فصلنامه راهبرد مدیریت مالی
دانشگاه الزهرا
سال یازدهم، شماره چهل و سوم، زمستان ۱۴۰۲
صفحات ۷۰-۵۱

مقاله پژوهشی

مدل بلک شولز تعمیم یافته تحت نوسانات گارچ با محاسبه ارزش در معرض خطرشرطی در قیمت‌گذاری مشتقه [1]

حسین نصرالهی [2]، محمدرضا حدادی [3]، منیژه گودرزی [4]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۳۱   تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۲۴

چکیده

بازارهای مالی نقش اساسی در توسعه اقتصادی هر کشوری دارد، لذا بررسی دقیق این بازارها از جنبه‌های مختلف ضروری به نظر می‌رسد. حضور در این بازارها همواره با ریسک بالایی همراه است و به منظور کاهش ریسک ابزارهای مختلفی پدید آمده است. اختیار معامله، متداول‌ترین ابزار معامله‌ای است که به بازارهای مالی معرفی شده است. مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری طیف وسیعی از قراردادهای اختیار معامله استفاده می‌شود. فرض اساسی در این مدل ثابت بودن نوسان بازده‌ها است که فرض مناسبی در دنیای واقعی نیست. هدف این پژوهش توسیع مدل بلک شولز تحت نوسانات تصادفی است. ابعاد نوآوری پژوهش شامل تحلیلی از عملکرد قیمت‌گذاری مدل‌ها در طول دوره‌های کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت با ارزش در معرض خطر شرطی برای هر یک از قیمتها است. برای این منظور، از داده‌های ایران‌خودرو در بازه ۱۳۹۹/۹/۱ تا ۱۴۰۱/۹/۲۳ مورد استفاده قرار گرفت و نوسانات گارچ استاندارد و گارچ آستانه محاسبه و در مدل توسعه‌یافته بلک شولز به‌کار گرفته شد. در ادامه قیمت اختیار خرید تحت مدل بلک شولز با نوسانات تاریخی، مدل بلک شولز توسعه‌یافته با گارچ استاندارد، گارچ آستانه و گارچ نمایی محاسبه شد. نتایج پژوهش حاکی از آن است که قیمت اختیار با نوسان تاریخی به قیمت واقعی بازار نزدیکتر است و همچنین، با توجه به ارزش در معرض خطر شرطی بیشتر، ریسک واقعی‌تر نشان می‌دهد. در نهایت، برای آزمون نتایج بدست آمده قیمت اختیار خرید در هر چهار نوسان مفروض با روش مونت کارلو محاسبه و نتایج بدست آمده برای قیمت‌ها تایید شد.

واژگان کلیدی: نوسانات گارچ ، قیمت‌گذاری اختیار، مدل بلک‌شولز، گارچ آستانه.
طبقه‌بندی موضوعی: *C13, C58, G17*

---

۱. کد DOI مقاله: 10.22051/JFM.2023.43857.2828
۲. دانشجو، گروه ریاضی مالی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران. Email: Nasrollahi_hossein@yahoo.com
۳. استادیار، گروه ریاضی مالی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی(ره)، بروجرد، ایران. نویسنده مسئول. Email: haddadi@abru.ac.ir
۴. استادیار، گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی (ره)، بروجرد، ایران. Email: m.goudarzi@abru.ac.ir

مقدمه

ارزش‌گذاری دارایی‌ها از جمله اوراق بهادار یکی از اصول مهم و تاثیرگذار بر تصمیم‌های سرمایه‌گذاری است. ارزیابی بنیادی و صحیح دارایی‌ها منجر به تخصیص بهینه منابع سرمایه‌ای می‌شود. اتخاذ تصمیم‌های اساسی سرمایه‌گذاری مستلزم ارزش‌گذاری اوراق با استفاده از روش‌های معتبر علمی است(دارابی و معروفخانی، ۱۳۹۵). در این راستا، استفاده از ابزارهای مالی در دنیای سرمایه‌گذاری با سه هدف کلی مدیریت ریسک، کشف قیمت و کاهش هزینه‌های معاملاتی به طور مستمر در حال افزایش است (پاپانتونیز[1]، ۲۰۱۶).

