Securities & Exchange Organization, Research, Development & Islamic Studies (RDIS)
Journal of Securities and Exchange, Special Issue of the First National Capital Market Conference, Winter 2024, pp. 317-336

Application of Options in the Financial Market Using the Neural Networks Method[1]

Maryam Rezaei[2]

Received: 2023/11/17
Accepted: 2024/05/18

Research Paper

Abstract

In Iran's capital market, only European-style options are bought and sold. In the case of global markets, other trading options such as American option, Asian option, barrier option, look back option, etc. are bought and sold. Since warrants are a suitable and widely used tool for hedging risk and have leverage properties, diversity in the warrants market warms up the financial market and attracts many interested parties. There are many models for option pricing, the most important of which is the classic Black-Scholes model. But this model is far from the real market models due to its weaknesses. Therefore, it needs developed models. For example, the study of time series shows that the price of the underlying asset has an inverse relationship with its volatility. The constant elasticity of variance model is a suitable model to show this inverse relationship. In this research, the constant elasticity of variance model is considered for the valuation of American options, whose volatility is a function of two parameters of volatility elasticity and the scale parameter fixing the initial instantaneous volatility. Studies show that non-parametric methods such as neural network and machine learning are better suited for economic modeling than other methods. Therefore, in this research, the neural network method will be used for numerical valuation of American options.

Key Words: Learning Solution, Neural Networks, Option Pricing.
JEL Classification: C45, G12, L11.

---

1. doi: 10.22034/JSE.2024.12321.2199

2. Assistant Professor, Department of Financial Mathematics, Faculty of Finance Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran (Rezaei.mirar@yahoo.com).

فصلنامه بورس اوراق بهادار

سازمان بورس و اوراق بهادار
مرکز پژوهش، توسعه و مطالعات اسلامی

سازمان بورس و اوراق بهادار، مرکز پژوهش، توسعه و مطالعات اسلامی

فصلنامه بورس اوراق بهادار، ویژه نامه اولین همایش ملی بازار سرمایه، زمستان ۱۴۰۲، صص ۳۳۶-۳۱۷

کاربرد اختیارهای معامله در بازار مالی با استفاده از روش شبکه‌های عصبی[۱]

مریم رضائی[۲]

مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۲۹

چکیده

در بازار سرمایه ایران اوراق اختیار معامله فقط از نوع اروپایی خرید و فروش می‌شود. در صورتی که در بازارهای جهانی، سایر اختیار معامله‌ها مثل اختیار آمریکایی، اختیار آسیایی، اختیار مانع، اختیار گذشته‌نگر و ... خرید و فروش می‌شوند. از آنجایی که اوراق اختیار معامله یک ابزار مناسب و پر استفاده برای پوشش ریسک است و خاصیت اهرمی نیز دارد بنابراین تنوع در بازار اوراق اختیار معامله، هم بازار مالی را گرم‌تر می کند و هم علاقه‌مندان زیادی را به سمت خود جذب می کند. مدل‌های بسیاری زیادی برای ارزش گذاری اوراق اختیار معامله وجود دارد که مهم‌ترین آن مدل بلک–شولز کلاسیک است. اما این مدل به دلیل ضعف‌هایی که دارد از مدل‌های واقعی بازار دور است. بنابراین نیازمند به مدل‌های توسعه‌یافته است. مانند، مطالعه روی سری زمانی نشان می‌دهد که قیمت دارایی پایه با نوسانات آن رابطه عکس دارد. مدل الاستیسیته ثابت واریانس یک مدل مناسب برای نشان دادن این رابطه معکوس است. در این پژوهش، مدل الاستیسیته ثابت واریانس برای ارزش گذاری اوراق اختیار آمریکایی در نظر گرفته شده است که نوسان‌پذیری آن به صورت یک تابع از دو پارامتر الاستیسیته نوسان‌پذیری و مقیاس ثابت نوسان اولیه لحظه‌ای است. مطالعات نشان می‌دهد که روش‌های غیرپارامتریک مانند شبکه عصبی و ماشین یادگیری بهتر از سایر روش‌ها برای مدل‌سازی اقتصاد مناسب هستند. بنابراین در این پژوهش، از روش شبکه عصبی برای ارزش گذاری عددی اختیار معامله آمریکایی استفاده خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: جواب یادگیری، شبکه عصبی، ارزش گذاری اختیار معامله.

طبقه‌بندی موضوعی: C45، G12، L11.

---

۱. doi: 10.22034/JSE.2024.12321.2199

۲. استادیار، گروه ریاضیات مالی، دانشکده علوم مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. (Rezaei.mirar@yahoo.com).

مقدمه

بازار سرمایه یکی از اجزای اصلی سیستم مالی اقتصاد هر کشوری محسوب می‌شود. امروزه با توجه به گسترش بازار سرمایه، ضرورت توسعه ابزارهای مشتقه در بازارهای مالی را می‌طلبد که خود سبب ارتقا و رشد هر چه بیشتر بازار سرمایه می‌شود. یکی از مهم‌ترین و جذاب‌ترین ابزارهای مشتقه، اوراق اختیار معامله است که قابلیت کاربرد و عملیاتی شدن در تمامی بازارهای مالی دارد (چنس و بروکس[1]، ۲۰۲۱). با تنوع اوراق اختیار معامله، سرمایه‌گذاران می‌توانند با ترکیب این اوراق، استراتژی‌های معاملاتی جذابی را در پیش گیرند و بر اساس پیش‌بینی‌های خود از آینده، موقعیت‌های مختلفی بر ابزارهای گوناگون اتخاذ کنند و حالات پیچیده‌ای برای عایدات خود تعیین کنند. در واقع کارکرد اصلی اوراق اختیار معامله این است که بستر و زیرساخت مناسب برای تلاقی و تعادل عرضه و تقاضا در بازار مالی فراهم کند تا نیازهای گوناگون فعالان در بازار سرمایه پاسخ داده شوند (هال[2]، ۲۰۰۹). انواع اوراق اختیار معامله به صورت گسترده در بازارهای جهانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که بر مبنای دارایی‌های مختلفی همچون ارزهای خارجی، نرخ بهره، کالا و سهام بسته می‌شود (بالستر، پاسلی و رادی[3]، ۲۰۱۶). از جمله اوراق اختیارهای معامله که در بازارهای جهانی دادوستد می‌شود، می‌توان اختیار اروپایی[4]، اختیار آمریکایی[5]، اختیار مانع[6]، اختیار آسیایی[7]، اختیار گذشته‌نگر[8] و ... نام برد (کواک[9]، ۲۰۰۸). تاکنون در بازار سرمایه ایران تنها اوراق اختیار معامله از نوع اروپایی راه‌اندازی شده است. با راه‌اندازی معاملات این اوراق در بازار سرمایه ایران، نه تنها یکی از نیازهای اصلی فعالان این بازار برطرف شده است، بلکه یکی از مشکلات اساسی سرمایه‌گذاران خارجی نیز پاسخ داده شده است. این ابزار مالی به سرمایه‌گذاران اجازه پوشش‌دهی سبد و کنترل ریسک در بازار سرمایه می‌دهد. همچنین سرمایه‌گذاران می‌توانند با بدست آوردن موقعیت مناسب در این ابزار مالی، اقدام به سرمایه‌گذاری و کسب بازدهی کنند (چنس و

---

1. Chance and Brooks
2. Hull
3. Ballestra, Pacelli, and Radi
4. European options
5. American options
6. Barrier options
7. Asian options
8. Lookback options
9. Kwok

بروکس، ۲۰۲۱). اما نکته مهم در ارزش‌گذاری درست این اوراق اختیار معامله است. از میان روش‌های متعدد موجود برای ارزش‌گذاری اختیار معامله، روش جواب یادگیری[1] نسبت به سایر روش‌ها انعطاف‌پذیری بیشتری دارد بنابراین از این روش می‌توان برای بهبود در ارزش‌گذاری مشتقات مالی استفاده کرد (چن، یو، منگ، زی، هو و چوالیر[2]، ۲۰۲۱). همچنین، روش جواب یادگیری، این قابلیت را دارد که برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های مختلف استفاده کرد.

