

Investigation of Students' Performance in Solving Proportional Reasoning Problems and the Effect of Educational Level, Gender and Type of School on Their Performance

Reyhani Ebrahim^{1*}, Barkhordari HamidReza², Haghjoo Saeid³

1. Associate Professor, Department of Mathematics, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

2. Master of Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

3. PhD of Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

(Received: 2022/04/18; Accepted: 2023/08/01)

Abstract

This study investigates the performance of junior high school students in solving proportional problems and the effect of educational grade, gender, and school type on their performance in solving proportional problems. This study is applied and descriptive (survey type) in nature by considering purpose and implementation consecutively. The sample of this study was 442 of Qazvin City's junior high school students who were chosen based on randomized cluster sampling. The measurement tool was a questionnaire with five tasks related to proportional reasoning with its content and face validity were examined by some of the mathematics professors and mathematics education professors. The Cronbach's alpha coefficient for the questionnaire proved to be 0.865 which shows an acceptable level of reliability. Data analysis was done using SPSS26 software and descriptive and inferential statistics methods. The analysis of the results showed that the students had a fairly good performance in solving proportional problems and their performance was evaluated in general at the level of proportional reasoning. Also, the analysis of data showed that there is a significant difference between the performance of students in 7th, 8th, and 9th grades in solving proportional problems, and with the increasing educational grade, their problem-solving performance will be increased. On the other hand, by studying the effect of students' gender on problem-solving performance, it was found that there was no significant difference between male and female students in problem-solving. Also, it was observed that the school type is an effective factor in solving proportional problems and there is a significant difference between the performance of ordinary and gifted school students. The results of this study can be used in teacher training and textbook authoring.

Keywords: Problem-Solving, Proportional Reasoning, Gender, Educational level, Students, Junior High School.

* Corresponding Author, Email: e_reyhani@sru.ac.ir

بررسی عملکرد دانش آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی و تأثیر پایه

تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه بر کارکرد آنها

ابراهیم ریحانی^{۱*}، حمیدرضا برخوردار^۲، سعید حق جو^۳

۱. دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

۲. کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

۳. دکتری آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۱۰)

چکیده

پژوهش حاضر عملکرد دانش آموزان متوسطه اول در حل مسائل استدلال تناسبی و تأثیر عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه را بر کارکرد آنها مورد بررسی قرار می‌دهد. این پژوهش از نظر هدف، کاربردی و از نظر ماهیت و نوع مطالعه از نوع توصیفی و پیمایشی است. در این پژوهش، ۴۴۲ نفر از دانش آموزان متوسطه اول شهر قزوین پس از انتخاب به روش نمونه‌گیری خوشه‌ای تصادفی، مورد مطالعه قرار گرفتند. ابزار اندازه‌گیری، آزمونی محقق‌ساخته شامل ۵ سؤال مرتبط با استدلال تناسبی است که روایی صوری و محتوایی آزمون توسط ۴ نفر از اساتید ریاضی و آموزش ریاضی تأیید شد و ضریب آلفای کرونباخ پرسشنامه ۰.۸۶ به دست آمد که این مقدار وضعیت مناسبی را در مورد پایایی آن نشان می‌دهد. تجزیه و تحلیل داده‌ها، با کمک نرم‌افزار SPSS 26 و روش‌های آمار توصیفی و استنباطی همچون آزمون‌های خی‌دو و همبستگی اسپیرمن انجام شد. تحلیل نتایج با تعیین سطح معناداری ۹۵ درصد حاکی از آن بود که عملکرد دانش آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی معنادار بوده و به‌طور کلی در سطح پنج یعنی «استدلال تناسبی» از چارچوب نظری پژوهش ارزیابی می‌شوند. همچنین تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که بین عملکرد دانش آموزان پایه‌های هفتم، هشتم و نهم در حل مسائل استدلال تناسبی تفاوت معناداری وجود دارد و با افزایش پایه تحصیلی عملکرد حل مسئله آنها نیز افزایش می‌یابد. از طرفی با بررسی تأثیر جنسیت دانش آموزان بر عملکرد حل مسئله آنها مشخص شد تفاوت عملکرد دانش آموزان دختر و پسر در حل مسائل استدلال تناسبی معنادار نبود و جنسیت تأثیر چندانی بر عملکرد حل مسئله دانش آموزان نداشته است. همچنین مشاهده گردید که نوع مدرسه عامل تأثیرگذاری در حل مسئله دانش آموزان در مسائل استدلال تناسبی محسوب می‌شود و بین عملکرد دانش آموزان مدارس عادی و تیزهوشان تفاوت معناداری وجود دارد. نتایج این پژوهش می‌تواند در امر آموزش معلمان و تألیف کتاب‌های درسی مورد استفاده قرار گیرد.

واژگان کلیدی: حل مسئله، استدلال تناسبی، جنسیت، پایه تحصیلی، دانش آموزان، دوره اول متوسطه.

مقدمه

استدلال تناسبی^۱ و مفاهیم مربوط به آن از جمله کمیت^۲، نسبت^۳، تناسب^۴، نرخ^۵، کسر^۶ و غیره، از جمله مفاهیم مهم ریاضیات مدرسه‌ای هستند که یادگیری آن برای دانش‌آموزان ضروری اما آموزش آن برای معلمان دشوار است (لامون^۷، ۲۰۰۷؛ لوباتو^۸ و همکاران، ۲۰۱۰). اهمیت و ضرورت موضوع استدلال تناسبی دانش‌آموزان در منابع پژوهشی متعددی مورد تأکید قرار گرفته است (به‌طورمثال لامون، ۲۰۲۰؛ پتیت^۹ و همکاران، ۲۰۲۰؛ هینو و کاتو^{۱۰}، ۲۰۱۸؛ کوپور-گنکتورک^{۱۱} و همکاران، ۲۰۲۲؛ کرامر^{۱۲} و همکاران، ۱۹۹۳؛ بن‌چایم^{۱۳} و همکاران، ۱۹۹۸). در بسیاری از مطالعات به نقش و تأثیر استدلال تناسبی در یادگیری مفاهیم و موضوعات مختلف ریاضی و مسائل زندگی روزمره دانش‌آموزان و بزرگسالان اشاره شده است. بنابر نظر بنسون^{۱۴} (۲۰۰۹) نشانه‌هایی از استدلال تناسبی در ۱۶۰۰ سال قبل از میلاد در پاپیروس نوشته‌های تالس، زمانی که با استفاده از سایه اهرام و شکل‌های هندسی دیگر توانست ارتفاع هرم را اندازه‌گیری کند، مشاهده شده است. استدلال تناسبی یک مبحث ریاضی ویژه در تحقیقات آموزش ریاضی است؛ زیرا بسیاری از موضوعات در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای و علوم (چگالی، مولاریته، سرعت و شتاب، نیرو) نیاز به دانش و درک نسبت و تناسب دارند (دل^{۱۵} و همکاران، ۲۰۱۲).

1. Proportional reasoning
2. Quantity
3. Ratio
4. Proportion
5. Rate
6. Fraction
7. Lamon
8. Lobato
9. Petit
10. Hino & Kato
11. Copur-Gencturk
12. Cramer
13. Ben-Chaim
14. Benson
15. Dole

ردپای استدلال تناسبی علاوه بر ریاضی در علوم مختلف مانند شیمی، اقتصاد، حسابداری و حتی کارهای روزمره زندگی همچون آشپزی نیز دیده می‌شود (بنسون، ۲۰۰۹). برای نخستین بار اینهلدر و پیازه (۱۹۵۸) بودند که ماهیت توسعه استدلال تناسبی را به‌عنوان نشانه مرحله «عملیات صوری» مطرح کردند. آخرین مرحله از مراحل نظریه رشد شناختی پیازه مرحله عملیات صوری است که یکی از اشکال آن استدلال تناسبی است.

امروزه استدلال تناسبی به‌عنوان سنگ بنای ریاضیات متوسطه و از اهداف والای ریاضیات ابتدایی شناخته می‌شود (لش، پست و بهر^۲، ۱۹۸۸). همچنین به‌عنوان یک مفهوم مهم در ریاضیات ابتدایی آن‌ها و ریاضیات پیشرفته و یک معیار برای سنجش شایستگی ریاضی دانش‌آموزان در نظر گرفته شده است. با این وجود امروزه بسیاری از دانش‌آموزان و حتی معلمان هنوز در درک و فهم مفاهیم مرتبط با استدلال تناسبی با مشکلاتی مواجه هستند (لامون، ۲۰۲۰؛ پتیت و همکاران، ۲۰۲۰؛ هینو و کاتو، ۲۰۱۸). اگر این مشکلات مرتفع نشوند، موجب ایجاد بدفهمی دانش‌آموزان در درک مباحث سطوح بالاتر همچون جبر که بر پایه استدلال تناسبی و درک روابط مستقیم است، خواهد شد (بنسون ۲۰۰۹). همچنین بنا بر نظر لامون (۲۰۰۷) شایسته است که برای رشد و موفقیت دانش‌آموزان مقطع متوسطه اول در ریاضیات مدرسه‌ای، مهارت استدلال تناسبی آن‌ها توسعه داده شود.

در برنامه درسی آموزش ریاضی در ایران، دانش‌آموزان در کتاب‌های درسی ریاضی در پایه‌های مختلفی با مفاهیم مرتبط با تناسب آشنا می‌شوند؛ برای مثال در کتاب درسی ریاضی پایه ششم (۱۳۹۹) بخشی با عنوان «کسر متعارفی - نسبت و تناسب» را مطالعه می‌کنند که پس از یادآوری مفهوم تناسب و کسرها از پایه‌های سوم تا پنجم ابتدایی، به یادگیری مطالب جدید می‌پردازند و مسائل متنوع را در مورد نسبت و تناسب حل می‌کنند. همچنین در کتاب درسی ریاضی پایه هشتم (۱۳۹۹) در بخشی به‌عنوان اعداد گویا، دوباره به معرفی کسرها و خواص آن‌ها اشاره می‌شود. در کتاب درسی ریاضی پایه نهم

1. Inhelder & Piaget
2. Lesh, Post & Behr

متوسطه (۱۳۹۹)، با معرفی مثلث‌های متشابه و تناسب بین اضلاع در آن‌ها، دانش‌آموزان با یکی از کاربردهای مهم تناسب آشنا شده و مسائل گوناگون را حل می‌کنند. همچنین در پایه‌های بالاتر مانند پایه دوازدهم متوسطه و سال اول دانشگاه نیز فراگیران با مفهوم مشتق و کاربردهای آن آشنا می‌شوند که برای درک ساختاری مشتق به استدلال تناسبی نیازمند است. همچنین درک مفهوم شیب نیز در دوره دوم متوسطه به مفهوم کسر و نسبت مرتبط است. با این وجود، تحقیقات زیادی نشان داده‌اند که توانایی استدلال تناسبی دانش‌آموزان به‌طور کلی موضوعی مسئله‌ساز و چالش‌برانگیز است (لامون، ۲۰۰۷، لوباتو و همکاران، ۲۰۱۰، بن‌چایم و همکاران، ۱۹۹۸).

از طرف دیگر پژوهش‌های محدودی در کشورمان در مورد استدلال تناسبی انجام شده است (به‌عنوان نمونه رفیع‌پور و جوکار، ۱۳۹۱؛ پورنگ و همکاران، ۱۴۰۰؛ رفیع‌پور، ۱۳۹۳). با توجه به بررسی پژوهش‌های انجام‌شده و استفاده از تجارب آموزشی، همچنین با توجه به جایگاه مهم استدلال تناسبی در طول پایه‌های مختلف تحصیلی، پژوهش حاضر در پی آن است تا به بررسی توانایی حل مسئله دانش‌آموزان در مسائل استدلال تناسبی و تأثیر عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه بر آن بپردازد. سؤالات زیر، این پژوهش را هدایت خواهند کرد: (۱) عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در حل مسائل استدلال تناسبی چگونه است؟ (۲) عوامل جنسیت، پایه تحصیلی و نوع مدرسه چه تأثیری بر عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی دارند؟ پژوهش حاضر شواهد مفیدی را از درک دانش‌آموزان از استدلال تناسبی و راهبردهای حل مسئله آنان در مسائل مرتبط برای معلمان و آموزشگران ریاضی فراهم می‌کند. همچنین چارچوب‌های نظری ارائه‌شده در بخش مبانی نظری پژوهش می‌تواند در امر آموزش دانشجو معلمان دوره‌های ابتدایی و کارشناسی آموزش ریاضی مورد استفاده قرار گیرد.

مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در ادبیات پژوهشی، تعاریف مختلفی از مفاهیم مرتبط با موضوع استدلال تناسبی ارائه‌شده است که به‌اختصار به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌شود. کمیت عبارت است از هر چیز قابل اندازه‌گیری که

بتوان اندازه‌ی آن را با یک عدد و یکا بیان کرد و قابل‌افزایش و یا کاهش باشد (لامون، ۲۰۲۰). نسبت عبارت است از مقایسه بین دو یا چند کمیت (لامون، ۲۰۰۵). نسبت ارتباط بین دو کمیت را بیان می‌کند و یک شاخص مقایسه‌ای است تا یک عدد (بهر و همکاران^۱، ۱۹۸۳). همچنین به‌عنوان مقایسه ضربی میان دو کمیت با واحدهای یکسان یا متفاوت تعریف می‌شود (لباتو و الیس، ۲۰۱۰). برای مثال، مخلوط کردن فنجان‌های شکر و آرد با پیمانه یکسان به نسبت دویسه‌سه بیانگر این است که مقدار شکر، دوسوم برابر مقدار آرد است. نسبت‌ها به‌عنوان بازنمایی جزء به‌کل یا بازنمایی جزء به‌جزء تعریف می‌شوند (ون‌دیوال، کارپ و ویلیامز^۲، ۲۰۱۰). مفهوم نسبت اغلب همراه با مفهوم نرخ به کار می‌رود (بنسون، ۲۰۰۹). زمانی که در یک نسبت، دو کمیت از نوع مختلف در نظر گرفته می‌شود، این نسبت، نرخ نامیده می‌شود (ون‌دیوال و همکاران، ۲۰۱۰). به‌طور مثال، پرداخت ۱۰ هزارتویمان به ازای هر کیلوگرم سیب یک مقایسه ضربی میان دو کمیت با واحدهای مختلف و نمایانگر مفهوم نرخ است. علاوه بر این، تناسب یک گزاره ریاضی است که برابری دو نسبت را نشان می‌دهد به‌عنوان مثال، $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (فیشر^۳، ۱۹۸۸). از نظر دُل و همکاران (۲۰۱۲)، نسبت موقعیتی است برای مقایسه کردن و استفاده از آن نسبت برای توصیف موقعیتی مربوط به آن مقایسه را تناسب می‌نامند. از جمله دیگر مفاهیم مهم مرتبط با استدلال تناسبی می‌توان به کسرها اشاره نمود. کسرها از انتزاعی‌ترین، پرکاربردترین بااهمیت‌ترین مفاهیم ریاضی هستند که دانش‌آموزان در دوره ابتدایی با آن‌ها مواجه می‌شوند که در آن دوره باید درک مفهومی دانش‌آموزان از کسرها تقویت گردد. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا در اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای^۴ (۲۰۰۰) معرفی مفهوم کسر را در پایه‌های اولیه (از پیش‌دبستان تا پایه دوم) توصیه کرده است. همچنین این شورا توصیه کرده است که در پایه‌های ۳ تا ۵ درک، بازنمایی و

