Educational and Scholastic Studies *http://pma.cfu.ac.ir/*
Vol. 12, No. 3, Autumn 2023 *Print ISSN: 2423-494X*
pp. 511- 534 *Online ISSN: 2645-8098*

Investigating the Role of Representations on the Problem-solving Performance of Seventh Grade Students in Solving Word Proportional Problems

Azam Rezaei[1], Nasim Asghary[2*], Mohammad HassanBehzadi[3], Ahmad Shahvarani Semnani[4], Mahdi Azhini[5]

1. Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
2. Department of Mathematics, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
3. Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
4 Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
5. Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

(Received: January 12, 2022; Accepted: October 18, 2023)

Abstract

The purpose of the present study is to investigate the role of representations in the problem solving performance of seventh grade students in solving word problems including proportional reasoning. The statistical population of this study included 8425 seventh grade students in Hamedan and the sample size using Cochran's formula was 269 people who were selected by convenience sampling method. The research was conducted by a mixed method. Data were collected through two tests taken from Lobato (2010), which were exactly the same in both tests; With the difference that in the second test, next to each task, visual or verbal representation was used. The content and face validity of the questions of both tests were confirmed by experts. To check the reliability, the halving method was used. Guttman coefficient was 0.913 in questions without representation and 0.840 in questions without representation, which has good reliability. Students' performance in solving proportional verbal problems in the second and third grade comprehension was examined and the results showed that most students comparatively multiply values and understand the effect of changing a value on the measured ratio. Also, the data were analyzed using paired t-test and a significance level of zero was obtained. Therefore, the desired effect of using representations in responding to these tasks was confirmed.

Keywords: Problem solving, Proportional reasoning, Representation, Seventh grade students.

∗ **Corresponding Author, Email:** m.salimi.ui@gmail.com

مطالعات آموزشی و آموزشگاهی
دورهٔ ۱۲، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۴۰۲
صفحات ۵۳۴ ــ ۵۱۱

http://pma.cfu.ac.ir/
شاپای چاپی: X۴۹۴-۲۴۲۳
شاپای الکترونیکی: ۸۰۹۸-۲۶۴۵

بررسی نقش بازنمایی‌ها در عملکرد حل مسئلهٔ دانش‌آموزان پایهٔ هفتم در مسائل کلامی تناسبی

اعظم رضایی[۱]، نسیم اصغری[۲*]، محمدحسن بهزادی[۳]، احمد شاهورانی سمنانی[۴]، مهدی آژینی[۵]

۱. گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
۲. گروه ریاضی، واحد تهران‌مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
۳. گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
٤. گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
٥. گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۲۶)

چکیده

هدف از مطالعهٔ حاضر، بررسی نقش بازنمایی‌ها در عملکرد حل مسئلهٔ دانش‌آموزان پایهٔ هفتم در حل مسائل کلامی شامل استدلال تناسبی است. جامعهٔ آماری این مطالعه شامل ۸۴۲۵ دانش‌آموز پایهٔ هفتم شهر همدان و حجم نمونه با استفاده از فرمول کوکران ۲۶۹ نفر بود که به روش نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند. پژوهش به روش آمیخته (کمی و کیفی) انجام شد. داده‌ها از طریق دو آزمون برگرفته از لوباتو (۲۰۱۰)، جمع‌آوری شد که دقیقاً در هر دو آزمون یکسان بودند؛ با این تفاوت که در آزمون دوم در کنار هر تکلیف، از بازنمایی تصویری یا کلامی استفاده شد. روایی محتوایی و صوری سؤالات هر دو آزمون توسط خبرگان تأیید شد. برای بررسی پایایی، از روش دونیمه‌کردن استفاده شد. ضریب گاتمن در سؤالات بدون بازنمایی ۰/۹۱۳ و در سؤالات با بازنمایی ۰/۸۴۰ به دست آمد که از پایایی مناسبی برخوردار است. عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی تناسبی در درک پایه‌ای دوم و سوم بررسی شد و نتایج نشان داد که اکثر دانش‌آموزان به صورت ضربی به مقایسهٔ مقادیر می‌پردازند و تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری‌شده را درک می‌کنند. همچنین، داده‌ها با استفاده از آزمون تی زوجی تحلیل شد و سطح معناداری صفر به دست آمد. بنابراین، تأثیر مطلوب استفاده از بازنمایی‌ها، در پاسخگویی به این تکالیف، تأیید شد.

واژگان کلیدی: استدلال تناسبی، بازنمایی، حل مسئله، دانش‌آموزان پایهٔ هفتم.

* نویسندهٔ مسئول، رایانامه: m.salimi.ui@gmail.com

مقدمه

یکی از توانایی‌های مهم در ریاضیات، استدلال تناسبی است. استدلال تناسبی یکی از استدلال‌های پایه‌ای است که دانش‌آموزان برای حل مسائل مرتبط با نسبت و تناسب باید در آن مهارت پیدا کنند. دانش مورد نیاز برای حل برخی مسائل، همچنین، درک اعداد گویا و استدلال تناسبی، تفکر ضربی است. بنابراین، می‌توان تفکر ضربی را به عنوان پیش نیاز مهم تلقی کرد. هارست[۱] (۲۰۱۵)، بیان می‌کند برای گذر از تفکر جمعی به ضربی باید مواردی را لحاظ کرد. سایمون، برد و ورگونا[۲] (۲۰۰۵)، اذعان می‌دارد انتقال از تفکر جمعی به ضربی یکی از مهمترین موانع در سال‌های میانی آموزش است. تحقیقات نشان می‌دهند که مدارس در پرداختن به مسائل مربوط به آموزش و یادگیری تفکر ضربی، تناسب و استدلال تناسبی با یک چالش قابل توجه روبه‌رو هستند. به طور خاص، به نظر سایمون، برد و ورگونا (۲۰۰۵)، باید برای توسعهٔ تفکر ضربی، آموزش دقیق اعداد گویا و هر آنچه در این زمینه لازم است، مورد توجه خاص قرار گیرد. وی عنوان می‌کند که توسعهٔ استدلال تناسبی یک روند تدریجی است. بدین معنا که در طول زمان و به تدریج توسعه می‌یابد. تدریجی‌بودن شکل‌گیری استدلال تناسبی دلیلی بر پیچیدگی این استدلال، برای آموزش و یادگیری آن است که با گذر زمان، به تدریج می‌توان بر این مشکل فائق آمد.

دُل و هیلتن[۳] (۲۰۱۵)، مطرح می‌کنند که ماهیت استدلال تناسبی، درک و ارتقای تفکر ضربی است، اما در برنامهٔ درسی ابتدایی، ساختارهای ضربی به خوبی توسعه نمی‌یابد. آن‌ها معتقدند که باید تغییراتی در روش تدریس اعداد کسری در دوره دبستان رخ دهد تا شاهد موفقیت‌هایی در توسعهٔ تفکر ضربی دانش‌آموزان باشیم (بهر[۴] و همکاران، ۱۹۹۲). همچنین، آن‌ها مشکلات دانش‌آموزان در توسعهٔ استدلال تناسبی را ناشی از آموزش مستقل مباحث ریاضی و عدم ارتباط‌دادن آن‌ها به یکدیگر می‌دانند. در استدلال تناسبی، درک رابطهٔ ضربی بین مقادیر، ضروری است، اما به دلیل شکاف در این مرحله، دانش‌آموزان مسیر مقایسهٔ جمعی به ضربی را به‌درستی طی نمی‌کنند و

1. Hurst
2. Siemon, Breed & Virgona
3. Dole & Hilton
4. Beher

در استدلال تناسبی همچنان به صورت جمعی به مقایسهٔ مقادیر می‌پردازند. رسیدن به تفکر ضربی بسیار مهم است چرا که پایه و اساس استدلال تناسبی است. به نظر می‌رسد با استفاده از برخی مداخلات، می‌توان باعث ارتقای استدلال تناسبی دانش‌آموزان شد و مواردی را که به عنوان پایهٔ استدلال تناسبی محسوب می‌شوند، تقویت کرد. در این زمینه برای مثال، می‌توان به بازنمایی[1]ها اشاره کرد که اثر شایان توجهی بر درک و فهم ریاضی دانش‌آموزان خواهد داشت. زیرا بازنمایی‌ها باعث می‌شوند تجسم مسئله برای دانش‌آموزان راحت‌تر و از حالت انتزاعی خارج شود. در مطالعات گذشته، به تأثیر مطلوب بازنمایی‌ها در آموزش ریاضی اشاره کرده‌اند (انگلیش و هالفورد[2]، ۱۹۹۵). به گفتهٔ سالکیند[3] (۲۰۰۷)، به دلیل ذهنی‌بودن ریاضی، برای یاددهی و یاگیری آن به بازنمایی احتیاج است. در واقع به خاطر ماهیت انتزاعی ریاضی، افراد از طریق بازنماییِ نظریات می‌توانند به ایده‌های ریاضی دسترسی پیدا کنند. فونگ و لی[4] (۲۰۰۹) اشاره کرده‌اند «روش مدل»[5] ابزار دانش‌آموزان سنگاپوری برای حل مسائل کلامی است. این روش، با بازنمایی متغیر به صورت مستطیل، مسئله را به صورت بصری درآورده، تجسم و تصور آن را بهتر و حل را برای دانش‌آموزان راحت‌تر می‌کند. همان‌طور که ریحانی، ریحانی، یافتیان و رضایی (۱۳۹۸)، تأثیر مطلوب روش مدل را در عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان پایهٔ هفتم بررسی و تأیید کردند. اما در مطالعات گذشته، به طور منسجمی اثر بازنمایی‌ها بر بهبود استدلال تناسبی بررسی نشده است. مسئلهٔ اساسی پژوهشگران از آن‌جا آغاز شد که هنگام آموزش مسائل نسبتی، رفتار دانش‌آموزان به طور دقیق‌تر، مورد بررسی قرار داده شد و این نتیجه حاصل شد که تعدادی از دانش‌آموزان به جای این‌که دو مقدار متناسب را به صورت ضربی با هم مقایسه کنند، به صورت جمعی با هم مقایسه می‌کنند و گاه اختلاف آن‌ها را به عنوان نسبت بین این دو مقدار بیان می‌کنند. به نظر می‌رسد اگر به طریقی از ماهیت انتزاعی و ذهنی‌بودن موضوع یادشده کاسته شود، دانش‌آموزان می‌توانند عملکرد مناسب‌تری از خود بروز دهند. احتمالاً استفاده از بازنمایی‌ها خصوصاً بازنمایی تصویری بتواند شکاف حاضر را مرتفع کند و بر ارتقای

1. Representation
2. English & Halford
3. Salkind
4. Fong & Lee
5. Model Method

درک تناسبی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود. با توجه به بررسی‌های به عمل آمده، ملاحظه شد در کشور ایران، تاکنون تأثیر بازنمایی‌ها بر استدلال تناسبی دانش‌آموزان، بررسی نشده است. در این مطالعه تصمیم بر آن است که با استفاده از بازنمایی‌های تصویری و کلامی، عملکرد حل مسائل تناسبی دانش‌آموزان را ارتقا داده و تأثیر استفاده از بازنمایی‌ها بر توانایی حل مسائل کلامی نسبتی آن‌ها بررسی شود. به نظر می‌رسد بازنمایی‌های تصویری، کلامی و دست‌ورزی‌ها باعث مجسم‌شدن موقعیت مسئله شده و به بهبود استدلال تناسبی و عملکرد حل مسئلهٔ دانش‌آموزان کمک می‌کند. از این رو، سؤالات تحقیق بدین صورت طراحی شد: سؤال اول پژوهش: عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی تناسبی چگونه است؟

۱-۱. آیا دانش‌آموزان در مسائل شامل استدلال تناسبی، دو مقدار را به صورت ضربی مقایسه می‌کنند؟

۱-۲. آیا دانش‌آموزان تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری‌شده را درک می‌کنند؟

سؤال دوم پژوهش: آیا بازنمایی‌ها بر عملکرد حل مسالهٔ دانش‌آموزان پایهٔ هفتم در حل مسائل کلامی شامل استدلال تناسبی اثرگذار است؟

پیشینه و چارچوب نظری پژوهش

همان‌طور که دُل و هیلتن (۲۰۱۵) مطرح می‌کنند بسیاری از کارهای زندگی روزمره به استدلال تناسبی نیاز دارد. ویلاند[1] و همکاران (۲۰۲۱) مطرح می‌کند استدلال تناسبی در ریاضیات مدرسه‌ای مهم است. با توجه به نقش استدلال تناسبی در اکثر فعالیت‌های زندگی و مدرسه، چگونگی شکل‌گیری استدلال تناسبی و توسعهٔ آن بسیار ضروری به نظر می‌رسد. با توجه به اهمیت موضوع، مطالعات بسیاری در این زمینه صورت گرفته است که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود.

استدلال تناسبی

توانایی استدلال به یکی از استانداردهای ریاضی دانش‌آموزان اشاره می‌کند. این توانایی نقش مهمی در درک مفاهیم ریاضیات دارد. استدلال نخستین چیزی است که باید فراگرفته شود زیرا، پایه‌ای

1. Weiland

برای یادگیری مفاهیم ریاضی است. استدلال فرایندی از تفکر است که به نتیجه‌گیری می‌انجامد و دارای انواع مختلفی است. یکی از انواع مهم آن، استدلال تناسبی است که دانش‌آموزان باید به کمک آن در حل مسائل مرتبط با آن مهارت پیدا کنند. سیلان و گولر[1] (۲۰۱۷) بیان می‌کنند استدلال تناسبی در حل مسائلی شامل اندازه‌گیری، احتمال، درصد، نسبت، هندسه، جبر، مثلثات، معادله و بسیاری از مسائل روزمره نقش مهمی ایفا می‌کند. چیم[2] و همکاران (۲۰۱۲) بیان کردند غالباً مفهوم نسبت و تناسب پایه و اساس بسیاری از امور محسوب می‌شود. به عبارت، ون دی ویل[3] (۲۰۱٤)، استدلال تناسبی، توانایی تشخیص نسبت در موقعیت‌های مختلف است. از همه مهم‌تر، نسبت، مقایسهٔ ضربی بین دو مقدار است (میسناسانتی[4] و همکاران، ۲۰۱۷). هارست (۲۰۱۵)، ادعا می‌کند تفکر ضربی مرحله‌ای مهم در فهم ریاضی دانش‌آموزان است و به روش‌های تدریس مفهوم‌سازی تفکر ضربی در مقالهٔ خود اشاره می‌کند.

میسناسانتی و همکاران (۲۰۱۷)، بیان می‌کنند استدلال تناسبی یعنی توان درک، تفسیر، تجزیه و مقایسهٔ اجزای تشکیل دهندهٔ یک رویداد مانند اندازه‌گیری دستورالعمل تهیه چیزی و یا محاسبهٔ تخفیف و ... . همچنین، استدلال تناسبی توانایی مقایسهٔ متناسب مقادیر است که برای مقایسهٔ یک موقعیت تناسبی، باید از مقایسهٔ ضربی استفاده کرد. به گفتهٔ ورگناد[5] (۲۰۰۹)، حوزهٔ مفهومی ساختارهای ضربی، شامل همهٔ شرایطی است که فرد، به عنوان مثال برای حل مسائل ساده و پیچیدهٔ نسبتی، به ضرب یا تقسیم نیاز دارد.

با توجه به اهمیت استدلال تناسبی در ریاضیات مدرسه‌ای، تاکنون آموزشگران بسیاری به این موضوع مهم پرداخته‌اند و به دشواری آن نیز اشاراتی کرده‌اند. از جمله جونگ[6] و همکاران (۲۰۰۷) که به توسعهٔ استدلال تناسبی در مقادیر گسسته و پیوسته پرداخته بود، او به نقل از میکس[7] و همکاران

---

1. Ceylan & Güler
2. Chaim
3. Van De Wale
4. Misnasanti
5. Vergnud
6. Jeong
7. Mix

(۲۰۰۲)، به ذکر دلیل دشواری استدلال تناسبی می‌پردازد. وی عنوان می‌کند هنگامی که مقادیر گسسته ارائه می‌شود، نخست شبیه موراد پیوسته با آن‌ها برخورد می‌کنند؛ که این مقایسهٔ دشواری است. دوم، هنگامی که موارد انتزاعی روبه‌رو می‌شوند، با شمارش آن‌ها، دچار چالش می‌شوند. از جمله لوباتو[1] (۲۰۱۰) مواردی را مطرح کرده است که به عنوان پایه و اساس شکل‌گیری استدلال تناسبی است. تفکر ضربی یکی از این موارد است. بدیهی است اگر این موارد اساسی به‌خوبی در دانش‌آموزان نهادینه شود، به شکل گیری مؤثرتر استدلال تناسبی کمک می‌کند. شاین، لی و استف[2] (۲۰۲۰) نیز به مقایسهٔ تفکر حسابی و استدلال تناسبی دانش‌آموزان پرداختند و به عوامل مؤثر بر رشد استدلال تناسبی اشاره کردند. سیلان و گولر (۲۰۱۷)، عنوان می‌کنند باید به دانش‌آموزان فرصت داده شود تا تا درک و فهم خود را بر اساس مثال‌های ارائه‌شده از شرایط متنوع نسبتی توسعه دهند. ارائهٔ چنین مسائلی در توسعهٔ استدلال تناسبی جالب و مؤثر است.

به اعتقاد هُدگِن، کو و براون[3] (۲۰۱٤)، دو حوزهٔ ریاضی که نقش مهمی در برنامهٔ درسی دانش‌آموزان ۱۱ تا ۱٤ ساله ایفا می‌کند، جبر و تفکر ضربی (نسبت و کاربرد ضربی اعداد گویا) است و به نظر می‌رسد این دو حوزه، موجب مشکلات ویژه‌ای در دانش‌آموزان می‌شوند. تفکر ضربی نه فقط در ریاضیات، بلکه در زندگی روزمره، خصوصاً در استفاده از درصد و نسبت‌ها مهم است. نسبت، تناسب و استدلال تناسبی حوزهٔ وسیعی از ریاضیات مدرسه‌ای را مطرح می‌کنند که هم یادگیری این مباحث برای دانش‌آموزان دشوار است و هم تدریس این مباحث برای معلمان چالش‌برانگیز است. در بررسی روند فعالیت‌های آموزشی و یادگیری، نگرش و روش تدریس معلم در نتایج تحصیلی دانش‌آموزان اثر دارد (اصغری، شاهورانی و مدقالچی[4]، ۲۰۱۳). بنابراین، اگر معلمان، با روش تدریس مناسبی این مباحث را به دانش‌آموزان بیاموزند و آن‌ها نیز، این مباحث را به‌خوبی یاد بگیرند در تجربیات آتی ریاضی خود، موفق‌تر خواهند شد. اما مشکل اساسی، در یادگیری این مباحث است. چنانچه اسمال[5] (۲۰۱۵)، بیان می‌کند استدلال تناسبی، برای تشخیص و

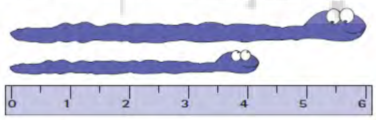
---

1. Lobato
2. Shin, Lee & Steffe
3. Hodgen, Coe & Brown
4. Asghary, Shahvarani & Medghalchi
5. Small

شکل‌گیری مقایسهٔ ضربی بین مقادیر است که در آن مقادیر به صورت ضربی و نه جمعی مقایسه می‌شوند. با وجود تمام تلاش‌هایی که در حوزهٔ آموزش ریاضی خصوصاً آموزش نسبت و تناسب صورت گرفته است؛ اما به دلیل انتزاعی‌بودن این حوزه، دانش‌آموزان در حل اینگونه مسائل، همچنان از عملکرد مناسبی برخوردار نیستند. هنگامی که در مسائل تناسبی دانش‌آموزان فقط به اختلاف بین اعداد توجه می‌کنند، احتمالاً به روابط تناسبی آگاه نیستند. در این هنگام دارای تفکر جمعی هستند و زمانی که دارای تفکر جمعی باشند، اختلاف بین اعداد را به عنوان نسبت بین آن‌ها مطرح می‌کنند (سایمون، برد و ورگونا، ۲۰۰۵).

لوباتو (۲۰۱۰) ده درک پایه‌ای[1] برای استدلال تناسبی معرفی می‌کند که آشنایی با این درک‌های پایه‌ای باعث درک بهتر مفهوم نسبت و تناسب و نحوهٔ شکل‌گیری آن می‌شود. این موضوع هم برای معلمان و هم برای دانش‌آموزان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این درک‌های پایه‌ای عبارت‌اند از: ۱. همراهی دو مقدار؛ ۲. مقایسهٔ ضربی دو مقدار؛ ۳. فهم تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری شده؛ ٤. بیان نسبت‌ها با کسرها، اگر چه نسبت‌ها و کسرها معنای یکسانی ندارند؛ ۵. تفسیر نسبت به عنوان خارج قسمت؛ ٦. تناسب رابطهٔ متعادل بین دو مقدار؛ ۷. اگر مقدار یک نسبت در عامل مشخصی ضرب یا تقسیم شود، مقدار دیگر نیز باید در همان مقدار ضرب یا تقسیم شود تا نسبت را ثابت نگه دارد. ۸. یک نسبت، به طور نامحدودی مجموعه‌ای از نسبت‌های معادل است. ۹. الگوریتم طرفین- وسطین[2] ۱۰. نمادهای صوری که در مسائل ارائه می‌شود، شواهد کافی از رابطه‌ی تناسبی بین دو مقدار را فراهم نمی‌کند. یعنی همواره اگر سه مقدار معلوم و یک مقدار مجهول باشد، مسئلهٔ تناسبی نیست.

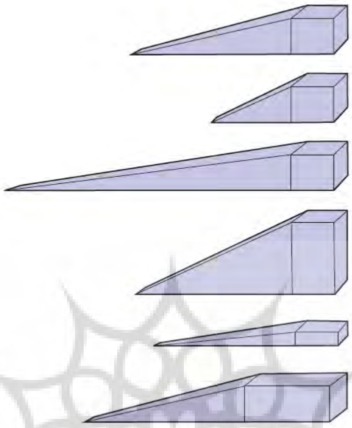
شکل‌های ۱ و ۲ نمونه‌ای از درک‌های پایه‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۱. درک پایه‌ای ۲: مقایسهٔ ضربی دو مقدار (لوباتو، ۲۰۱۰، ص۱۸).

1. Essential Understanding
2. Cross- Multiplication

در شکل ۱، سؤال این است: «طول کرم B چند برابر طول کرم A است؟» اگر دانش‌آموز پاسخ «$\frac{2}{3}$ برابر» را ارائه کند دارای «استدلال ضربی» است و اگر پاسخ «۲ سانتیمتر کوتاه‌تر است» را ارائه کند، دارای استدلال جمعی است.



شکل ۲. درک پایه‌ای ۳: تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری‌شده (لوباتو، ۲۰۱۰، ص۲۵).

اولین شکل (بالاترین شکل) در شکل ۲، سطح شیب‌دار اصلی را نمایش می‌دهد. در شکل دوم ارتفاع تغییر نکرده، اما طول ضلع قاعدهٔ سطح شیب‌دار کمتر شده است، همان‌طور که در شکل قابل رؤیت است سطح شیب‌دار، شیب بیشتری پیدا کرده است. در شکل سوم با افزایش ضلع قاعدهٔ سطح شیب‌دار، شیب سطح کمتر شده است. در شکل‌های چهارم و پنجم، با افزایش و کاهش ارتفاع سطح، به ترتیب شیب بیشتر و کمتر شده است. در شکل ششم، با افزایش طول تکیه‌گاه، شیب تغییری نکرده است.

مفهوم نسبت، در موقعیت‌های تناسبی برای مقایسهٔ اجزای تشکیل‌دهندهٔ آن موقعیت‌ها به کار می‌رود. استدلال تناسبی به آرامی در طول زمان شکل می‌گیرد. استدلال نسبی را می توان تغییر و توسعه داد (میسناسانتی، ۲۰۱۷). یکی از ابزارهایی که به کمک آن می‌توان استدلال تناسبی را توسعه داد، بازنمایی‌ها هستند که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

بازنمایی‌های چندگانه

به قول سالکیند (۲۰۰۷)، هنگامی که به بازنمایی‌ها توجه بیشتری شد، بازنمایی به استانداردهای فرایندی NCTM[1] اضافه شد. استاندارد بازنمایی در شورای معلمان ریاضی ایالات متحدهٔ امریکا بیان می‌کند که برنامه‌های آموزشی از پیش دبستان تا پایهٔ دوازدهم باید دانش‌آموزان را قادر کند تا بازنمایی را برای سازماندهی، ثبت و ارتباطی که با نظریات ریاضی ایجاد کرده است، به کار برند. همچنین، از بین بازنمایی‌های ریاضی، مدل مناسبی را برای حل مسائل انتخاب کرده و استفاده کنند. از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی، تعبیر رویدادهای فیزیکی، اجتماعی و پدیده‌های ریاضی استفاده می‌شود (NCTM, ۲۰۰۰).

بازنمایی‌ها روش‌هایی هستند که ایده‌های ریاضی به کمک آن‌ها نمایش داده می‌شود تا افراد بتوانند ایده‌ها را بفهمند و از آن‌ها استفاده کنند. دانش‌آموزان از بازنمایی‌ها به عنوان ابزارهایی استفاده می‌کنند تا از فهم ریاضی آن‌ها حمایت شود. بازنمایی اعداد شامل اشیاء، اعمال، تصاویر، نمادها، کلمات و دست‌ورزی‌ها است. گاهی معلمان برای ارائهٔ مطلبی ناگزیر هستند از چند نوع بازنمایی مختلف استفاده کنند برای مثال هم‌زمان از تصاویر، کلمات، نمادها و دست‌ورزی برای آموزش یک مفهوم استفاده می‌شود. به چنین مواردی بازنمایی‌های چندگانه[2] اطلاق می‌شود. ارائه و استفاده معلمان از بازنمایی‌های چندگانه در هنگام تدریس، بر افزایش دانش فراگیران و کاربرد بازنمایی‌ها مؤثر است. بنابراین، بررسی ماهیت بازنمایی‌های ریاضی و کاربرد آن‌ها در آموزش ریاضی مهم است. گلدین[3] (۲۰۰۲) بیان می‌کند بازنمایی، مدلی است که می‌تواند بعضی چیزها را به بعضی روش‌ها ارائه دهد. به دلیل ذهنی‌بودن ریاضی، برای یاددهی و یاگیری آن به بازنمایی احتیاج است. در واقع، به خاطر ماهیت انتزاعی ریاضی، افراد از طریق بازنماییِ نظریات می‌توانند به ایده‌های ریاضی دسترسی پیدا کنند. برونر[4] (۱۹۶۶)، سه روش متمایز برای بازنمایی را از طرق عمل، تصویر و زبان

1. National Council of Teachers of Mathematics
2. Multiplication Representations
3. Goldin
4. Bruner

وکلمات بیان کرد. او این بازنمایی‌ها را به ترتیب عملی، تصویری و نمادین معرفی کرد. بازنمایی قسمت مهمی از دانش یک معلم است (سالکیند، ۲۰۰۷). همان‌طور که سالکیند (۲۰۰۷)، به استناد پژوهش‌های قبلی نظیر ما [1] (۱۹۹۹) و بال[2] (۱۹۹۰) مطرح می‌کند اکثر معلمان قادر نیستند بازنمایی مناسبی را در برخی موضوعات درسی ارائه کنند.

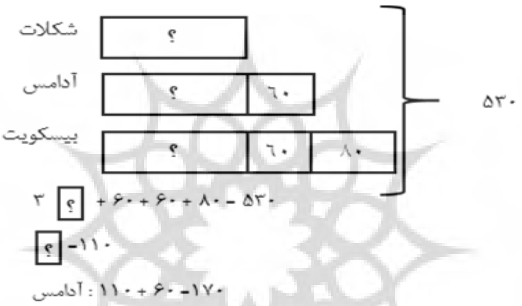
از بین انواع بازنمایی‌ها، بازنمایی تصویری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا دیدن، یک منبع مهم برای کسب اطلاعات در جهان است. در واقع، بیشترین اطلاعات مورد نیاز، از طریق حس دیداری کسب می‌شود. حتی مردم از زمان غارنشینی نیز، از تصاویر، برای ثبت اطلاعات و انتقال آن‌ها استفاده می‌کردند. اما نکتهٔ حائز اهمیت، این است که همه چیز دیده نمی‌شود، فقط مواردی رؤیت می‌شود که دقت و توجه فرد، به آن‌ها معطوف است (آرکاوی[3]، ۲۰۰۳). بنابراین، موضوع دیدن و تصویرسازی اشیاء حائز اهمیت است. زیرا تصویر سازی و بازنمایی اشیاء فرد را قادر می‌کند که با عمق بیشتر به مسألهٔ پیش رو بنگرد و آنچه را که در نگاه اول به چشم نمی‌آید، دریابد. یکی از بازنمایی‌های مفید را می‌توانیم «روش مدل» در نظر بگیریم. با توجه به مطالعات انجام یافته، دانش‌آموزان سنگاپوری از روشی به نام روش مدل[4] برای حل مسائل کلامی جبر و حساب استفاده می‌کنند. به این صورت که دانش‌آموزان مدارس ابتدایی سنگاپور با روش‌های واقعی و دیداری آموزش می‌بینند تا مسائل کلامی حساب و جبر را حل کنند. فونگ و لی (۲۰۰۹)، مطرح می‌کنند که در سال ۱۹۸۳ وزارت آموزش سنگاپور (MOE)[5] به طور رسمی یک روش رهیافتی مانند روش مدل را در برنامهٔ درسی ابتدایی، معرفی کرد. روش مدل می‌تواند به عنوان یک ابزار برای حل مسائل کلامی جبر و حساب شامل اعداد صحیح، کسرها، نسبت‌ها و درصدها به کار برده شود. آن‌ها بیان می‌کنند اگر دانش‌آموزان به ابزارهایی برای فهم شهودی مسائل کلامی مجهز شوند ساختار اساسی مسأله روشن‌تر خواهد شد. هنگامی که دانش‌آموزان ساختار مسأله را بهتر درک کنند، احتمال بیشتری دارد که بتوانند مسأله را حل کنند.

---

1. Ma
2. Ball
3. Arcavi
4. Model Method
5. Ministry of Education

با وجود موانعی که در حل مسائل جبری وجود دارد، نیاز به روش دیگری مانند روش مدل که برای دانش‌آموزان قابل فهم‌تر باشد، ضروری به نظر می‌رسد. در این شیوه نوعی بازنمایی نمادین رخ می‌دهد (مستطیل نمادی از مجهول در نظر گرفته می‌شود). مسئلهٔ زیر به روش مدل حل شده است:

مسئله: در یک مغازه، خانم عبدی ۵۳۰ تومان برای یک بیسکویت، یک آدامس، و یک شکلات خرج کرد. قیمت آدامس ٦٠ تومان بیشتر از شکلات و قیمت بیسکویت ۸۰ تومان بیشتر از آدامس است. قیمت آدامس چقدر است؟



شکل ۳. حل مسئله به کمک روش مدل (رضایی، ۱۳۹۳، ص۱۲۷).

همان‌طور که در حل مسئله دیده می‌شود، به جای مجهول که قیمت شکلات است، مستطیل قرار گرفته است. شهودی‌شدن مسئله، درک آن را بهتر و حل را راحت‌تر می‌کند.

تعدادی از مطالعات نشان داده‌اند که به کار بردن بازنمایی‌های واقعی و شهودی، عملکرد دانش‌آموزان را در حل مسائل کلامی بهبود می‌بخشد. مانند مطالعهٔ سالکیند (۲۰۰۷) که نشان داد استفاده از بازنمایی‌ها در حل مسئله کمک شایان توجهی می‌کند.

روش‌شناسی پژوهش

پژوهش حاضر، از نوع آمیخته (کمی و کیفی) است و تجزیه و تحلیل داده‌ها با استفاده از آمار توصیفی و استنباطی و کیفی از طریق تحلیل محتوا انجام شده است. جامعهٔ آماری این پژوهش، کلیهٔ

دانش‌آموزان دختر و پسر ناحیه‌های ۱ و ۲ شهر همدان می‌باشند که در سال تحصیلی ۹۹–۱۳۹۸ در پایهٔ هفتم مشغول به تحصیل بوده‌اند. فراوانی جامعهٔ آماری و نمونهٔ انتخاب‌شده در جدول ۱ آمده است:

جدول ۱. فراوانی جامعهٔ آماری و حجم نمونه

	جامعهٔ دانش‌آموزان دختر پایهٔ هفتم	جامعهٔ دانش‌آموزان پسر پایهٔ هفتم	نمونهٔ دانش‌آموزان دختر پایهٔ هفتم	نمونهٔ دانش‌آموزان پسر پایهٔ هفتم
ناحیهٔ ۱ همدان	۱۹۵٤ نفر	۲۲۲۸ نفر	۲۵ نفر	۹٦ نفر
ناحیهٔ ۲ همدان	۲۰۷٦ نفر	۲۱٦۷ نفر	۱٤۸ نفر	۰ نفر
کل	٤۰۳۰ نفر	٤۳۹۵ نفر	۱۷۳ نفر	۹٦ نفر
دختران و پسران دو ناحیه	۸٤۲۵ نفر		۲٦۹ نفر	

پژوهش حاضر، در زمان شیوع ویروش منحوس کرونا انجام پذیرفته بنابراین، جمع‌آوری داده‌ها به صورت مجازی صورت گرفته و از روش نمونه‌گیری در دسترس استفاده شده است. به این ترتیب که انجام این پژوهش در بستر فضای مجازی، به معلمان ریاضی اطلاع‌رسانی شد و از ایشان تقاضا شد تا با پژوهشگران این مطالعه در زمینهٔ جمع‌آوری اطلاعات همکاری کنند. با اعلام آمادگی تعدادی از معلمان، سؤالات آزمون بدون بازنمایی (آزمون اول) و با بازنمایی (آزمون دوم) در دو زمان مختلف با فاصلهٔ زمانی یک هفته، به صورت مجازی در اختیار معلمان قرار گرفت تا در بین دانش‌آموزان خود توزیع کنند. سپس، پاسخ‌های دانش‌آموزان نیز که به صورت مجازی جمع‌آوری‌شده بود، به پژوهشگران به صورت مجازی تحویل شد. برای تعیین تعداد نمونه از فرمول کوکران استفاده شده است: $n = \frac{NZ^2pq}{Nd^2+Z^2pq}$. که در آن خطا (d)= ۰٫۰٦، حجم جامعه (N)=۸٤۲۵ نفر، Z= ۱٫۹٦، p=q=۰٫۵، نمونه (n)= ۲۵۹ نفر. به این ترتیب حجم نمونه، ۲۵۹ نفر به دست آمد که جهت احتیاط بیشتر ۲٦۹ نفر دانش‌آموز به صورت نمونه در دسترس انتخاب شدند. که از این تعداد ۱۷۳ نفر دختر و ۹٦ نفر پسر بوده‌اند. تعداد نمونهٔ انتخاب‌شده به تفکیک جنسیت و ناحیه، در جدول ۱ آمده است.

ابزار اندازه‌گیری، دو آزمون بود که اغلب تکالیف آن از لوباتو (۲۰۱۰) گرفته شده بود. تعداد

فعالیت‌های هر دو آزمون ۱۹ تکلیف بود. تکالیف هر دو آزمون کاملاً یکسان بودند با این تفاوت که در آزمون دوم برای هر تکلیف از بازنمایی تصویری، یا کلامی استفاده شده بود ولی در آزمون اول از هیچ نوع بازنمایی استفاده نشد. روایی محتوایی و صوری هر دو آزمون، توسط برخی اساتید ریاضی و آموزش ریاضی و همچنین، دبیران ریاضی شاغل در استان همدان، تأیید شد. برای بررسی پایایی سؤالات آزمون، از روش دونیمه‌کردن استفاده شد. تکالیف هر دو آزمون در یک گروه ۳۹ نفره به عنوان پایلوت اجرا و داده‌های حاصل، وارد نرم‌افزار SPSS نسخهٔ ۲۶ شد. ضریب گاتمن در آزمون اول ۰٫۹۱۳ و در آزمون دوم ۰٫۸۴۰ به دست آمد که به دلیل این که در هر دو آزمون، ضریب گاتمن از ۰٫۷ بیشتر بود، آزمون‌ها از پایایی مناسبی برخوردار بودند. بنابراین، تغییری در تکالیف آزمون‌ها رخ نداد و برای اجرا بین ۲۶۹ نفر از دانش‌آموزان، توزیع شد.

یافته‌های پژوهش

برای جمع‌آوری داده‌ها دو آزمون به عمل آمد که هر دو دارای ۱۹ تکلیف بود و تکالیف هر دو آزمون دقیقاً یکسان بود، با این تفاوت که در آزمون دوم برای هر تکلیف از بازنمایی تصویری و یا کلامی استفاده شد. برای پاسخگویی به سؤال اول پژوهش سه تکلیف بررسی شد. با توجه به اینکه تکلیف دوم دارای دو قسمت، تکلیف سوم دارای پنج قسمت و تکلیف هفتم دارای یک قسمت بود، کلاً هشت تکلیف بررسی شد. هدف این هشت تکلیف، بررسی دومین و سومین درک پایه‌ای استدلال تناسبی از لوباتو (۲۰۱۰) است. دومین درک پایه‌ای نشان می‌دهد استدلال تناسبی، مقایسهٔ ضربی دو مقدار است و سومین درک پایه‌ای، تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری‌شده را نشان می‌دهد. برای پاسخگویی به سؤال دوم پژوهش، کل ۱۹ تکلیف بررسی شد.

تعداد کل پاسخ‌های به دست آمده ۲۶۹ مورد بود که چگونگی پاسخ‌های ارائه‌شده، تعداد و درصد پاسخ‌های درست، ناقص و نادرست به این سه تکلیف در جدول ۲ گرد آمده است. پاسخ‌های درست، پاسخ‌هایی بودند که از روش درست به پاسخ درست رسیده بودند. پاسخ‌های ناقص، پاسخ‌هایی بودند که قسمتی از راه حل درست بوده است که البته تعداد محدودی رؤیت شد. پاسخ‌های نادرست، کلاً از شیوهٔ نادرستی اقدام به حل شده بود.

جدول ۲. پاسخ‌های دانش‌آموزان به تکالیف آزمون

تکلیف	نوع پاسخ	آزمون بدون بازنمایی		آزمون با بازنمایی	
		تعداد	درصد	تعداد	درصد
تکلیف ۱–۱	پاسخ‌های درست	۱۹۸	۷۳٫۶	۲۰۸	۷۷٫۳
	پاسخ‌های ناقص	۰	۰	۲	۰٫۷
	پاسخ‌های نادرست	۷۱	۲۶٫٤	۵۹	۲۱٫۹
	تعداد کل	۲٦۹	۱۰۰	۲٦۹	۱۰۰
تکلیف ۲–۱	پاسخ‌های درست	۱٤۸	۵۵	۱۷٤	٦٤٫۷
	پاسخ‌های ناقص	۵	۱٫۹	٦	۲٫۲
	پاسخ‌های نادرست	۱۱٦	٤۳٫۱	۸۹	۳۳٫۱
	تعداد کل	۲٦۹	۱۰۰	۲٦۹	۱۰۰
تکلیف ۱–۲	پاسخ‌های درست	۱٦۱	۵۹٫۹	۲۰۵	۷٦٫۲
	پاسخ‌های ناقص	۰	۰	۰	۰
	پاسخ‌های نادرست	۱۰۸	٤۰٫۱	٦٤	۲۳٫۸
	تعداد کل	۲٦۹	۱۰۰	۲٦۹	۱۰۰
تکلیف ۲–۲	پاسخ‌های درست	۱٦۸	٦۲٫۵	۲۰٦	۷٦٫٦
	پاسخ‌های ناقص	۰	۰	۰	۰
	پاسخ‌های نادرست	۱۰۱	۳۷٫۵	٦۳	۲۳٫٤
	تعداد کل	۲٦۹	۱۰۰	۲٦۹	۱۰۰
تکلیف ۳–۲	پاسخ‌های درست	۲۱۸	۸۱	۲٤۹	۹۲٫٦
	پاسخ‌های ناقص	۰	۰	۰	۰
	پاسخ‌های نادرست	۵۱	۱۹	۲۰	۷٫٤
	تعداد کل	۲٦۹	۱۰۰	۲٦۹	۱۰۰
تکلیف ٤–۲	پاسخ‌های درست	۲۲۰	۸۱٫۸	۲٤۰	۸۹٫۲
	پاسخ‌های ناقص	۰	۰	۰	۰
	پاسخ‌های نادرست	٤۹	۱۸٫۲	۲۹	۱۰٫۸
	تعداد کل	۲٦۹	۱۰۰	۲٦۹	۱۰۰
تکلیف ۵–۲	پاسخ‌های درست	۲۱٤	۷۹٫٦	۲٤۳	۹۰٫۳
	پاسخ‌های ناقص	۰	۰	۰	۰
	پاسخ‌های نادرست	۵۵	۲۰٫٤	۲٦	۹٫۷
	تعداد کل	۲٦۹	۱۰۰	۲٦۹	۱۰۰

تکلیف	نوع پاسخ	آزمون بدون بازنمایی		آزمون با بازنمایی	
		تعداد	درصد	تعداد	درصد
تکلیف ۳	پاسخ‌های درست	۲۳۵	۸۷٫۴	۲۴۴	۹۰٫۷
	پاسخ‌های ناقص	۰	۰	۰	۰
	پاسخ‌های نادرست	۳۴	۱۲٫۶	۲۵	۹٫۳
	تعداد کل	۲۶۹	۱۰۰	۲۶۹	۱۰۰

تکالیف ۱ و ۳ در راستای پاسخگویی به سؤال ۱–۱ تحقیق و تکلیف ۳ در راستای پاسخگویی به سؤال ۱–۲ پژوهش بوده است.

حال به تفکیک سؤالات تحقیق به بررسی یافته‌ها پرداخته می‌شود.

سؤال اول پژوهش: عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی تناسبی چگونه است؟

۱–۱. آیا دانش‌آموزان در مسائل شامل استدلال تناسبی، دو مقدار را به صورت ضربی مقایسه می‌کنند؟

۱–۲. آیا دانش‌آموزان تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری شده را درک می‌کنند؟

سؤال ۱–۱ بر اساس دومین درک پایه‌ای لوباتو (۲۰۱۰)، است که بیان می‌کند استدلال تناسبی مقایسهٔ ضربی بین دو مقدار است. تکالیف ۲ و ۷ در این راستا است. پاسخ دانش‌آموزان به این تکالیف عبارت‌اند از:

پاسخ درست افراد به تکلیف ۱–۱ (۷۳٫۶ درصد در آزمون بدون بازنمایی و ۷۷٫۳ درصد در آزمون با بازنمایی) عبارت است از ۱٫۵ برابر، $\frac{6}{4}$ برابر و $\frac{3}{2}$ برابر. یکی از دانش‌آموزان نیز این پاسخ را بیان کرده است: «طول کرم الف $\frac{1}{2}$ برابر بیشتر از طول کرم ب است».

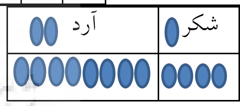
همچنین، پاسخ درست افراد به تکلیف ۱–۲ (۵۵ درصد در آزمون بدون بازنمایی و ٦٤٫٧ درصد در آزمون با بازنمایی)، عبارت است از: $\frac{2}{3}$ برابر، $\frac{4}{6}$ برابر، ۰٫٦ برابر، ۰٫٦٦٦٧ برابر و $\frac{1}{1/5}$ برابر. یک نفر هم پاسخ «کمی از نیم بیشتر تقریباً ۰٫۷ برابر» را بیان کرده است. یک نفر از دانش‌آموزان هم، این تکلیف را به صورت معادله حل کرده است: ٦×x=٤ $x=\frac{4}{6}$.

تکلیف ۱–۱ نسبت یک عدد بزرگتر از واحد و در تکلیف ۱–۲ نسبت یک عدد کوچکتر از

واحد بوده است. با مقایسهٔ درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به تکالیف مذکور، ملاحظه می‌شود هنگامی که نسبت یک عدد بزرگتر از واحد باشد، دانش‌آموزان عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند.

پاسخ‌های درست دانش‌آموزان به تکلیف ۳ (۸۷/٤ درصد در آزمون بدون بازنمایی و ۹۰/۷ درصد در آزمون با بازنمایی)، با روش‌هایی که در جدول ۳ گردآوری شده، به دست آمده است:

جدول ۳. انواع پاسخ‌های درست دانش‌آموزان در تکلیف ۳

انواع پاسخ‌های درست	تعداد در آزمون بدون بازنمایی	تعداد در آزمون با بازنمایی
– با استفاده از $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ پی می‌بریم که اگر ٨ پیمانهٔ آرد استفاده شود، باید ٤ پیمانهٔ شکر به کار رود. – هر چقدر آرد استفاده شود، نصف آن باید شکر استفاده شود. – چون آرد ٤ برابر شده، مقدار شکر نیز باید ٤ برابر شود. ٢×٤=٨ ١×٤=٤	٢٢٩	٢٣٦
 هر ٢ پیمانهٔ آرد، ١ پیمانهٔ شکر لازم دارد.	١	١
$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$شکر و $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$آرد، پس به ٤ پیمانهٔ شکر احتیاج است.	١	٠
شکر: ١، ٢، ٣، ٤ آرد: ٢، ٤، ٦، ٨	٤	٣
 (جدول ترسیم‌شده در متن تکلیف آزمون با بازنمایی را کامل کرده‌اند).	٠	٤
تعداد کل پاسخ‌ها	٢٣٥	٢٤٤

با مقایسهٔ درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به تکالیف ۱ و ۳ ملاحظه می‌شود اکثر دانش‌آموزان به تفکر ضربی رسیده و به صورت ضربی مقادیر را مقایسه می‌کنند. قسمت‌های اول و دوم تکلیف اول، به مقایسهٔ نسبت بزرگتر از واحد و کوچکتر از واحد می‌پردازد. در قسمت اول، نسبت یک عدد بزرگتر از واحد و قسمت دوم، نسبت یک عدد کوچکتر از واحد بوده است. با مقایسهٔ درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به این دو قسمت، ملاحظه می‌شود دانش‌آموزان در قسمت اول تکلیف دوم

که نسبت یک عدد بزرگتر از واحد بوده است عملکرد بهتری داشته‌اند. این نتیجه در آزمون دوم همراه با بازنمایی تکرار شده است.

سؤال اول پژوهش: عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی تناسبی چگونه است؟

۱-۲. آیا دانش‌آموزان تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری شده را درک می‌کنند؟

پنج قسمت تکلیف ۲ جهت پاسخگویی به این سؤال پژوهش و بر اساس سومین درک پایه‌ای لوباتو (۲۰۱۰)، بوده است که بیان می‌کند تغییر یک مقدار بر تغییر نسبت اندازه‌گیری‌شده تأثیر دارد.

پاسخ درست افراد به تکلیف ۲ که در قالب ۵ سؤال مطرح شده بود از سؤال ۱-۲-۱ تا ۱-۲-۵ در آزمون بدون بازنمایی به ترتیب ٪۵۹٫۹، ٪۶۲٫۵، ٪۸۱، ٪۸۱٫۸ و ٪۷۹٫۶ و در آزمون با بازنمایی به ترتیب، ٪۷۶٫۲، ٪۷۶٫۶، ٪۹۲٫۶، ٪۸۹٫۲ و ٪۹۰٫۳ بوده است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در تمامی تکالیف، وجود بازنمایی تصویری به درک بهتر مسئله و در نهایت، به حل درست‌تر مسئله کمک کرده است.

میزان پیشرفت دانش‌آموزان در سؤالات ۱-۲-۱ تا ۱-۲-۵ به ترتیب، ٪۱۶٫۳، ٪۱۴٫۱، ٪۱۱٫۶، ٪۷٫۴ و ٪۱۰٫۷ بوده است. داده‌های به دست آمده از تکلیف ۱-۲-۱ تا ۱-۲-۵ نشان می‌دهد، بازنمایی تصویری تأثیر شایان توجهی بر تشخیص تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری شده دارد.

با توجه به درصد بالای پاسخگویی دانش‌آموزان به هر پنج قسمت این تکلیف، ملاحظه می‌شود دانش‌آموزان تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری‌شده را درک می‌کنند. با مقایسهٔ نتایج آزمون بدون بازنمایی و با بازنمایی، بر می‌آید که وجود بازنمایی در کنار مسئلهٔ کلامی، توان درک مسئله را بالاتر می‌برد.

سؤال دوم پژوهش: آیا بازنمایی‌ها بر عملکرد حل مسئلهٔ دانش‌آموزان پایهٔ هفتم در حل مسائل کلامی شامل استدلال تناسبی اثرگذار است؟

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، برای جمع‌آوری داده‌های مورد نیاز این پژوهش، دو آزمون برگزار شد. به این ترتیب که در تکالیف آزمون اول، از هیچ گونه بازنمایی استفاده نشد اما تکالیف آزمون دوم، دقیقاً همان تکالیف قبل، به همراه بازنمایی‌های تصویری، یا کلامی استفاده گردید. با توجه به

آمار توصیفی و مقایسهٔ فراوانی و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان در آزمون دوم که یک بازنمایی همراه تکلیف مورد نظر استفاده شده توانایی دانش‌آموزان در حل مسئلهٔ کلامی بهبود یافته بود. برای بررسی میزان مؤثربودن بازنمایی‌ها از آمار استنباطی استفاده شد. برای بررسی تأثیر به کار بردن بازنمایی‌ها در توانایی پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤالات آزمون، پس از بررسی پیش‌فرض‌های لازم و نرمال‌بودن جامعه، آزمون آماری t زوجی با استفاده از نرم‌افزار SPSS نسخهٔ ۲۶ به کار رفت. نتایج این آزمون در جدول ٤ بیان شده است.

جدول ٤. آزمون تی نمونه‌های زوجی

میانگین	انحراف معیار	خطای معیار میانگین	مقدار t
−۰٫۹۳۹۵۹	۱٫۰۰۵۹٦	۰٫۰٦۱۳۳	−۱۵٫۳۱۹
بالاترین مقدار در سطح ٪۹۵ اطمینان	پایین‌ترین مقدار در سطح ٪۹۵ اطمینان	درجهٔ آزادی	معناداری
−۰٫۸۱۸۸۳	−۱٫۰٦۰۳۵	۲٦۸	۰٫۰۰۰

همان‌طور که جدول ٤ نشان می‌دهد به دلیل اینکه سطح معناداری از ۰٫۰۵ کمتر است، عملکرد دانش‌آموزان در این دو آزمون با استفاده از بازنمایی‌ها و بدون استفاده از بازنمایی‌ها دارای اختلاف معنادار است. یعنی هنگامی که در تکالیف، بازنمایی مناسبی به کار رفته است، دانش‌آموزان در پاسخگویی به سؤالات قدرت استدلال تناسبی بهتری داشته‌اند.

بحث و نتیجه‌گیری

هدف پژوهش حاضر، بررسی عملکرد دو درک پایه‌ای و نقش بازنمایی‌ها بر عملکرد حل مسئلهٔ دانش‌آموزان پایهٔ هفتم در مسائل کلامی تناسبی بود که به روش آمیخته انجام شد. برای جمع‌آوری و بررسی داده‌ها دو سوال پژوهشی طرح و بر اساس آن به تجزیه و تحلیل داده‌ها پرداخته شد. در راستای اولین سؤال این پژوهش «عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی تناسبی چگونه است؟» دو سوال فرعی طرح شد. برای پاسخگویی به اولین سؤال فرعی سؤال اول پژوهش، «آیا دانش‌آموزان در مسائل شامل استدلال تناسبی، دو مقدار را به صورت ضربی مقایسه می‌کنند؟» می‌توان اذعان داشت که بر اساس داده‌های حاصل و مقایسهٔ درصد پاسخگویی، اکثر دانش‌آموزان پایهٔ هفتم این

پژوهش، دارای تفکر ضربی بوده و به صورت ضربی داده‌ها را مقایسه می‌کنند. پاسخ‌های دانش‌آموزان شرکت کننده در مطالعۀ حاضر حاکی از آن است که استدلال تناسبی، مقایسۀ ضربی دو مقدار است. که این نتیجه با ادعای لوباتو (۲۰۱۰)، میسناسانتی و همکاران (۲۰۱۷) و تانک[1] (۲۰۲۰)، همسو است. اما تعداد دیگری از دانش‌آموزان شرکت‌کننده در پژوهش حاضر، به جای مقایسۀ ضربی به بیان اختلاف مقادیر و مقایسۀ جمعی پرداخته بودند. این نتیجه با ادعای اسمال (۲۰۱۵)، همسوست. همچنین، این نتیجه با ادعای دُل و هیلتن (۲۰۱۵) و سیلان و گولر[2] (۲۰۱۷)، هم راستاست که معتقدند مشکل اساسی دانش‌آموزان، در توسعۀ تفکر ضربی است و تعدادی از دانش‌آموزان مسیر انتقال از مرحلۀ جمعی به ضربی را به طور اصولی طی نمی‌کنند. همچنین، سایمون، برد و ورگونا (۲۰۰۵)، دُل و هیلتن (۲۰۱۵) مطرح می‌کنند، انتقال از تفکر جمعی به ضربی یکی از مهمترین موانع یادگیری است. این موضوع در تأیید سالکیند (۲۰۰۷) و آرکاوی (۲۰۰۳) و در راستای اهداف فرایندی استانداردهای آموزشی امریکا (NCTM,۲۰۰۰)، است. با مقایسۀ درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به دو قسمت تکلیف اول (قسمت اول نسبت یک عدد بزرگتر از واحد و قسمت دوم نسبت یک عدد کوچکتر از واحد بوده است)، ملاحظه می‌شود دانش‌آموزان در قسمت اول تکلیف دوم که نسبت یک عدد بزرگتر از واحد بوده است عملکرد بهتری داشته‌اند. این نتیجه در آزمون دوم همراه با بازنمایی تکرار شده است.

برای پاسخگویی به دومین سؤال فرعی از سؤال اول پژوهش «آیا دانش‌آموزان تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری شده را درک می‌کنند؟" می‌توان اذعان داشت با توجه به درصد بالای پاسخگویی دانش‌آموزان به هر پنج قسمت این تکلیف، دانش‌آموزان تأثیر تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه‌گیری‌شده را درک می‌کنند. با مقایسۀ نتایج آزمون بدون بازنمایی و با بازنمایی، بر می‌آید که وجود بازنمایی در کنار مسئلۀ کلامی، توان درک مسئله را بالاتر می‌برد. هنگامی که تأثیر تغییر یک مقدار، بر نسبت اندازه‌گیری‌شده، بررسی می‌شود، شکل و تصویر مناسب، تأثیر بسزایی دارد. به طور کلی در مطالعۀ اخیر، هنگامی که در کنار تکلیف مورد نظر از یک بازنمایی مناسب استفاده شد؛ عملکرد حل مسئلۀ دانش‌آموزان به طور چشمگیری بهبود یافت.

1. Tunc
2. Ceylan & Güler

جهت پاسخگویی به دومین سوال پژوهش «آیا بازنمایی‌ها بر عملکرد حل مسالهٔ دانش‌آموزان پایهٔ هفتم در حل مسائل کلامی شامل استدلال تناسبی اثرگذار است؟» به استناد نتیجه آزمون t زوجی و نتایج تحلیل داده‌ها می‌توان بیان کرد که در آزمون دوم دانش‌آموزان عملکرد بهتری بروز داده‌اند. به عبارتی، بازنمایی‌های تصویری بر عملکرد حل مسأله دانش‌آموزان در مسائل کلامی شامل استدلال تناسبی تأثیر مثبت دارد. یعنی هنگامی که به همراه سؤالات از بازنمایی مناسب تصویری استفاده شده بود، دانش‌آموزان در پاسخگویی به سؤالات، استدلال تناسبی بهتری داشته‌اند. همان‌طور که فونگ و لی (۲۰۰۹)، استفاده از شکل و روش مدل را در حل مسائل کلامی مفید ارزیابی کردند. همچنین، این نتیجه با نظر آرکاوی (۲۰۰۳) و سالکیند (۲۰۰۷)، که وجود بازنمایی باعث عملکرد بهتر می‌شود، هم‌راستاست.

با توجه به پاسخ‌های متنوع به دست آمده و تعداد شایان توجه پاسخ‌های نادرست و همچنین، تعداد دانش‌آموزانی که مسئله را بدون پاسخ رها کرده‌اند، می‌توان به چالش‌برانگیزبودن موضوع تناسب و تفکر ضربی پی برد. همان‌طور که هدگن و همکاران (۲۰۱٤)، میسناسانتی و همکاران (۲۰۱۷)، ویلاند و همکاران (۲۰۲۱)، نیز به این نکته اهتمام ورزیدند. نتیجهٔ این مطالعه با مطالعهٔ اجوز (۲۰۱۵) هم‌راستاست به این ترتیب که استدلال تناسبی پیچیده و دشوار است به گونه‌ای که درک نادرست از استدلال تناسبی در سنین بالاتر هم ادامه دارد. مطالعهٔ اخیر نشان می‌دهد با وجودی که دانش‌آموزان پایهٔ هفتم از دو سال قبل با مفاهیم نسبت و تناسب آشنا شده‌اند، اما مشکلات فراوانی در پاسخگویی به تکالیف مربوطه دارند و لزوم استفاده از بازنمایی‌ها برای ارتقای درک استدلال تناسبی آن‌ها احساس می‌شود.

با توجه به چالش‌برانگیزبودن مبحث تناسب و ماهیت انتزاعی آن، به استناد مطالعات به عمل آمدهٔ قبلی و مطالعهٔ اخیر، می‌توان از بازنمایی‌های مناسب در حین تدریس و ارزشیابی استفاده کرد و به کمک آن‌ها درک دانش‌آموزان را در مسائل کلامی ارتقا داد. زیرا مجسم‌شدن شرایط مسئلهٔ کلامی، باعث بهترشدن درک و فهم دانش‌آموزان و در نتیجه، حل درست‌تر مسئله می‌شود.

انجام این پژوهش، با محدودیت‌هایی مواجه بود از جمله، عدم دسترسی حضوری به دانش‌آموزان به دلیل شیوع ویروس کرونا (زمان انجام پژوهش سال تحصیلی ۹۹–۱۳۹۸) که به ناچار از روش‌های

مجازی برای جمع‌آوری داده‌ها استفاده شد. همچنین، یکی دیگر از محدودیت‌های پژوهش حاضر عدم تحقیقات وسیع در ابعاد مختلف درک‌های پایه‌ای استدلال تناسبی بود. با توجه به حیطهٔ گستردهٔ درک‌های پایه‌ای، در این زمینه‌ها به صورت عمیق پژوهشی صورت نگرفته است. به همین دلیل، پژوهشگران برای دستیابی به منابع با چالش جدی مواجه شده‌اند.

در پایان، با توجه به نتایج حاصل از این پژوهش، پیشنهاد می‌شود معلمان در حین تدریس مباحث مربوط به استدلال تناسبی، اطمینان حاصل کنند که دانش‌آموزان، به سطح تفکر ضربی رسیده‌اند و می‌توانند مقادیر را به طرز صحیح، به صورت ضربی مقایسه کنند. معلمان باید دانش‌آموزانی را که همچنان به صورت جمعی به مقایسهٔ مقادیر می‌پردازند، شناسایی کرده و به کمک راهکارهایی از جمله استفاده از بازنمایی‌ها به رفع مشکل آنان بپردازند و سعی کنند استدلال آنان را ارتقا داده و به سطح تفکر ضربی برسانند. همچنین، معلمان در هنگام تدریس مباحثی که تغییر یک مقدار بر نسبت اندازه گیری شده را می‌سنجد، از درک درست دانش‌آموزان نسبت به این موضوع اطمینان حاصل کنند و در غیر این صورت نیز، توصیه می‌شود با استفاده از انواع بازنمایی‌ها به ایشان در جهت رفع مشکل کمک کنند.

به استناد نتایج این پژوهش، پیشنهاد می‌شود از بازنمایی‌های تصویری، کلامی یا دست‌ورزی در حین تدریس بخش‌های مختلف استدلال تناسبی، برای درک و عملکرد بهتر دانش‌آموزان در حل مسائل استفاده شود.

توصیه می‌شود استفاده از انواع بازنمایی‌ها در برنامه‌ریزی درسی آموزش ریاضی و تولید محتوای آموزشی و همچنین، در تدریس و ارزشیابی مورد توجه ویژه قرار گیرد.

با توجه به نتایج مطالعهٔ حاضر که اثر بازنمایی‌ها بر استدلال تناسبی را بررسی کرده و همچنین، نتایج پژوهش‌های قبلی و اثر مطلوب بازنمایی‌ها بر عملکرد بهتر فراگیران، پیشنهاد می‌شود استفاده از آن را به تدریس سایر مباحث ریاضی تعمیم داد.

منابع

رضایی، اعظم (۱۳۹۳). *بررسی تأثیر آموزش راهبرد رسم شکل به معلمان پایهٔ هفتم بر عملکرد حل مسئلهٔ دانش‌آموزان آن‌ها*. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران.

ریحانی، ابراهیم، یافتیان، نرگس، و رضایی، اعظم (۱۳۹۸). تأثیر آموزش حل مسئله با تأکید بر راهبرد رسم شکل و روش مدل بر عملکرد حل مسئلهٔ کلامی دانش‌آموزان پایهٔ هفتم. *رویکردهای نوین آموزشی*، ۱۰۸–۷۸.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the leering of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.

Asghary, N., Shahvarani, A., & Medghalchi, A. R. (2013). Significant process of change for elementary teachers to foster functional thinking. *Bolema*, 27(47), 1007-1026.

Ceylan, Ş. E. N., & Güler, G. (2017). Effect of strategy teaching for the solution of ratio problems on students' proportional reasoning skills. *MOJES: Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 5(2), 1-15.

Dole, S., Hilton, A., & Hilton, G. (2015). Proportional reasoning as essential numeracy. In *Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Mathematics Education Research Group of Australasia Inc.

Fong, Ng. S., & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children’s tool for representing andsolving algebric word problems. *Research in Mathematics Education*, 282-313.

Hodgen, J., Coe, R., & Brown, M. (2014). Improving students’ understanding of algebra and multiplicative reasoning: Did the ICCAMS intervention work?

Hurst, C. (2015). The multiplicative situation. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 20(3), 1-16.

Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Cognition and Development*, 8(2), 237-256.

Lobato, J. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6–8*, San Diego State University San Diego, California.

Misnasanti, U., R. W., & Suwanto, F. R. (2017). Problem based learning to improve proportional reasoning of students in mathematics learning. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1868, No. 1, p. 050002). AIP Publishing LLC.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standard for school mathematics. Reston*VA: Author.

Salkind, M. G. (2007). Mathematical representations. *Preparation and Professional Development of Mathematics Teachers.* EDCI 857.

Shin, J., Lee, S. J., & Steffe, L. P. (2020). Problem solving activities of two middle school students with distinct levels of unit’s coordination. *Mathematical Behavior*, 59, 100793.

Siemon, D., Breed, M., & Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking–the big challenge of the middle years. In *Mathematics: Celebrating achievement. Proceedings of the annual conference of the mathematical association of victoria*. Melbourne: MAV.

Small, M. (2015). *Building proportional reasoning across grades and math strands, K-8. Library of Congress Cataloging-in-publication Data*. Manufactured in the United States of America.

Tunç, M. P. (2020). Investigation of middle school students' solution strategies in solving proportional and non-proportional problems. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 11(1), 1-14.

Vergnaud, G. (2009). *The Theory of Conceptual Fields. Human Development*. 52, 83-95.

Weiland, T., Orrill, C. H., Nagar, G. G., Brown, R. E., & Burke, J. (2021). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Mathematics Teacher Education*, 24(2), 179-202.