مبانی نظری و توسعه فرضیه‌ها

اختیار یکی از مهم‌ترین و معروف‌ترین مشتقات در بازارهای مالی است و در طول دهه‌های اخیر، تعیین ارزش قرارداد اختیار یک موضوع مهم بوده است. انواع مدل‌های ریاضی برای ارزش‌گذاری معاملات اختیار وجود دارد. معادله بلک-شولز یکی از مهم‌ترین مدل‌های ریاضی در نظریه ارزش‌گذاری اختیار معامله هست. این مدل در سال ۱۹۷۳ توسط فیشر بلک[3] و مایرون شولز[4] معرفی شده است (بلک و شولز، ۱۹۷۳) و علاقه‌مندان زیادی را در زمینه مالی به خود جذب کرده است، زیرا به سادگی و به‌وضوح ارزش اختیار معامله را تعیین می‌کند. اما معادله بلک-شولز کلاسیک تحت برخی پیش فرض‌هایی است که باعث محدودیت آن شده است و سبب شده تا حدودی از مدل‌های واقعی بازار فاصله بگیرد. بنابراین، برخی از مدل‌های توسعه‌یافته برای تضعیف این فرضیه‌ها پیشنهاد شده است از جمله مدل بهره تصادفی[5] (مرتون[6]، ۱۹۷۴)، مدل پرش-نفوذ[7] (مرتون، ۱۹۷۶)، مدل نوسان‌پذیری تصادفی[8] (هال و وایت[9]، ۱۹۸۷)، مدل با هزینه‌های معاملاتی[10] (پاناس، دیویس و زریفوپولو[11]، ۱۹۹۳؛ رضائی، یزدانیان، اشرفی و محمودی، ۲۰۲۲) و مدل دینامیک حرکت سهام تحت حرکت براونی کسری[12] (چریدیتو[13]،

---

1. Learning solution
2. Chen, Yu, Meng, Xie, Hou, and Chevallier
3. Fisher Black
4. Myron Scholes
5. Stochastic interest model
6. Merton
7. Jump-diffusion model
8. Stochastic volatility model
9. Hull and White
10. Transaction costs
11. Davis, Panas, and Zariphopoulou
12. Fractional Brownian motion
13. Cheridito

۲۰۰۱). یکی از معروف‌ترین این مدل‌های توسعه‌یافته، مدل الاستیسیته ثابت واریانس[1] (CEV) است که برای نخستین بار در سال ۱۹۷۵ توسط کوکس[2] معرفی شده است تا رابطه معکوس بین قیمت سهام و نوسانات آن را در بازار سهام ثبت کند (کوکس، ۱۹۷۵). بدین ترتیب با جایگزینی مدل CEV در مدل حرکت براونی هندسی، پدیده عدم تقارن و اثر اهرمی بازده سهام در نظر گرفته شده است (کوکس و روس[3]، ۱۹۷۶؛ کوکس، ۱۹۹۶).

مدل بلک-شولز کلاسیک:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^{2}S^{2}\frac{\partial^{2}V(S,t)}{\partial S^{2}}+rS\frac{\partial V(S,t)}{\partial S}-rV(S,t)=0,\ (S,t)\in(0,+\infty)\times(0,T),$$

مدل CEV:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\delta^{2}S^{2\beta+2}\frac{\partial^{2}V(S,t)}{\partial S^{2}}+rS\frac{\partial V(S,t)}{\partial S}-rV(S,t)=0. \qquad (1)$$

در مدل‌های فوق، S، σ، r، T و V به ترتیب بیانگر قیمت دارایی پایه[4]، نوسان‌پذیری قیمت سهم[5]، نرخ بهره بدون ریسک[6]، زمان سررسید[7] و ارزش اختیار معامله[8] در زمان t با قیمت S هستند.

تابع نوسان‌پذیری مدل CEV بدون معرفی هیچ فرایند تصادفی اضافی، تابعی از ارزش سهام، الاستیسیته نوسان‌پذیری[9] (β) و پارامتر مقیاس ثابت نوسان اولیه لحظه‌ای[10] در لحظه $t=0$، $(\sigma_0=\sigma(S_0)=\delta S_0^{\beta})$ است. پارامتر مهم این مدل، الاستیسیته نوسان‌پذیری است که رابطه بین نوسان‌پذیری و ارزش دارایی را کنترل می‌کند. با در نظر گرفتن $\beta=0$، $\beta=-\frac{1}{2}$ و $\beta=1$، مدل CEV به مدل بلک-شولز کلاسیک، مدل مربع-ریشه‌ای کوکس و روس[11]، و

1. Constant elasticity of variance model
2. Cox
3. Cox and Ross
4. Underlying assets price
5. Volatility of assets price
6. Risk free interested rate
7. Maturity time
8. Option price
9. Elasticity of volatility
10. Scale parameter fixing the initial instantaneous volatility
11. Square-Root model of Cox and Ross model

مدل باچلیر[1] کاهش می‌یابد. این مدل به‌طور گسترده در بسیاری از زمینه‌ها استفاده شده است از جمله: تعیین ارزش اختیارهای آمریکایی (وانگ و ژائو[2]، ۲۰۰۸؛ رضائی، یزدانیان، محمودی و اشرفی، ۲۰۲۱)، اختیارهای آسیایی (لی[3]، ۲۰۱۶)، اختیارهای مانع (تاکور، تانگمن و بوروث[4]، ۲۰۱۴؛ رضائی، یزدانیان، اشرفی و محمودی، ۲۰۲۱) و اختیارهای گذشته‌نگر (بویل[5]، ۱۹۹۹).

شرایط نهایی و مرزی اختیارهای اروپایی:

$$Put\ Option: \begin{cases} V(S,T)=\max(K-S,\cdot), & \cdot<S<+\infty, \\ V(\cdot,t)=Ke^{-r(T-t)}, \quad \lim_{S\to+\infty}V(S,t)=\cdot, & \cdot<t<T, \end{cases}$$

$$Call\ Option: \begin{cases} V(S,T)=\max(S-K,\cdot), & \cdot<S<+\infty, \\ V(\cdot,t)=\cdot, \quad \lim_{S\to+\infty}V(S,t)=S-Ke^{-r(T-t)}, & \cdot<t<T. \end{cases}$$

شرایط نهایی و مرزی اختیارهای آمریکایی:

$$Put\ Option: \begin{cases} V(S,T)=\max(K-S,\cdot), \quad S>S_f(t), \\ \dfrac{\partial V(S_f(t),t)}{\partial S}=-۱, \quad \cdot<t<T, \\ V(S_f,t)=K-S_f(t), \quad \lim_{S\to+\infty}V(S,t)=\cdot, \quad \cdot<t<T, \end{cases}$$

$$Call\ Option: \begin{cases} V(S,T)=\max(S-K,\cdot), \quad S<S_f(t), \\ \dfrac{\partial V(S_f,t)}{\partial S}=۱, \quad \cdot<t<T, \\ V(\cdot,t)=\cdot, \quad V(S_f(t),t)=S_f(t)-K, \quad \cdot<t<T, \end{cases} \qquad (۲)$$

شرایط نهایی و مرزی اختیارهای مانع بی‌ارزش:

$$Put\ Option: \begin{cases} V(S,T)=\max(K-S,\cdot), \quad B_d<S<B_u, \\ V(B_d,t)=Y(t), \quad V(B_u,t)=Z(t), \quad \cdot<t<T, \end{cases}$$

$$Call\ Option: \begin{cases} V(S,T)=\max(S-K,\cdot), \quad B_d<S<B_u, \\ V(B_d,t)=Y(t), \quad V(B_u,t)=Z(t), \quad \cdot<t<T. \end{cases}$$

1. Bachelier model
2. Wong and Zhao
3. Lee
4. Thakoor, Tangman, and Bhuruth
5. Boyle

K در شرایط بالا بیانگر قیمت توافقی[1] در لحظه سررسید است. B_d کران پایین، B_u کران بالا، و $Z(t)$ و $Y(t)$ قیمت‌هایی هستند که وقتی قیمت دارایی پایه به کران بالا و پایین می‌رسد، پرداخته می‌شوند.

از دیگر مدل‌هایی که برای توصیف پدیده‌های مشاهده شده در بازارهای مالی مورد نیاز است، مدل دینامیک قیمت سهام تحت حرکت براونی کسری زیر است که برای توصیف پدیده حافظه طولانی[2] در بازار مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t^H,$$

B_t^H بیانگر حرکت براونی کسری با توان هرست[3] H است. مطالعات پژوهشگران نشان می‌دهد که دلایل متعددی برای ظهور پدیده حافظه طولانی در بازارهای مالی وجود دارند. این دلایل عبارتند از: بسیاری از سری‌های زمانی مالی، رفتار نامنظمی از خود نشان می‌دهند که ممکن است به دلیل وجود وابستگی غیرخطی در بازارهای مالی باشد. بنابراین، سری‌های زمانی مالی توسط دینامیک‌های غیرخطی مانند مدل‌های حافظه طولانی و بی‌نظم کنترل می‌شوند (پاناس[4]، ۲۰۰۱). پیکوزی و وست[5] (۲۰۰۲)، معادله کسری لانگوین[6] را به عنوان یک مدل دینامیکی برای مشاهده اثرات حافظه در سری‌های زمانی مالی پیشنهاد کرده‌اند. همچنین به دلیل پیچیدگی سیستم مالی، سرمایه‌گذاران بلافاصله پس از دریافت اطلاعات مالی تصمیم‌گیری نمی‌کنند بلکه منتظر می‌مانند تا اطلاعات به سر حد آستانه خود برسند. این رفتار می‌تواند به ویژگی‌های «حافظه طولانی» و «لپتوکورتی نامتقارن» منجر شود (شیائو و ژانگ[7]، ۲۰۱۲). علاوه بر این، اندرسن و بولرسلف[8] (۱۹۹۷) و مولر، داکورونیا و پیکتت[9] (۱۹۹۸) نشان داده‌اند که وابستگی طولانی مدت و توزیع‌های دم سنگین در داده‌های مالی با فرکانس بالا وجود دارند. ممکن است حرکت براونی کسری یک ابزار مناسب برای توصیف چنین پدیده‌هایی باشد.

1. Strike price
2. Long memory
3. Hurst exponent
4. Panas
5. Picozzi and West
6. Fractional Langevin equation
7. Xiao and Zhang
8. Andersen and Bollerslev
9. Müller, Dacorogna, and Pictet

در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل ظاهر شده در مدل‌های مالی انجام شده است. از جمله روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی مورد استفاده عبارتند از: روش‌های تبدیل انتگرال (لیانگ، وانگ، ژانگ، کیو و رن[1]، ۲۰۱۰)، روش‌های اختلال هموتوپی و روش‌های تجزیه و تحلیل هموتوپی (البلزه، کیلیچمن و طائب[2]، ۲۰۱۳)، روش‌های ترکیبی مبتنی بر موجک (هریهاران[3]، ۲۰۱۳)، روش جداسازی متغیرها (چن، خو و زو[4]، ۲۰۱۵). با توجه به پیچیدگی فرم‌های بسته جواب این روش‌ها و توابع خاص ظاهر شده، یافتن جواب نهایی مدل‌ها نیاز به اتخاذ روش‌های عددی دارد و از طرفی تعمیم این مدل‌های مورد مطالعه به مدل‌های پیچیده‌تر (نزدیک به مدل‌های واقعی بازار)، یافتن جواب‌ها به کمک این روش‌ها را دشوار می‌کند. از جمله روش‌های عددی مورد استفاده در حل این مدل‌ها روش معروف تفاضلات متناهی است (رضائی و یزدانیان، ۲۰۲۲). روش‌های جواب یادگیری از روش‌های رایج برای حل مسائل دنیای واقعی هستند. این رویکرد برای بدست آوردن ساختار پایه‌ای مسائل با فرم یادگیری داده‌های ورودی تلاش می‌کند. کاربرد روش‌های جواب یادگیری در هر دو مسائل مهندسی و مالی توسعه داده شده‌اند. برای مثال، از این روش برای وظایف تشخیص گفتار، خود-رانندگی ماشین، شبکه‌های اجتماعی، ترجمه زبان و غیره توسعه داده شده است. اخیراً این روش‌ها برای شبیه‌سازی عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال توسعه یافته‌اند (حاج‌محمدی، بهاری‌فرد و پرند، ۲۰۲۰؛ پرند، آقائی و جانی، ۲۰۲۱؛ پرند، رزاقی، صالحی و جانی، ۲۰۲۰). در سال‌های اخیر پژوهشگران بسیاری از روش جواب یادگیری برای ارزش‌گذاری اختیار معامله نیز استفاده کرده‌اند. از جمله این پژوهش‌های لیانگ، ژانگ، شیائو و چن[5] (۲۰۰۹) از رگرسیون بردار پشتیبان برای پیش‌بینی ارزش اختیار معامله استفاده کرده‌اند. پارک، کیم و لی[6] (۲۰۱۴) مدل‌های پارامتریک و مدل‌های یادگیری ماشینی غیرپارامتریک برای پیش‌بینی ارزش اختیار معامله استفاده کرده‌اند. وانگ[7] (۲۰۱۱) ارزش‌گذاری اختیار معامله پول را با استفاده از رگرسیون بردار پشتیبان و مدل تصادفی همراه با پرش انجام داده است. در بازار سرمایه ایران نیز از روش‌های جواب یادگیری برای پیش‌بینی جهش‌های شاخص بازار سهام (سهرابی، میربرگ

---

1. Liang, Wang, Zhang, Qiu, and Ren
2. Elbeleze, Kilicman, and Taib
3. Hariharan
4. Chen, Xu, and Zhu
5. Liang, Zhang, Xiao, and Chen
6. Park, Kim, and Lee
7. Wang

کار، چیرانی و خردیار، ۱۴۰۱) و قیمت سهام (کیانی‌زاده، باغانی و حمیدیان، ۱۴۰۲) استفاده کرده‌اند.

روش‌شناسی پژوهش

هدف اصلی این پژوهش، بکارگیری روش جواب یادگیری شبکه عصبی به عنوان یکی از قوی‌ترین روش‌های غیرپارامتریک برای ارزش‌گذاری و توسعه مدل‌های مالی در بازار سرمایه است که با استفاده از روش شبکه عصبی یک جواب عددی برای ارزش‌گذاری اختیار معامله بر اساس مدل‌های مطرح شده در بخش مبانی نظری و توسعه فرضیه‌ها، بدست می‌آید. روش مطرح شده در این پژوهش را می‌توان برای ارزش‌گذاری هر یک از اختیار معامله‌ها به کار برد که در این پژوهش فقط برای اختیار آمریکایی پیاده‌سازی شده است. ابتدا ویژگی‌های عملگر دیفرانسیلی چندجمله‌ای لژاندر[1] و ضرب کرونکر[2] ماتریس‌ها ارائه می‌شود.

قضیه ۱: فرض کنید بردار P(S) به صورت $P(S)=[P_0(S),P_1(S),\cdots,P_{N+1}(S)]$ تعریف شود که $P_n(S)$، $n=0,1,\cdots,N+1$، n-امین چندجمله‌ای لژاندر منتقل‌شده در بازه [0,1] است و بردار $P'(S)$ به صورت $P'(S)=[P'_0(S),P'_1(S),\cdots,{P_{N+1}}'(S)]$ تعریف می‌شود که $P'_n(S)$، $n=0,1,\cdots,N+1$، مشتق مرتبه n-ام چندجمله‌ای لژاندر منتقل‌شده $P_n(S)$ است. با استفاده از ویژگی‌های چندجمله‌ای لژاندر منتقل‌شده می‌توان نتیجه گرفت $P'(S)=P(S)M$، که ماتریس M به صورت زیر است:

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & \cdots & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 & \cdots & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & \cdots & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & \cdots & 0 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2(2N+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+2)\times(N+2)}.$$

1. Legendre polynomials
2. Kronecker product

اثبات: با استفاده از ویژگی‌های مشتق چندجمله‌ای لژاندر منتقل‌شده زیر می‌توان به سادگی قضیه بالا را ثابت کرد:

$$P'_{n+1}(S)=P'_{n-1}(S)+2(2n+1)P_n(S).$$

اگر ماتریس‌های $A\in C^{k_1\times k_2}$، $B\in C^{k_3\times k_4}$، $D\in C^{k_5\times k_6}$ و $E\in C^{k_7\times k_8}$ را در نظر بگیرید، آنگاه ضرب کرونکر ماتریس‌ها در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

$$(A\otimes B)(D\otimes E)=(AD)\otimes(BE),$$
$$A\otimes B\in C^{k_1k_3\times k_2k_4},\quad D\otimes E\in C^{k_5k_7\times k_6k_8}.$$

از ضرب کرونکر دو تا چندجمله‌ای لژاندر منتقل‌شده $P(S)=[P_0(S),P_1(S),\cdots,P_{N+1}(S)]$ و $P(t)=[P_0(t),P_1(t),\cdots,P_{N+1}(t)]$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}P(S,t)&=P(S)\otimes P(t)\\&=\big[P_0(S)P_0(t),P_0(S)P_1(t),\cdots,P_0(S)P_{N+1}(t),P_1(S)P_0(t),P_1(S)P_1(t),\cdots,\\&\quad P_1(S)P_{N+1}(t),\cdots,P_{N+1}(S)P_0(t),P_{N+1}(S)P_1(t),\cdots P_{N+1}(S)P_{N+1}(t)\big].\end{aligned}$$

$P(S,t)$ تابع پایه رشته‌های عصبی پنهان است (شکل ۱ را ببینید).

قضیه ۲: برای تابع پیوسته دو متغیره $V(S,t):[B_d,B_u]\times[0,T]\to\mathbb{R}$، یک $N\in\mathbb{N}$، ثابت $\beta_{ij}\ (i=0,1,\cdots,N+1;\ j=0,1,\cdots,N+1)$ و چندجمله‌های لژاندر منتقل‌شده $P_0(S),P_1(S),\cdots,P_{N+1}(S)$ و $P_0(t),P_1(t),\cdots,P_{N+1}(t)$ وجود دارند به طوری که شبکه عصبی لژاندر منتقل‌شده با $(N+1)^2$ رشته عصبی به صورت زیر است:

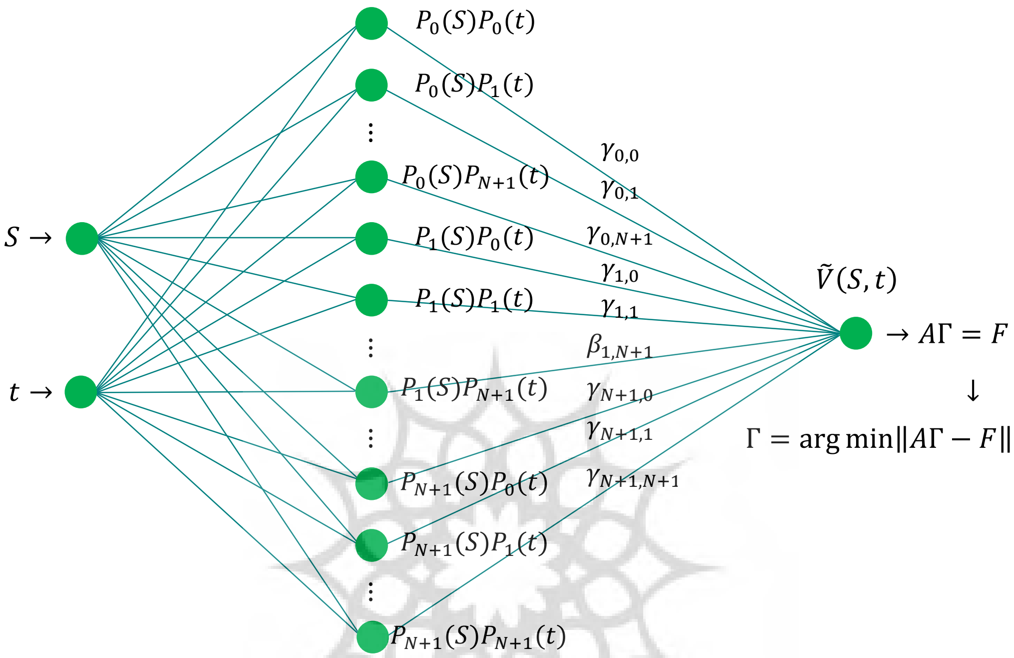
$$\tilde{V}(S,t)=\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=0}^{N+1}\beta_{ij}P_i(S)P_j(t)=P(S,t)\beta, \tag{3}$$

$$\beta=\big[\beta_{0,0},\beta_{0,1},\cdots,\beta_{0,N+1},\beta_{1,0},\beta_{1,1},\cdots,\beta_{1,N+1},\cdots,\beta_{N+1,0},\beta_{N+1,1},\cdots,\beta_{N+1,N+1}\big]^T,$$

که $\tilde{V}(S,t)$ جواب تقریبی معادله (۱) است و

$$\left\|V(S,t)-\tilde{V}(S,t)\right\|^{2}=\iint_{D}\left[V(S,t)-\tilde{V}(S,t)\right]^{2}dSdt$$

$$=\iint_{D}\left[V(S,t)-\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=0}^{N+1}\beta_{ij}P_{i}(S)P_{j}(t)\right]^{2}dSdt<\varepsilon.$$



شکل ۱. توپولوژی شبکه عصبی ماشین یادگیری چند جمله‌ای لژاندر منتقل‌شده

مطابق با رابطه (۳)، مشتقات ارزش اختیار آمریکایی به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\frac{\partial\tilde{V}(S,t)}{\partial S}=P(S,t)(M\otimes I)\beta, \qquad (۴)$$

$$\frac{\partial^{2}\tilde{V}(S,t)}{\partial S^{2}}=P(S,t)\left(M^{2}\otimes I\right)\beta, \qquad (۵)$$

$$\frac{\partial\tilde{V}(S,t)}{\partial t}=P(S,t)(I\otimes M)\beta. \qquad (۶)$$

با جایگزینی (۱) و (۲) با (۶)-(۳)، دستگاه معادلات خطی زیر را بدست می‌آید؛ $S_i = \frac{i}{m}$، $i = ۰,۱,\cdots,m$ و $S_j = \frac{j}{m}$، $j = ۰,۱,\cdots,m$:

$$\begin{cases} P\left(S_i,t_j\right)\left[\left(I \otimes M\right)+\frac{۱}{۲}\delta^۲ S_i^{۲\beta+۲}\left(M^۲ \otimes I\right)+rS_i\left(M \otimes I\right)-r(I\otimes I)\right]\beta = ۰, \\ P\left(S_i,T\right)\beta = \max(S_i-K,۰), \\ P\left(۰,t_j\right)\beta = ۰, \\ P\left(S_f(t_j),t_j\right)\beta = S_f(t_j)-K, \\ P\left(S_f(t_j),t_j\right)\left(M \otimes I\right)\beta = ۱. \end{cases} \tag{۷}$$

معادله (۷) را در فرم ماتریسی زیر نیز می‌توانید بنویسید:

$$A\beta = F, \tag{۸}$$

$$F = \begin{bmatrix} ۰ \\ \max(S_i-K,۰) \\ ۰ \\ S_f(t_j)-K \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} P\left(S_i,t_j\right)\left[\left(I \otimes M\right)+\frac{۱}{۲}\delta^۲ S_i^{۲\beta+۲}\left(M^۲ \otimes I\right)+rS_i\left(M \otimes I\right)-r(I\otimes I)\right] \\ P\left(S_i,T\right) \\ P\left(۰,t_j\right) \\ P\left(S_f(t_j),t_j\right) \\ P\left(S_f(t_j),t_j\right)\left(M \otimes I\right) \end{bmatrix},$$

با حل دستگاه معادلات خطی (۸)، ضرایب مجهول شبکه عصبی لژاندر به دست می‌آیند به طوری که $\left\|V(S,t)-\tilde{V}(S,t)\right\|^۲$ مینیمم است. این فرآیند در شکل ۱ نمایش داده شده است.

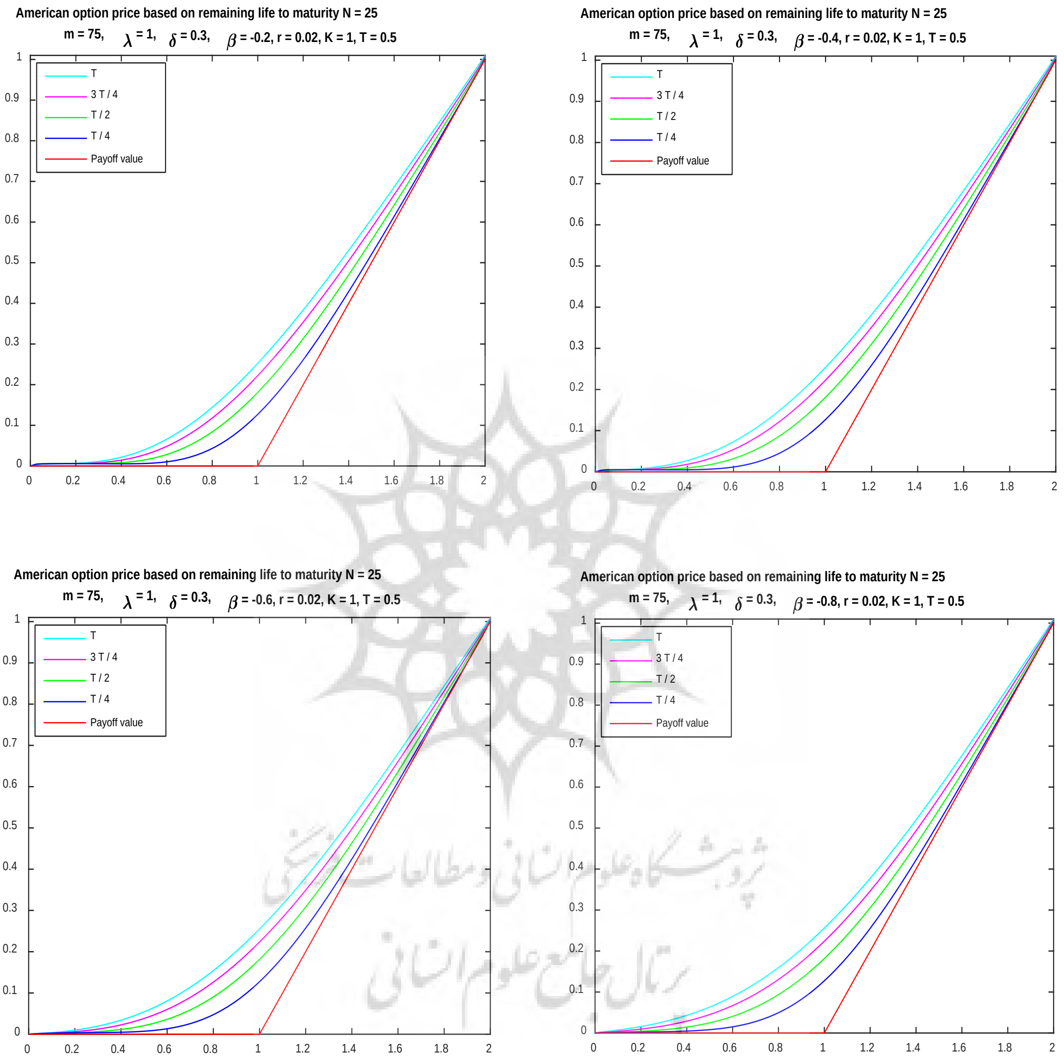
یافته‌های پژوهش

در این بخش یافته‌های مربوط به روش ارائه شده در بخش روش‌شناسی پژوهش ارائه می‌شود. همه نتایج با استفاده از نرم‌افزار MATLAB R2015b بدست آمده‌اند. پارامترهای مسأله ارزش‌گذاری به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

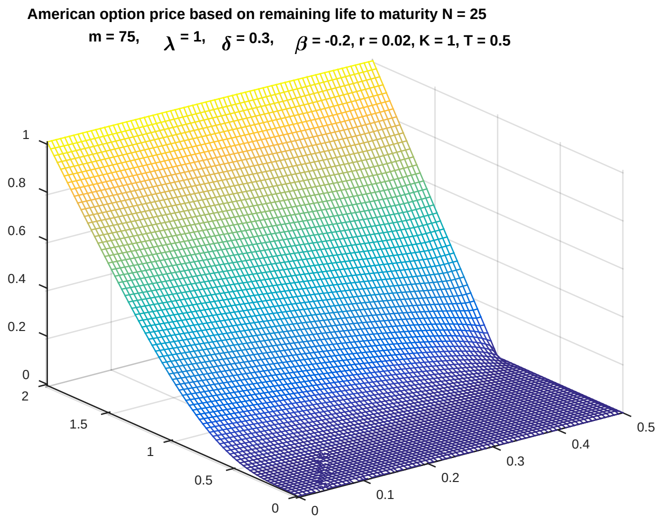
$$N=۲۵,\quad m=۷۵,\quad \lambda=۱,\quad \delta=۰/۳,\quad r=۰/۰۲,\quad k=۰/۵,۱,$$
$$T=۳months,۱year.$$

شکل ۲ ارزش اختیار خرید آمریکایی را به ازای $\beta=-۰/۸,-۰/۶,-۰/۴,-۰/۲$ بر اساس عمر باقی‌مانده تا زمان سررسید نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که چون تابع نوسان‌پذیری محلی به صورت $\sigma=\delta S^{\beta}$ است بنابراین پارامتر الاستیسیته نوسان‌پذیری (β)، باید به گونه‌ای انتخاب شود تا وقتی که $S\rightarrow+\infty$، این تابع کراندار باقی بماند. به این دلیل برای پارامتر β، مقادیر منفی منظور می‌شود. با توجه به این شکل، هر چقدر مقدار پارامتر β افزایش یابد، ارزش اختیار خرید آمریکایی کاهش می‌یابد. بنابراین ارزش اختیار معامله با پارامتر β، رابطه عکس دارد. شکل ۳ و ۴، به ترتیب، ارزش اختیار خرید آمریکایی را برای $\beta=-۰/۸,-۰/۲$ در هر لحظه از عمر اختیار به ازای هر قیمت دارایی پایه نمایش می‌دهد. از آنجایی که تئوری مطرح شده در بخش روش‌شناسی پژوهش نه تنها برای ارزش‌گذاری اختیار آمریکایی، بلکه برای ارزش‌گذاری سایر اختیار معامله‌ها نیز به کار می‌آید، بنابراین ارزش اختیار اروپایی و اختیار مانع نیز به این مقاله اضافه شده است. شکل ۵، ارزش اختیار خرید اروپایی را بر اساس عمر باقی‌مانده تا زمان سررسید به ازای $\beta=-۰/۸,-۰/۲$ و شکل ۶، ارزش اختیار خرید مانع را بر اساس عمر باقی‌مانده تا زمان سررسید به ازای $\beta=-۰/۷,-۰/۳$ نشان می‌دهند. همان طور که در شکل ۵ و ۶ ملاحظه می‌کنید، همانند اختیار آمریکایی، ارزش اختیار معامله اروپایی و مانع با پارامتر الاستیسیته نوسان‌پذیری رابطه عکس دارد. به طور مشابه می‌توان همین نتایج را برای اختیارهای فروش آمریکایی، اروپایی و مانع بدست آورد. می‌دانیم که هر چقدر عمر باقی‌مانده اختیار معامله تا زمان سررسید آن بیشتر باشد، به دلیل وقوع احتمالات زیاد، این ارزش زمانی بر ارزش ذاتی اختیار معامله افزوده خواهد شد و آن اختیار نسبت به اختیاری که عمر باقی‌مانده‌اش کمتر است، ارزش بیشتری دارد. در زمان سررسید، این ارزش زمانی اختیار معامله صفر می‌شود و ارزش اختیار معامله تنها با ارزش ذاتی خود برابر است. بنابراین، در زمان نزدیک به سررسید از نظر سرمایه‌گذار ممکن است به دلیل آنکه این موقعیت نسبت به موقعیتی که هم دارای ارزش

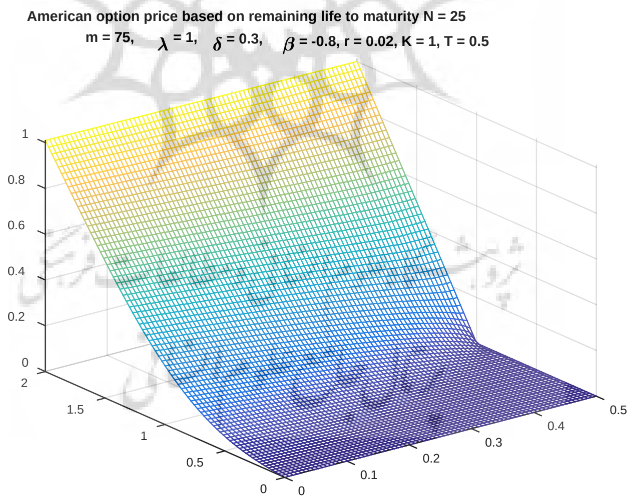
زمانی است و هم ارزش ذاتی، به صرفه نباشد و ترجیح می‌دهد وارد آن موقعیت نشود. از این رو، برای سرمایه‌گذاران، عمر باقی‌مانده اختیار معامله برای اتخاذ یک موقعیت خرید یا فروش مهم است. اهمیت این مورد در شکل‌های ۲، ۵ و ۶ دیده می‌شود.



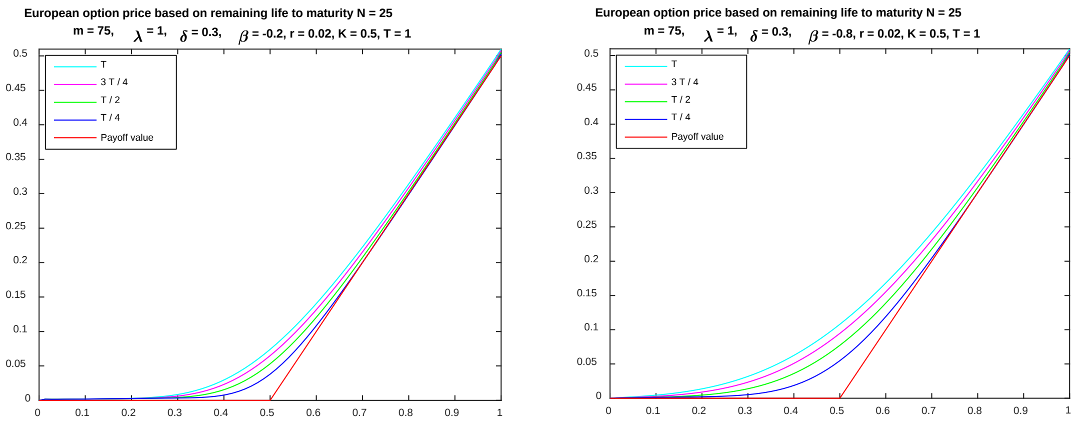
شکل ۲. ارزش اختیار خرید آمریکایی برای β -های مختلف بر اساس عمر باقی‌مانده تا زمان سررسید.



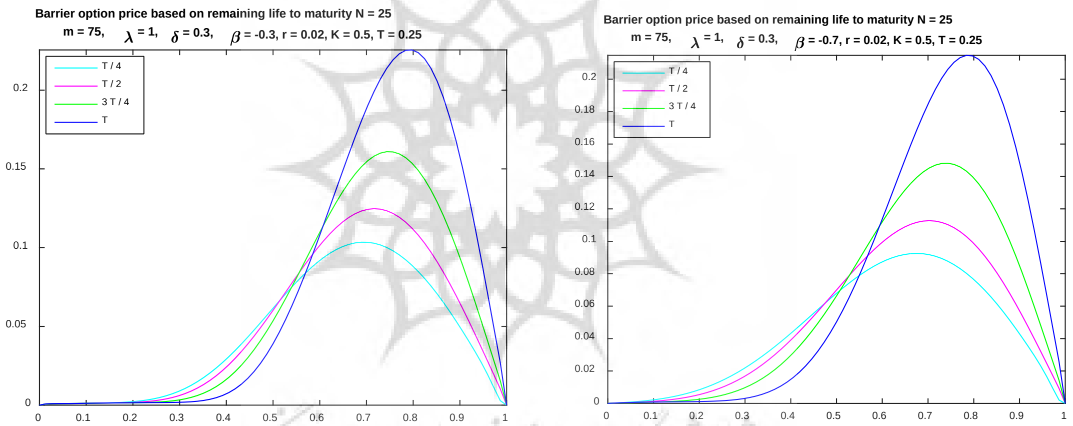
شکل ۳. ارزش اختیار خرید آمریکایی برای $\beta = -0.2$.



شکل ۴. ارزش اختیار خرید آمریکایی برای $\beta = -0.8$.



شکل ۵. ارزش اختیار خرید اروپایی برای β -های مختلف بر اساس عمر باقی‌مانده تا زمان سررسید.



شکل ۶. ارزش اختیار خرید مانع برای β -های مختلف بر اساس عمر باقی‌مانده تا زمان سررسید.

بحث و نتیجه گیری

در بازارهای مالی با افزایش قیمت دارایی پایه، نوسانات قیمت آن کاهش می‌یابد و با کاهش قیمت دارایی پایه، نوسانات قیمت آن افزایش می‌یابد. بنابراین پارامتر نوسان‌پذیری دارایی پایه به صورت تابعی وابسته به قیمت آن دارایی و دو پارامتر الاستیسیته نوسان‌پذیری و مقیاس ثابت

نوسان اولیه لحظه‌ای است. درحالی که در مدل بلک-شولز کلاسیک، پارامتر نوسان‌پذیری، ثابت در نظر گرفته شده است. از این رو، در این پژوهش، مدل الاستیسیته ثابت واریانس برای ارزش‌گذاری اختیار آمریکایی در نظر گرفته شده است تا هم رابطه معکوس بین قیمت سهام و نوسانات آن را نشان دهد و هم مدل ارزش‌گذاری به بازار واقعی نزدیک‌تر باشد. از آنجایی که پژوهش‌های گذشته نشان داده‌اند که روش‌های غیرپارامتریک، یک روش قدرتمند جهت مدل‌سازی و ارزش‌گذاری اختیار معامله و نیز پیش‌بینی قیمت سهام هستند، از روش شبکه عصبی با ماشین یادگیری عمیق لژاندر برای ارزش‌گذاری اختیار آمریکایی استفاده کرده‌ایم. در این پژوهش، توابع پایه رشته‌های عصبی پنهان با ضرب کرونکر دو چندجمله‌ای لژاندر بدست می‌آیند و با حل دستگاه (۸)، وزن‌های لایه پنهان نیز حاصل می‌شوند. بدین ترتیب، ارزش اختیار آمریکایی در هر لحظه از انعقاد قرارداد تا لحظه سررسید با استفاده از روش شبکه عصبی معین خواهد شد. نتایج این پژوهش با نتایج پژوهش گذشته از جمله پژوهش یانگ، هو، سان، ژانگ، ونگ و لو[1] (۲۰۲۰) و ژانگ، یانگ و ژائو[2] (۲۰۲۲) همسو هستند. همچنین در بازارهای مالی ایران از روش شبکه عصبی به عنوان یک روش قدرتمند در زمینه‌های مختلف از جمله پیش‌بینی خطر سقوط قیمت سهام (ملکیان، فخاری، قاسمی، فرزاد، ۱۳۹۶)، پیش‌بینی قیمت سهام (کیانی‌زاده و همکاران، ۱۴۰۲)، پیش‌بینی مدیریت سود (مالکی‌نیا، تهرانی، عالم تبریز، فلاح شمس، ۱۴۰۱)، پیش‌بینی جهش‌های شاخص بازار سهام (سهرابی و همکاران، ۱۴۰۱) و پیش‌بینی ریسک نقدینگی در صنعت بانکداری (فرح آبادی، عیوضلو، صفری، ۱۴۰۱) استفاده شده است و چون اهداف این پژوهش، با اهداف پژوهش‌های بیان شده همسو هستند، پیشنهاد می‌شود از روش شبکه عصبی مطرح شده در این پژوهش، برای ارزش‌گذاری اختیارهای معامله در بورس اوراق بهادار تهران هم به کار گرفته شود که می‌تواند به عنوان یک ابزار پیش‌بینی به کمک سرمایه‌گذاران بیاید. از آنجایی که برای سرمایه‌گذاران مهم است که در چه زمانی وارد یک موقعیت باز اختیار معامله شوند و در کدام موقعیت باز خرید یا فروش اختیار معامله روی آن دارایی پایه قرار گیرند، پس به راستی برای گرفتن تصمیم صحیح به یک روش قوی برای ارزش‌گذاری اختیار معامله نیاز دارند که با استفاده از روش شبکه عصبی این مورد برای سرمایه‌گذاران محقق می‌شود.

---

1. Yang, Hou, Sun, Zhang, Weng, and Luo
2. Zhang, Yang, and Zhao

در این پژوهش، علاوه بر ارزش‌گذاری اختیارهای آمریکایی، ارزش‌گذاری اختیارهای اروپایی و اختیارهای مانع نیز با استفاده از روش شبکه عصبی انجام شده است که این کارآمد بودن روش مطرح شده را برای ارزش‌گذاری اختیارهای متنوع نشان می‌دهد. در حال حاضر تنها اختیار معامله از نوع اروپایی در بازار سرمایه ایران دادوستد می‌شود که با آماده‌سازی بسترهای مناسب برای سایر اختیارهای معامله از جمله اختیارهای آمریکایی یا اختیارهای مانع، می‌توان از تئوری مطرح شده در این پژوهش برای ارزش‌گذاری آن‌ها استفاده کرد. از طرفی برای سرمایه‌گذاران، تخمین پارامتر نوسان‌پذیری برای بدست آوردن یک موقعیت مناسب برای خرید و فروش اختیارهای معامله بسیار مهم است که پیشنهاد می‌شود با استفاده از روش شبکه عصبی، نوسان‌پذیری قیمت دارایی پایه تخمین زده شود.

References

Andersen, T.G; & Bollerslev, T. (1997). Heterogeneous information arrivals and return volatility dynamics: Uncovering the long-run in high frequency returns. *The Journal of Finance*, 52(3), 975-1005. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb02722.x

Ballestra, L.V; Pacelli, G; & Radi, D. (2016). A very efficient approach for pricing barrier options on an underlying described by the mixed fractional Brownian motion. *Chaos, Solitons and Fractals*, 87, 240-248. http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2016.04.008

Black, F; & Scholes, M. (1973). The valuation of options and corporate liability. *Journal of Political Economy*, 81, 659-683. https://doi/abs/10.1086/260062#

Boyle, P.P. (1999). Pricing lookback and barrier options under the CEV process. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34(2), 241-264. https://doi.org/10.2307/2676280

Chance, D.M; & Brooks, R. (2021). An introduction to derivatives and risk management. South-Western. *Cengage Learning*.

Chen, W; Xu, X; & Zhu, S. (2015). Analytically pricing double barrier options based on a time-fractional Black-Scholes equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 69(12), 1407-1419. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.03.025

Chen, Y; Yu, H; Meng, X; Xie, X; Hou, M; & Chevallier, J. (2021). Numerical solving of the generalized Black-Scholes differential equation using Laguerre neural network. *Digital Signal Processing*, 112, 103003. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103003

Cheridito, P. (2001). Mixed fractional Brownian motion. *Bernoulli*, 7, 913-934. https://doi.org/10.2307/3318626

Cox, J. (1975). *Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions*. Unpublished note, Stanford University, Graduate School of Business, September.