1. Behr et al.
2. Van de Walle, Karp & Williams
3. Fisher
4. Principles and standards for school mathematics

مهارت‌های عملیاتی کسرها هرچه بیشتر توسعه یابند و بر ایجاد درک مفهومی دانش‌آموزان از کسرها تمرکز شود (انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰). استدلال تناسبی «عبارت است از توانایی تشخیص یک رابطه ضربی بین دو کمیت و همچنین توانایی تعمیم همان رابطه به جفت کمیت‌های دیگر» (لامون، ۲۰۲۰: ۲۳۹-۲۳۸). در گزارش انجمن معلمان ریاضی آمریکا (انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰) استدلال به کمک نسبت‌ها با یادگیری پرداختن به دو کمیت به‌طور هم‌زمان آغاز می‌شود. لامون (۲۰۰۷)، استدلال تناسبی را به‌عنوان کشف، بیان، تحلیل، توضیح و ارائه دلایل برای اثبات ادعاهای مربوط به روابط تناسبی تعریف می‌کند. وی، استدلال تناسبی را به‌عنوان یک‌شکل از استدلال ریاضی تعریف می‌کند که شامل درک مشترک و مقایسه‌های چندگانه و توانایی ذخیره ذهنی و پردازش چندین قطعه اطلاعات است. علاوه بر این، به‌عنوان بخشی از برنامه درسی ابتدایی و اساس جبر و فراتر از آن اشاره شده است. استدلال تناسبی به‌عنوان توانایی فرد برای درک، ایجاد و استفاده از رابطه بین دو فضای اندازه‌گیری مختلف یا درون فضاهای اندازه‌گیری تعریف شده است (ون‌دورن، واماوکسکی و ورشافل، ۲۰۱۸). لامون (۲۰۲۰)، استدلال تناسبی را معیاری برای درک مفاهیم ریاضی در برنامه درسی ریاضیات متوسطه می‌داند که زیربنایی برای مفاهیم پیچیده‌تر در دبیرستان محسوب می‌شود. به عقیده وی استدلال تناسبی یکی از کارآمدترین شاخص‌هایی است که نشان می‌دهد یک دانش‌آموز به درک اعداد گویا و مفاهیم مرتبط دست یافته است. در شورای ملی معلمان ریاضی (انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰) آمده است که مهارت استدلال تناسبی در دانش‌آموزان در پایه‌های پنجم تا هشتم رشد و توسعه می‌یابد و اهمیت استدلال تناسبی آن‌قدر زیاد است که می‌بایست هرچقدر زمان و تلاش لازم است برای اطمینان از توسعه دقیق آن به کار گرفته شود. طبق نظر ذل (۲۰۱۲) هم معلمان و هم دانش‌آموزان باید توانایی استدلال تناسبی را داشته باشند. به اعتقاد لامون (۲۰۰۷) استدلال تناسبی زمانی روی می‌دهد که دانش‌آموز بتواند درک خود را از برابری نسبت‌های عددی

متناسب، و ثابت بودن نسبت بین موقعیت توصیف کند؛ هرچند بتواند این روابط را به صورت نمادی ارائه کند یا نتواند. بنابراین نسبت و تناسب دو مفهوم هستند که زیر چتر استدلال تناسبی قرار می‌گیرند.

در ابتدا به ویژگی‌های کمی و عددی استدلال تناسبی توجه بیشتری می‌شد. فرودنتال^۱ (۱۹۸۳)، استدلال تناسبی را به‌عنوان توانایی مقایسه دو جز از یک کل واحد، مقایسه ویژگی‌های کمیت‌های مختلف (نرخ)، مقایسه ویژگی‌های دو کمیت که با یکدیگر ارتباط مفهومی دارند (به‌عنوان مثال استفاده از مقیاس نقشه) توصیف می‌کند. یکی از مشکلات بنیادی دانش‌آموزان و دانش‌جو معلمان و حتی برخی از معلمان، عدم تمیز روابط تناسبی از غیرتناسبی و استفاده از راهبردهای تناسبی برای حل مسائل غیرتناسبی است. همچنین در پژوهش‌های متعددی تمایل دانش‌آموزان و دانشجو معلمان به استفاده از راهبردهای جمعی به‌جای راهبردهای ضربی برای حل مسائل استدلال تناسبی گزارش شده است (لباتو و ایس، ۲۰۱۰؛ لامون، ۲۰۲۰؛ پتیت و همکاران، ۲۰۲۰؛ هینو و کاتو، ۲۰۱۸؛ کرامر و پست، ۱۹۹۳). ون دورن و همکاران (۲۰۱۶) برای سنجش توانایی دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی سه نوع مسئله را در نظر گرفتند مسئله مقدار مجهول^۲، مسئله مقایسه عددی^۳ و مسئله استدلال کیفی^۴. همچنین لامون (۲۰۰۷) مسائل استدلال تناسبی را به دو دسته مسائل مقدار مجهول و مسائل مقایسه عددی تقسیم‌بندی کرد.

مسئله مقدار مجهول از سه مقدار معلوم و یک مقدار مجهول تشکیل می‌شود. این چهار مقادیر با یکدیگر ارتباط مفهومی دارند و از لحاظ ترتیب و معنایی با صورت مسئله ارتباط تنگاتنگی دارند. این‌گونه مسائل معمولاً همراه با عباراتی همچون (به ازای، و، برای) بیان می‌شوند (هارل و بهر، ۱۹۸۹). باید توجه داشت که حل کردن مسائل مقدار مجهول با در اختیار قرار دادن سه مقدار از

-
1. Freudenthal
 2. Missing value problem
 3. Numerical comparison problem
 4. Qualitative reasoning problem
 5. Harel & Behr

چهار مقدار در تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به دانش آموزان و ضرب آن‌ها و به دست آوردن مقدار چهارم صرفاً به معنای استدلال تناسبی نیست؛ همان‌طور که لامون (۲۰۰۵) بیان می‌کند، در بررسی مقدار مجهول در مطالعه استدلال تناسبی صرفاً انجام ضرب متقابل نسبت‌ها چندان اهمیتی ندارد و تمام افرادی که مسئله تناسب را حل می‌کنند لزوماً از استدلال تناسبی استفاده نمی‌کنند؛ ممکن است یک دانش آموز بدون اینکه ماهیت تناسبی مسئله را درک کرده باشد، از ضرب متقابل استفاده کند. اهمیت مسائل مقدار مجهول در این است که بتوان به کمک آن روابط تناسبی را بازنمایی نمود (نقل شده در بنسون، ۲۰۰۹).

در مسئله مقایسه عددی چهار کمیت در قالب دو نسبت داده شده‌اند و هدف این‌گونه مسائل این است که دانش آموزان به مقایسه مقادیر عددی نسبت‌ها با یکدیگر پردازند (لامون، ۲۰۲۰). مثلاً مسئله «دو راننده که یکی از آن‌ها مسیر ۳۵۰ کیلومتری را در مدت دو ساعت طی می‌کند و دیگری مسیری ۱۸۰ کیلومتری را در دو و نیم ساعت طی می‌کند سرعت کدام یک از این دو راننده بیشتر است؟» از نوع مقایسه عددی است که دانش آموزان باید به مقایسه نرخ کیلومتر بر حسب مدت‌زمان (سرعت) برای هر دو راننده پردازند و از آن نتیجه‌گیری کنند.

در مسئله استدلال کیفی دانش آموزان نسبت‌ها، کسرها و نرخ‌ها را در عدم حضور مقادیر عددی و به صورت کیفی بررسی می‌کند و به کمک آن‌ها استدلال انجام می‌دهند (لامون، ۲۰۲۰). مثلاً مسائلی مرتبط با افزایش یا کاهش اندازه یک کسر یا نسبت و یا بررسی تغییر مزه یک نوشیدنی در اثر ایجاد تغییر در نسبت اجزای تشکیل دهنده آن، از نمونه این مسائل می‌باشند. منظور از استدلال کیفی استدلالی است شامل مفاهیم تناسبی؛ اما بدون حضور متغیرهای عددی. مثلاً مسئله «شخصی از انگشت خود برای اندازه‌گیری فاصله دو نقطه در نقشه‌ای استفاده می‌کند اگر نقشه تغییر پیدا کند، فاصله‌ای که با همان عرض انگشت اندازه‌گیری می‌کند چه تغییری می‌کند؟» (لامون، ۲۰۰۵) از نوع استدلال کیفی است.

مسئله غیر تناسبی^۱

مسائل غیر تناسبی مسائلی هستند که بین متغیرهای آن‌ها روابط تناسبی برقرار نیست. بنا به نظر کرامر (۲۰۱۷) یکی از نشانه‌های درک عمیق نسبت و تناسب، توانایی دانش‌آموزان در تشخیص روابط تناسبی و غیر تناسبی از یکدیگر است (ص ۲۷). همچنین پتیت و همکاران (۲۰۲۰) به نقل از کرامر و همکاران (۱۹۹۳) یکی از راه‌های مؤثر در کمک به دانش‌آموزان را برای تشخیص روابط تناسبی از غیر تناسبی ارائه تکالیفی می‌داند که مستلزم درک وجه تمایز بین این مسائل توسط دانش‌آموزان هستند. در نتیجه دانش‌آموزان دچار به‌کارگیری الگویی تکراری در حل مسائل غیر تناسبی بر اساس تجربه‌های همیشگی خود صرفاً در مسائل استدلال تناسبی نخواهند شد (ص ۴۱). طبق نظر ون دورن و همکاران (۲۰۱۶) انواع مسائل حوزه تناسبی به دو دسته تناسبی و مسائل غیر تناسبی و مسائل غیر تناسبی نیز به سه دسته تقسیم می‌شوند: مسائل جمعی^۲، مسائل آفینی^۳ و مسائل ثابت^۴. در مسائل جمعی بین متغیرها و کمیت‌های مسئله رابطه جمعی (و نه رابطه ضربی) وجود دارد به‌عنوان مثال مسئله «سارا ۱۲ سال دارد و برادرش ۱۵ سال دارد زمانی که سن سارا دو برابر شود برادر او چند سال دارد؟» مسئله‌ای جمعی است.

در مسائل آفینی بین کمیت‌های مسئله رابطه خطی وجود دارد، اما ماهیت مسئله ضربی محسوب نمی‌شود و بین متغیرها رابطه تناسبی وجود ندارد. به‌طور نمونه «لکوموتیو قطاری ۱۲ متر طول دارد. اگر چهار واگن قطار متصل شود، طول آن ۵۲ متر خواهد شد. اگر ۸ واگن به آن وصل شود، طول آن چقدر خواهد بود؟» (برگرفته از ون دورن و همکاران؛ ۲۰۱۶)، مثالی از مسئله‌ای تناسبی از نوع مسائل آفینی است. رابطه تناسبی بین طول قطار و تعداد واگن‌های قطار ارتباطی به طول لکوموتیو قطار ندارد و طول لکوموتیو همیشه مقداری ثابت است. طول لکوموتیو به‌مثابه

-
1. Non-proportional problem
 2. Additive problems
 3. Offline problems
 4. Constant problems

عرض از مبدأ در معادله خط و طول هر واگن به‌منابه شیب خط است که علت نام‌گذاری این نوع مسائل به همین دلیل است.

مسائل ثابت آن دسته از مسائل غیرتناسبی هستند که رابطه بین متغیرها خنثی است و افزایش یا کاهش یک متغیر مسئله بر روی متغیر دیگر مسئله تأثیری نمی‌گذارد. به‌عنوان مثال، «گروهی ۵ نفره از دانش‌آموزان سرودی را در مدت ۴ دقیقه اجرا می‌کنند؛ یک گروه ۱۰ نفره آن سرود را در مدت چند دقیقه اجرا می‌کنند؟» نمونه‌ای از مسائل ثابت است که هیچ‌یک از رابطه‌های جمعی یا ضربی بین متغیرهای مسئله وجود ندارد.



شکل ۱. ارائه مدل نظری با موضوع انواع مسائل حوزه نسبت و تناسب (برگرفته از بن چایم و همکاران، ۱۹۹۸؛ و ون دورن و همکاران، ۲۰۱۶؛ کرامر و پست، ۲۰۱۷)

به‌طور کلی می‌توان تقسیم‌بندی انواع مسائل مرتبط با تناسب را طبق ادبیات پژوهشی موجود به صورت شکل ۱ طبقه‌بندی نمود.

روش پژوهش

پژوهش حاضر از نظر هدف، کاربردی و از نظر ماهیت و نوع مطالعه از نوع توصیفی و پیمایشی است. برای سنجش میزان توانایی حل مسئله دانش‌آموزان در این تحقیق از آزمونی شامل ۵ تکلیف حل مسئله بر اساس چارچوبی تلفیقی استفاده شده است. زیرا به منظور بررسی توانایی حل مسئله می‌بایست انواع عملکرد دانش‌آموزان در به‌کارگیری استدلال تناسبی مورد پایش و تحلیل قرار گیرد. بنابراین با بررسی مدل‌ها و چارچوب‌های ارائه‌شده در پیشینه پژوهش تصمیم بر آن شد تا از چارچوبی تلفیقی که تمامی ابعاد و حالات ممکن برای پاسخ به تکالیف آزمون را مورد پوشش خود قرار دهد استفاده گردد. تکالیف آزمون به صورتی انتخاب شده است که توانایی حل مسئله دانش‌آموزان در مسائل استدلال تناسبی را مورد سنجش قرار دهد. بدین صورت که از دانش‌آموزان خواسته شده که مسئله را حل کنند و راه‌حل خود را به‌طور کامل بنویسند. پس از گردآوری و تهیه سؤالات اولیه آزمون ۴۰ مسئله از انواع مسائل تناسبی و غیرتناسبی انتخاب شدند و با اصلاح و حذف تعدادی از سؤالات و جرح و تعدیل آن‌ها ۲۰ سؤال برای اجرای آزمایشی در مرحله اول انتخاب شدند. بعد از اجرای آزمایشی بر روی نمونه اولیه و بررسی نتایج پژوهش بر روی این ۲۰ سؤال و با تعیین ضریب سختی ۰,۴۴ و ضریب تمیز ۰,۵۹، در نهایت ۵ مسئله پس از جرح و تعدیل نهایی به‌عنوان تکالیف آزمون برگزیده شدند که روایی صوری و محتوایی آن‌ها پس از دو مرحله اصلاح توسط ۴ نفر از اساتید ریاضی و آموزش ریاضی و ضریب آلفای کرونباخ پرسشنامه ۰,۸۶ محاسبه شده است.

جامعه آماری پژوهش مورد نظر شامل کلیه دانش‌آموزان دختر و پسر مشغول به تحصیل در مقطع متوسطه اول در نواحی یک و دو شهرستان قزوین در سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹ هستند. در این تحقیق از روش نمونه‌گیری خوشه‌ای تصادفی استفاده شد. ابتدا ۴۰ نفر به‌طور تصادفی از پایه‌های هفتم تا نهم در دو مدرسه انتخاب شدند و مطالعه مقدماتی بر روی آن‌ها انجام گرفت. سپس هفت مدرسه مقطع متوسطه اول از انواع دخترانه و پسرانه، دولتی و تیزهوشان انتخاب گردیدند و از هر مدرسه یک کلاس به‌طور تصادفی انتخاب شد. و در نهایت ۴۴۲ نفر از

دانش‌آموزان جامعه آماری موردنظر به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای برای اجرای آزمون و تحقیق انتخاب شدند. لازم به ذکر است که از این تعداد ۴۰۸ دانش‌آموز در مدارس عادی و ۳۴ دانش‌آموز در مدارس تیزهوشان مشغول به تحصیل بودند و به تفکیک جنسیت ۲۶۳ پسر و ۱۷۹ دختر در پژوهش شرکت داشتند. از طرفی با وجود شیوع گسترده بیماری کووید ۱۹ و کاهش ارتباط فیزیکی محققین با دانش‌آموزان و نمونه آزمایشی در مراحل جمع‌آوری و تحلیل داده‌های مرتبط با پژوهش، تمامی فرایندهای توزیع پرسش‌های پژوهش، جمع‌آوری پاسخ‌های دانش‌آموزان، دریافت بازخوردهای دانش‌آموزان، تحلیل نتایج و غیره به صورت کاملاً مجازی و در چارچوب نرم‌افزارها و شبکه‌های اجتماعی که مهم‌ترین آن‌ها شبکه اجتماعی دانش‌آموزی (شاد) بود، اجرا گردید که این امر از نوآوری‌های این پژوهش محسوب می‌گردد. پس از اخذ مجوزهای لازم و هماهنگی با مدیران مدارس و دبیران ریاضی متوسطه اول، تکالیف آزمون در اختیار دانش‌آموزان قرار داده شد و پس از مدت‌زمان لازم پاسخگویی پاسخ‌های آن‌ها دریافت شد و تجزیه و تحلیل پاسخ‌ها با استفاده از نرم‌افزارهای آماری انجام گرفت.

در این پژوهش با توجه به بخشی از پیشینه پژوهشی بررسی شده (چارچوب نظری کارپلاس، پولس و استیج^۱ (۱۹۸۳)، فیشر (۱۹۸۸)، لامون (۱۹۹۳)، بنسون (۲۰۰۹) ویلند و همکاران^۲ (۲۰۲۰)، لیندا و همکاران (۲۰۱۱)) و بررسی و جرح و تعدیل آن‌ها چارچوبی تلفیقی متشکل از شش سطح تهیه شد و بررسی عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول بر اساس این چارچوب صورت گرفت. در این چارچوب پس از بررسی و تحلیل نتایج حل مسئله دانش‌آموزان ابتدا عملکرد آن‌ها به دو دسته درست و نادرست تقسیم می‌شوند و حل مسئله نادرست نیز به سه سطح طبقه‌بندی می‌شوند. نمای کلی این چارچوب در جدول ۱ نمایش داده شده است.

1. Karplus, Pulos & Stage
2. Weiland et al.

جدول ۱. چارچوب ارائه شده توسط محققین از سطوح مختلف حل مسئله تناسبی و پژوهش‌های حمایت‌کننده از هر سطح

| پژوهش‌های حمایت‌کننده | توضیحات | نام سطح | طبقه‌بندی | |
|--|---|---|-----------|-----------------|
| کارپلاس و همکاران (۱۹۸۳)، فیشر (۱۹۸۸)، لامون (۱۹۹۳) بنسون (۲۰۰۹) | در این سطح دانش‌آموز با سؤال ارتباط برقرار نمی‌کند یا پاسخ‌هایی نامربوط به مسئله مبتنی بر حدس و گمان و بدون دلیل ارائه می‌دهد. | بدون پاسخ، پاسخ‌های نامربوط یا مبتنی بر حدس و گمان | سطح یک | حل مسئله نادرست |
| فیشر (۱۹۸۸) بنسون (۲۰۰۹) کارپلاس و همکاران (۱۹۸۳) | در این سطح دانش‌آموز ماهیت مسئله را درک نکرده است و با به‌کارگیری راهبرد جمعی در مسئله‌ای با موقعیت ضربی یا به‌کارگیری راهبرد ضربی در مسئله‌ای با موقعیت جمعی پاسخ نادرستی برای سؤال ارائه می‌دهد. | استفاده از راهبرد جمعی یا ضربی در موقعیت نامناسب | سطح دو | |
| لامون (۱۹۹۳) بنسون (۲۰۰۹) | در این سطح دانش‌آموز ماهیت مسئله را درک می‌کند اما توانایی برقراری ارتباط بین متغیرهای کمی را ندارد و صرفاً با الگوسازی، ارائه توضیح کلامی، مدل‌سازی و غیره سعی در ارائه استدلال در ارتباط با خواسته مسئله می‌کند، اما در حل مسئله عملکرد مناسبی نداشته و به پاسخ نادرستی می‌رسد. | الگوسازی، توضیح کلامی، عدم برقراری ارتباط بین متغیرها | سطح سه | |
| لامون (۱۹۹۳) لیندا و همکاران (۲۰۱۱) ویلند و همکاران (۲۰۲۰) | در این سطح دانش‌آموز ماهیت مسئله را درک کرده و به پاسخ صحیح مسئله می‌رسد و با استفاده از بازنمایی‌های شهودی مانند رسم نمودار یا شکل، توضیح کلامی، مدل‌سازی و... به استدلال درباره پاسخ خود می‌پردازد. اما از راهبردهای حل مسئله تناسبی استفاده نکرده است. | بازنمایی‌های شهودی و معنادار، به‌کارگیری تفکر نسبی | سطح چهار | حل مسئله درست |

| | | | |
|--|---|------------------------|---------|
| کارپلاس و همکاران (۱۹۸۳) فیشتر (۱۹۸۸) لامون (۱۹۹۳) ویلند و همکاران (۲۰۲۰) | در این سطح دانش آموز با استفاده از راهبرد- های مناسب حل مسئله (ضرب متقابل، نرخ واحد، کسرهای برابر و غیره) اقدام به حل مسئله می کند و پاسخ صحیح را به دست می آورد. | استدلال تناسبی | سطح پنج |
| فیشتر (۱۹۸۸) لامون (۱۹۹۳) ویلند و همکاران (۲۰۲۰) رفیع پور و جوکار (۱۳۹۱) | در این سطح دانش آموز سطوح درک بالاتری از مسئله را نشان می دهد و با استفاده از متغیرهای جبری و یا چندین راهبرد در حل مسئله مهارت بالاتری در استدلال تناسبی دارد. | استدلال تناسبی پیشرفته | سطح شش |

یافته های پژوهش

بررسی و تحلیل کیفی پاسخ های دانش آموزان به سؤالات آزمون

در این بخش به منظور به پاسخ به هدف اصلی پژوهش یعنی بررسی عملکرد دانش آموزان مقطع متوسطه اول در حل مسائل استدلال تناسبی به تجزیه و تحلیل داده های حاصل از پاسخ های دانش آموزان به سؤالات آزمون پرداخته شده است بررسی و تحلیل پاسخ های درست و نادرست دانش آموزان به سؤالات آزمون می تواند تا حدودی نحوه تفکر آنان را منعکس کند و نقاط قوت و ضعف آنان را در فرایند حل مسئله نمایان سازد. در این پژوهش پنج سؤال مرتبط با مفاهیم نیازمند استدلال تناسبی که هرکدام در قالبی متفاوت و دربرگیرنده هدفی مشخص بودند، در اختیار دانش آموزان قرار گرفت. این ۵ سؤال به گونه ای گزینش شده بودند که تمامی اهداف پژوهش را پوشش دهند. پاسخ های دانش آموزان به سؤالات آزمون پس از بررسی دقیق در هر یک از سطوح چارچوب حل مسئله تناسبی دسته بندی شد. سپس داده های به دست آمده، محققین را به اهداف فرعی این پژوهش یعنی تأثیر عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه بر عملکرد حل مسئله دانش آموزان در مسائل استدلال تناسبی نزدیک نمودند. بدین منظور، در ادامه سؤالات آزمون و هدف آنها و پاسخ های ارائه شده توسط دانش آموزان به سؤالات آزمون مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است.

سؤال اول: ماشین (الف) ۱۸۰ کیلومتر را در سه ساعت طی می‌کند. ماشین (ب) ۴۰۰ کیلومتر را در ۷ ساعت طی می‌کند. کدام ماشین سریع‌تر حرکت می‌کند؟ چرا؟ دلیل خود را توضیح دهید.

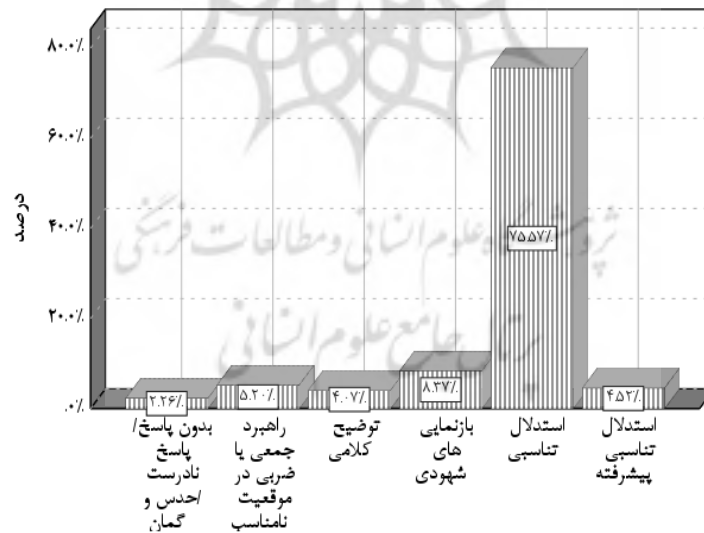
هدف سؤال: این سؤال در قالب مسئله‌ای تناسبی از نوع مقایسه عددی و با هدف بررسی توانایی دانش‌آموزان در تشکیل نرخ کمیت‌ها و مقایسه کمیت‌ها با استفاده از آن و شناسایی راهبردهای حل مسئله آنان تهیه شده است. از دانش‌آموزان خواسته شده است تا با به دست آوردن نرخ مسافت طی شده بر مدت‌زمان یعنی کمیت سرعت به مقایسه سرعت دو ماشین بپردازند.

جدول شماره ۳ و شکل ۲، فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست را در سؤال یک نشان

می‌دهد.

جدول ۳. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست مربوط به سؤال یک

| پاسخ‌ها | فراوانی | درصد فراوانی |
|---------|---------|--------------|
| نادرست | ۵۱ | ۱۱/۵ |
| درست | ۳۹۱ | ۸۸/۵ |



شکل ۲. درصد فراوانی هر یک از سطوح حل مسئله در سؤال یک

با بررسی پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان در این سؤال بر اساس سطوح حل مسئله می‌توان مشاهده کرد که ۸۸,۵٪ پاسخ‌ها به این سؤال صحیح بوده است. درصد قابل توجهی از پاسخ‌های دانش‌آموزان (۷۵/۶٪) به این سؤال در سطح استدلال تناسبی قرار می‌گیرد و تنها ۵,۲٪ از پاسخ‌ها مربوط به دانش‌آموزانی بوده است که در درک ماهیت ضربی مسئله موفق نبوده‌اند و به مسئله با رویکرد جمعی نگریسته‌اند. این می‌تواند نشان‌دهنده این موضوع باشد که دانش‌آموزان متوسطه اول در مسائل مقایسه عددی بخصوص در مسائلی که مرتبط با دنیای واقعی باشند (مثلاً در این سؤال متغیرهای سرعت، اتومبیل، مسافت طی شده و غیره) ارتباط و تعامل بهتری با متغیرهای مسئله برقرار می‌کنند. همان‌طور که ویسوتسکایا و همکاران^۱ (۲۰۲۰) بیان می‌کنند مفاهیم زیادی در ریاضیات و سایر علوم ارتباط تنگاتنگی با نسبت و تناسب دارند از جمله کسرها، نرخ‌ها، درصدها، نسبت‌ها، لذا وجود متغیرها و زمینه ذهنی دانش‌آموز از مفاهیم سرعت و مسافت در دروسی مانند علوم تجربی و غیره دانش‌آموز را به سمت تشکیل نرخ و مقایسه آن‌ها سوق می‌دهد.

جدول ۴. نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان مربوط به سؤال یک

| پاسخ | نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال | سطوح |
|------|--|----------|
| | <p>حل: ماشین (الف) در یک ساعت ۶۰ کیلومتر را طی می‌کند اما ماشین (ب) در یک ساعت ۵۷ کیلومتر را طی می‌کند پس این یعنی ماشین (الف) از ماشین (ب) سریع‌تر است</p> <p>سرعت (ب) > سرعت (الف)</p> | سطح چهار |
| درست | <p>حل: ماشین الف سریعتر حرکت می‌کند.</p> $\frac{180}{3} = 60 \text{ کیلومتر در ساعت}$ $\frac{400}{7} = 57 \text{ کیلومتر در ساعت}$ <p>۳ = [۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, ۲۴, ...]</p> <p>۷ = [۷, ۱۴, ۲۱, ۲۸, ...] ۲۱ = ۳ × ۷</p> | سطح پنج |

سرعت حرکت می‌باشد؟ چرا؟ دلیل خود را توضیح دهید. $\alpha = 90$ مایل اولاً

$$\begin{array}{r|l} 180 & \\ \hline 1 & \alpha \end{array}$$

۳ اول $\alpha = 57,14$ مایل دوم $\alpha \approx 57,14$ مایل دوم

$$\begin{array}{r|l} 400 & \\ \hline 1 & \alpha \end{array}$$

معمولاً دو متغیر با واحد های یکسان

حل: با ایجاد یک تساوی و مقادیریم می‌آید. مثلاً چه می‌گوییم که ما ستاره الف سرسبزتر است

$$\square \frac{400}{v} > 90 \square \frac{57,14}{v}$$

برای آنکه سرعت ما بیشتر باشد باید در صورت آوریم، با فرض ایند این حرکت یکسان است از فرمول $\Delta x = v \Delta t$ می‌رویم.

الف $\Delta x = v \Delta t \rightarrow 180 = 3 \times v \rightarrow v = \frac{60 \text{ km}}{h}$

ب $\Delta x = v \Delta t \rightarrow 400 = v \times 7 \rightarrow v = \frac{57,14 \text{ km}}{h}$

پس با توجه به محاسبات بالا، ما می‌توانیم بگوییم که سرعت ما بیشتر است.

سطح شش

۴: وقتی شخصی A کیلومتر را با ساعت برود همان شخص ۲۸ کیلومتر را در ۲ ساعت برود. یعنی نسبت $\frac{A}{B}$ یا $\frac{B}{A}$ برای همان شخص ثابت است. برای مقایسه‌ی مسافت ۴ شده، هر دو شخص را به یک عدد مشخص ضرب می‌کنیم و با توجه به توضیح داده شده وقتی مسافت های هر دو برابر باشند شخص که زمان کمتری صرف کرده سریع‌تری رود.

ساعت ۶۰ $\xrightarrow{\times 20}$ ۳۶۰۰ km $\xrightarrow{3 \text{ ساعت}}$ ۱۸۰ km (الف)

ساعت ۶۳ $\xrightarrow{\times 9}$ ۳۶۰۰ km $\xrightarrow{7 \text{ ساعت}}$ ۴۰۰ km (ب)

پسین الف سریع‌تری رود.

خط در نتیجه ماسین اب سرویتر حرکت می کند

$$\frac{3}{180} = \frac{1}{60} > > \frac{1}{60} < \frac{1}{57}$$

$$\frac{1}{60} < \frac{1}{57}$$

ماسین (ب) در یک ساعت مقدار بیشتری می برد

سطح سه

نادرست

$$\begin{array}{r|l} \times 100 & 7 \\ \hline 1 & 7000 \end{array} = \frac{7}{7000} = \frac{17}{100} = 0/017$$

$$\begin{array}{r|l} \times 180 & 3 \\ \hline \times 1 & 5400 \end{array} = \frac{3}{5400} = \frac{3+1}{180} = 0/017$$

بسیاری از دانش آموزان با تبدیل مسئله به مسئله مقدار مجهول و تشکیل جدول تناسب و ضرب متقابل اقدام به پیدا کردن مقدار مجهول نموده است. همچنین برخی دانش آموزان با تشکیل نرخ (سرعت) اقدام به مقایسه نرخ‌ها و پاسخ به سؤال نموده‌اند. مشاهده گردید که برخی دانش آموزان به علت تشخیص نادرست نسبت و جدول تناسب یا عدم درک کافی از مفهوم نرخ به پاسخ درستی دست نیافته‌اند و پاسخ آن‌ها در سطح دو و سه چارچوب ارزیابی شدند. در مقایسه عملکرد دانش آموزان پایه‌های نهم و هفتم نسبت به دانش آموزان پایه هشتم عملکرد بهتری در حل مسئله از خود نشان دادند.

سؤال دوم: برای تهیه یک کلوچه، باید ۴ فنجان شکر و ۱۰ فنجان آرد را مخلوط کنید. فاطمه می‌خواهد مقدار بیشتری از این کلوچه را تهیه کند. اگر او دو فنجان شکر هم اضافه کند، چند فنجان آرد نیاز خواهد داشت؟ پاسخ خود را توضیح دهید (محقق ساخته).

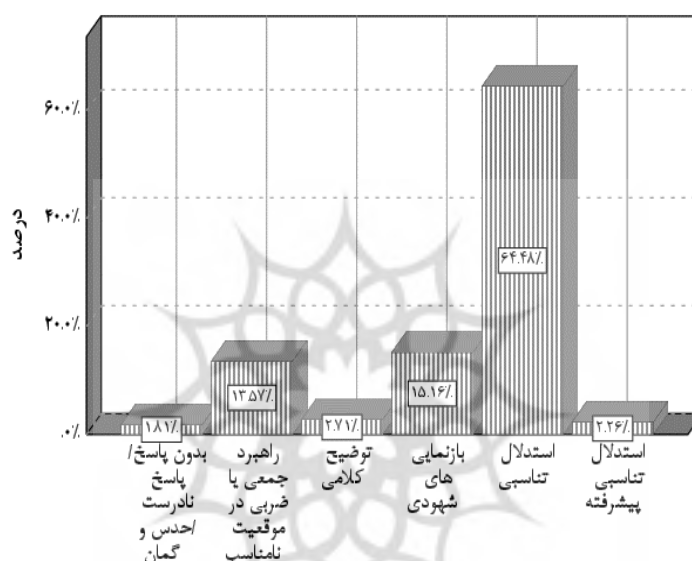
هدف سؤال: این سؤال در قالب مسئله‌ای تناسبی از نوع مقدار مجهول و بر اساس موقعیت مسئله‌ای در دنیای واقعی و زندگی روزمره با هدف بررسی توانایی دانش آموزان در تشخیص ماهیت ضربی مسئله تهیه شده است.

جدول شماره ۵ و شکل ۳، فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست را در سؤال یک نشان

می‌دهد.

جدول ۵. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست مربوط به سؤال دو

| پاسخ‌ها | فراوانی | درصد فراوانی |
|---------|---------|--------------|
| نادرست | ۸۰ | ٪۱۸/۱ |
| درست | ۳۶۲ | ٪۸۱/۹ |



شکل ۳. درصد فراوانی هر یک از سطوح حل مسئله در سؤال دو

همان‌طور که در جدول ۵ مشاهده می‌شود از بین ۴۴۲ دانش‌آموز ۳۶۲ دانش‌آموز به این سؤال پاسخ درست (۸۱٫۹٪) و ۸۰ نفر از آن‌ها پاسخ نادرستی داده‌اند (۱۸٫۱٪). در مقایسه پایه‌های هفتم و هشتم و نهم عملکرد دانش‌آموزان با افزایش پایه تحصیلی افزایش یافته است. به‌گونه‌ای که به ترتیب دانش‌آموزان نهم، هشتم و هفتم بهترین عملکرد را در حل این سؤال از خود نشان دادند که این موضوع می‌تواند نمایانگر توسعه استدلال تناسبی دانش‌آموزان طی سال‌های هفتم تا نهم باشد.

جدول ۶. نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان مربوط به سؤال دو

| سطح | نمونه پاسخ دانش‌آموزان به این سؤال | پاسخ |
|----------|------------------------------------|------|
| سطح پنج | | ۱۰ |
| سطح شش | | درست |
| سطح چهار | | درست |

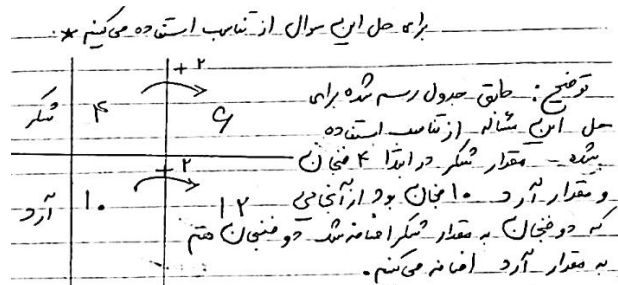
ابتدا می‌گوییم ۴ تا ۱۰ با هم ۶ عدد اختلاف دارند پس اگر ۲ لیوان شکر اضافه کنیم می‌شود ۶ پس حتماً ۱۲ لیوان آرد نیاز خواهیم داشت.

سطح دو

۲+۴ = شکر ۱۰+۲ = آرد

نادرست

زیرا تعداد ثابت است پس هر تعداد که به شکر اضافه می‌کنیم باید به آرد نیز اضافه کنیم. چون به میزان ۲,۵ برابر شکر آرد مصرف شده، برای تهیه بیشتر کلوچه میزان افزایش ۲,۵ برابر خواهد بود. پس میزان آرد برابر است با: $۲,۵ \times ۱۲ = ۳۰$



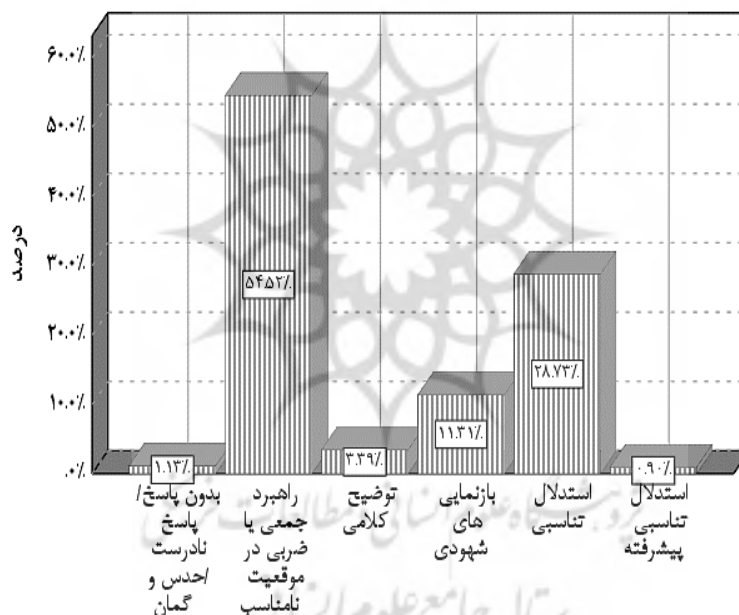
با بررسی پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان در این سؤال بر اساس سطوح حل مسئله می‌توان مشاهده کرد که درصد قابل توجهی از پاسخ‌های دانش‌آموزان (۶۴/۵٪) به این سؤال در سطح استدلال تناسبی قرار می‌گیرد. نمودار ۲ صحت این مطلب را نشان می‌دهد. با این وجود درصد قابل توجهی از پاسخ‌ها در سطح دو قرار داشتند (۱۳/۶٪) یعنی این دانش‌آموزان با تفکر جمعی به سؤال پاسخ داده بودند. این موضوع نمایانگر عدم درک ماهیت ضربی مسئله و حل مسئله با رویکرد جمعی نادرست است که منجر به درصد بیشتر پاسخ‌های نادرست در حل این سؤال شده است. همچنین (۱۵/۲٪) از دانش‌آموزان با استفاده از بازنمایی‌های شهودی همچون مدل‌سازی یا ارائه توضیح، اقدام به رساندن منظور خود با استفاده از استدلال کلامی شده‌اند که از سطح پایین‌تری نسبت به سطح استدلال تناسبی برخوردار می‌باشند (سطح چهارم). تعدادی از پاسخ‌ها (۲/۳٪) نیز در سطح ششم (استدلال تناسبی پیشرفته) قرار داشتند که این پاسخ‌ها نمایانگر درک کامل این دانش‌آموزان از نرخ و تناسب و ارائه چندین راهبرد به هنگام حل سؤال بود.

سؤال سوم: علی در ساعت ۸ و محسن ۳۰ ثانیه بعد با سرعت یکسان شروع به دویدن در یک مسیر دایره‌ای شکل می‌کنند. این را می‌دانیم که وقتی محسن ۲۰۰ متر دویده باشد علی ۳۰۰ متر دویده است. با توجه به این اطلاعات وقتی که محسن ۴۰۰ متر دویده باشد، علی چند متر دویده است؟ پاسخ خود را توضیح دهید. هدف سؤال: سؤال سوم در قالب مسئله‌ای غیرتناسبی و جمعی از نوع مقدار مجهول و با هدف بررسی توانایی دانش‌آموزان در تشخیص و تمیز موقعیت‌های ضربی و جمعی از یکدیگر با به‌کارگیری ضرایب با نسبت صحیح در مسئله

همان‌طور که در جدول ۷ دیده می‌شود از بین ۴۴۲ دانش‌آموز ۲۶۱ دانش‌آموز به این سؤال پاسخ نادرستی داده‌اند (۵۹٪) و ۱۸۱ نفر از آن‌ها پاسخ درست داده‌اند (۴۱٪). فراوانی پاسخ‌های نادرست در این سؤال بسیار زیاد بود.

جدول ۷. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست مربوط به سؤال سه

| پاسخ‌ها | فراوانی | درصد فراوانی |
|---------|---------|--------------|
| نادرست | ۲۶۱ | ۵۹٪ |
| درست | ۱۸۱ | ۴۱٪ |



شکل ۴. درصد فراوانی هر یک از سطوح حل مسئله در سؤال سه

در مقام مقایسه پایه‌ها، دانش‌آموزان پایه‌های نهم و هفتم از دانش‌آموزان پایه هشتم عملکرد بهتری در حل این سؤال از خود نشان دادند و دانش‌آموزان پایه نهم نسبت به سایر پایه‌ها بهترین عملکرد را داشتند.

جدول ۸. نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان مربوط به سؤال سه

| پاسخ | نمونه پاسخ دانش‌آموزان به این سؤال | سطوح |
|------|--|---------|
| درست | ما می‌دانیم سرعت علی و محسن یکسان است و علی ۳۰ ثانیه زودتر از محسن حرکت کرده است. می‌دانیم اگر محسن ۲۰۰ متر دویده باشد علی ۳۰۰ متر دویده است و چون سرعت آن‌ها برابر است، فاصله بین آن‌ها همواره ۱۰۰ متر خواهد بود و اگر محسن ۴۰۰ متر دویده باشد پس علی ۵۰۰ متر دویده است. $۱۰۰ = ۲۰۰ - ۳۰۰ =$ اختلاف بین محسن و علی $۵۰۰ = ۴۰۰ + ۱۰۰$ | سطح پنج |

مضارب دویست: ۲۰۰ و ۴۰۰ و ۶۰۰ و ۸۰۰ و ۱۰۰۰ و ...

مضارب سیصد: ۳۰۰ و ۶۰۰ و ۹۰۰ و ۱۲۰۰ و ...

سطح سه

جواب میشود نشخصد چون ۴۰۰ دومین مضرب ۲۰۰ است و دومین مضرب ۶۰۰ میشود

حل: نسبت مسافت طی شده محسن به علی ۲ به ۳ است که می‌توانیم آن را مساوی با $\frac{x}{400}$ قرار دهیم و از طریق ضرب در بسط آن را بیابیم.
 $\frac{2}{3} = \frac{x}{400} \Rightarrow x = \frac{2 \times 400}{3} = \frac{800}{3}$

نادرست

سطح دو

۲- در هر دو مسافت محسن دو برابر شده مسافت علی یکبار دو برابر می‌شود

سطح یک

چون سرعت هر دو یکسان است، پس مسافت طی شده برای هر دو برابر است.

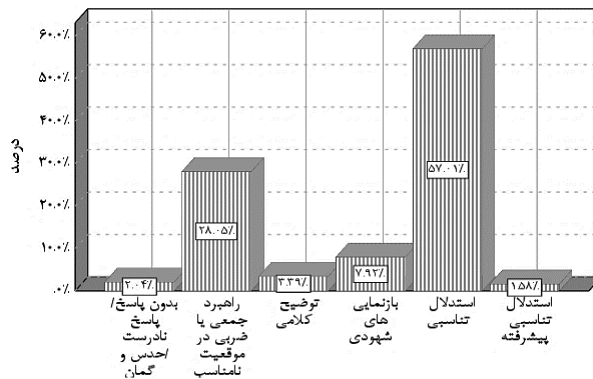
با بررسی پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان در این سؤال بر اساس سطوح حل مسئله می‌توان مشاهده کرد که برخلاف سؤالات دیگر درصد قابل توجهی از پاسخ‌های دانش‌آموزان (۵۴/۵٪) به این سؤال در سطح راهبرد ضربی در موقعیت نامناسب قرار می‌گیرد و تنها ۲۸/۷٪ پاسخ‌ها در سطح استدلال تناسبی قرار می‌گیرند. ریشه این نتیجه را می‌توان در چند عامل جستجو کرد؛ اول، عدم توجه و دقت کافی دانش‌آموزان به روابط بین متغیرها و داده‌های مسئله در مسائل کلامی؛ جایی که دانش‌آموزان به جای این که مسئله را به خوبی درک کنند، صرفاً به اعداد و متغیرهای مسئله و صحیح یا گویا بودن آن‌ها توجه می‌کنند. ون دورن و همکاران (۲۰۱۶) صحت این موضوع را

درباره توجه صرف دانش‌آموزان به متغیرهای مسائل کلامی بیان کرده‌اند. دوم، صحیح یا گویا بودن نسبت متغیرهای موجود در مسئله تأثیر به‌سزایی در شکل‌گیری تفکر تناسبی دانش‌آموزان دارد. همان‌طور که ون دورن و همکاران (۲۰۱۶) در پژوهش خود به تأثیر این عامل در عملکرد حل مسئله تناسبی پرداخته‌اند و به این نتیجه رسیدند که اگر متغیرهای مسئله از نوع صحیح باشند یا ضریب صحیحی از یکدیگر باشند این موضوع دانش‌آموزان را به سمت تفکر ضریبی سوق می‌دهد؛ حتی اگر مسئله از نوع غیرتناسبی یا جمعی باشد (ص ۲۱۵). در این پژوهش نیز یکی از علل انتخاب این سؤال بررسی همین موضوع بود که مشاهده گردید باینکه ماهیت این مسئله جمعی بود بیشتر دانش‌آموزان بدون درک رابطه بین تعداد دوره‌های زده شده علی و محسن و با استفاده از تفکر ضریبی بجای تفکر جمعی به‌به پاسخ نادرست رسیده‌اند و این عامل تأثیر به‌سزایی در عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان به‌جای گذاشت. وجود اعداد ۲۰۰ و ۴۰۰ دانش‌آموزان را به‌به این واداشت که نسبت دوهیک بین متغیرهای مسئله وجود دارد بنابراین درصد فراوانی زیادی از پاسخ‌ها به سطح دوم و پاسخ‌های نادرست تعلق پیدا کردند.

سؤال چهارم: یک لباس ۱۰۰ دقیقه طول می‌کشد تا خشک شود. چقدر طول می‌کشد تا ۵ دست از همین لباس با هم خشک شوند؟ پاسخ خود را توضیح دهید (محقق ساخته)
 هدف سؤال: سؤال چهارم در قالب مسئله ای غیرتناسبی و ثابت و از نوع استدلال کیفی با هدف بررسی توانایی دانش‌آموزان در تشخیص و تمیز ماهیت غیر تناسبی مسئله از نوع مسئله ثابت

جدول ۹. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست مربوط به سؤال چهارم

| پاسخ‌ها | فراوانی | درصد فراوانی |
|---------|---------|--------------|
| نادرست | ۱۴۸ | ٪۳۳/۵ |
| درست | ۲۹۴ | ٪۶۶/۵ |



شکل ۵. درصد فراوانی هر یک از سطوح حل مسئله در سؤال چهار

همان‌طور که در جدول ۹ دیده می‌شود از بین ۴۴۲ دانش‌آموز ۲۹۴ دانش‌آموز به این سؤال پاسخ درستی داده‌اند (۶۶,۵٪) و ۱۴۸ نفر از آن‌ها پاسخ نادرستی داده‌اند (۳۳,۵٪). بنابراین عملکرد دانش‌آموزان را در این سؤال می‌توان در سطح استدلال تناسبی ارزیابی کرد. در مقایسه پایه‌ها دانش‌آموزان هفتم و نهم عملکرد بهتری از دانش‌آموزان هشتم در حل این سؤال داشتند و میزان پاسخ‌های درست آن‌ها بیشتر از پایه هشتم و میزان پاسخ‌های نادرست آن‌ها کمتر از پایه هشتم در این سؤال است. همچنین دانش‌آموزان پایه نهم عملکرد بهتری نسبت به سایر پایه‌ها در حل این سؤال داشتند.

جدول ۱۰. نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان مربوط به سؤال چهار

| سؤال | نمونه پاسخ دانش‌آموزان به این سؤال | پاسخ |
|--|---|------|
| سؤال چهارم: یک باس ۱۰۰ دقیقه طول می‌کشد تا خشک شود. چند مرتبه می‌کشد تا ۵۰ دست از زمین لاس نام خشک شوند؟ پاسخ خود را توضیح دهید. | حل: ۱۰۰ دقیقه طول می‌کشد زیرا هر باس در یک زمان گذاشته ایم خشک شود. | درست |
| | خشک → همین | |
| | خشک → سطح پنجم | |
| | خشک → همین | |
| | خشک → همین | |
| | خشک → همین | |

همان مقدار طول می‌کشد اما چرا؟ چون مقدار گرما محیط کاهش پیدا نمی‌کند و اثرش بر روی تمام لباس‌ها یکسان است. پس ۵ دست لباس هم ۱۰۰ دقیقه طول می‌کشد و در ضمن جنس لباس‌ها هم یکی است.

دقیقه طول می‌کشد
دقیقه طول می‌کشد
دقیقه
۱۰۰
سطح
چهار

۵۰۰ دقیقه طول می‌کشد، ولی اگر همین لباس را اگر پنج دست از در زمان لباس بشویم در زمان لباس یعنی همان پنج نیم هم می‌آید با هم در ۱۰۰ دقیقه غسل می‌شوند و اگر هر یک از در زمان های مختلف غسل کنیم جمعاً ۵۰۰ دقیقه طول می‌کشد و اگر در ۱۰۰ دقیقه

۳۰۰۰ دقیقه = ۴۰ دقیقه × ۷۵
۷۵ = ۱۰۰ × ۵ = ۵۰۰ دقیقه

سوال چنانچه در یک لباس ۵ دقیقه طول می‌کشد تا خشک شود چقدر طول می‌کشد تا ۵ دست از همین لباس با هم خشک شوند؟ توضیح دهید.

حله: $\frac{1}{4} \times 100 = 25$ دقیقه
 $\frac{1}{4} \times 100 = 25$ دقیقه
 $\frac{1}{4} \times 100 = 25$ دقیقه
 $\frac{1}{4} \times 100 = 25$ دقیقه
 $\frac{1}{4} \times 100 = 25$ دقیقه

توضیح: هر ۵ دقیقه مساری است با یک ساعت پس ۵ ساعت فعلاً هست روزمره ۱۰ دقیقه می‌ماند که اگر با هم جمع شوند می‌شود ۵۰ دقیقه

نادرست

| | |
|---|-----|
| ۱ | ۱۰۰ |
| ۵ | x |

$x = \frac{5 \times 100}{1} = 500$ دقیقه
۱۰۰ لباس
۵۰۰ لباس

وقتی هر دست لباس ۱۰۰ دقیقه طول بکشد تا خشک شود پس داریم $100 \div 5 = 20$ پس ۲۰ دقیقه طول می‌کشد.

بنا بر نظر ون دورن و همکاران (۲۰۱۶) مسائل خشتی از انواع مسائل غیر تناسبی هستند که در آن‌ها نه رابطه جمعی بین متغیرها و کمیت‌های مسئله وجود دارد نه رابطه ضربی. این سؤال از نوع خشتی طرح شده بود به همین علت در تکالیف آزمون قرار داده شد تا توانایی دانش‌آموزان متوسطه اول را در تشخیص این نوع مسائل بسنجد که با بررسی پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان در این سؤال بر اساس سطوح حل مسئله مشاهده شد که ۵۷٪ پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال سطح استدلال تناسبی قرار می‌گیرد؛ اما باین وجود ۲۸٪ دانش‌آموزان در حل این سؤال با عدم درک

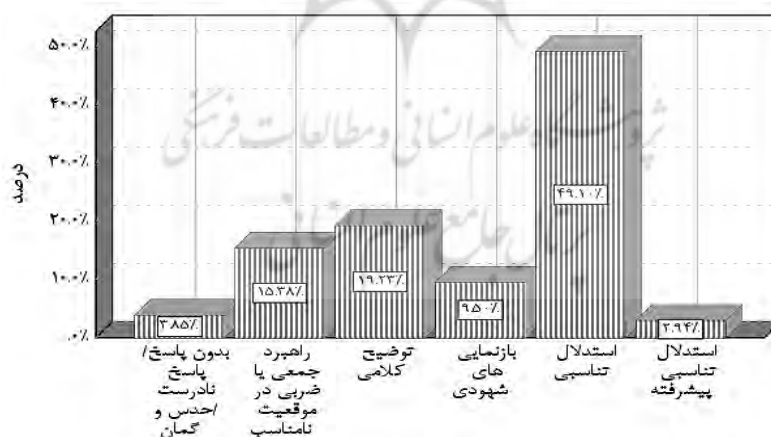
ماهیت ضربی مسئله از راهبرد جمعی در موقعیت نامناسب استفاده کردند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت دانش‌آموزان در تشخیص مسائل تناسبی از نوع ثابت با ثبت درصد فراوانی پاسخ‌های درست ۶۶٫۵٪ و پاسخ‌های نادرست ۳۳٫۵٪ که عمدتاً از نوع تفکر ضربی در موقعیت نامناسب بودند. شکل ۶، درستی این مطلب را نشان می‌دهد.

سؤال پنجم: در مقایسه آمار مبتلایان به ویروس کرونا در دو کشور با جمعیتی به ترتیب ۲۰ میلیون نفر و ۳۰ میلیون نفر، تعداد مبتلایان در کشور اول یک میلیون و پانصد هزار نفر و در کشور دوم، دو میلیون نفر شناسایی شده‌اند. کدام کشور وضعیت بدتری از نظر آلودگی به ویروس کرونا دارد؟ پاسخ خود را توضیح دهید (محقق ساخته)

هدف سؤال: سؤال پنجم در قالب مسئله‌ای تناسبی از نوع مقایسه عددی بر اساس موقعیت متناسب با شرایط و وضعیت ویژه جامعه از نظر بیماری کووید ۱۹ و با هدف بررسی توانایی دانش‌آموزان در تشکیل نرخ، مقایسه نرخ‌ها و بررسی تفکر ضربی دانش‌آموزان طراحی شده است.

جدول ۱۱. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های مربوط به سؤال پنج

| پاسخ‌ها | فراوانی | درصد فراوانی |
|---------|---------|--------------|
| نادرست | ۱۷۰ | ۳۸٫۵٪ |
| درست | ۲۷۲ | ۶۱٫۵٪ |



شکل ۶. درصد فراوانی هر یک از سطوح حل مسئله در سؤال پنج

همان‌طور که در جدول ۱۱ دیده می‌شود از بین ۴۴۲ دانش‌آموز ۲۷۲ دانش‌آموز (۳۸,۵٪) به این سؤال پاسخ درستی داده‌اند و ۱۷۰ دانش‌آموز (۶۱,۵٪) پاسخ نادرستی داده‌اند. در مقایسه پای‌های هفتم و هشتم و نهم عملکرد دانش‌آموزان با افزایش پایه تحصیلی افزایش یافته است. به‌گونه‌ای که به ترتیب دانش‌آموزان نهم و هشتم و هفتم بهترین عملکرد را در حل این سؤال از خود نشان دادند. با بررسی پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان در این سؤال بر اساس سطوح حل مسئله می‌توان مشاهده کرد که ۴۹/۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال در سطح استدلال تناسبی قرار می‌گیرد.

سؤال پنجم از نوع مقایسه عددی است و دانش‌آموزان برای مقایسه وضعیت دو کشور از نظر ابتلا به بیماری دانش‌آموزان از روش‌های مختلفی اقدام به مقایسه نمودند از جمله تشکیل نرخ، مقایسه درصد مبتلایان، مقایسه کسرها و غیره. می‌توان گفت دانش‌آموزان در حل این سؤال عملکرد متوسطی از خود نشان داده‌اند. ۳۸,۵٪ درصد پاسخ‌ها نادرست بودند که عمدتاً ناشی از درک ناکافی از مفهوم نرخ، تشکیل درصد نادرست و مقایسه نادرست کسرها بودند. البته درصد قابل توجهی از دانش‌آموزان (۱۵,۴٪) نیز به ماهیت ضربی مسئله پی نبرده بودند و صرفاً با تمرکز بر فواصل جمعی اعداد و مقایسه مبتلایان به پاسخ نادرستی رسیده بودند که در سطح ۲ طبقه‌بندی شدند. ۱۹,۲٪ از پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال در سطح سه یعنی سطح توضیح کلامی قرار می‌گیرد؛ این بدین معنا است که آن‌ها ماهیت ضربی مسئله را درک کرده‌اند؛ اما در انتخاب راه درست برای استدلال درباره رابطه بین متغیرهای مسئله موفق نبوده‌اند. نکته قابل توجه این بود که چون این سؤال متناسب با شرایط جامعه و درباره موضوعی طرح گردیده بود که جامعه و دانش‌آموزان با آن درگیر بودند، بیشتر دانش‌آموزان با این سؤال ارتباط خوبی برقرار کرده بودند و تنوع و فراوانی پاسخ‌ها قابل توجه بودند. سهم سایر سطوح عملکرد دانش‌آموزان در شکل ۶ قابل مشاهده است.

جدول ۱۲. نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان مربوط به سؤال پنج

| سؤال | نمونه پاسخ دانش‌آموزان به این سؤال | پاسخ |
|------|--|--------|
| سطوح | $\frac{\text{میتلایان کشور اول}}{\text{جمعیت کشور اول}} = \frac{۱۵۰۰۰۰۰۰}{۲۰۰۰۰۰۰۰۰} = \frac{۳}{۴۰}$ $\frac{\text{میتلایان کشور دوم}}{\text{جمعیت کشور دوم}} = \frac{۲۰۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰} = \frac{۱}{۱۵}$ $\left. \begin{array}{l} \text{کشور اول} = \frac{۹}{۱۲۰} \\ \text{کشور دوم} = \frac{۸}{۱۲۰} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{۹}{۱۲۰} > \frac{۸}{۱۲۰}$ <p>کشور دوم از نظر آلودگی به ویروس کرونا نسبت</p> <p>میتلایان به جمعیت مهم‌تر است برای تعیین کشور اول</p> <p>درصد مقلای بالاتری دارد</p> | درست |
| سطوح | $\frac{۱۵۰۰۰۰۰۰}{۲۰۰۰۰۰۰۰۰} = \frac{۱۵}{۲۰۰} = ۷,۵\%$ $\frac{۲۰۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰} = \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۲۰\%$ <p>۲۰ میلیون نفره با جمعیت ۲۰۰ میلیون نفری بدتر است</p> <p>۱۰ میلیون نفره با جمعیت ۱۰۰ میلیون نفری بدتر است</p> <p>۲۰ میلیون نفره با جمعیت ۲۰۰ میلیون نفری بدتر است</p> <p>۱۰ میلیون نفره با جمعیت ۱۰۰ میلیون نفری بدتر است</p> <p>۷۱۵ درصد مقلای</p> <p>۷۱۵ درصد مقلای</p> | نادرست |

کشور ۲۰ میلیون نفری. وضعیت بدتری دارد. چون برای هر ۱۰ میلیون نفر ۷۵۰ هزار نفر آلوده شده‌اند؛ ولی در کل کشور ۳۰ میلیون نفری از هر ده میلیون نفر ۷۰۰ هزار نفر آلوده شده‌اند.

حل: مقادیری که به دست آوردیم $\frac{۲۰۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰} = \frac{۱۵}{۱۰۰} = ۱۳,۳$ و $\frac{۲۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰} = \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۲۰$ مقادیر دوم بیشتر بود پس کشور دوم وضعیت بدتری از نظر آلودگی به ویروس کرونا دارد.

حل: در این مسئله نسبت جمعیت هر کشور را تعیین می‌کنیم

جایان $\frac{1000000}{150000000}$ و $\frac{1000000}{200000000}$ را در نظر می‌گیریم. چون این دو نسبت با هم بیشتر است.

کشور اول: ۱۰ میلیون نفر و یک میلیون بیست و هشت هزار نفر
 کشور دوم: ۲۰ میلیون نفر و ۲۴ میلیون نفر
 کشور اول: $10000000 + 28000000 = 38000000$
 کشور دوم: $20000000 + 24000000 = 44000000$
 پس وضعیت کشور اول روتر است.

حل: اختلاف جمعیت ۱۰ کشور ۱۰ میلیون نفر است و اختلاف تعداد مبتلایان ۵۰۰ هزار نفر است. کشور اول که ۱۰ میلیون نفر جمعیت دارد وضعیت بهتری دارد.

سطح دو

حل: اختلاف جمعیت دو کشور ۱۰ میلیون نفر است و اختلاف تعداد مبتلایان ۵۰۰ هزار نفر است. کشور اول که بیست میلیون نفر جمعیت دارد وضعیت بدتری دارد.

سطح دو

به‌طور کلی با توجه به نتایج حاصل از تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان در پاسخ‌دهی به سؤالات آزمون از راهبردهای مختلف حل مسئله استفاده نکرده‌اند و برخی از مشکلات آن‌ها مربوط به عدم توانایی در تشخیص راهبرد مناسب حل مسئله یا ناتوانی در به‌کارگیری راهبرد مناسب بود؛ به‌طور مثال عدم دقت به مفروضات مسئله، حل مسئله با تکیه بر حدس و بدون ارائه استدلال، درک ناکافی از مفهوم نرخ، مقایسه نادرست کسرها، بدفهمی در مفهوم درصد و نحوه به‌کارگیری آن و غیره. حتی مشاهده شد برخی در تشکیل جدول تناسب نیز دچار مشکل شده بودند. از سوی دیگر بخش عمده‌ای از پاسخ‌های نادرستی که دانش‌آموزان به سؤالات آزمون ارائه کردند، مربوط به عدم درک ماهیت مسئله است؛ چراکه درک ماهیت یک مسئله اولین گام در مسیر حل مسئله است. همان‌طور که در نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان در صفحات قبل مشاهده گردید بخش قابل توجهی از دانش‌آموزان مسائل ضربی را با راهبرد جمعی پاسخ داده بودند و بالعکس. پاسخ‌هایی که دانش‌آموزان به سؤالات آزمون ارائه دادند پس از بررسی دقیق و تحلیل،

متناسب با میزان درک مسئله از نظر جمعی یا ضربی یا ثابت بودن و همچنین نحوه استدلال و به‌کارگیری راهبردهای حل مسئله در موقعیت مناسب و رسیدن به هدف مسئله در هر یک از شش سطح از چارچوب نظری پژوهش طبقه‌بندی شدند. پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان متناسب با معیارهایی که اشاره شد در سطوح چهار تا شش و به طریق مشابه پاسخ‌های نادرست در سطوح یک تا سه طبقه‌بندی شدند. نتایج نشان داد بیشتر پاسخ‌ها در سطح پنج (استدلال تناسبی) معنادار بودند. لازم به ذکر است که بخش قابل توجهی از پاسخ‌ها در سطح دو قرار داشت که نمایانگر عدم درک یا درک ناکافی دانش‌آموزان از ماهیت ضربی یا جمعی یا ثابت مسائل تناسبی بود. هر یک از سطوح دیگر نیز در پاسخ‌ها سهمیم بودند و کمترین سطح از نظر فراوانی پاسخ‌های تعلق‌گرفته، سطح شش (استدلال تناسبی پیشرفته) بود؛ چراکه تعداد پاسخ‌های بسیار اندکی مشاهده گردید که درک بالای دانش‌آموزان از مفاهیم مرتبط با تناسب را نشان دهد یا اتخاذ چندین راهبرد حل مسئله درست را در خود جای داده باشد.

به‌طور کلی با توجه به نتایج حاصل از تحلیل پاسخ‌ها به سؤالات آزمون مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان در پاسخ‌دهی به سؤالات آزمون از راهبردهای مختلف حل مسئله استفاده نموده‌اند و برخی از مشکلات آن‌ها مربوط به عدم توانایی در تشخیص راهبرد مناسب حل مسئله یا ناتوانی در به‌کارگیری راهبرد مناسب بود (جدول ۱۲).

به‌طور مثال عدم دقت به مفروضات مسئله، حل مسئله با تکیه بر حدس و بدون ارائه استدلال، درک ناکافی از مفهوم نرخ، مقایسه نادرست کسرها، بدفهمی در مفهوم درصد و نحوه به‌کارگیری آن و غیره. حتی مشاهده شد برخی در تشکیل جدول تناسب نیز دچار مشکل شده بودند. از سوی دیگر بخش عمده‌ای از پاسخ‌های نادرستی که دانش‌آموزان به سؤالات آزمون ارائه کردند، مربوط به عدم درک ماهیت مسئله است؛ چراکه درک ماهیت یک مسئله اولین گام در مسیر حل مسئله است. همان‌طور که در نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان در صفحات قبل مشاهده گردید بخش قابل توجهی از دانش‌آموزان مسائل ضربی را با راهبرد جمعی پاسخ داده بودند و بالعکس. پاسخ‌هایی که دانش‌آموزان به سؤالات آزمون ارائه دادند پس از بررسی دقیق و تحلیل، متناسب با میزان درک مسئله از نظر جمعی یا ضربی یا ثابت بودن و همچنین نحوه استدلال و به‌کارگیری

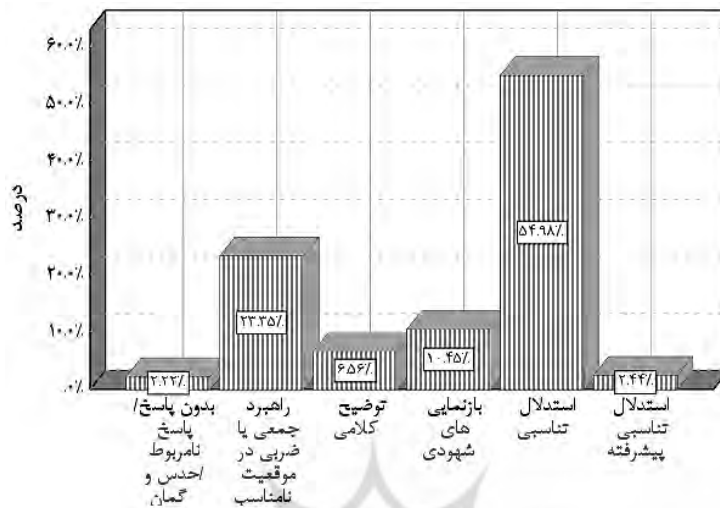
راهبردهای حل مسئله در موقعیت مناسب و رسیدن به هدف مسئله در هر یک از شش سطح از چارچوب نظری پژوهش طبقه‌بندی شدند. پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان متناسب با معیارهایی که اشاره شد در سطوح چهار تا شش و به طریق مشابه پاسخ‌های نادرست در سطوح یک تا سه طبقه‌بندی شدند که مشاهده شد بیشتر پاسخ‌ها در سطح پنج (استدلال تناسبی) معنادار بودند. البته لازم به ذکر است که بخش قابل توجهی از پاسخ‌ها در سطح دو قرار داشت که نمایانگر عدم درک یا درک ناکافی دانش‌آموزان از ماهیت ضربی یا جمعی یا ثابت مسائل استدلال تناسبی بود. هر یک از سطوح دیگر نیز در پاسخ‌ها سهیم بودند و کمترین سطح از نظر فراوانی پاسخ‌های تعلق گرفته، سطح شش (استدلال تناسبی پیشرفته) بود؛ چراکه تعداد پاسخ‌های بسیار اندکی مشاهده گردید که درک بالای دانش‌آموزان از مفاهیم مرتبط با تناسب را نشان دهد یا اتخاذ چندین راهبرد حل مسئله درست را در خود جای داده باشد.

بررسی و تحلیل کمی عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی

در این بخش با استفاده از داده‌های آماری گردآوری شده، پس از کدگذاری داده‌ها و طبقه‌بندی آن‌ها مطابق با چارچوب پژوهش، محققین اقدام به بررسی فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به هر یک از سطوح پژوهش پرداختند. نتایج این بررسی‌ها در جدول ۱۳ و شکل ۷ قابل مشاهده است.

جدول ۱۳. درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون به تفکیک سطوح چارچوب پژوهش

| سطوح عملکرد حل مسئله | فراوانی | درصد فراوانی |
|---------------------------------------|---------|--------------|
| بدون پاسخ / پاسخ نادرست / حدس و گمان | ۴۹ | ۲/۲ |
| راهبرد جمعی یا ضربی در موقعیت نامناسب | ۵۱۶ | ۲۳/۳ |
| توضیح کلامی | ۱۴۵ | ۶/۶ |
| بازنمایی‌های شهودی | ۲۳۱ | ۱۰/۵ |
| استدلال تناسبی | ۱۲۱۵ | ۵۵/۰ |
| استدلال تناسبی پیشرفته | ۵۴ | ۲/۴ |
| مجموع پاسخ‌ها | ۲۲۱۰ | ۱۰۰/۰ |



شکل ۷. درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون به تفکیک سطوح چارچوب پژوهش

در مجموع با توجه به داده‌های شکل ۷ و پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان به تفکیک سطوح چارچوب پژوهش مشاهده می‌شود که ۲٫۲۲ درصد از پاسخ‌ها به سؤالات آزمون در سطح بدون پاسخ، پاسخ‌های نادرست و مبتنی بر حدس و گمان قرار دارند. ۵۴٫۹۸ درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان سؤالات آزمون سطح استدلال تناسبی قرار گرفته است و ۲۳٫۳۵ درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان در سطح راهبردهای جمع‌ی و ضربی در موقعیت نامناسب قرار می‌گیرد.

همچنین هر یک از سطوح استدلال تناسبی پیشرفته، ۲٫۴۴٪، بازنمایی‌های شهودی ۱۰٫۴۵٪ و توضیح کلامی ۶٫۵۶٪ از پاسخ‌ها را به خود اختصاص می‌دهند. لذا می‌توان به این نتیجه رسید که عملکرد بیشتر دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی در سطح استدلال تناسبی معنادار بود. نتیجه قابل تأمل این است که درصد قابل توجهی از پاسخ‌ها (۲۳٫۳۵ درصد) به تکالیف آزمون در سطح دوم (راهبرد جمع‌ی یا ضربی در موقعیت نامناسب) قرار داشت که این موضوع می‌تواند به عدم توانایی دانش‌آموزان در تمیز موقعیت‌های تناسبی از غیرتناسبی و استفاده نابجا از استدلال تناسبی در موقعیت‌های جمع‌ی و ضربی باشد که بنا بر ویلند و همکاران (۲۰۲۰) لیندا و همکاران (۲۰۱۱) لوباتو و همکاران (۲۰۱۰) و لامون (۲۰۲۰) یکی از مهم‌ترین نقاط ضعف دانش‌آموزان

متوسطه اول در مواجهه با مسائل استدلال تناسبی است. ریشه این موضوع را می‌توان در عدم درک روابط جمعی یا ضربی موجود بین متغیرهای مسئله و درک ناکافی از مفاهیمی چون نسبت‌ها، کسرها، نرخ و تناسب دانست (ون دورن، ۲۰۱۶؛ بن چایم و همکاران، ۱۹۹۸؛ لش، پست و بهر^۱، ۱۹۸۸؛ کرامر و پست، ۲۰۱۷).

جدول ۱۴. فراوانی پاسخ‌های دانش آموزان به تفکیک سه عامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه به تکالیف آزمون مطابق با سطوح عملکرد حل مسئله برگرفته از چارچوب پژوهش

| مجموع پاسخ‌ها | فراوانی پاسخ‌ها | | | | | | عملکرد حل مسئله به تفکیک سطوح چارچوب نظری | |
|---------------|-----------------|------|-------|------|-------------|------|---|---------------------------------------|
| | نوع مدرسه | | جنسیت | | پایه تحصیلی | | | |
| | تیزهوشان | عادی | پسر | دختر | نهم | هشتم | | هفتم |
| ۴۹ | ۲ | ۴۷ | ۳۷ | ۱۲ | ۱۲ | ۲۰ | ۱۷ | بدون پاسخ، پاسخ نادرست حدس و گمان |
| ۵۱۶ | ۴۱ | ۴۷۵ | ۲۸۹ | ۲۲۷ | ۱۹۹ | ۱۵۷ | ۱۶۰ | راهبرد جمعی یا ضربی در موقعیت نامناسب |
| ۱۴۵ | ۹ | ۱۳۶ | ۸۴ | ۶۱ | ۵۲ | ۴۹ | ۴۴ | توضیح کلامی |
| ۲۳۱ | ۱۵ | ۲۱۶ | ۱۶۷ | ۶۴ | ۱۱۳ | ۵۵ | ۶۳ | بازنمایی‌های شهودی |
| ۱۲۱۵ | ۹۸ | ۱۱۱۷ | ۷۰۲ | ۵۱۳ | ۵۶۴ | ۳۴۴ | ۳۰۷ | استدلال تناسبی |
| ۵۴ | ۵ | ۴۹ | ۳۶ | ۱۸ | ۳۰ | ۱۰ | ۱۴ | استدلال تناسبی پیشرفته |
| ۲۲۱۰ | ۱۷۰ | ۲۰۴۰ | ۱۳۱۵ | ۸۹۵ | ۹۷۰ | ۶۳۵ | ۶۰۵ | مجموع پاسخ‌ها |
| | ۲۲۱۰ | | ۲۲۱۰ | | ۲۲۱۰ | | | |

بررسی تأثیر عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه بر عملکرد حل مسئله تناسبی اهداف فرعی این پژوهش بررسی تأثیر سه عامل مهم یعنی پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه‌ای که دانش آموزان متوسطه اول در آن مشغول به تحصیل بودند (مدارس عادی و تیزهوشان) بر

1 . Lesh, Post & Behr

عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی بود. همچنین معناداری این تأثیر بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان در سطح اطمینان ۹۵ درصد- مطابق با چارچوب پژوهش که توسط مؤلفین و بر اساس ادبیات پژوهش تهیه و تنظیم شده بود- مورد بررسی قرار گرفت. اکنون به بررسی نتایج تأثیر هریک از عوامل به تفکیک پرداخته می‌شود. نتایج حاصل از بررسی عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان متوسطه اول در مسائل استدلال تناسبی به تفکیک سه عامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه در جدول ۱۴ قابل مشاهده است. در این جدول فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به تکالیف آزمون طی گردآوری داده‌ها به تفکیک سه عامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه قرار داده شده است که سهم هر یک از سطوح چارچوب نظری پژوهش از مجموع ۲۲۱۰ پاسخ ثبت شده قابل رؤیت هستند.

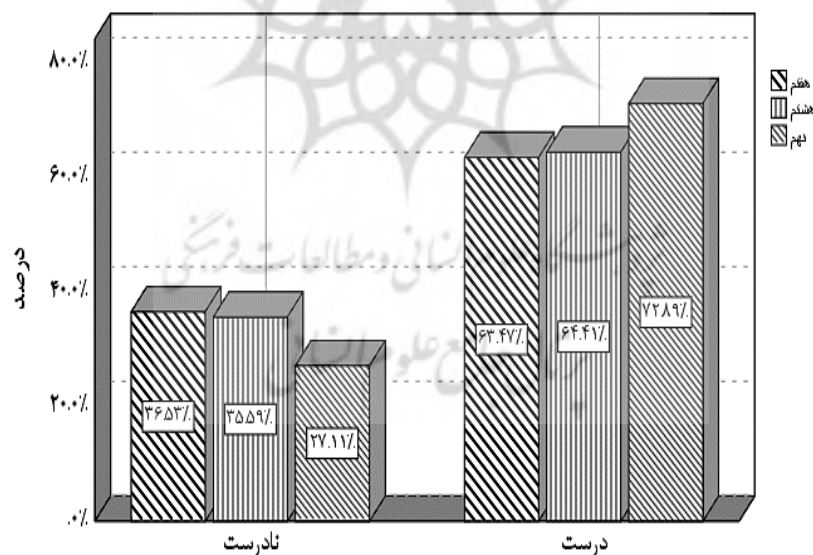
تأثیر پایه تحصیلی بر عملکرد حل مسئله

بسیاری از پژوهش‌های انجام گرفته در حوزه آموزش ریاضی به بررسی تأثیر عامل پایه تحصیلی بر روی عوامل مختلف دیگر مانند توانایی حل مسئله، طرح مسئله، خلاقیت ریاضی، یادگیری و غیره پرداخته‌اند (به عنوان نمونه حق جو و ریحانی، ۱۴۰۰). انتظار می‌رود با افزایش پایه تحصیلی عملکرد ریاضی دانش‌آموزان افزایش یابد. البته در ادبیات پژوهشی حوزه آموزش ریاضی، مواردی مشاهده شده است که با افزایش پایه تحصیلی عملکرد ریاضی دانش‌آموزان افت کرده است. به عنوان مثال می‌توان به پژوهش رفیع پور و گویا (۱۳۸۳) اشاره کرد، که در آن دانش‌آموزان پایه دوم و سوم راهنمایی به سؤالات مشترکی در زمینه‌های مختلف ریاضی پاسخ دادند. نتایج حاصل از مطالعه رفیع پور و گویا (۱۳۸۳) حاکی از آن بود که عملکرد دانش‌آموزان پایه دوم راهنمایی از عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی بالاتر بوده است، چراکه دانش‌آموزان دوم راهنمایی در مواردی که آموزش رسمی ندیده بودند بیشتر از عقل سلیم خود استفاده می‌کردند و به یافته‌های خود از این طریق اطمینان داشتند. در حالی که دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی بیشتر مایل بودند از الگوریتم‌ها و قواعد ریاضی که در همان پایه آموخته بودند برای پاسخگویی به مسائل

استفاده کنند. چنین پدیده‌ای قبلاً نیز توسط هاوسون در جریان مطالعه هشت کتاب درسی مربوط به کشورهای شرکت‌کننده در تیمز ۱۹۹۵، پیش‌بینی شده بود (هاوسون، ۱۹۹۶). در این پژوهش توانایی هر یک از دانش‌آموزان پایه‌های هفتم و هشتم و نهم به تفکیک در حل مسائل دارای مفاهیم تناسبی (نسبت، تناسب، نرخ و غیره) با توجه به چارچوب پژوهش در شش سطح موردبررسی قرار گرفت درصد پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان به تفکیک پایه تحصیلی در جدول ۱۵ قابل مشاهده است.

جدول ۱۵. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به تفکیک پایه تحصیلی

| درصد فراوانی | | فراوانی | | پایه تحصیلی |
|--------------|--------|---------|------|-------------|
| نادرست | درست | نادرست | درست | |
| ۳۶/۵۳٪ | ۶۳/۴۷٪ | ۲۲۱ | ۳۸۴ | هفتم |
| ۳۵/۵۹٪ | ۶۴/۴۱٪ | ۲۲۶ | ۴۰۹ | هشتم |
| ۲۷/۱۱٪ | ۷۲/۸۹٪ | ۲۶۳ | ۷۰۷ | نهم |



شکل ۸. درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به تفکیک پایه تحصیلی

با توجه شکل ۸ و نتایج جداول ۱۵ و ۱۶ می‌توان مشاهده کرد که بین پایه تحصیلی دانش‌آموزان و عملکرد آن‌ها ارتباط مستقیمی وجود دارد؛ به گونه‌ای که با افزایش پایه تحصیلی رشد توانایی حل مسئله تناسبی دانش‌آموزان روبرو هستیم. به منظور بررسی دقیق این ادعا از آزمون همبستگی اسپیرمن استفاده شده است.

جدول ۱۶. نتایج آزمون خی دو و آزمون همبستگی اسپیرمن برای رابطه بین پایه تحصیلی و عملکرد حل مسئله

| آزمون | مقدار | معناداری (دوطرفه) | درجه آزادی |
|----------------------|--------|--------------------|------------|
| خی دو پیرسون | ۱۰,۱۹۸ | ۰/۰۰۶ | ۱۰ |
| ضریب همبستگی اسپیرمن | ۰,۱۴۷ | ۰/۰۰۲ | |

با توجه به مقدار مثبت برای ضریب همبستگی اسپیرمن و همچنین مقدار معناداری این آزمون با سطح اطمینان ۹۵ درصد می‌توان این ادعا را کرد که بین عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در حل مسائل استدلال تناسبی و پایه تحصیلی آن‌ها رابطه‌ی مستقیم و معنادار وجود دارد و فرضیه صفر رد می‌شود. با توجه به نتایج عملکرد هر یک از دانش‌آموزان در مقاطع هفتم، هشتم و نهم مشاهده گردید که با افزایش پایه تحصیلی از هفتم تا نهم عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی نیز افزایش می‌یابد و توانایی استدلال تناسبی آن‌ها نیز توسعه پیدا می‌کند. بدین صورت که دانش‌آموزان پایه نهم هم میزان پاسخ‌های نادرست کمتری داشتند و هم درصد پاسخ‌هایی که در سطوح ۵ و ۶ یعنی استدلال تناسبی و استدلال تناسبی پیشرفته قرار می‌گرفت بیشتر بودند.

تأثیر جنسیت بر عملکرد حل مسئله

پژوهش‌های مختلفی در حوزه آموزش ریاضی صورت گرفته است که وجود تفاوت جنسیتی در عملکرد دختران و پسران را گزارش کرده‌اند (به‌عنوان نمونه رفیع‌پور و جوکار، ۱۳۹۱). در بخش عمده‌ای از تحقیقات انجام‌شده در مورد بررسی تفاوت‌های جنسیتی در آموزش ریاضی، با استفاده از آزمون‌های استانداردشده عملکرد ریاضی دختران و پسران باهم مقایسه شده است. در ایالات متحده آمریکا ارزیابی ملی پیشرفت تحصیلی برای مقایسه عملکرد ریاضی دختران و پسران

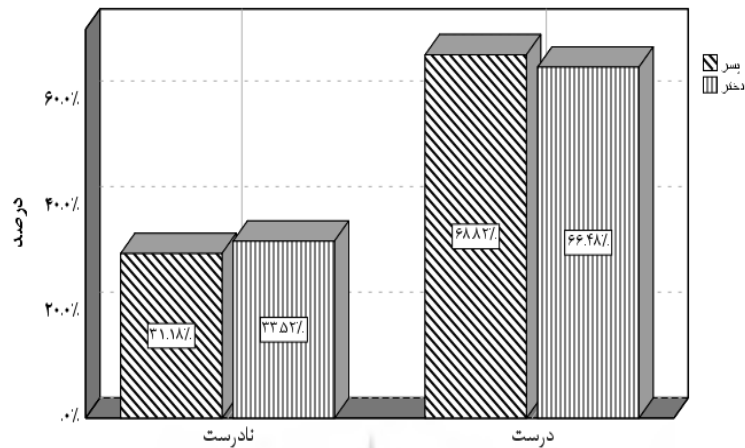
به‌کاربرده شده است (چی، ویگرت و ترلکلد، ۲۰۱۲). برخی از محققین نیز اشاره می‌کنند که راهبردهای مختلف حل مسئله پسران و دختران ناشی از تفاوت‌های بین آن‌ها است. شاید حضور پررنگ‌تر عواطف و احساسات در دختران نیز، در حل مسئله نقش داشته باشد (گالاگر و دلیسی^۱، ۱۹۹۴). گوریان (۱۳۸۳) اظهار می‌دارد که پسران در زمینه هوش منطقی - ریاضی وضع بهتری نسبت به دختران دارند و در مقایسه با دخترها بیشتر به این هوش متکی هستند. اما تلاش‌هایی که در بیست سال گذشته در زمینه تقویت هوش ریاضی دختران به‌عمل آمده است، نتایج مطلوبی بر جای گذاشته است به‌طوری‌که در حال حاضر شاهد شکوفایی دختران در ریاضیات هستیم (فیروس^۲، ۱۹۹۹). در پژوهش حاضر با در نظر گرفتن نقش جنسیت، وجود یا عدم وجود تفاوت جنسیتی در حل مسائل استدلال تناسبی مورد بررسی گرفته است. جدول ۱۷ و شکل ۹ رابطه بین جنسیت و عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی را نشان می‌دهند.

جدول ۱۷. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به تفکیک جنسیت

| درصد فراوانی | | فراوانی | | |
|--------------|-----------|-------------|-----------|------|
| پاسخ نادرست | پاسخ درست | پاسخ نادرست | پاسخ درست | |
| ۳۱/۱۸٪ | ۶۸/۸۲٪ | ۴۱۰ | ۹۰۵ | پسر |
| ۳۳/۵۲٪ | ۶۶/۴۸٪ | ۳۰۰ | ۵۹۵ | دختر |

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

1. Gallagher & DeLisi
2. Fierros



شکل ۹. درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به تفکیک جنسیت

جدول ۱۸. نتایج آزمون خن دو و آزمون همبستگی اسپیرمن برای رابطه بین جنسیت و عملکرد حل مسئله

| درجه آزادی | معناداری (دوطرفه) | مقدار | آزمون |
|------------|-------------------|-------|----------------------|
| ۵ | ۰,۲۴۷ | ۰,۶۴۸ | خن دو پیرسون |
| | ۰,۴۲۲ | ۰,۳۸ | ضریب همبستگی اسپیرمن |

با توجه به شکل ۹ و نتایج جداول ۱۷ و ۱۸ و مقدار ضریب به‌دست‌آمده می‌توان نتیجه گرفت که بین جنسیت دانش‌آموزان و عملکرد آن‌ها در حل مسائل استدلال تناسبی ارتباط معناداری وجود ندارد. به‌منظور بررسی دقیق این ادعا از آزمون همبستگی اسپیرمن استفاده شده است. با توجه به مقدار معناداری این آزمون با سطح اطمینان ۹۵ درصد این ادعا را کرد که بین عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در حل مسائل استدلال تناسبی و جنسیت آن‌ها رابطه‌ی معناداری وجود ندارد و فرضیه صفر تأیید می‌شود.

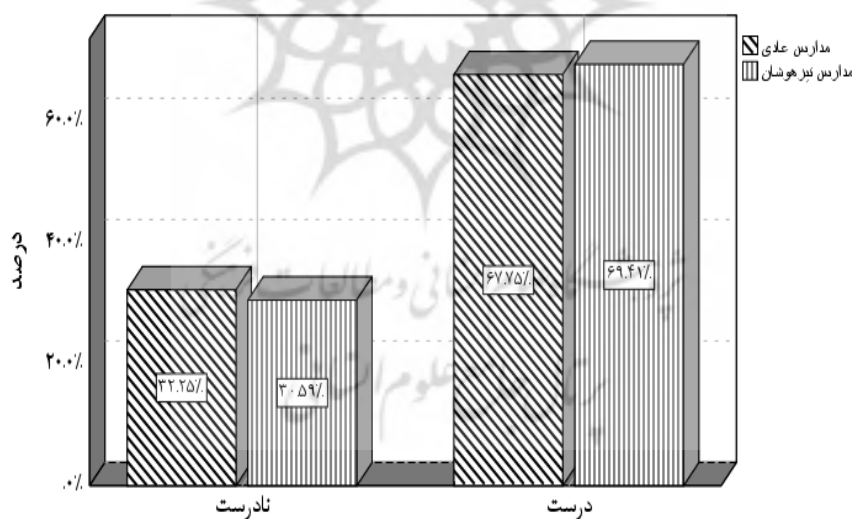
تأثیر نوع مدرسه بر عملکرد حل مسئله

بررسی‌ها نشان می‌دهند پژوهش‌های محدودی (به‌عنوان نمونه قدرتی، ۱۳۸۹) در زمینه مطالعه و مقایسه عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در انواع مدارس وجود دارد. بیشتر پژوهش‌های مرتبط با نوع

مدرسه، به مقایسه عملکرد انواع مدارس بر اساس عوامل دیگری همچون ویژگی‌های یادگیری سازمانی، بعد آموزشی و بعد پرورشی پرداخته‌اند. در همین راستا مطالعاتی بسیار اندکی با تأکید بر تأثیر نوع مدرسه بر استدلال تناسبی دانش‌آموزان در ایران انجام شده است؛ به‌طور مثال رفیع‌پور (۱۳۹۳) در پژوهشی به‌طور خاص به بررسی تأثیر نوع مدرسه بر استدلال تناسبی دانش‌آموزان پرداخته است. بدین ترتیب شایسته است به بررسی این موضوع با تعمق بیشتری پرداخته شود. جدول ۱۹ رابطه بین نوع مدرسه و عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی را نشان می‌دهد.

جدول ۱۹. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به تفکیک نوع مدرسه

| نوع مدرسه | فراوانی | | درصد فراوانی | |
|----------------|-----------|-------------|--------------|-------------|
| | پاسخ درست | پاسخ نادرست | پاسخ درست | پاسخ نادرست |
| مدارس تیزهوشان | ۱۱۸ | ۵۲ | ٪۶۹،۴۱ | ٪۳۰،۵۹ |
| مدارس عادی | ۱۳۸۲ | ۶۵۸ | ٪۶۷،۷۵ | ٪۳۲،۲۵ |



شکل ۵. درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به تفکیک نوع مدرسه

جدول ۲۰. نتایج آزمون خن و آزمون همبستگی اسپیرمن برای رابطه بین نوع مدرسه و عملکرد حل مسئله

| آزمون | مقدار | معناداری (دوطرفه) | درجه آزادی |
|----------------------|-------|-------------------|------------|
| خن دو پیرسون | ۵,۰۱۲ | ۰,۰۳۲ | ۵ |
| ضریب همبستگی اسپیرمن | ۰,۴۸۳ | ۰,۰۴۱ | |

با توجه به جدول ۲۰ و مقدار مثبت برای ضریب همبستگی اسپیرمن و همچنین مقدار معناداری این آزمون با سطح اطمینان ۹۵ درصد می‌توان این ادعا را کرد که بین عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در حل مسائل استدلال تناسبی و نوع مدرسه آن‌ها رابطه مستقیم و معنادار وجود دارد و فرضیه صفر رد می‌شود؛ یعنی با تغییر مدرسه از مدارس عادی به مدارس تیره‌شان شاهد افزایش چشمگیر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان هستیم و دانش‌آموزان مشغول به تحصیل در مدارس تیره‌شان نسبت به مدارس عادی عملکرد بهتری در حل مسئله تناسبی داشتند.

در این پژوهش تحلیل‌های کمی و کیفی نتایج همسو و تأییدکننده یکدیگرند. به‌طور مثال هنگامی که نتایج کمی عملکرد بهتر دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر را نشان می‌دهند، تحلیل‌های کیفی از تسلط این دانش‌آموزان در به‌کارگیری راهبردهای متفاوت و متنوع حل مسئله تناسبی و دستیابی به سطوح بالاتر استدلال تناسبی و نیز دست‌وپنجه نرم کردن با بدفهمی‌های کمتر در این زمینه خبر می‌دهند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش که به روش توصیفی-پیمایشی انجام شده است، عملکرد دانش‌آموزان مقطع متوسطه اول در حل مسائل استدلال تناسبی و همچنین تأثیر عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه بر حل مسائل استدلال تناسبی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به نتایج حاصل از تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان در پاسخ‌دهی به سؤالات آزمون از راهبردهای مختلف حل مسئله استفاده نموده‌اند و برخی از ایرادات آن‌ها مربوط به عدم توانایی در تشخیص راهبرد مناسب حل مسئله یا ناتوانی در به‌کارگیری راهبرد مناسب بود؛ به‌طور

مثال عدم دقت به مفروضات مسئله، حل مسئله با تکیه بر حدس و بدون ارائه استدلال، درک ناکافی از مفهوم نرخ، مقایسه نادرست کسرها، بدفهمی در مفهوم درصد و نحوه به‌کارگیری آن و غیره. از سوی دیگر بخش عمده‌ای از پاسخ‌های نادرستی که دانش‌آموزان به سؤالات آزمون ارائه کردند، مربوط به عدم درک ماهیت مسئله است؛ چراکه درک ماهیت یک مسئله اولین گام در مسیر حل مسئله است. بخش قابل توجهی از دانش‌آموزان ماهیت و نوع مسئله را از نظر ضربی یا جمعی بودن تشخیص ندادند و به پاسخ نادرست رسیدند. نتایج پژوهش حاکی از آن بود که اندکی بیشتر از نیمی از پاسخ‌ها در سطح پنج (استدلال تناسبی) قرار داشت. با این حال بخش قابل توجهی از پاسخ‌ها در سطح دو قرار داشت که نمایانگر عدم درک یا درک ناکافی دانش‌آموزان از ماهیت ضربی یا جمعی یا ثابت مسائل استدلال تناسبی بود. هر یک از سطوح دیگر نیز در پاسخ‌ها سهیم بودند و کمترین سطح از نظر فراوانی پاسخ‌های تعلق‌گرفته، سطح شش (استدلال تناسبی پیشرفته) بود؛ چراکه تعداد پاسخ‌های بسیار اندکی مشاهده شد که درک بالای دانش‌آموزان از مفاهیم مرتبط با تناسب را نشان دهد یا اتخاذ چندین راهبرد حل مسئله درست را در خود جای داده باشد. مشاهده شد که نتایج این پژوهش در این موارد با پژوهش‌های ون دورن و همکاران (۲۰۱۸)، لوباتو و همکاران (۲۰۱۰) و کرامر و همکاران (۲۰۱۷) همسو بوده است.

همچنین عوامل پایه تحصیلی و نوع مدرسه بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان در مسائل استدلال تناسبی تأثیر می‌گذارند و در سطح اطمینان ۹۵ درصد تفاوت معناداری بین عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان به تفکیک پایه‌های تحصیلی و مدارسی که در آنها مشغول به تحصیل بودند وجود داشت، اما عامل جنسیت تأثیری بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان نگذاشت و بین عملکرد دانش‌آموزان دختر و پسر در حل مسائل استدلال تناسبی در سطح اطمینان ۹۵ درصد تفاوت معناداری مشاهده نگردید. نتایج این پژوهش درباره تأثیر پایه تحصیلی با پژوهش‌ها و منابع موجود، همچون انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰؛ لش و همکاران، ۱۹۸۸؛ کرامر و پست، ۱۹۹۳، مطالعه رفیع‌پور و گویا (۱۳۸۳) همسو بود. یافته‌ها نشان دادند بالا رفتن پایه تحصیلی موجب افزایش عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان مقطع متوسطه اول در مسائل استدلال تناسبی شده است و در مجموع عملکرد کلی دانش‌آموزان نهم نسبت به پایه هشتم و پایه هشتم نسبت به پایه

هفتم در سطح بالاتری قرار داشت. این نتیجه حاکی از رشد و توسعه درک و فهم دانش‌آموزان از مفاهیم مرتبط با حوزه استدلال تناسبی مانند، کسرها، نسبت‌ها، نرخ‌ها، تناسب، درصد و غیره در طی گذر از پایه هفتم تا نهم بود. همان‌طور که در بسیاری از پژوهش‌های انجام‌شده (مانند لاش و همکاران (۱۹۸۸)، انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا (۲۰۰۰) لاش و هارل (۲۰۰۳))، بیان شده است، توانایی استدلال تناسبی دانش‌آموزان در طول پایه‌های پنجم تا نهم رشد و توسعه می‌یابد. درباره تأثیر عامل جنسیت نتایج مطالعه حاضر با پژوهش رفیع‌پور و جوکار (۱۳۹۱) - که در آن عملکرد پسران نسبت به دختران در حل یک مسئله غیرمعمول و تناسبی بیشتر بوده است - همسو نیست. می‌توان علت تأثیر جنسیت بر نتایج پژوهش رفیع‌پور و جوکار، (۱۳۹۱) را در این یافت که نوع مسئله مطرح‌شده که مسئله‌ای غیرمعمول بوده است موجب عملکرد متفاوت دانش‌آموزان دختر و پسر شرکت‌کننده در آن پژوهش شده است. البته در این پژوهش نتیجه حاصل‌شده درباره تأثیر جنسیت بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان در مسائل استدلال تناسبی مورد انتظار محققین بود. همچنین درباره تأثیر نوع مدرسه بر عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی نتایج این پژوهش با مطالعات انجام‌شده از جمله پژوهش‌های پورنگ و همکاران (۱۴۰۰)، رفیع‌پور (۱۳۹۳) و شریفی و قدرتی (۱۳۸۹) همسو می‌باشند. یافته‌ها دلالت‌های مفیدی را برای غنی‌تر ساختن فرصت‌های یادگیری در کتاب‌های درسی و همچنین تولید محتوای مناسب برای آموزش معلمان در اختیار می‌گذارد. موضوع تناسب از جمله موضوعاتی است که از دوره ابتدایی تا متوسطه حضور مستقیم و غیرمستقیم آن در مفاهیم درسی ریاضی و حتی غیر مرتبط با ریاضی احساس می‌شود. دانش‌آموزان همواره با آن و سایر مفاهیم حوزه استدلال تناسبی همانند نسبت‌ها، تناسب، کسرها، نرخ‌ها، درصد و غیره درگیر هستند. علاوه بر این آموزش بسیاری از مفاهیم عالی ریاضی مانند مفهوم مشتق بدون داشتن درک و مهارت کافی در استدلال تناسبی امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل انتظار می‌رود تا توجه بر روی نحوه آموزش مفاهیم بنیادی حوزه تناسب در دوره ابتدایی و متوسطه بیشتر باشد و برنامه‌ریزی آموزشی با نگاهی دقیق‌تر نسبت به یاددهی و یادگیری آن‌ها بنگرد. باوجود محدودیت‌های کرونایی همچون تعطیلی مدارس و مراکز آموزشی و کاهش دسترسی حضوری به دانش‌آموزان که در طول فرایند این پژوهش که می‌توانست مسیر پژوهش را

با چالش‌هایی مواجه نماید، تمامی فرایندهای پژوهش به صورت مجازی در بستر پیام‌رسان‌های اجتماعی (که مهم‌ترین آن‌ها شبکه دانش‌آموزی شاد بود) اجرا شد و پاسخ‌های دانش‌آموزان از همین طریق گردآوری شد و تجزیه و تحلیل بر روی آن‌ها با استفاده از نرم‌افزارهای آماری صورت پذیرفت. در ضمن این پژوهش مشخص شد عوامل دیگری نیز می‌توانند بر عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در حل مسائل استدلال تناسبی تأثیرگذار باشند؛ از جمله نحوه طراحی تکالیف، روابط بین متغیرهای مسئله تناسبی و ساختار تکالیف طرح‌شده مرتبط با تناسب و استدلال تناسبی. این موضوعات و موضوعاتی چون تأثیر ساختار تکالیف تناسبی بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان، بررسی و شناسایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در حل مسائل استدلال تناسبی، بررسی توانایی معلمان ابتدایی در حل مسائل استدلال تناسبی حائز اهمیت هستند و می‌توانند در پژوهش‌های بعدی توسط پژوهشگران آموزش ریاضی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرند.

منابع

- امیری، حمیدرضا و همکاران. (۱۳۹۹). *ریاضی پایه ششم دوره ابتدایی*، دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری وزارت آموزش و پرورش.
- امیری، حمیدرضا و همکاران. (۱۳۹۹). *ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه*، دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری وزارت آموزش و پرورش.
- امیری، حمیدرضا و همکاران. (۱۳۹۹). *ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه*، دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری وزارت آموزش و پرورش.
- پورنگ، افسانه؛ اصغری، نسیم؛ و شاهورانی سمنانی، احمد (۱۴۰۰). بررسی دانش‌پداگژی محتوای معلمان و دانشجومعلمان در حوزه استدلال تناسبی با تمرکز بر فعالیت آموزش حل مسئله در گونه‌های معنایی. *فناوری آموزش*، ۱۵(۲)، ۲۴۹-۲۶۰.
- حق‌جو، سعید؛ ریحانی، ابراهیم (۱۴۰۰). فراتحلیل کیفی چارچوب‌های ارزیابی مهارت‌های طرح مسئله ریاضی. *پژوهش در یادگیری آموزشگاهی و مجازی*. ۹(۳)، ۲۸-۹.
- رفیع‌پور، ابوالفضل؛ جوکار، لیلا (۱۳۹۱). بررسی نقش جنسیت و پایه تحصیلی در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در حل یک مسئله غیرمعمول. *نوآوری‌های آموزشی*، ۱۲(۴)، ۲۷-۴۴.

- رفیع‌پور، ابوالفضل (۱۳۹۳). بررسی نقش نوع مدرسه در استدلال تناسبی دانش‌آموزان. پژوهش در برنامه‌ریزی درسی، ۱۱ (۴۲)، ۲۴-۳۳.
- رفیع‌پور، ابوالفضل؛ گویا، زهرا. (۱۳۸۳). چرا عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در تیمز منحصر به فرد بود؟ رشد آموزش ریاضی، ۱۵، ۷۵، ۲۲-۱۵.
- قدرتی، مهدی (۱۳۸۹). بررسی خلاقیت دانش‌آموزان دختر تیزهوش مدارس استعدادهای درخشان غیر انتفاعی و دولتی. روان‌شناسی تحلیلی شناختی، ۳ (۱)، ۴۰-۳۱.
- گوریان، م. (۱۳۸۳). یادگیری متفاوت دخترها و پسرها، ترجمه قراچه‌داغی، مهدی. تهران: پیک بهار.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91, 126.
- Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th-grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 247-273.
- Benson, S. L. D. (2009). *The influence of studying students' proportional reasoning on middle school mathematics teachers' content and pedagogical content knowledge*. University of Houston.
- Copur-Gencturk, Y., Baek, C., & Doleck, T. (2022). A Closer Look at Teachers' Proportional Reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-17. DOI: 10.1007/s10763-022-10249-7
- Che, M. & Wiegert, K & Threlkeld, K. (2012). Problem solving strategies of girls and boys in singlesex Mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 311-326. DOI:10.1007/s10649-011-9346-x
- Cramer, K. (2017). Numerical reasoning: Number systems, ratio, and proportional relationships. *Reasoning and sense making in the mathematics classroom, grades, 6-8*.
- Cramer, K. A., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications: Middle grades mathematics. In *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). Macmillan Publishing Company.
- Degrande, T., Verschaffel, L., & Dooren, W. V. (2016). Proportional word problem solving through a modeling lens: A half-empty or half-full glass?. In *Posing and solving mathematical problems* (pp. 209-229). Springer, Cham.
- Dole, S., Clarke, D., Wright, T., & Hilton, G. (2012). Students' proportional reasoning in mathematics and science. In *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 195-202).
- Eckert, J. M. (1995). Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS): international accountability and implications for science instruction. *Research in Comparative and International Education*, 3(2), 202-210. DOI: 10.2304/rcie.2008.3.2.20

- Fierros, E. G. (1999). *Examining gender differences in mathematics achievement on the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Boston College.
- Fisher, L. (1988). Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), 157–168. DOI: 10.2307/749409
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical strategies*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Gallagher, A. M., & De Lisi, R. (1994). Gender differences in Scholastic Aptitude Test: Mathematics problem solving among high-ability students. *Journal of Educational Psychology*, 86(2), 204. DOI: 10.1037/0022-0663.86.2.204
- Harel, G., & Behr, M. (1989). Structure and hierarchy of missing value proportion problems and their representations. *Journal of Mathematical Behavior*, 8(1), 77–119. DOI:10.1080/19477503.2017.1375361
- Howson, G. (1996). Looking back-and looking forward. *The Mathematical Gazette*, 80(487), 129-136. DOI: 10.5406/visuartsrese.42.2.000v
- Hino, K., & Kato, H. (2018). Teaching whole-number multiplication to promote children's proportional reasoning: A practice-based perspective from Japan. *ZDM: the international journal on mathematics education* 51(1), 127-137. DOI:10.1007/s11858-018-0993-6
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures (Vol. 22). Psychology Press. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 41–61.
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational studies in Mathematics*, 14(3), 219–233.
- Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for research in mathematics education*, 24(1), 41–61. DOI: 10.2307/749385
- Lamon, S. J. (2005). *More: In-depth discussion of the reasoning activities in Teaching fractions and ratios for understanding*. Routledge.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1, 629–667. DOI:10.1007/s10763-010-9249-9
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content 83 and Instructional Strategies for Teachers*. Routledge.

- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). *Proportional reasoning*. In *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In *J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum and National Council of Teachers of Mathematics.
- Linda A. (2011). *Designing a research-based test for eliciting students' prior understanding on proportional reasoning*. CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland. HAL-01950529
- Lobato, J., Orrill, C., Druken, B., & Jacobson, E. (2011). Middle school teachers' knowledge of proportional reasoning for teaching. In *Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), New Orleans, LA. Abstract retrieved from <http://www.kaputcenter.umassd>*.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Petit, M. M., Laird, R. E., Wyneken, M. F., Huntoon, F. R., Abele-Austin, M. D., & Sequeira, J. D. (2020). *A focus on ratios and proportions: Bringing mathematics education research to the classroom*. Routledge.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2016). *Elementary and middle school mathematics*. London: Pearson Education UK.
- Van Dooren, W., Vamvakoussi, X., & Verschaffel, L. (2018). Proportional Reasoning. Educational Practices Series 30. *UNESCO International Bureau of Education*.
- Vysotskaya, E., Lobanova, A., Rekhman, I., & Yanishevskaya, M. (2021). The challenge of proportion: does it require rethinking of the measurement paradigm? *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 429–446. DOI:10.1007/s10649-020-09987-8
- Weiland, T., Orrill, C. H., Nagar, G. G., Brown, R. E., & Burke, J. (2021). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(2), 179–202. DOI: DOI:10.1007/s10857-019-09453-0