsche, D. (2001). *Financial Engineering: Derivatives and Risk Management*. John Wiley & Sons.
- Dastranj, E., & Hejazi, S. R. (2017). New solutions for Fokker-Plank equation of special stochastic process via

- Lie point symmetries. *Computational Methods for Differential Equations*, 5(1), 30-42.
- Dastranj, E., SahebiFard, H., Abdolbaghi, A., & Latifi, R. (2020). A comparison between the pricing of capped and power options on the basis of arbitrage prevention: Evidence from a stochastic market with double Stochastic volatility, double jump, and a stochastic intensity measure. *Journal of Asset Management and Financing*, 8(2), 89-103. <https://doi.org/10.22108/amf.2020.119750.1479> [In Persian].
- Davis, M. H., Panas, V. G., & Zariphopoulou, T. (1993). European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2), 470-493. <https://doi.org/10.1137/0331022>
- Fleming, W. H., & Soner, H. M. (1993). *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. Springer.
- Habibi, N., Lashkarian, E., Dastranj, E., & Hejazi, S. R. (2019). Lie symmetry analysis, conservation laws and numerical approximations of time-fractional Fokker–Planck equations for special stochastic process in foreign exchange markets. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 513, 750-766. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.08.155>
- Hagan, M. T., Demuth, H. B., & Beale, M. (1997). *Neural Network Design*. PWS Publishing Co.
- Hodges, S. (1989). Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *The Review of Futures Markets*, 8, 222-239.
- Hull, J. C., Treppongkaruna, S., Heaney, R., Pitt, D., & Colwell, D. (2017). *Fundamentals of Futures and Options Markets*. Pearson.
- Mao, K. Z., Tan, K. C., & Ser, W. (2000). Probabilistic neural-network structure determination for pattern classification. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11(4), 1009-1016. <https://doi.org/10.1109/72.857781>
- Mehrdoust, F., Noorani, I., & Fallah, S. (2022). Markov regime-switching Heston model with CIR model framework and pricing VIX and S&P500 American put options. *Mathematical Reports*, 24(74), 781-806.
- Naderifard, A., Dastranj, E., & Hejazi, S. R. (2018). Exact solutions for time-fractional Fokker–Planck–Kolmogorov equation of Geometric Brownian motion via Lie point symmetries. *International Journal of Financial Engineering*, 5(02), 1850009. <https://doi.org/10.1142/S2424786318500093>
- Olver, P. J., & Rosenau, P. (1987). Group-invariant solutions of differential equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 47(2), 263-278. <https://doi.org/10.1137/0147018>
- Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie groups to differential equations*. Springer Science & Business Media.
- Popescu, M. C., Balas, V. E., Perescu-Popescu, L., & Mastorakis, N. (2009). Multilayer perceptron and neural networks. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, 8(7), 579-588.
- Samimia, O., & Mehrdoust, F. (2022). Vasicek interest rate model under Lévy process and pricing bond option. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 53(1), 529-545 1-17. <https://doi.org/10.1080/03610918.2022.2025837>
- Specht, D. F. (1990). Probabilistic neural networks. *Neural Networks*, 3(1), 109-118. [https://doi.org/10.1016/0893-6080\(90\)90049-Q](https://doi.org/10.1016/0893-6080(90)90049-Q)
- TalatianAzad, S., Ahmadi, G., & Rezaeipannah, A. (2022). An intelligent ensemble classification method based on multi-layer perceptron neural network and evolutionary algorithms for breast cancer diagnosis. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 34(6), 949-969. <https://doi.org/10.1080/0952813X.2021.1938698>
- Tan, Q., Mu, X., Fu, M., Yuan, H., Sun, J., Liang, G., & Sun, L. (2022). A new sensor fault diagnosis method for gas leakage monitoring based on the naive Bayes and probabilistic neural network classifier. *Measurement*, 194, 111037. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.111037>
- Tehrani, R., Mirlohi, S. M., & Golkani, M. R. (2020). Calculating real option value under different approaches in the Tehran Stock Exchange. *Journal of Asset Management and Financing*, 8(2), 1-12. <https://doi.org/10.22108/AMF.2019.115211.1372> [In Persian].
- Zhang, D., & Lou, S. (2021). The application research of neural network and BP algorithm in stock price pattern classification and prediction. *Future Generation Computer Systems*, 115, 872-879. <https://doi.org/10.1016/j.future.2020.10.009>



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی