Financial Research Journal

Print ISSN: 1024-8153
Online ISSN: 2423-5377

Comparison of Option Pricing with Stochastic Volatility in Heston and Heston Nandi Model

Mohammad Reza Haddadi*
*Corresponding Author, Assistant Prof., Department of Financial Mathematics, Faculty of Mathematics, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran. E-mail: haddadi@abru.ac.ir

Hossein Nasrollahi
MSc., Department of Financial Mathematics, Faculty of Mathematics, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran. E-mail: nasrollahi_hossein@yahoo.com

Abstract

Objective
The significance of the capital market in driving the economic growth and development of a country necessitates a thorough examination of this market from multiple perspectives. Participating in this market invariably involves a heightened level of risk, prompting the emergence of various tools aimed at mitigating these risks. One of the main factors affecting investment decisions is the accurate valuation of derivatives, including options. The Black-Scholes model is used to price a wide range of options contracts. The basic assumption in this fixed model is to consider volatility, which reduces the accuracy of calculating the option price. The main purpose of this research is to determine the price of a European call option with stochastic volatility.

Methods
The Heston-Nandi model is a closed pricing formula for European options that shares numerous assumptions with the Heston model. The main difference between the Heston-Nandy model and the Black-Scholes model is the use of the variance type when option pricing. The Heston-Nandy model considers the non-normal distribution of returns and random fluctuations more realistically. Since the Heston model is one of the effective models among the random turbulence models, in this study, the option pricing under Heston and Heston Nandi random stochastic is discussed, which has been investigated considering the non-normality of the data distribution.

Results
In this study, data from Iran Khodro was utilized, spanning the period from November 21, 2020, to December 14, 2022. To increase the accuracy, the volatility was calculated using two historical and implied methods. Following the application of option pricing using all three models, namely Black-Scholes, Heston, and Heston-Nandi, and subsequent

comparison of the results, it was determined that the Heston-Nandi model exhibited superior performance when compared to the other two models.

Conclusion
The findings of this research indicate that, in both the short, medium, and long terms, the Heston-Nandi model yields prices that closely align with market prices and exhibits lower error rates. Consequently, it can be inferred that the Heston-Nandi model demonstrates a high degree of flexibility. The Heston-Nandi model outperforms the Black-Scholes and Heston models by capturing unusual patterns like skewness and elongation. This makes it a good alternative to those models.

Keywords: Black-Scholes model, Heston model, Heston Nandi model, Options, Stochastic volatility.

Citation: Haddadi, Mohammad Reza & Nasrollahi, Hossein (2023). Comparison of Option Pricing with Stochastic Volatility in Heston and Heston Nandi Model. *Financial Research Journal*, 25(4), 577-595. https://doi.org/10.22059/FRJ.2023.357704.1007451 (*in Persian*)

Financial Research Journal, 2023, Vol. 25, No.4, pp. 577-595
Published by University of Tehran, Faculty of Management
https://doi.org/10.22059/FRJ.2023.357704.1007451
Article Type: Research Paper

Received: April 11, 2023
Received in revised form: July 21, 2023
Accepted: August 11, 2023
Published online: January 20, 2024

شاپا چـاپـی: ۱۰۲۴-۸۱۵۳
شاپا الکترونیکی: ۲۴۲۳-۵۳۷۷

تحقیقات مالی

مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله با تلاطم تصادفی در مدل هستون و هستون ناندی

محمدرضا حدادی *

* نویسنده مسئول، استادیار، گروه ریاضی مالی، دانشکده ریاضی، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران. رایانامه: haddadi@abru.ac.ir

حسین نصرالهی

کارشناس ارشد، گروه ریاضی مالی، دانشکده ریاضی، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران. رایانامه: nasrollahi_hossein@yahoo.com

چکیده

هدف: بازار سرمایه در رشد و پیشرفت اقتصادی هر کشور نقش مهمی ایفا می‌کند؛ از این رو بررسی دقیق این بازار، از جنبه‌های مختلف ضروری به نظر می‌رسد. حضور در این بازار همیشه با ریسک زیادی همراه است و برای کاهش ریسک، ابزارهای مختلفی ارائه شده است. یکی از ارکان اصلی مؤثر بر تصمیم‌های سرمایه‌گذاری، ارزش‌گذاری دقیق مشتقات، از جمله اختیار معامله است. مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری طیف وسیعی از قراردادهای اختیار معامله استفاده می‌شود. فرض اساسی در این مدل، ثابت در نظر گرفتن تلاطم است که همین موضوع، دقت در محاسبه قیمت اختیار را کاهش می‌دهد. هدف اصلی این پژوهش تعیین قیمت اختیار خرید اروپایی با تلاطم تصادفی و افزایش دقت پیش‌بینی قیمت اختیار خرید است؛ از این رو به مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله با تلاطم تصادفی در مدل هستون و هستون ناندی تحت گارچ پرداخته می‌شود.

روش: این پژوهش از نظر ماهیت، تحلیلی ـ کاربردی است. مدل هستون ناندی یک فرمول قیمت‌گذاری بسته برای اختیارهای اروپایی است که بسیاری از مفروضات آن شبیه مدل هستون است. تفاوت اصلی بین مدل هستون ناندی و مدل بلک شولز، در استفاده از نوع نوسان هنگام قیمت‌گذاری اختیار است که در مدل هستون ناندی توزیع غیرنرمال بازده و نوسان‌های تصادفی را واقعی‌تر در نظر می‌گیرد. از آنجایی که در بین مدل‌های تلاطم تصادفی، مدل هستون یکی از مدل‌های کاراست، در این پژوهش به قیمت‌گذاری اختیار معامله، تحت تلاطم تصادفی هستون و هستون ناندی پرداخته می‌شود که با در نظر گرفتن غیرنرمال بودن توزیع داده‌ها بررسی شده‌اند.

یافته‌ها: داده‌های مورد استفاده در این پژوهش، اطلاعات قیمت سهم ایران‌خودرو در بازه ۱۳۹۹ /۹/۱ تا ۱۴۰۱ /۹/۲۳ است. تجزیه‌وتحلیل داده‌ها با استفاده از نرم‌افزار آر انجام شده است. پس از قیمت‌گذاری اختیار معامله توسط هر سه مدل بلک شولز، هستون و هستون ناندی و مقایسه نتایج به‌دست‌آمده، مشخص شد که برای ارزش‌گذاری اختیار معامله، مدل هستون ناندی در مقایسه با دو مدل بلک شولز و هستون، در همه حالات کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت عملکرد بهتری دارد. به‌منظور افزایش دقت در محاسبه قیمت اختیار خرید ایران‌خودرو در مدل بلک شولز، هستون و هستون ناندی، از دو نوسان تاریخی و نوسان ضمنی استفاده شده است.

نتیجه‌گیری: مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری طیف وسیعی از قراردادهای اختیار معامله مرسوم است. در این مدل، ثابت بودن نوسان بازده‌ها یک فرض اساسی است. در این پژوهش عملکرد مدل‌های بلک شولز، هستون و هستون ناندی در قیمت‌گذاری اختیار خرید با رویکردهای مختلف نوسان مقایسه شد. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که در کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت، مدل هستون ناندی قیمت‌های نزدیک‌تری به قیمت بازار نشان می‌دهد و خطای کمتری دارد. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که مدل هستون ناندی نسبت

به مدل‌های بلک شولز و هستون با چولگی و کشیدگی غیرنرمال انعطاف‌پذیری بیشتری دارد و می‌توان به‌عنوان جایگزین از این مدل استفاده کرد.

کلیدواژه‌ها: اختیار معامله، مدل بلک شولز، مدل هستون، مدل هستونناندی، تلاطم تصادفی.

استناد: حدادی، محمدرضا و نصرالهی، حسین (۱۴۰۲). مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله با تلاطم تصادفی در مدل هستون و هستون ناندی. *تحقیقات مالی*، ۲۵(۴)، ۵۷۷–۵۹۵.

تحقیقات مالی، ۱۴۰۲، دوره ۲۵، شماره ۴، صص. ۵۷۷– ۵۹۵
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
نوع مقاله: علمی پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۲۲
تاریخ ویرایش: ۱۴۰۲/۰۴/۳۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۲۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۰/۳۰
doi: https://doi.org/10.22059/FRJ.2023.357704.1007451

مقدمه

اختیار[۱]، یکی از انواع اوراق مشتقه در حوزهٔ مالی است. مهم‌ترین مسئله در خصوص هر ابزار مالی، از جمله اختیار معامله، بحث قیمت‌گذاری آن است. در اوایل سال ۱۹۷۰، آقایان فیشر بلک[۲]، مایرون شولز[۳] و رابرت مرتون[۴]، گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند و نتیجهٔ کار آن‌ها ارائهٔ مدلی بود که با عنوان مدل بلک شولز[۵] معروف شد. این مدل در نحوهٔ قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله، تأثیر زیادی داشت. فرض اساسی در مدل بلک شولز، این است که توزیع احتمال قیمت دارایی پایه نرمال است (اسلامی بیدگلی و سرافراز اردکانی، ۱۳۷۵)؛ در صورتی که شواهد تجربی در بازارهای مالی واقعی نشان می‌دهد که فرایند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع نرمال، دم‌کلفت‌تر و کشیدگی بیشتری دارد. از طرف دیگر، در مدل بلک شولز تلاطم قیمت سهام ثابت انگاشته شده و این در حالی است که الگوهای تلاطم مشاهده‌شده در قیمت‌های اختیار مبادله شده در بازار، گواه از تصادفی بودن تلاطم دارند (بلک، شولز و مرتون، ۱۹۷۳). بعد از مدل بلک شولز، متخصصان زیادی برای رهایی از این نقص‌ها، مدل‌هایی برای دینامیک‌های تلاطم ارائه کردند (هال و وایت[۶]، ۱۹۸۷؛ اسکات[۷]، ۱۹۸۷؛ ویگینس[۸]، ۱۹۸۷؛ استین[۹]، ۱۹۹۱؛ ملینو و ترنبول[۱۰]، ۱۹۹۰ و هستون[۱۱]، ۱۹۹۳). مطالعات تجربی زیادی برتری مدل‌های تلاطم تصادفی را نشان داده‌اند (بایلی و مورانا[۱۲]، ۲۰۰۹؛ کلارک و دیویگ[۱۳]، ۲۰۱۱). در بین این مدل‌های تلاطم تصادفی، مدل هستون یکی از معروف‌ترین مدل‌های تلاطم تصادفی است؛ زیرا در این مدل، تلاطم قیمت دارایی ثابت نبوده بلکه از یک فرایند تصادفی تبعیت می‌کند. از ویژگی دیگر مدل هستون، وجود روش حل تحلیلی برای قیمت‌گذاری اوراق معامله‌ای است که فرض می‌شود دارایی پایهٔ آن، از فرایند هستون پیروی می‌کند. مدل هستون با تلاطم تصادفی زمان پیوسته را نخستین بار استون هستون[۱۴] در سال ۱۹۹۳ معرفی کرد (لطیفی، ۱۳۹۵). مدل تلاطم تصادفی هستون، هم‌بستگی بین بازده دارایی‌های لحظه‌ای با تلاطم شرطی را به تصویر می‌کشد و ساختار جدیدی برای قیمت‌گذاری مناسب اختیارها به‌شمار می‌رود. با این حال، مدل‌های تلاطم تصادفی زمان پیوسته، اغلب حاوی پویایی تلاطم شرطی پنهان هستند. از این رو برآورد پارامترهای تلاطم با استفاده از قیمت‌های دارایی گسسته دشوار است. برای حل این مشکل، هستون و ناندی (۲۰۰۰) یک مدل قیمت‌گذاری اختیار فرم بسته را توسعه

1. Option
2. Fischer Black
3. Myron Scholes
4. Robert Merton
5. Black - Sholes model
6 . Hull and White
7. Scott
8. Wiggins
9. Stein
10. Melino and Turnbull
11. Heston
12. Baillie and Morana
13. Clark and Davig
14. Steven Heston

دادند که در آن نوسان‌ها، از فرایند گارچ[1] تبعیت می‌کنند و یک راه‌حل فرم بسته را برای اختیار خرید اروپایی فراهم می‌آورند (وینتر و مر[2]، ۲۰۲۲).

روند حرکتی بازارهای مالی در سال‌های اخیر، نشان‌دهندهٔ پویایی غیرخطی است که سبب شکل‌گیری مطالعات متعددی در حوزهٔ سری‌های زمانی بازارهای مالی، حرکت‌های براونی و روابط بلندمدت مالی شده است. وجود روابط بلندمدت بین عناصر بازار و خودهم‌بستگی‌هایی با فواصل زمانی بلندمدت در بین متغیرهای مالی، سبب شد که از اطلاعات گذشته برای پیش‌بینی روند آتی قیمت‌ها استفاده شود (رحمانی و جعفریان، ۱۳۹۶). وجود چنین رفتارهای پویا در زمینهٔ سری‌های زمانی مالی، سبب اهمیت پیش‌بینی روندهای آتی و توسعهٔ ابزارهای مالی جدیدی در راستای مدیریت ریسک شده که توسعهٔ مشتقات مالی، از جمله قراردادهای آتی و اختیار معاملات از آن جمله است.

مدل نوسان تصادفی هستون، برای غلبه بر کاستی‌های مدل بلک شولز، به‌ویژه فرض نوسان ثابت و فرض بازده سهام لگ نرمال ایجاد شد. همچنین در این مدل، لبخند نوسان و ویژگی بازگشت به میانگین[3] نوسان‌ها را نیز در نظر می‌گیرد. مدل هستون بر اساس نه پارامتر ورودی است که عبارت‌اند از: قیمت سهام، قیمت اعمال، نرخ بهره بدون ریسک، تاریخ سررسید، نوسان اولیه، نوسان بلندمدت، میانگین بلندمدت، سرعت بازگشت به میانگین و هم‌بستگی بین قیمت سهام و نوسان‌ها. چهار پارامتر ورودی اول داده‌های بازار به‌راحتی مشاهده می‌شود و با نگاه کردن به بازار، می‌توان آن‌ها را تعیین کرد و پارامترهای دیگر می‌بایست برآورد شوند.

پیشینهٔ نظری پژوهش

قرارداد اختیار خرید قراردادی است که به دارندهٔ آن، این حق را می‌دهد تا دارایی را در تاریخ معینی و باقیمت مشخصی خریداری کند. قرارداد اختیار فروش قراردادی است که به دارندهٔ آن، حق فروش یک دارایی در تاریخ معین و باقیمت مشخص را می‌دهد. پنج عامل مهمی که قیمت اختیار معامله را تحت تأثیر قرار می‌دهند، عبارت‌اند از: ۱. قیمت جاری سهم (S)؛ ۲. قیمت اعمال[4] (K)؛ ۳. مدت‌زمان باقی‌مانده تا سررسید (T)؛ ۴. نوسان‌های قیمت سهم یا شاخص (σ)؛ ۵. نرخ بهره بدون ریسک (r).

مشهورترین مدل برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی، مدل بلک شولز نام دارد. این مدل توانست بازار قیمت‌گذاری مشتقات را با استفاده از دارایی پایه متحول کند. معادلهٔ بلک شولز، برای قیمت اختیار خریدوفروش‌های اروپایی که سود پرداخت نمی‌کنند، عبارت است از (امیری، ۱۳۹۹):

$$C = S_0 \mathrm{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathrm{N}(d_2)$$ رابطهٔ ۱)

$$P = K e^{-rT} \mathrm{N}(-d_2) - S_0 \mathrm{N}(-d_1)$$ رابطهٔ ۲)

---

1. Generalized Auto Regressive Conditional Heteroscedastic
2. Venter & Maré
۳. خاصیتی است که طبق آن، یک فرایند به بی‌نهایت میل نمی‌کند و حول یک میانگین بلندمدت خوش تعریف نوسان می‌کند.
4. Strike price

رابطهٔ ۳)
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[r + \frac{1}{2}(\sigma^2)\right]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

رابطهٔ ۴)
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[r - \frac{1}{2}(\sigma^2)\right]T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

قیمت دارایی پایه در مدل بلک شولز، از معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (رابطهٔ ۵) پیروی می‌کند.

رابطهٔ ۵)
$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t^Q$$

در این معادله، S_t قیمت سهم؛ r نرخ بهرهٔ کوتاه‌مدت؛ σ نوسان و w_t^Q فرایند براونی استاندارد تحت اندازهٔ ریسک خنثی Q است. با توجه به رابطهٔ ۵ می‌توان گفت که σ تنها پارامتر غیرقابل مشاهده در این مدل است که می‌توان آن را با استفاده از سوابق تاریخیِ تغییرات قیمت دارایی پایه، در زمان‌های $t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = t$، به‌صورت رابطهٔ ۶ برآورد کرد.

رابطهٔ ۶)
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right)^2}$$

این روش به اندازه‌گیری نوسان‌پذیری تاریخی می‌انجامد، حال آنکه هدف اندازه‌گیری نوسان در آینده است؛ بنابراین پژوهشگران عرصهٔ مالی، مقدار نوسان را با استفاده از قیمت مشتقه در بازار اندازه‌گیری می‌کنند. به بیان دقیق‌تر، اگر $P(t, S_t, K, T, r, \sigma)$ برابر قیمت اختیار فروش اروپایی با سررسید و T قیمت اعمال K در بازار و $P_{BC}(t, S_t, K, T, r, \sigma)$ تابع قیمت‌گذاری اختیار فروش اروپایی در مدل بلک شولز باشد، آنگاه نوسان به‌دست‌آمده از برابری رابطهٔ ۷ تبعیت می‌کند و نوسان ضمنی نامیده می‌شود.

رابطهٔ ۷)
$$P_{BC}(t, S_t, K, T, r, \sigma) = P(t, S_t, K, T, r, \sigma)$$

اگر نوسان ضمنی مدل در سررسیدهای متفاوت اختیار با قیمت اعمال K محاسبه شود، مقادیر متفاوتی برای نوسان ضمنی مدل به‌دست می‌آید که این با فرض ثابت بودن σ در مدل بلک شولز در تناقض است. یکی از راه‌های رفع این مشکل آن است که σ را در رابطهٔ ۵ فرایندی تصادفی در نظر بگیریم (نیسی، ملکی و رضائیان، ۱۳۹۵).

در مدل نوسان تصادفی هستون، دارایی پایه S_t از فرایند انتشار (رابطهٔ ۸) و نوسان v_t از فرایند تصادفی کاکس ـ اینگرسول ـ راس (رابطهٔ ۹) تبعیت می‌کرد، با $E[dw_t^s, dw_t^v] = \rho dt$.

رابطهٔ ۸)
$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dw_t^s$$

رابطهٔ ۹)
$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} S_t dw_t^v$$

در معادلات فوق، پارامتر v_t واریانس بلندمدت؛ θ میانگین بلندمدت؛ k بیانگر سرعت میانگین بازگشت v_t از میانگین θ؛ پارامتر σ بیانگر نوسان فرایند v_t و پارامتر μ بیانگر رانش است. w_t^s و w_t^v حرکت براونی استاندارد با ضریب

هم‌بستگی ρ هستند؛ پارامتر ρ هم‌بستگی بین دارایی پایه و نوسان را بیان می‌کند. در واقع پارامتر ρ روی سنگینی دم‌های توزیع اثر می‌گذارد، در حالی که σ بر کشیدگی تأثیر می‌گذارد (نیسی و همکاران، ۱۳۹۵). رابطهٔ ۸ نشان می‌دهد که قیمت سهام از فرایند تصادفی پیروی می‌کند. همچنین رابطهٔ ۹ نشان می‌دهد که نوسان‌ها از فرایند تصادفی پیروی می‌کنند و دارای ویژگی بازگشت به میانگین هستند.

یکی از نارسایی‌های مدل هستون ناهم‌پوشانی نوسان‌های هم‌سو با نگاه بازار، به‌ویژه در سررسیدهای کوتاه‌مدت است. همچنین مدل هستون به‌دلیل در نظر نگرفتن اتفاق‌های نادر در بازار، یعنی اتفاق‌هایی از قبیل بحران‌های مالی یا رسیدن اطلاعات جدید تأثیرگذار به بازار، به بازنگری جدی نیاز داشت (دسترنج، صاحبی فرد، عبدالباقی و لطیفی، ۱۳۹۹). در سال ۲۰۰۰، هستون و ناندی مدل هستون ناندی ـ گارچ[1] را ارائه کردند که یک فرمول قیمت‌گذاری فرم بسته را برای اختیارهای اروپایی ارائه می‌دهد. این مدل در بسیاری از مفروضات خود، شبیه مدل هستون پیوسته از سال ۱۹۹۳ اما ساده‌تر از آن است. برای پیاده‌سازی با توجه به داده‌های قابل مشاهده، تفاوت اصلی بین مدل هستون ناندی ـ گارچ و مدل بلک شولز در این دیدگاه است که از کدام واریانس هنگام قیمت‌گذاری گزینه‌ها استفاده شود که فرض در مدل هستون ناندی ـ گارچ، توزیع غیرطبیعی بازده و نوسان‌های تصادفی، واقعی‌تر در نظر گرفته می‌شود. نتیجهٔ مطالعهٔ آن‌ها، بهبود ارزش‌گذاری هر دو اختیار خرید و فروش در مقایسه با مدل بلک شولز است (هستون و ناندی، ۲۰۰۰).

پیشینهٔ تجربی پژوهش

حرکت براونی هندسی برای شبیه‌سازی قیمت یک سهم استفاده می‌شود. بلک و شولز حرکت براونی هندسی را برای مدل‌سازی قیمت اوراق مشتقه، به‌عنوان معادله دیفرانسیل تصادفی حاکم بر رفتار قیمت دارای پایه در نظر گرفتند. حرکت براونی هندسی بیان می‌کند که توزیع بازده دارایی‌ها نرمال است و این برخلاف شواهد زیادی است که نشان می‌دهد اکثر بازده دارایی‌ها، دارای چولگی و کشیدگی ناهماهنگ با توزیع نرمال بوده و دارای دنباله‌های پهن[2] است. مشکل دوم فرض ثابت بودن نوسان‌هاست، در حالی‌که وجود خوشه‌بندی[3] نوسان‌ها نشان از وابستگی نوسان‌ها به مقادیر قبلی خود و غیرثابت بودن آن است. همچنین بررسی تاریخی قیمت سهام، وجود گسستگی در فرایند قیمت را نشان می‌دهد که بیان می‌کند فرایند قیمت را نمی‌توان فرایندی پیوسته دانست و در برخی موارد جهش‌هایی در این فرایند ملاحظه می‌شود (اسکوتنس[4]، ۲۰۰۳). این ضعف‌ها تعدادی جایگزین برای رویکرد بلک شولز برای قیمت‌گذاری اختیار ایجاد کرده است، مانند مدل واریانس کشش ثابت که به‌طور تجربی توسط چن و همکاران (۲۰۰۷) آزمایش شده است. رویکرد دیگر، رویکرد بکوس، فورسی، لی و وو[5] (۱۹۹۷) است که گرام چارلیه[6] (GC) نام دارد؛ اما این مدل همچنان محدودیت‌هایی دارد. برای مثال، مشابه مدل بلک شولز، همچنان نوسان ثابت را فرض در نظر می‌گیرد. سومین رویکرد،

1. Heston-Nandi GARCH
2 .Fat Tail
3 .Volatility Clustering
4.Schoutnes
5. Backus, Foresi, Li & Wu
6. Gram-charlier

مدل نوسان‌های تصادفی هستون (۱۹۹۳) است که به نوسان‌ها اجازه می‌دهد تا از فرایند تصادفی کاکس ـ اینگرسول ـ راس[1] (۱۹۸۵) پیروی کند و در نهایت رویکرد فرایند GARCH دارای راه‌حل تحلیلی از هستون و نالدی (۲۰۰۰) است. بازده دارایی ممکن است جهش‌هایی را تجربه کند که برای نمونه می‌توان از یافته‌های چان، هوانگ، لی و لو[2] (۲۰۰۷) نام برد. همهٔ این مدل‌ها امکان چولگی و کشیدگی بیش از حد را فراهم می‌کنند و معرف طیفی از رویکردهای جایگزینی است که برای رفع محدودیت‌های مدل بلک ـ شولز پیشنهاد شده است.

یکی از محبوب‌ترین تغییرات ایجاد شده در پی رفع ایرادهای مدل بلک شولز این بود که اجازه دهیم تلاطم از فرایند تصادفی پیروی کند (الوس و یانگ[3]، ۲۰۱۴). مدل بلک شولز ثابت بودن تلاطم دارایی پایه را به‌عنوان فرض در نظر می‌گیرد، در صورتی که مدل تلاطم تصادفی، قیمت دارایی پایه را به‌عنوان متغیرتصادفی در نظر می‌گیرد. در این حالت، پویایی این روند تصادفی می تواند توسط برخی فرایندهای دیگر صورت گیرد (تائو و تائو[4]، ۲۰۱۲). در همان زمان که استفاده از مدل‌های تلاطم تصادفی رواج یافت، پژوهشگران به این نتیجه رسیدند که پیوسته‌بودن مسیر فرایند قیمت‌ها، در تطبیق نتایج مدل با داده‌های واقعی اشکال‌هایی ایجاد می‌کند (فلورسکو، ماریانی و سیویل[5]، ۲۰۱۴). لونیس پاپانتونیس[6] (۲۰۱۶) به بررسی نوسان قیمت اختیار در قراردادهای اختیار معامله، به سبک اروپایی به‌روش گارچ پرداخته است. رودیگر کیسل و راهه[7] (۲۰۱۷) نیز به بررسی قیمت‌گذاری اختیار معامله، تحت مدل‌های هستون و بلک شولز با پیش‌بینی نوسان‌ها به روش گارچ پرداختند.

هریس[8] (۲۰۱۸) به بررسی قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله به سبک اروپایی تحت مدل بلک شولز پرداخته است. پن، وانگ، لیو و ونگ[9] (۲۰۱۹) و ژانگ و ژانگ[10] (۲۰۲۰) از جمله افرادی هستند که از مدل‌های گارچ برای قیمت‌گذاری اختیار خرید استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند این مدل‌ها منجر به بهبود عملکرد پیش‌بینی نوسان‌ها و افزایش دقت قیمت‌گذاری خواهند شد. ایلتوزر[11] نیز در سال ۲۰۲۲ عملکرد مدل‌های شبکه عصبی و بلک شولز را در قیمت‌گذاری اختیار خرید با رویکردهای مختلف نوسان پیش‌بینی و مقایسه کرد.

مهردوست و صابر (۱۳۹۲) در مقاله‌ای تحت عنوان قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش، براساس مدل هستون مضاعف و اضافه‌کردن پرش به فرایند دارایی پایه، به مدلی با عنوان هستون مضاعف پرشی دست یافتند. نیسی و پیمانی (۱۳۹۳) به مدل‌سازی شاخص بورس اوراق بهادار تهران پرداخته و عملکرد مدل هستون را مورد سنجش قرار دادند که نتایج حاکی از عملکرد نسبی بهتر مدل هستون است. در ادامه نیسی و همکاران (۱۳۹۵) پس از

1. Cox–Ingersoll–Ross
2. Chan, Hung, Lee & Lu
3. Alòs, & Yang
4. Thao & Thao
5. Florescu, Mariani & Sewell
6. Ioannis Papantonis
7. Kiesel & Rahe
8. Harris
9. Pan, Wang, Liu & Wang
10. Zhang
11. İltüzer

بررسی مزیت‌ها و نارسایی‌های مدل هستون کلاسیک، به این نتیجه رسیدند که مدل هستون در سررسیدهای کوتاه‌مدت، توانایی هم‌پوشانی کامل تلاطم ضمنی بازارهای مالی را ندارد. از این رو با اضافه‌کردن یک فرایند تلاطم تصادفی دیگر به مدل هستون، به مدلی با عنوان هستون مضاعف دست یافتند.

نبوی چاشمی و بهرامزاده (۱۳۹۷) ضمن اشاره به ایرادهای مدل بلک شولز، از جمله توزیع لگاریتم بازده دارایی نرمال و تلاطم ثابت، فرایندهای جدیدی مبتنی بر فرایند معروف و شناخته‌شدهٔ لوی، برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار ارائه کردند. نتایج این پژوهش نشان داد که فرایند لوی نسبت به روش بلک شولز، کارایی و توان بیشتری در قیمت‌گذاری اختیار معامله دارد.

جنابی و دهمرده قلعه نو (۱۳۹۸) با استفاده از مدل هستون کسری پرشی، ضمن معرفی مدل تلاطم تصادفی هستون با در نظر گرفتن فرایند پرش و ویژگی حافظهٔ بلندمدت قیمت‌ها، مدل جدیدی برای قیمت‌گذاری اوراق تبعی ارائه کردند و در ادامه، کارایی این مدل با دو مدل معروف نوسان‌های تصادفی هستون و بیتز مقایسه و در خصوص نتایج آن‌ها بحث کردند. نتایج مقایسه آن‌ها نشان داد که ارزش‌گذاری توسط مدل هستون کسری پرشی به نتایج واقعی قیمت اوراق تبعی نزدیک‌تر است و در مقایسه با دو مدل معروف نوسان‌های تصادفی، هستون و بیتز، عملکرد بهتری دارد. در جدیدترین پژوهش‌های داخلی فتحی و فاضلیان (۱۴۰۱) فراتحلیلی بر کارایی بازار قراردادهای اختیار و استراتژی‌های آربیتراژ انجام دادند.

روش‌شناسی پژوهش

مدل‌های واریانس شرطی تاکنون مهم‌ترین و پرکاربردترین روش برای تجزیه‌وتحلیل و پیش‌بینی سری‌های زمانی مالی شناخته شده‌اند. اولین نمونه از مدل‌های آرچ مدل ARCH(q)، تابعی از مربع جملات خطای q دوره ماقبل خود است (شاهمرادی و زنگنه، ۱۳۸۶). در مدل GARCH(p,q)، معادله واریانس شرطی علاوه بر توان دوم وقفه‌های پسماندها، به p وقفه گذشته واریانس‌های تحقق‌یافته نیز وابسته است. مدل گارچ نسبت به مدل‌های ARCH در عمل تعداد پارامترهای کمتری دارند مدل GARCH(p,q) به‌صورت زیر است:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$ رابطهٔ ۱۰

که در آن $\{\varepsilon_t\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی[1] با میانگین صفر و واریانس ۱ ، $\alpha_0 > 0$، $\alpha_i \geq 0$ ، $\beta_j \geq 0$ ، $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$ و $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_j) < 1$ است.

مدل GARCH (۱,۱) معمول‌ترین ساختار مورداستفاده برای بسیاری ازسری‌های زمانی مالی است (تسای[2]، ۲۰۱۰). فرض اصلی مدل مشتق شده توسط هستون وناندی (۲۰۰۰) این است که دینامیک قیمت دارایی تحت معیار دنیای واقعی، توسط رابطهٔ ۱۱ محاسبه می‌شود.

1. Independent and identically distributed
2. Tsay

رابطۀ ۱۱) $$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r + \lambda h_t + \sqrt{h_t} Z_t$$

که در آن، S_t قیمت دارایی در آن زمان است؛ r نرخ ثابت بدون ریسک؛ λ واحد حق بیمه ریسک است و Z_t متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد است. علاوه بر این، واریانس شرطی با استفاده از رابطۀ ۱۲ مدل‌سازی می‌شود:

رابطۀ ۱۲) $$h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 \left(Z_{t-1} - \delta_1 \sqrt{h_{t-1}}\right)^2$$

تابع قیمت تولید شده توسط فیلتر $\mathcal{F}$ با احتمال $\mathbb{P}$ به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

رابطۀ ۱۳) $$F(t, \phi) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_T \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

تابع قیمت تولید شده به پارامترها و متغیرهای حالت وابسته است؛ با این حال، برای راحتی نمادها در نظر گرفته نشده است. هستون وناندی (۲۰۰۰) نشان می‌دهند که دینامیک قیمت دارایی تحت اندازه ریسک خنثی Q در چارچوب بلک شولز توسط رابطه زیر داده شده است:

رابطۀ ۱۴) $$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} Z_t^*$$

که در آن

رابطۀ ۱۵) $$h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 \left(Z_{t-1}^* - \delta_1^* \sqrt{h_{t-1}}\right)^2$$

رابطۀ ۱۶) $$Z_t^* = Z_t + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{h_t}$$

رابطۀ ۱۷) $$\delta_1^* = \delta_1 + \lambda + \frac{1}{2}$$

در نهایت تابع قیمت تولید شده توسط فیلتر $\mathcal{F}$ با احتمال $\mathbb{P}$ به فرم زیر تبدیل می‌شود:

رابطۀ ۱۸) $$F(t, \phi) = S_t \exp\{A_{BS}(t, \phi) + B_{BS}(t, \phi) h_{t+1}\}$$

که در آن

رابطۀ ۱۹) $$A_{BS}(t, \phi) = \phi r + A_{BS}(t+1, \phi) + \alpha_0 B_{BS}(t+1, \phi) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - 2\alpha_1 B_{BS}(t+1, \phi)\right)$$

رابطۀ ۲۰) $$A_{BS}(t, \phi) = \beta_1 B_{BS}(t+1, \phi) - \frac{1}{2} \delta_1^2 + \phi(\delta_1 + \lambda) + \frac{\phi(\delta_1 + \lambda)^2}{2\left(1 - 2\alpha_1 B_{BS}(t+1, \phi)\right)}$$

این ضرایب را می‌توان به‌صورت بازگشتی با استفاده از شرایط پایانی محاسبه کرد.

رابطهٔ (۲۱)
$$A_{BS}(T,\phi) = A_{BS}(T,\phi) = 0$$

هستون و ناندی (۲۰۰۰) توضیح می‌دهند که تابع قیمت لحظه‌ای، تابعی از لگاریتم لحظه‌ای قیمت است. بنـابراین، با استفاده از دینامیک ریسک خنثی، می‌توان یک فرمول فرم بسته برای یک اختیار خرید اروپـایی اسـتخراج کـرد. مـدل قیمت هستون ـ ناندی یک اختیار اروپایی در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه. قیمت اختیار خرید اروپایی در زمان t توسط رابطه ۲۲ ارائه می‌شود.

رابطهٔ (۲۲)
$$V_t = \frac{1}{2}S_t + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}F(t,i\phi+1)}{i\phi}d\phi\right] - Ke^{-r(T-t)}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{K^{-i\phi}F(t,i\phi)}{i\phi}d\phi\right]\Big)$$

اثبات. برای اثبات به مقاله هستون ـ ناندی در سال ۲۰۰۰ مراجعه شود.

برای اعتبارسنجی هریک از مدل‌هـا از شـاخص جـذر میـانگین مجـذور خطـا[1]، یعنـی $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{C}_i - C_i)^2}{n}}$ استفاده می‌شود که $\hat{C}_i$ نشان‌دهندهٔ قیمت پایانی اختیار در بازار و C_i نشان‌دهنده قیمـت محاسـبه‌شـده اختیـار و n تعـداد مشاهدات است.

یافته‌های پژوهش

در این پژوهش با توجه به قیمت پایانی سهام ایران خودرو در بازار بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۱۳۹۹ /۹/۱ تا ۱۴۰۱ /۹/۲۳، نوسان‌پذیری قیمت سهم ایران‌خودرو به روش داده‌های تاریخی و نوسان ضمنی برآورد می‌شود. همچنـین قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک شولز، هستون و هستون ناندی محاسبه و در نهایت با قیمت بازار مقایسه شده است. شایان ذکر است برای محاسبه و تحلیل داده‌ها از نرم‌افزار R استفاده شده است.

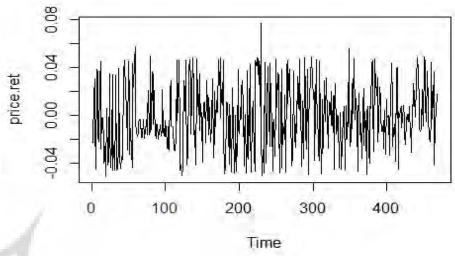
در ادامهٔ مدل سری زمانی با استفاده از داده‌های قیمت پایانی سهام ایران‌خودرو در بازار بورس اوراق بهـادار تهـران توضیح داده می‌شود. برای انتخاب مدل مناسب برای داده‌ها از الگویی باکس وجنکینس[2] استفاده می‌شود کـه اسـاس آن در سه مرحله است: تعیین مدل، برآورد و آزمون پارامترها و کاربرد مدل برای پیش‌بینی. یکی از ویژگی‌های اصلی و مهم در سری زمانی، مانایی است. یکی از پرکاربردترین روش‌های بررسی مانایی، انجام آزمون دیکی ـ فولر تعمیم‌یافته[3] است. به‌کمک این آزمون آماری می‌توان مانایی یک سری زمانی را بررسی کرد. همچنین از آزمون کویاتکوفسکی ـ فیلیـپس ـ اشمیت ـ شین[4] هم برای بررسی مانایی استفاده می‌کـنیم کـه فرضـیه‌هـای آمـاری آن بـرعکس آزمـون دیکـی ـ فـولر

1. Root Mean Square Error
2. Jenkins & Box
3. Augmented Dickey–Fuller test
4. Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) tests

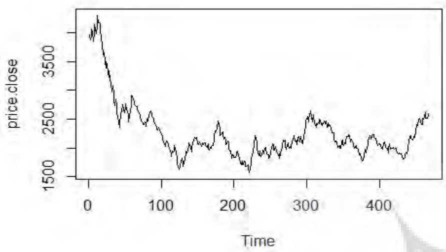
تعمیم‌یافته است. با مدنظر قرار دادن مقدار احتمال می‌توان در مورد مانایی سری زمانی تصمیم گرفت. بـازدهی روزانـه از طریق تفاضل‌گیری لگاریتم قیمت در دو دوره متوالی محاسبه می‌شود (رابطهٔ ۲۳).

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$ رابطهٔ ۲۳)

به‌طوری که r_t بیانگر بازدهی سهام در زمان t و P_t و P_{t-1} بیانگر قیمت‌ها در زمان t و $t-1$ است. سری زمانی متناظر با مقادیر روزانه سهام ایران خودرو و بازدهی آن در شکل ۱و ۲ نشان داده شده است.



شکل ۱. قیمت پایانی سهم ایران خودرو



شکل ۲. بازدهی سهم ایران خودرو

نظر به اینکه عملکرد مدل‌های مختلف سری زمانی، با توجه به داده‌های مختلف می‌تواند تحـت تـأثیر قـرار گیـرد، پیش از انجام هر اقدامی، به بررسی آماره‌های توصیفی متغیرها در قالب جدول ۱ پرداخته می‌شود. بر اسـاس نتـایج ارائـه شده در جدول ۱، میانگین بازده سهام عددی منفی و بسیار نزدیک به صفر است. همچنین این متغیر چـولگی مثبـت دارد که نشان می‌دهد بازده مثبت محتمل‌تر از بازده منفی است. ضریب کشیدگی نشان‌دهندهٔ کشیدگی نسبت به توزیع نرمال است.

جدول ۱. آماره‌های توصیفی

آماره توصیفی	میانگین	حداکثر	حداقل	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی
بازده روزانه سهم	−۰/۰۰۰۹۱	۰/۰۷۶۷۱	−۰/۰۵۱۱۶	۰/۰۲۷۲۲	۰/۱۵۳۹۸	۲/۲۸۵۶۳

آزمون نرمال بودن توزیع سری بازده روزانه سهم ایران‌خودرو (آزمون جاک ـ بـرا[1] و آزمـون شـاپیرو ـ ویلـک[2]) در جدول ۲ ارائه شده است. این آزمون‌ها بیانگر غیرنرمال بـودن تـابع توزیـع چگـالی احتمـال سـری بـازده روزانـه سـهم ایران‌خودرو است. با توجه به اینکه مقدار احتمال آزمون کمتر از ۰/۰۵ است؛ بنابراین فرض غیرنرمال بودن توزیع داده‌هـا تأیید می‌شود.

1. Jarque-Bera test
2. Shapiro-Wilk test

جدول ۲. آزمون نرمال بودن

متغیر پژوهش	آزمون جاک ـ برا		آزمون شاپیرو ـ ویلک		وضعیت نرمال بودن
	آماره آزمون	سطح معناداری	آماره آزمون	سطح معناداری	
سری بازده روزانه سهم	۱۱/۷۷۶	۰/۰۰۲۷۷	۰/۹۷۵۷۱	۰/۰۰۰۰۰۰۵	غیرنرمال

در ادامه برای بررسی نوع توزیع، از آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف[1] استفاده می‌شود که بازده روزانه سهم با توزیع تی استودنت[2] مقایسه می‌شود.

جدول ۳. آزمون تعیین نوع توزیع داده‌ها

متغیر پژوهش	آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف	
	آماره آزمون	سطح معناداری
سری بازده روزانه سهم	۰/۰۷۲۸۰	۰/۱۶۸۲

با توجه به جدول ۳ و اینکه مقدار احتمال آزمون بیشتر از ۰/۰۵است، فرض صفر آزمون مبنی بر تساوی دو توزیع تأیید می‌شود و بازده روزانه سهم دارای توزیع تی استودنت است.

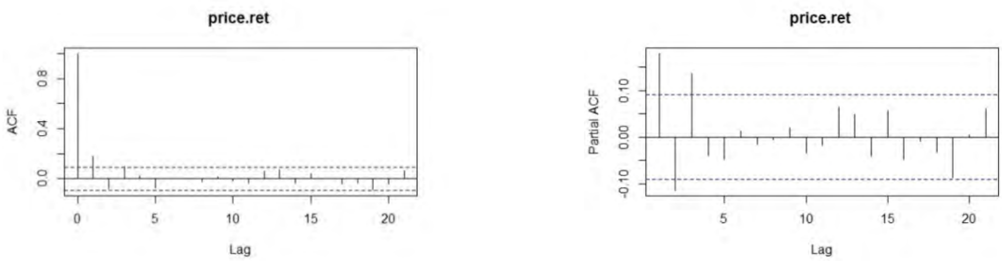
در ادامه قبل از مدل‌سازی پژوهش، برای جلوگیری از انجام رگرسیون‌های کاذب، مانایی توسط دو نوع آزمون مانایی آزمون دیکی ـ فولر تعمیم‌یافته و کویاتکوفسکی ـ فیلیپس ـ اشمیت ـ شین بررسی شده است.

جدول ٤. آزمون مانایی

متغیرتحقیق	آزمون دیکی ـ فولر تعمیم یافته		آزمون KPSS		وضعیت مانایی
	آماره آزمون	سطح معناداری	آماره آزمون	سطح معناداری	
سری بازده روزانه سهم	‎-۷/۸۸۹۵	۰/۰۱	۰/۰۴۶۰۲۷	۰/۱	مانا

فرض صفر در آزمون دیکی ـ فولر تعمیم‌یافته نامانایی و فرض جایگزین مانایی است. در آزمون کویاتکوفسکی ـ فیلیپس ـ اشمیت ـ شین فرض صفر مانایی است و فرض جایگزین نامانایی است که عکس آزمون دیکی ـ فولر تعمیم‌یافته است. با توجه به جدول ۳ دیده می‌شود که خودسری خود سهم ناماناست؛ ولی سری بازده به‌علت لگاریتم تفاضلی ماناست. با توجه به نمودارهای خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی در شکل ۴ دیده می‌شود که ضرایب خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی معنادار می‌باشد.

1. Kolmogorov-Smirnov test
2. Student's *t*-distribution



شکل ۳. خودهم‌بستگی و خودهم‌بستگی جزئی بازدهی سهام ایران‌خودرو

همچنین می‌توان از طریق آزمون آماره Q لیانگ ـ باکس[1] به بررسی ضرورت مدل کـردن معادلـه میـانگین و نیـز وجود نوسان‌های خوشه‌ای در داده‌ها پرداخت. آزمون را بر بازده و مجذور باقی‌مانده بازده اعمال می‌کنیم و در این آزمون، فرض صفر دال بر اینکه هم‌بستگی سریالی بین داده‌ها وجود ندارد.

جدول ۵. نتایج آزمون آماره Q لیانگ -باکس

	مجذور باقی‌مانده بازده	باقی‌مانده بازده	مجذور بازده	بازده
p-value	۰/۰۰۰۱۵	۰/۵۰۶۷	۰	۰/۰۰۷۷۵

با توجه به جدول ۵ دیده می‌شود که هـم‌بسـتگی سـریالی بـین داده‌هـا در بـازده تأییـد مـی‌شـود. بنـابراین مـدل ARMA(1,1) برای سری بازده با میانگین صفر به‌صورت زیر است.

$$y_t = -0.3742\, y_{t-1} - 0.6002\varepsilon_{t-1} + \varepsilon \qquad \text{(رابطهٔ ۲۴)}$$

همچنین از مقدار سطح معنادار باقی‌مانده بازده دیده می‌شود که هم‌بستگی سریالی بین داده‌ها در باقی‌مانـده بـازده نوفه سفید است و مدل آرما به‌خوبی برازش شده است.

همچنین هم‌بستگی سریالی بین داده‌ها در مجذور بازده ومجذور باقی‌مانده بازده تأیید می‌شود و اثرهای آرچ دیـده می‌شود. به بیان دیگر، پدیدهٔ نوسان‌های خوشه‌ای در داده‌های مربوط به بازدهی روزانه مشاهده مـی‌شـود و مـی‌تـوان از مدل‌های گارچ برای تخمین نوسان استفاده کرد. همچنین برای آزمـون وجـود اثرهـای آرچ[2]، از آزمـون معمـول ضـریب لاگرانژ انگل استفاده شده است که برای انجام آن، مربع بازدهی‌ها را روی وقفه‌های آن رگرسیون می‌کنیم. شـایان ذکـر است که داده‌ها باید دارای کلاس سری زمانی باشند. همان طور که از جدول ۶ مشخص است، فرض صفر آزمون مبنـی بر عدم وجود اثرات آرچ تأیید می‌شود؛ از این رو نتیجه می‌گیریم که در بازده متغیرها اثرهای آرچ وجود ندارد.

1. Ljung–Box
2. ARCH

جدول ٦. نتایج آزمون تستARCH

p-value	آمارهF
۰/۰۰۰۰۵	۵/۵۸۹

مدل گارچ داده‌های بازده به‌صورت زیر است.

رابطهٔ ۲۵) $\sigma_t^2 = 0.000033 + 0.051821\, a_{t-1}^2 + 0.90114\sigma_{t-1}^2$

برای تخمین پارامترهای مدل هستون در نرم‌افزار R، از روش حداکثر درست‌نمایی[1] استفاده شده است. مسئله اصلی استفاده از روش درست‌نمایی، این است که تابع درست‌نمایی در مدل هستون را نمی‌توان با استفاده از روش‌های تحلیلی بیشینه کرد و برای به‌دست‌آوردن مقدار بهینهٔ تخمین پارامترها، لازم است از روش‌های عددی استفاده شود. بدین منظور ابتدا شرط‌های زیر برای پارامترهای مدل هستون در نظر گرفته می‌شود:

۱. مقدار اولیهٔ V_0 همیشه مثبت است و نرخ بازگشت به میانگین (K)، میانگین بلندمدت (θ) و نوسان‌های واریانس (σ) همگی مقادیر مثبت هستند.

۲. $2\kappa\theta > \sigma^2$ که شرط فلر[2] شناخته می‌شود.

در جدول ۷ تخمین پارامترهای مدل هستون ارائه شده است.

جدول ۷. تخمین پارامترهای مدل هستون

پارامتر	v_t	σ	ρ	k	θ
تخمین	۰/۰۹۹۹۵	۰/۰۰۰۱۵	−۰/۰۰۰۲۱	۱/۰۰۰۱۱	۰/۰۰۰۱۴

در جدول ۸ تخمین پارامترهای مدل هستون نانْدی بعد از کالیبره‌شدن ارائه شده است. همان طور که دیده می‌شود، در مقایسه با رابطه ۲۴ مقادیر تخمین‌زده شده متفاوت است.

جدول ۸. تخمین پارامترهای مدل هستون نانْدی

پارامتر	δ_1	β_1	α_1	α_0	λ
تخمین	۰	۰/۰۹۶۵	۰/۰۰۰۰۴۹	۰/۰۰۰۷۷	-۱/۰۵۷

مقدار نوسان محاسبه‌شده به روش تاریخی، برابر ۰/۴۳۲۱۱۸ و پیش‌بینی نوسان ضمنی در سه حالت باارزش (ITM)، قیمت بازار (ATM) و بی‌ارزش (OTM) در جدول ۹ نشان داده شده است که از آن در محاسبه قیمت اختیار خرید در مدل بلک شولز و مدل هستون استفاده می‌شود. شایان ذکر است که از شاخص خطا RMSE برای محاسبه خطا استفاده شده است.

1. Maximum likelihood estimation
2. Feller

جدول ۹. پیش‌بینی نوسان ضمنی

	۹٤ روز تا سررسید	٤٦ روز تا سررسید	۳٤ روز تا سررسید
ضرر (OTM)	۰/۶۷۱	۰/۷۷۱	۰/۶۹۳
بی‌تفاوت (ATM)	۰/۶۹۱	۰/۷۴۶	۰/۸۰۷
حالت سوددهی (ITM)	۰/۸۴۴	۰/۸۸۴	۰/۹۶۸

جدول ۱۰. قیمت اختیار خرید ایران‌خودرو در مدل بلک شولز، هستون و هستون نائدی با نوسان تاریخی

تاریخ اعمال	قیمت سهم	قیمت اعمال	قیمت بازار	بلک شولز		هستون		هستون نائدی	
				قیمت	خطا	قیمت	خطا	قیمت	خطا
۳۴	۲۵۹۲	۱۴۰۰	۱۲۳۵	۱۲۲۵/۵۹۲	۹/۴۰۷	۱۲۲۵/۵۹۱	۹/۴۰۹	۱۲۲۵/۶۰۳	۹/۴۰۰
۳۴	۲۵۹۲	۲۶۰۰	۳۳۰	۱۹۰/۸۷۱	۱۳۹/۱۲۸	۱۷۶/۵۸۱	۱۵۳/۴۱۸	۲۰۷/۷۹۰	۱۲۲/۲۰۹
۳۴	۲۵۹۲	۲۸۰۰	۲۰۵	۱۰۷/۲۴۸	۹۷/۷۵۱	۹۳/۱۵۹	۱۱۱/۸۴۰	۱۲۴/۱۱۷	۸۰/۸۸۲
۴۶	۲۵۹۲	۲۰۰۰	۷۶۲	۶۶۶/۶۳۲	۹۵/۳۶۷	۶۶۵/۴۷۵	۹۶/۵۲۴	۶۷۲/۲۹۷	۸۹/۷۰۲
۴۶	۲۵۹۲	۲۶۰۰	۳۶۳	۲۲۸/۲۹۲	۱۳۴/۷۰۷	۲۲۳/۵۸۷	۱۳۹/۴۱۲	۲۴۷/۸۳۷	۱۱۵/۱۶۲
۴۶	۲۵۹۲	۲۸۰۰	۲۹۱	۱۴۱/۷۸۸	۱۴۹/۲۱۱	۱۳۶/۹۸۴	۱۵۴/۰۱۵	۱۶۱/۸۰۷	۱۲۹/۱۹۲
۹۴	۲۵۹۲	۲۰۰۰	۹۰۰	۷۵۱/۹۰۸	۱۴۸/۰۹۱	۷۶۶/۶۰۴	۱۳۳/۳۹۵	۷۶۴/۱۳۴	۱۳۵/۸۶۵
۹۴	۲۵۹۲	۲۶۰۰	۵۰۵	۳۵۱/۷۷۴	۱۵۳/۲۲۵	۳۸۳/۹۳۳	۱۲۱/۰۶۶	۳۷۸/۷۹۲	۱۲۶/۲۰۷
۹۴	۲۵۹۲	۲۸۰۰	۴۱۰	۲۶۰/۵۹۹	۱۴۹/۴۰۰	۲۹۴/۸۳۵	۱۱۵/۱۶۵	۲۸۹/۳۸۶	۱۲۰/۶۱۳

جدول ۱۱. قیمت اختیار خرید ایران‌خودرو در مدل بلک شولز، هستون و هستون نائدی با نوسان ضمنی

تاریخ اعمال	قیمت سهم	قیمت اعمال	قیمت بازار	بلک شولز		هستون		هستون نائدی	
				قیمت	خطا	قیمت	خطا	قیمت	خطا
۳۴	۲۵۹۲	۱۴۰۰	۱۲۳۵	۱۲۳۵/۰۱۳	۰/۰۱۲	۱۲۳۴/۳۲۹	۰/۶۷۰	۱۲۲۵/۶۰۳	۹/۴۰۰
۳۴	۲۵۹۲	۲۶۰۰	۳۳۰	۳۳۰/۱۵۵	۰/۱۵۵	۳۵۴/۴۶۱	۲۴/۴۴۷	۲۰۷/۷۹۰	۱۲۲/۲۰۹
۳۴	۲۵۹۲	۲۸۰۰	۲۰۵	۲۰۵/۰۰۱	۰/۰۰۱	۲۴۹/۰۴۹	۴۴/۰۴۹	۱۲۴/۱۱۷	۸۰/۸۸۲
۴۶	۲۵۹۲	۲۰۰۰	۷۶۲	۷۶۲/۰۶۶	۰/۰۶۶	۷۶۷/۵۶۵	۵/۵۶۵	۶۷۲/۲۹	۸۹/۷۰۲
۴۶	۲۵۹۲	۲۶۰۰	۳۶۳	۳۶۲/۷۹۵	۰/۲۰۴	۳۹۹/۱۰۲	۳۶/۱۰۲	۲۴۷/۸۳۷	۱۱۵/۱۶۲
۴۶	۲۵۹۲	۲۸۰۰	۲۹۱	۲۹۱/۱۳۷	۰/۱۳۷	۳۲۳/۶۱۰	۳۲/۶۱۰	۱۶۱/۸۰۷	۱۲۹/۱۹۲
۹۴	۲۵۹۲	۲۰۰۰	۹۰۰	۸۹۹/۹۰۰	۰/۰۹۹	۹۰۲/۰۶۸	۲/۰۶۸	۷۶۴/۱۳۴	۱۳۸/۵۰۵
۹۴	۲۵۹۲	۲۶۰۰	۵۰۵	۵۰۴/۹۱۸	۰/۰۸۲	۵۵۱/۷۰۶	۴۶/۷۰۶	۳۷۸/۷۹۲	۱۲۶/۲۰۷
۹۴	۲۵۹۲	۲۸۰۰	۴۱۰	۴۰۹/۹۸۷	۰/۰۱۲	۴۶۴/۷۱۴	۵۴/۷۱۴	۲۸۹/۳۸۶	۱۲۰/۶۱۳

در جدول‌های ۱۰ و ۱۱ به مقایسهٔ قیمت‌گذاری مدل بلک شولز، مدل هستون و مدل هستون ناندی در سه حالت در سود[1]، بی‌تفاوت[2] و در ضرر[3]، به‌ترتیب در نوسان تاریخی و نوسان ضمنی پرداخته می‌شود. در هر سه مدل در کنار محاسبهٔ قیمت اختیار، خطای قیمت محاسبه شده در مقایسه با قیمت بازار ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که خطای محاسبه شده در کوتاه‌مدت (۳۴ روزه) در مقایسه با بلندمدت بسیار کمتر (۹۴ روزه) است. همچنین با مقایسهٔ قیمت به‌دست‌آمده در سه روش ذکر شده، برتری مدل هستون ناندی در کلیه حالات مشخص است.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

درمجموع پژوهش‌های داخلی محدودی در خصوص قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی صورت پذیرفته است و پژوهش‌های موجود، فقط روی یکی از مدل بلک شولز یا هستون متمرکزند. برای نمونه مهردوست و صابر (۱۳۹۲) براساس مدل هستون مضاعف و اضافه‌کردن پرش به فرایند دارایی پایه، به مدلی با عنوان هستون مضاعف پرشی دست یافتند یا نیسی و همکاران (۱۳۹۳و ۱۳۹۵) عملکرد مدل هستون را به‌تنهایی سنجیدند.

هدف اصلی این پژوهش، تعیین قیمت اختیار خرید اروپایی در داده‌های غیرنرمال است. در این راستا به تعیین قیمت اختیار در سه مدل بلک شولز، هستون و هستون ناندی پرداخته شد. نتایج این پژوهش نشان داد که مدل هستون ناندی، نسبت به مدل بلک شولز و هستون، به‌ویژه در بلندمدت انعطاف‌پذیری بیشتری دارد. پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی، اثر چولگی و کشیدگی غیرنرمال در داده‌ها برای مدل هستون ناندی و مرتون با پرش به‌کار گرفته شود و نتایج با نتایج این پژوهش مقایسه شود.

منابع

امیری، مهدیه (۱۳۹۹). قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با روش‌های بلک شولز، بونس و دو جمله‌ای (مطالعه موردی: قراردادهای اختیار معامله سکه طلا در بورس کالای ایران). *فصلنامه بورس اوراق بهادار*، ۱۳(۵۰)، ۱۴۱ -۱۷۰.

اسلامی بیدگلی، غلامرضا و سرافراز اردکانی، حسین (۱۳۷۵). تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله. *تحقیقات مالی*، ۳(۱۱) ۱۷۶-۱۴۸.

جنابی، امید و دهمرده قلعه نو، نظر (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون کسری ـ پرشی. *تحقیقات مالی*، ۲۱(۳) ۳۹۲-۴۱۶.

دسترنج، الهام؛ صاحبی فرد، حسین؛ عبدالباقی، عبدالمجید؛ لطیفی، رقیه (۱۳۹۹). مقایسهٔ قیمت‌گذاری اختیار معامله سقف و توانی در جلوگیری از فضای آربیتراژی: شواهدی از شرایط مبتنی‌بر نوسانات تصادفی، دو پرش و اندازه شدت تصادفی، *نشریه مدیریت دارایی و تأمین مالی*، ۸(۲) ۸۹-۱۰۳.

رحمانی، مرتضی؛ جعفریان، ناهید (۱۳۹۶). بررسی مدل بلک شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه‌های معاملاتی. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۸ (۳۲)، ۴۳-۶۲.

1. ITM
2. ATM
3. OTM

شاهمرادی، اصغر؛ زنگنه، محمد (۱۳۸۶). محاسبه ارزش در معرض خطر برای شاخص‌های عمده بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از روش پارامتریک. *مجله تحقیقات اقتصادی*، (۲)۴۲.

فتحی، سعید و فاضلیان، زینب (۱۴۰۱). فراتحلیلی بر کارایی بازار قراردادهای اختیار و استراتژی‌های آربیتراژ. *تحقیقات مالی*، ۲۴(۳)، ۳۲۹- ۳۵۲.

لطیفی، رقیه (۱۳۹۵). *ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون*، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، به راهنمایی الهام دسترنج دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.

مهردوست، فرشید؛ صابر، نغمه (۱۳۹۲). قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش. *مدل‌سازی پیشرفته ریاضی*، ۲(۳)، ۴۵-۶۰.

نبوی چاشمی، سیدعلی؛ عبدالهی، فرهاد (۱۳۹۷). بررسی و مقایسه الگوهای سود اختیارمعاملات آسیایی، اروپایی و آمریکایی سهام در بورس اوراق بهادار تهران. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۹(۳۴)، ۳۸۰- ۹۳۵.

نیسی، عبدالساده؛ ملکی، بهروز و رضائیان، روزبه (۱۳۹۵). تخمین پارامترهای مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی‌پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۷(۲۸) ۹۱-۱۱۵.

نیسی، عبدالساده؛ پیمانی، مسلم (۱۳۹۳). مدل‌سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون. پژوهشنامه *اقتصادی*، ۱۴(۲) ۱۴۳- ۱۶۶.

References

Alòs, E. & Yang, Y. (2014). A closed-form option pricing approximation formula for a fractional Heston model. *Economics Working Papers 1446*, Department of Economics and Business, Universitat Pompeu Fabra.

Amiri, M. (2020). Option Pricing Under Black– Scholes, Boness and Binomial Tree Models-Evidence from the Gold Coin Option Contracts in Iran Mercantile Exchange. *Journal of Securities Exchange*, 13(50), 141-170. (*in Persian*)

Backus, D., Foresi, S., Li, K. & Wu, L. (1997). Accounting for biases in Black–Scholes. *Working paper*, New York University.

Baillie, R. T. & Morana, C. (2009). Modelling long memory and structural breaks in conditional variances: An adaptive FIGARCH approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(8), 1577-1592.

Black, F. & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81 (3), 637-654.

Chan, J.R., Hung, M.W., Lee, C.F. & Lu, H.M. (2007). The jump behavior of foreign exchange market: analysis of Thai Baht. *Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies*, 10(2), 265–288.

Clark, T. E., and Davig, T. (2011). Decomposing the declining volatility of long-term inflation expectations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 35(7), 981-999.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica,* 53, 385–407.

Dastranj, E., Sahebi Fard, H., Abdolbaghi, A. & Latifi, R. (2020). A Comparison between the Pricing of Capped and Power Options on the Basis of Arbitrage Prevention: Evidence from a Stochastic Market with Double Stochastic Volatility, Double Jump, and a Stochastic Intensity Measure. *Journal of Asset Management and Financing*, *8*(2), 89-103. (*in Persian*)

Eslami Bidgoli, Gh. & Sarafraz Ardakani, H. (1996). Option Pricing Models. *Financial Research Journal*, *3*(11), 148-176. (*in Persian*)

Fathi, S. & Fazelian, Z. (2022). A Meta-Analysis of the Efficiency of Options Market and the Arbitrage Strategies. *Financial Research Journal*, *24*(3), 329-352. (*in Persian*)

Florescu, I., Mariani, M.C. & Sewell, G. (2014). Numerical solutions to an integro-differential parabolic problem arising in the pricing of financial options in a Levy market. *Quantitative Finance*, 14(8), 1445-1452.

Harris, D. (2018). *Pricing European Style Options.* University of Providence, https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2653255

Heston, S. & Nandi, S. (2000). A Closed-Form GARCH Option Valuation Model. *The Review of Financial Studies*, 13, 585-625.

Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options, *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343

Hull, J. C. & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42, 281-300.

İltüzer, Z. (2022). Option pricing with neural networks vs. Black-Scholes under different volatility forecasting approaches for BIST 30 index options. *Borsa Istanbul Review*, 22(4), 725-742.

Jenabi, O. & Dahmardeh Ghaleno, N. (2019). Subordinate Shares Pricing under Fractional-Jump Heston Model. *Financial Research Journal*, *21*(3), 392-416(*in Persian*).

Kiesel, R. & Rahe, F. (2017). Option pricing under time-varying risk- aversion with applications to risk forecasting, *Journal of Banking and Finance*, 76, 120-138.

Latifi, R. (2016). *Option pricing under Haston's stochastic volatility model,* master's thesis, under the guidance of Elham Dastranj, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran. (*in Persian*)

Mehrdoust, F., Saber, N. (2014). The option pricing under double Heston model with jumps. Journal of Advanced Mathematical Modeling, 3(2), 45-60. (in Persian)

Melino, A., Turnbull, S. (1990). Pricing foreign currency options with stochastic volatility. *Journal of Econometrics*, 45, 239–265.

Nabavi Chashami, S. A. & Abdollahi, F. (2018). Review and Compare the earnings patterns of Asian, European and American Stock Option in Tehran Stock Exchange. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 9(34), 359-380. (*in Persian*)

Neisy, A. & Peymany, M. (2014). Modeling of Tehran Stock Exchange Overall Index by Heston Stochastic Differential Equation. *Economics Research,* 14(53), 143-166. (*in Persian*)

Neisy, A., Maleki, B. & Rezaeian, R. (2016). The Parameters Estimation of European Option pricing model under Underlying Asset with Stochastic Volatility by Loss Function Method. *Financial Engineering and Portfolio Management*, *7*(28), 91-115. (*in Persian*)

Pan, Z., Wang, Y., Liu, L. & Wang, Q. (2019). Improving volatility prediction and option valuation using VIX information: A volatility spillover GARCH model. *Journal of Futures Markets,* 39(6), 744-776.

Papantonis, I. (2016). Volatility risk premium implications of GARCH option pricing models. *Economic modelling*, (58), 104-115.

Rahmani, M. & Jafarian, N. (2017). Survey on fractional Black-scholes with Hurst exponent on European option with transaction cost. *Financial Engineering and Portfolio Management*, *8*(32), 43-62. (*in Persian*)

Schoutnes, W. (2003). *Levy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. John Wiley & Sons Ltd.

Scott, L. (1987). Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation and An Application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 419–438.

Shahmoradi, A. & Zanganeh, M. (2007). Calculation of value at risk for major indices of Tehran Stock Exchange using parametric method. *Journal of Economic Research*, *42*(2), 1-29. (*in Persian*)

Stein, E.M. & Stein, J.C. (1991). Stock price distribution with stochastic volatility: An analytic approach. Review of Financial Studies, 4, 727–752.

Thao, H.T.P. & Thao, T.H. (2012). Estimating Fractional Stochastic Volatility. The International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 82(38), 1861-1869.

Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series 3rd Edition*, John Wiley & Sons Ltd.

Venter, J., Maré, P. (2022). Pricing collateralised options in the presence of counterparty credit risk: An extension of the Heston–Nandi model, *South African Statistical Journal,* 56(1), 37–51.

Wiggins, J. B. (1987). Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. *Journal of Financial Economics*, 19(2), 351-372.

Zhang, W. & Zhang, J. E. (2020). GARCH option pricing models and the variance risk premium. *Journal of Risk and Financial Management*, 13(3), 51.