Cox, J. (1996). Notes on option pricing I: constant elasticity of variance diffusions. *The Journal of Portfolio Management*, 22, 15-17. https://www.proquest.com/openview/e0fe22895437246aa917516b8ce0c1b3/1?pq-origsite=gscholar&cbl=49137

Cox, J; & Ross, S. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 145-166. https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90023-4

Davis, M.H.A; Panas, V.G; & Zariphopoulou, T. (1993). European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2), 470-493. https://doi.org/10.1137/0331022

Elbeleze, A.A; Kilicman, A; & Taib, B.M. (2013). Homotopy perturbation method for fractional Black-Scholes European option pricing equations using sumudu transform. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013. https://doi.org/10.1155/2013/524852

Farahabadi, M; Eivazlou, R; & Safari, H. (2022). An Artificial Neural Network and Bayesian Network Model for Liquidity Risk Assessment in Banking. *Journal of Securities and Exchange*, 15(59), 121-156. DOI: 10.22034/JSE.2021.11606.1715 (In Persian)

Hajimohammadi, Z; Baharifard, F; & Parand, K. (2020). A new numerical learning approach to solve general Falkner-Skan model. *Engineering with Computers*, 38, 121-137. https://doi.org/10.1007/s00366-020-01114-8

Hariharan, G. (2013). An efficient wavelet based approximation method to time fractional Black-Scholes European option pricing problem arising in financial market. *Applied Mathematical Sciences*, 7(69), 3445-3456. http://dx.doi.org/10.12988/ams.2013.35261

Hull, J.C; & White, A.D. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42(2), 281-300. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x

Hull, J.C. (2009). Optionen, futures und andere derivate. *Pearson Deutschland GmbH*.

Kianizadeh, H; Baghani, A; & Hamidian, M. (2023). Comparing the accuracy of selected machine learning models for price prediction in the stock exchange market. *Journal of Securities and Exchange*, 16(62), 75-102. DOI: 10.22034/JSE.2021.11636.1733. (In Persian)

Kwok, Y.K. (2008). Mathematical models of financial derivatives. *Springer*.

Lee, M.K. (2016). Asymptotic approach to the pricing of geometric Asian options under the CEV model. *Chaos, Solitons and Fractals*, 91, 544-548. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.07.013

Liang, J.R; Wang, J; Zhang, W.J; Qiu, W.Y; & Ren, F.Y. (2010). The solution to a bifractional Black-Scholes-Merton differential equation. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 58(1), 99-112. https://doi.org/10.4236/am.2012.36091

Liang, X; Zhang, H; Xiao, J; & Chen, Y. (2009). Improving option price forecasts with neural networks and support vector regressions. *Neurocomputing*, 72(13-15), 3055-3065. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2009.03.015

Maleki Nia, M; Tehrani, R; Alam Tabriz, A; & Fallah Shams, M. (2022). Earning Management Prediction Applying Hybrid Multi-Layer Perceptron Neural Network and Meta-Heuristic Algorithms. *Journal of Securities and Exchange*, 15(58), 183-214. DOI: 10.22034/JSE.2021.11609.1718 (In Persian)

Malekian, E; Fakhari, H; Ghasemi, J; & Farzad, S. (2018). Stock Price Crash Risk of TSE Listed Companies Using the Genetic Algorithm, Comparing with Logistic Regression. *Journal of Securities and Exchange*, 10(40), 91-114. DOI: 10.22034/JSE.2018.11118 (In Persian)

Merton, R.C. (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29(2), 449-470. https://doi.org/10.2307/2978814

Merton, R.C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 125-144. https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2

Müller, U.A; Dacorogna, M.M; & Pictet, O.V. (1998). Heavy tails in high-frequency financial data. *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications*, pp. 55-78.

Panas, E. (2001). Long memory and chaotic models of prices on the London metal exchange. *Resources Policy*, 27(4), 235-246. https://doi.org/10.1016/S0301-4207(02)00008-9

Parand K; Aghaei A.A; & Jani M. (2021). A new approach to the numerical solution of Fredholm integral equations using least squares-support vector regression. *Mathematics and Computers in Simulation*, 180, 114-128. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.08.010

Parand, K; Razzaghi, M; Sahleh, R; & Jani, M. (2022). Least squares support vector regression for solving volterra integral equations. *Engineering with Computers*, 38, 789-796. https://doi.org/10.1007/s00366-020-01186-6

Park, H; Kim, N; & Lee, J. (2014). Parametric models and non-parametric machine learning models for predicting option prices: Empirical comparison study over KOSPI 200 Index options. *Expert Systems with Applications*, 41(11), 5227-5237. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2014.01.032

West, B.J; & Picozzi, S. (2002). Fractional Langevin model of memory in financial time series. *Physical Review E*, 65(3), 037106. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.037106

Rezaei, M; & Yazdanian, A.R. (2022). Pricing European double barrier option with moving barriers under a fractional Black-Scholes model. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 19(4), 185. DOI:10.1007/s00009-022-02104-4.

Rezaei, M; Yazdanian, A.R; Ashrafi, A; & Mahmoudi, S.M. (2022). Numerically pricing nonlinear time-fractional Black-Scholes equation with time-dependent parameters under transaction costs. *Computational Economics*, 60(1), 243-280. DOI:10.1007/s10614-021-10148-z.

Rezaei, M; Yazdanian, A.R; Ashrafi, A; & Mahmoudi, S.M. (2021). Numerical pricing based on fractional Black-Scholes equation with time-dependent parameters under the CEV model: double barrier options. *Computers and Mathematics with Applications*, 90, 104-111. DOI:10.1016/J.CAMWA.2021.02.021.

Rezaei, M; Yazdanian, A.R; Mahmoudi, S.M; & Ashrafi, A. (2021). A compact difference scheme for time-fractional Black-Scholes equation with time-dependent parameters under the CEV model: American options. *Computational Methods for Differential Equations*, 9(2), 523-552. DOI:10.22034/CMDE.2020.36000.1623.

Sohrabi, M; Mirbargkar, S.M; Chirani, E; & Kheradyar, S. (2022). Modeling the prediction of stock market jumps based on the recurrent neural network and deep learning. *Journal of Securities and Exchange*, 15(59), 245-268. DOI: 10.22034/JSE.2021.11655.1762. (In Persian)

Thakoor, N; Tangman, D.Y; & Bhuruth, M. (2014). Efficient and high accuracy pricing of barrier options under the CEV diffusion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 259, 182-193. https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.05.009

Wong, H.Y; & Zhao, J. (2008). An artificial boundary method for American option pricing under the CEV model. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(4), 2183-2209. https://doi.org/10.1137/060671541

Wang, P. (2011). Pricing currency options with support vector regression and stochastic volatility model with jumps. *Expert Systems with Applications*, 38(1), 1-7. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.05.037

Xiao, W.L; Zhang, W.G; Zhang, X; & Zhang, X. (2012). Pricing model for equity warrants in a mixed fractional Brownian environment and its algorithm. *Physica A*, 391(24), 6418-6431. https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.07.041

Yang, Y; Hou, M; Sun, H; Zhang, T; Weng, F; & Luo, J. (2020). Neural network algorithm based on Legendre improved extreme learning machine for solving elliptic partial differential equations. *Soft Computing*, 24, 1083-1096.
https://doi.org/10.1007/s00500-019-03944-1

Zhang, X; Yang, J; & Zhao, Y. (2022). Numerical solution of time fractional Black-Scholes model based on Legendre wavelet neural network with extreme learning machine. *Fractal and Fractional*, 6(7), 401. https://doi.org/10.3390/fractalfract6070401.