بازارهای مالی جهان در طول چند دهه‌ی اخیر شاهد یک انقلاب بزرگ در تجارت اوراق مشتقه بوده است. اوراق مشتقه ابزاری برای کنترل ریسک می‌باشد که به‌عنوان یک راهبرد سرمایه‌گذاری در بازارهای مالی شناخته شده است. در میان انواع مشتقات مالی، اختیارات یکی از مهم‌ترین ابزارهای مالی محسوب می‌شود. اختیار معامله، فراگیرترین ابزار معامله‌ای است که تاکنون در بازارهای مالی مورد استفاده قرارگرفته است. از آنجائی که اوراق اختیار، هزینه پایین‌تری در مقایسه با خود سهم دارد، به عنوان یک ابزار قدرتمند در معاملات به کار گرفته می‌شود و تا حد بسیار بالایی ریسک را کاهش داده و درنتیجه، درآمد را افزایش می‌دهد (حاجی‌زاده و ماهوتچی، ۱۳۹۸). قراردادهای اختیار معامله بر روی دارایی‌های مختلف مالی و کالاها معامله می‌شوند. امروزه سازمان‌های بورس و فرابورس بسیاری در دنیا در حال اجرای معاملات قراردادهای اختیار معامله بر روی سهام، ارز و دیگر دارایی‌های مالی هستند.

هدف اصلی قیمت‌گذاری اختیار معامله، محاسبه احتمال اجرای قرارداد یا در سود بودن آن در تاریخ انقضا و تخصیص ارزش دلاری به آن است. قیمت دارایی پایه، قیمت اعمال قرارداد، نوسانات، نرخ بهره و زمان باقیمانده تا انقضا که تعداد روزهای بین تاریخ انجام محاسبات و تاریخ اعمال قرارداد اختیار معامله است، متغیرهایی پرکاربردی در این زمینه هستند که به عنوان داده‌های ورودی مدل‌های ریاضی تعیین قیمت منصفانه قراردادهای اختیار معامله استفاده می‌شوند.

اهمیت و ضرورت پژوهش در موضوع قیمت‌گذاری اختیارها، به سبب چهار مزیت کلیدی است که به سرمایه‌گذار می‌دهد:

- اختیار باعث افزایش کارایی هزینه می‌شوند.
- اختیارها ریسک کمتری نسبت به سهام دارند.
- اختیارها پتانسیل ارائه درصد بازده بالاتری را دارند.
- ترکیب اختیارها استراتژیک ارزشمندی ارائه می‌دهند.

بلک[2] و شولز[3] (۱۹۷۳) استراتژی جدیدی را برای حل مسئله قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی ارائه کردند که بر اساس تشکیل سبدی خودتامین در یک محیط بدون آربیتراژ بود. ایده آنها نشان می‌داد که

---

1. Papantonis
2. Black
3. Scholes

اگر شخصی در یک بازار کامل به جای خرید یک اختیار معامله، با همان مقدار پول سهام و اوراق قرضه بخرد می‌تواند سودی مشابه با اعمال این اختیار را در سررسید به دست آورد. برای انجام این کار آنها قیمت سهام را با استفاده از فرایند وینر مدل‌سازی کردند و با پوشش کامل سبد و حذف عامل‌های نوسان پذیر توانستند رابطه‌ای که به فرمول بلک شولز معروف است را استخراج کنند. معرفی این مدل کمک شایانی به بازار قیمت‌گذاری مشتقات با استفاده از دارایی پایه نمود (نیسی و همکاران، ۱۳۹۵). در مدل قیمت‌گذاری بلک شولز عواملی نظیر قیمت توافقی، قیمت پایه دارایی، نوسان پذیری انتظاری، زمان تا سررسید و نرخ بهره بدون ریسک تأثیرگذار می‌باشند.

از آنجایی که ثابت در نظر گرفتن نوسان در مدل بلک شولز فرض غیر واقعی و محدود کننده می‌باشد و با در نظر گرفتن این فرض قیمت اختیار با خطای چشمگیری همراه خواهد بود. بنابراین، توسیع مدل‌های بلک شولز با ضریب گارچ یک انتخاب مناسب برای مدل‌سازی واریانس‌های در حال تغییر است که افزایش دقت قیمت اختیار را به همراه دارد. این امر اهمیت پژوهش در این خصوص را به خوبی نشان می‌دهد. دوان[1] (۱۹۹۵) اولین کسی بود که یک پایه نظری محکم بر اساس مفهوم ارزیابی محلی ریسک خنثی برای ارزیابی اختیار معامله تحت مدل‌های گارچ با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو ارائه کرد.

پژوهش حاضر تحلیلی از عملکرد قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل بلک شولز با نوسانات گارچ در طول دوره‌های کوتاه‌مدت، میان مدت و بلندمدت همراه با تعیین مقدار ریسک ارزش در معرض خطر شرطی برای هر یک از قیمتها است. قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل توسعه یافته بلک شولز با نوسانات گارچ استاندارد و گارچ آستانه محاسبه و در نهایت با قیمت بازار مقایسه می‌شود.

مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری طیف وسیعی از قراردادهای اختیار معامله استفاده می‌شود. فرض اساسی در این مدل ثابت بودن نوسان بازده‌ها است که فرض مناسبی در دنیای واقعی نیست. هدف این پژوهش توسیع مدل بلک شولز تحت نوسانات تصادفی است. در این خصوص قیمت اختیار برای نوسانات تاریخی، نوسان غیرشرطی مدل‌های گارچ استاندارد، گارچ آستانه و گارچ نمایی ارائه بشود تا تعیین شود کدام نوسان قیمت واقعی‌تری را بدست می‌آورد. در این پژوهش تحلیلی از عملکرد قیمت‌گذاری مدل‌ها در طول دوره‌های کوتاه‌مدت، میان مدت و بلندمدت با ارزش در معرض خطر شرطی صورت می‌پذیرد. در ادامه سئوالات اصلی پژوهش ارائه می‌شود:

- آیا خطای قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک‌شولز توسعه‌یافته با گارچ استاندارد نسبت به نوسان تاریخی کمتر است؟
- آیا خطای قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک‌شولز با نوسان گارچ آستانه نسبت به گارچ نمایی کمتر است؟
- تحت کدام نوسان گارچ نمایی، گارچ آستانه، گارچ استاندارد و تاریخی، ارزش در معرض خطر شرطی برای قیمت اختیار خرید کمترین مقدار را دارد؟

1. Duan

برای دستیابی به اهداف ذکر شده و پاسخ به سئوالات پژوهش، بخش‌های پژوهش به این صورت ساماندهی شده که ابتدا مروری بر پیشینه پژوهش ارائه شده است. سپس، روش‌شناسی پژوهش تشریح گردیده است. در این راستا، مدل پژوهشی بیان و پارامترهای موردنظر برآورد شده است. در ادامه، یافته‌های پژوهش مورد بحث و بررسی قرار گرفته و بر اساس نتیجه‌گیری به دست آمده، پیشنهاداتی ارائه می‌شود.

مبانی نظری

ابزارهای مشتقه را می‌توان بر حسب نوع دارایی پایه موضوع قرارداد به دو گروه کلی ابزارهای مشتقه کالایی [1] و ابزارهای مشتقه مالی [2] تقسیم بندی نمود. در ابزارهای مشتقه کالایی، دارایی پایه موضوع قرارداد یک کالا و یا شاخصی است که بر حسب کالا تعریف می‌شود. در ابزارهای مشتقه مالی، دارایی پایه شامل ابزارهای مالی، نرخ بهره، نرخ ارز و یا شاخص های مالی است. قراردادهای اختیار معامله یکی از ابزارهای مشتقه مالی است که اختیار خرید یا فروش دارایی پایه موضوع قرارداد را در قیمت ثابت در زمان مشخصی در آینده به دارنده آن می‌دهد. دارنده اختیار معامله را خریدار [3] و طرف مقابل آن که اختیار خرید یا فروش را واگذار کرده، فروشنده [4] اختیار معامله می‌نامند. قراردادهای اختیار معامله به دو نوع اختیار خرید[5] و اختیار فروش[6] تقسیم‌بندی می‌شود. اختیار خرید اختیار معامله‌ای است که به دارنده آن حق خرید یک دارایی را می دهد(هال، ۱۳۹۹).

روش‌های مدل‌سازی سری‌های زمانی بیشترین کاربرد را در مدل‌سازی نوسان دارند. این مدل‌ها امکان توضیح ویژگی خوشه‌ای بودن نوسان را دارند. دو ویژگی مهم داده‌های مالی یعنی نوسانات خوشه‌ای بازده‌ها و دنباله‌های پهن توزیع احتمال آن‌ها توجه بسیاری از تحلیلگران مالی را به خود معطوف داشته است. پدیده نوسانات خوشه‌ای به این موضوع اشاره دارد که نوسان بازده‌ها ثابت نیست و برحسب زمان تغییر می‌کند. اگرچه نوسانات در بازارهای مالی به‌طور مستقیم قابل‌مشاهده نیستند، ولی یافته‌های تجربی حاکی از وجود برخی ویژگی‌ها در آن‌ها است. یکی از مهم‌ترین این ویژگی‌ها، وجود رفتار خوشه‌ای در نوسانات است. در سری‌های زمانی تاکنون مدل‌ها و روش‌های مختلفی برای مدل‌سازی نوسان ارائه‌شده است که ازجمله آن‌ها می‌توان به مدل‌های نوسان اتورگرسیو شرطی اشاره کرد، یکی از مرسوم‌ترین مدل‌های توسعه یافته برای ثبت و تحلیل نوسان خوشه‌ای، مدل واریانس ناهمسان شرطی خود همبسته می‌باشد که به خانواده آرچ[7] معروف شده است. این مدل اولین بار توسط انگل[8] در سال ۱۹۸۲ پیشنهاد گردید. پس از آن، بلرسلو[9] در

1. Commodity Derivatives
2. Financial Derivatives
3. Buyer or Holder
4. Seller or Writer
5. Call
6. Put
7. ARCH
8. Engle
9. Bollerslev

سال ۱۹۸۶ به تعمیم این مدل توسط پرداخت که شامل وقفه در واریانس‌های شرطی بود. قابلیت ویژه‌ای از این دسته از مدل‌های آرچ که برای شناسایی الگوهای نوسان خوشه‌ای تعمیم‌یافته کاربرد دارد، منجر به استفاده گسترده آن برای بررسی بازده بازار سهام در بازارهای توسعه‌یافته و به میزان کمتر برای بازارهای در حال توسعه شده است. مدل‌های واریانس شرطی تاکنون مهم‌ترین و پرکاربردترین روش برای تجزیه و تحلیل و پیش‌بینی سری‌های زمانی مالی شناخته شده‌اند.

مدل بلک شولز جز اولین مدل‌ها برای تعیین قیمت اختیار است که نوسان محاسبه شده به کمک سری‌های زمانی جهت پیش‌بینی قیمت اختیار در آن به کار می‌رود. اساس مدل بلک شولز بررسی چگونگی حرکت نوسانات قیمت سهام در طول زمان‌های آتی است. فرض اصلی در این مدل این است که قیمت سهام از یک گشت تصادفی پیروی می‌کند و توزیع لگ نرمال را برای تغییرات قیمت سهام در یک دوره زمانی کوتاه در نظر می‌گیرد. در مدل قیمت‌گذاری اختیار بلک شولز، ارزش اختیار یک تابع حرکت براونی است. با توجه به اینکه حرکت براونی بی‌حافظه است و گذشته خود را فراموش می‌کند، می‌توان گفت که مدل بلک شولز با رفتار بازارهای مالی ایده‌آل مطابقت دارد. این مدل توانست بازار قیمت‌گذاری مشتقات را با استفاده از دارایی پایه رونق ببخشد. قیمت دارایی پایه در مدل بلک شولز از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی می‌کند:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t^Q \tag{۱}$$

در این معادله، S_t قیمت سهم، r نرخ بهره کوتاه‌مدت، σ نوسان و w_t^Q فرایند براونی استاندارد تحت اندازه ریسک خنثی Q است. با توجه به معادله (۱) می‌توان گفت که σ تنها پارامتر غیرقابل مشاهده در این مدل است که می‌توان آن را با استفاده از سوابق تاریخیِ تغییرات قیمت دارایی پایه در زمان‌های t_n =t ,... t_0 = ۰, t_1، به‌صورت رابطه (۲) برآورد کرد.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right)^2} \tag{۲}$$

در مدل بلک شولز نوسان قیمت سهام، ثابت در نظر گرفته شده است، در صورتی که نتایج تجربی غیرثابت بودن نوسان قیمت دارایی‌های پایه را نشان می‌دهد. ایده‌ی نوسان تصادفی، به‌خصوص پس از رکود اقتصادی سال ۱۹۷۸ مورد توجه قرار گرفت و تا قبل از آن زمان مدل بلک شولز، بهترین و کارآمدترین مدل برای قیمت‌گذاری حرکت سهام به شمار می‌آمد.

قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک شولز به صورت رابطه (۳) است.

$$C=S_0\Phi(d_1)-Ke^{-rT}\Phi(d_2) \tag{۳}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[r + \frac{1}{2}(\sigma^2)\right]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[r - \frac{1}{2}(\sigma^2)\right]T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

و $\Phi(x)$ تابع توزیع تجمعی برای متغیر تصادفی نرمال استاندارد و S_0 قیمت دارایی پایه، K قیمت اعمال، r نرخ بهره بدون ریسک و T زمان سررسید را نشان می دهد.

مدل قیمت‌گذاری بلک شولز در اختیار معاملات یک توصیف ریاضی از بازار مالی و ابزارهای سرمایه‌گذاری مشتقه است. در این مدل نوسان یک تابع، ثابت است که در آن اختیار به دلیل مولفه‌های تصادفی مانند نوسان، واقعاً مخاطره‌آمیز است. مفهوم نوسان غیر ثابت در فرآیندهای گارچ معرفی شد.

پیشینه پژوهش

با توجه به ماهیت نوپای مشتقات اختیار معامله در ایران، تحقیقات محدودی در این زمینه انجام شده است. با این حال، برخی از تحقیقاتی که در زمینه‌های مشابه در خارج و داخل ایران انجام شده است به شرح زیر است:

شراز[1] و همکاران (۲۰۱۴) نوسانات ضمنی در قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل بلک شولز را به روش گارچ به صورت تحلیلی بررسی کردند. وانگ[2] و همکاران (۲۰۱۵) به بررسی قیمت‌گذاری و اتخاذ سیاست‌های ترکیبی قراردادهای اختیار معامله سهام و همچنین T رابطه بین مقیاس پرتفوی سهام و پوشش ریسک در بورس چین پرداخته‌اند. برای این منظور آنها داده‌های روزانه، هفتگی، دو هفته‌ای و ماهانه قیمت سهام را از طریق شبیه سازی مسیرهای نمونه یک حرکت هندسی براونی به دست آوردند. نتایج آنها نشان داد که اتخاذ سیاست‌های ترکیبی نسبت به سیاست‌های ساده و بدون پوشش، موجب کاهش ریسک می‌گردد. پاپانتونیز (۲۰۱۶) به بررسی نوسان قیمت اختیار در قراردادهای اختیار معامله به سبک اروپایی به روش گارچ پرداخته است. آنها سه مدل را با چارچوب دو متغیره خود به دو صورت تخمین زدند: ابتدا با در نظر گرفتن اینکه مؤلفه های احتمال بازده و نوسانات ناهمبسته هستند و دوم اینکه همبستگی همزمان بین آنها را اجازه دادند. کار[3] و همکاران (۲۰۱۶) چارچوب جدیدی را برای قیمت‌گذاری قیمت اختیار در بازار معاملات قراردادهای اختیار بورس اوراق بهادار نیویورک بررسی کرده اند تا ریسک سرمایه گذاران در این بازار در برابر نوسانات قیمت را پوشش دهند. با این مفهوم جدید، می‌توان به طور مستقیم حق بیمه ریسک نوسان موجود در هر قرارداد اختیار معامله را به عنوان تفاوت بین نوسانات ضمنی و مورد انتظار این قرارداد اندازه‌گیری کرد. آن‌ها از اختیارهای موجود در شاخص S&P 500 برای انجام یک تحلیل تجربی بر روی نظریه جدید خود استفاده می‌کنند و از داده‌های هفتگی شامل ۴۰ سری نوسانات ضمنی در ۹۳۰

1. Sheraz
2. Wang
3. Carr

هفته، در مجموع ۳۷۲۰۰ مشاهده نمونه‌برداری کردند. هریس[1] (۲۰۱۸) به بررسی قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله به سبک اروپایی تحت مدل بلک شولز پرداخته است. در این پژوهش صرفاً به بررسی معادلات و روابط ریاضی و پارامترهای قیمت‌گذاری در مدل بلک شولز پرداخته شده است. همچنین، در قیمت‌گذاری اختیار معامله به‌جای توابع چگالی احتمال از توابع احتمال بیزی استفاده گردیده است. پن[2] و همکاران (۲۰۱۹) و ژانگ[3] و ژانگ (۲۰۲۰) از جمله افرادی هستند که از مدل‌های گارچ برای قیمت‌گذاری اختیار خرید استفاده کردند. آنها نشان دادند این مدل‌ها منجر به بهبود عملکرد پیش‌بینی نوسانات و افزایش دقت قیمت‌گذاری خواهند شد. ایلتوزر[4] (۲۰۲۲) عملکرد مدل‌های شبکه عصبی و بلک شولز را در قیمت‌گذاری اختیار خرید با رویکردهای مختلف نوسان را در بورس استانبول در سال ۲۰۲۱ پیش بینی و مقایسه کرد. او در یک تحلیل تجربی از هشت رویکرد مختلف پیش‌بینی نوسان برای مقایسه مدل‌ها استفاده نمود. نتایج نشان داد در زمانی که میزان نوسان کم می‌باشد مدل شبکه عصبی نسبت به بلک شولز بهتر عمل می‌کند در حالی که برای نوسانات بالا مدل بلک شولز عملکرد بهتری دارد.

کیمیاگری و آفریده ثانی (۱۳۸۷) به بررسی قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل بلک شولز و درخت دوتایی پرداخته‌اند. برای این منظور از تعدادی از سهم‌های بازار بورس اوراق بهادار به عنوان سهم‌های نمونه استفاده کردند و با محاسبه نوسان این سهم‌ها به مدل‌بندی آنها پرداخته شد. تحلیل مدل‌ها در پژوهش نشان می‌دهد که مدل بلک شولز مدلی مناسب، جهت قیمت‌گذاری اختیار معامله سهم‌های با نوسان پایین و مدل درخت دوتایی، مدلی مناسب جهت قیمت‌گذاری سهم‌ها با نوسان بالا می‌باشد. نیسی و همکاران (۱۳۹۵) پس از بررسی مزایا و معایب مدل هستون کلاسیک به این نتیجه رسیدند که مدل هستون توانایی پوشش تلاطم ضمنی بازارهای مالی در سررسیدهای کوتاه‌مدت را ندارد. بنابراین، با افزودن یک واریانس فرآیند اضافی به دینامیک دارایی پایه، به مدلی به نام هستون مضاعف رسیدند. باغستانی و همکاران (۱۳۹۷) به مطالعه و تعیین قیمت قرارداد اختیار معامله آسیایی پرداختند که از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای تعیین قیمت اختیار استفاده نمودند. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که اختیار آسیایی نسبت به اختیار معامله اروپایی ساده (مدل بلک شولز) ارزان‌تر می‌باشد. همچنین اثر تغییر در متغیرهایی همچون قیمت جاری دارایی، نرخ بهره بدون ریسک و نوسان قیمت دارایی بر قیمت اختیار معامله مثبت ارزیابی گردید. ابوالی و همکاران (۱۳۹۸) در پژوهشی با تمرکز بر معادله شرودینگر شکل اصلی بلک شولز و حل این معادله با روشی متفاوت و جدید برای اثبات و بهبود معادله بلک شولز اجرا کردند. سپس امکان ارتقای معادله بلک شولز با این روش را بررسی و معادله جدیدی را برای قیمت‌گذاری اختیار معامله ارائه و آزمایش کردند. در این پژوهش از اطلاعات ۵۰ اختیار معاملاتی سکه طلا از فرابورس ایران در دوره زمانی ۱۳۹۴ تا ۱۳۹۷ برای آزمون مدل استفاده شد. افزایش دقت قیمت‌گذاری معاملات اختیار با استفاده از معادله ارائه شده به

1. Harris
2. Pan
3. Zhang
4. İltüzer

ویژه برای معاملات با قیمت بالا، بررسی راه حل منطقی به روش جدید، امکان مقایسه خروجی با حل عددی و نوآوری فرمول نهایی اختیار بر حسب توابع چند جمله ای لاگر از نتایج تحقیقات آنهاست. امیری (۱۳۹۹) قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله سکه طلا با روش‌های مختلف از جمله مدل بلک‌شولز را بررسی نمود و با برآورد نوسان قیمت سکه در بازار به روش گارچ، به مقایسه قیمت‌های تئوریک اختیار معاملات بر اساس مدل‌های مختلف پرداخت. نتایج نشان می‌دهد که مقایسه قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله فروش حاکی است که در سطوح مختلف قیمت اعمال، در تمام روزهای سرمایه‌گذاری قیمت تئوریک اختیار معامله فروش بر اساس مدل بلک شولز کمتر از قیمت تئوریک اختیار معامله خرید بر اساس مدل دوجمله‌ای است. بهرادمهر و طهماسبی (۱۴۰۱) نیز قیمت‌گذاری اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران از تاریخ ۱۳۹۵/۱۲/۱۶ تا ۱۳۹۶/۴/۱ را مورد مطالعه قرار دادند و از دو روش واریانس ناهمسانی و روش آماری برای محاسبه نوسانات بازده سکه طلا استفاده کردند. آنها از داده‌های شش قرارداد اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران استفاده نمودند و نتایج نشان داد از هردو روش بلک شولز و برابری خرید و فروش، به سرمایه‌گذاران خرید اختیار خرید را توصیه می‌کنند.

روش شناسی پژوهش

فرآیند مدل‌سازی پژوهش حاضر مبتنی بر ۲ بخش اصلی است. بخش اول، ارائه مدل‌های سری زمانی شامل مدل ARCH، GARCH، TGARCH و EGARCH است و بخش دوم، شامل معرفی مدل تعمیم یافته بلک شولز می‌باشد.

- **مدل‌های سری زمانی**

اولین نمونه از مدل‌های آرچ مدل ARCH(q)، تابعی از توان دوم وقفه‌های پسماندها است. در مدل GARCH(p,q)، معادله واریانس شرطی علاوه بر توان دوم وقفه‌های پسماندها، بهp وقفه گذشته واریانس‌های تحقق‌یافته نیز وابسته است مدل گارچ[1] نسبت به مدل‌های ARCH در عمل تعداد وقفه کوچک‌تری دارند مدلGARCH(p,q) به‌صورت زیر است:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (۴)$$

که در آن $a_t = \sigma_t \, \varepsilon_t$، $\{ \varepsilon_t \}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با میانگین صفر و واریانس ۱، ω واریانس بلندمدت، α_i اثرات آرچ، β_j اثرات گارچ هستند که طبق شرایط زیر می‌باشند:

$$\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_j) < 1 \ \alpha_i \geq 0,\ \beta_j \geq 0\ ,\ ,\ \omega > 0$$

مدل GARCH(۱،۱) معمول‌ترین ساختار مورد استفاده برای بسیاری ازسری‌های زمانی مالی است(تسای[2]، ۲۰۰۵).

1. GARCH
2. Tsay

مدل دیگری که اثرات نامتقارن شو ک‌ها بر واریانس شرطی را بررسی می کند مدل گارچ آستانه[1] که توسط زاکوئیان[2] (۱۹۹۴) و گلوستن[3] و همکاران (۱۹۹) ارائه شده است. طبق این مدل ، اگر نوسانات منفی شوک بیشتری نسبت به نوسانات مثبت به قیمت وارد کنند در این صو رت، مدل سازی نوسانات با این مدل مناسب خواهد بود. ساختار یک مدل (۱،۱)TGARCH را می‌توان به صورت زیر نشا ن داد:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad (۵)$$

که در آن ضریب γ اثرات نامتقارن شوک‌ها را اندازه می‌گیرد و d_{t-1} مقدار یک را برای مقادیر $\varepsilon_t < 0$ و مقدار صفر برای سایر مقادیر ε_t اختیار می کند. در این مدل تاثیر اخبار خوب برابر با α_1 و تاثیر اخبار بد به میزان $\alpha_1 + \gamma$ است. اگر $\gamma > 0$ باشد در این صورت می توان گفت که اثر اهرمی وجود دارد.

اثرات اهرمی را با استفاده از مدل ناهمسانی واریانس شرطی نمایی[4] می‌توان مدل‌سازی کرد. مفهوم اثرات اهرمی پیشنهاد شده توسط بلک (۱۹۷۶) و فرنچ و همکاران (۱۹۸۷) همبستگی منفی بین تغییرات در قیمت یک دارایی با تغییرات نوسان آن دارایی را نشان می‌دهد (بلک[5]، ۱۹۷۶ و آنجلیدیس[6] و همکاران، ۲۰۰۴). در این مدل هیچ گونه محدودیتی روی علامت ضرایب وجود ندارد، چون در مدل σ_t^2 به صورت لگاریتمی وارد شده است. بنابراین، حتی اگر پارامترها منفی هم باشند، مثبت خواهد شد. بنابراین دیگر نیازی اعمال محدودیت غیرمنفی بودن ضرایب وجود نیست. دوم اینکه در مدل فوق می‌توان عدم تقارن شوک‌های مثبت و منفی بر بی ثباتی را در نظر گرفت. ساختار مدل (۱،۱) *EGARCH* ارائه شده توسط نلسون[7] (۱۹۹۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \alpha_1 \left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + \gamma\left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) + \beta_1 \log(\sigma_{t-1}^2) \qquad (۶)$$

اگر ضریب γ مخالف صفر باشد نشان دهنده وجود اثرات نامتقارن شوک‌ها بر نوسانات و اگر این ضریب مثبت باشد شوک‌های مثبت نسبت به شوک‌های منفی با اندازه یکسان، تاثیر بیشتری برنوسانات شرطی دارند. لذا وجود اثرات اهرمی را می‌توان با فرض $\gamma > 0$ آزمون کرد.

- **مدل تعمیم یافته بلک شولز**

یک توسیع از مدل بلک شولز با نوسانات گارچ توسط گانگ[8] و همکاران (۲۰۱۰) معرفی شد و در ادامه توسط شراز و پریدا (۲۰۱۴) به کار گرفته شد. در ادامه، مدل توسعه یافته بلک شولز تحت نوسان گارچ با $\sigma = \theta_t$ ارائه شده است.

---

1. TGARCH
2. Zakoian
3. Glosten
4. EGARCH
5. Black
6. Angelidis
7. Nelson
8. Gong

$$dS_t = r\, S_t dt + \theta_t S_t dw_t \qquad (۷)$$

$$y_t = \log\frac{S_t}{S_{t-1}} - E[\log\frac{S_t}{S_{t-1}}] = \theta_t Z_t$$

$$\theta_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta\theta_{t-1}^2$$

که در آن Z_t توزیع نرمال استاندارد، S_0 قیمت دارایی پایه، K قیمت اعمال، r نرخ بهره بدون ریسک و T زمان سررسید، ω واریانس بلندمدت، α اثرات آرچ، β اثرات گارچ را نشان می دهد. فرآیند نوسان θ_t برای قیمت اختیار خرید به صورت زیر است:

$$C(S,T) = e^{-rT}E[\{S_T - K\}_+] \qquad (۸)$$

$$= e^{-rT}E_{\theta_t}[E[\{S_T - K\}_+]] \quad = SE_{\theta_t}[f(E_{\theta_t})] - Ke^{-rT}E_{\theta_t}[g(E_{\theta_t})]$$

$$f(\theta_t)) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT + \frac{1}{2}\theta_t^2}{\theta_t}\right)$$

$$g(\theta_t) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT + \frac{1}{2}\theta_t^2}{\theta_t} - \theta_t\right)$$

که در آن $\{S_T - K\}_+ = max[\{S_T - K\},0]$ و θ_t فرآیند گارچ مانا با میانگین μ_θ ، واریانس σ_θ^2، چولگی γ^θ و کشیدگی $\kappa^{(\theta)}$ است.

قضیه ۱. قیمت اختیار خرید تحت مدل گارچ استاندارد است که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}C(S,T) = {} & SE_{\theta_t}[f(\theta_t)] \\ & - Ke^{-rT}E_{\theta_t}[g(\theta_t)] \\ = {} & S(f[E({\theta_t}^2)] + \frac{1}{2}f''[E({\theta_t}^2)][E({\theta_t}^2) + E^2(\theta_t)]^2(\kappa^{(\theta)} + 4E^2(\theta_t) - 1) \\ & - Ke^{-rT}(g[E({\theta_t}^2)] + \frac{1}{2}g''[E({\theta_t}^2)][E({\theta_t}^2) + E^2(\theta_t)]^2(\kappa^{(\theta)} \\ & + 4E^2(\theta_t) - 1)\end{aligned}$$

که کشیدگی از فرآیند نوسان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\kappa^{(\theta)} = \frac{E[\theta_t - E(\theta_t)]^4}{E^2[\theta_t - E(\theta_t)]^2}$$

و

$$f(E(\theta_t^2)) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT + \frac{1}{2}E({\theta_t}^2)}{\sqrt{E({\theta_t}^2)}}\right)$$

و

$$g(E(\theta_t^2)) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT - \frac{1}{2}\theta_t^2}{\sqrt{E({\theta_t}^2)}}\right)$$

اثبات. برای اثبات به گانگ و همکاران (۲۰۱۰) مراجعه شود.

قضیه ۲. تخمین مقدار $E({\theta_t}^2)$ و $\kappa^{(y)}$ تحت گارچ نرمال به صورت زیر است:

$$E({\theta_t}^2) = \frac{\omega}{1-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i-\sum_{j=1}^{q}\beta_j}$$

$$\kappa^{(y)} = \frac{3}{1-2\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j^2}$$

که ψ_j از رابطه $\psi(B)\phi(B) = \beta(B)$ با استفاده از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\psi(B) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\psi_j B^j$$

$$\phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i B^i - \sum_{j=1}^{q}\beta_j B^j$$

$$\beta(B) = 1 - \sum_{j=1}^{q}\beta_j B^j$$

که B عملگر برگشتی است و به صورت $y_{t-1} = By_t$ تعریف می‌شود.

اثبات. برای اثبات به گانگ و همکاران (۲۰۱۰) مراجعه نمایید.

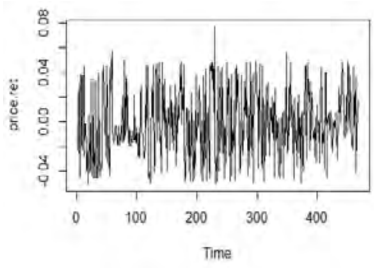
با توجه به قضیه ۲، $E({\theta_t}^2)$ و $\kappa^{(y)}$ برای گارچ (۱و۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E({\theta_t}^2) = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$$

$$\kappa^{(y)} = \frac{3}{1-\frac{2\alpha^2}{1-(\alpha+\beta)^2}}.$$

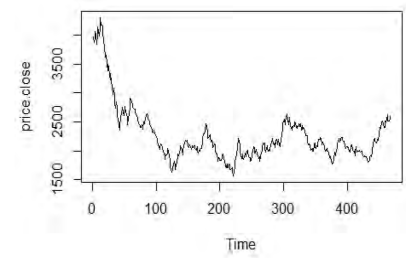
یافته‌های پژوهش

در این پژوهش، با توجه به قیمت پایانی سهام ایران‌خودرو در بازار بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۱۳۹۹ /۹/۱ تا ۱۴۰۱ /۹/۲۳، قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل توسعه یافته بلک شولز محاسبه و در نهایت با قیمت بازار مقایسه می‌شود. لازم به ذکر است برای محاسبه و تحلیل داده‌ها از نرم افزار R نسخه ۱-۳-۴ استفاده شده است. سری زمانی متناظر با مقادیر روزانه قیمت سهام ایران‌خودرو و بازدهی آن در شکل ۱ و ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. بازدهی سهم ایران‌خودرو

منبع: یافته‌های پژوهش



شکل ۲. بازدهی سهم ایران‌خودرو

منبع: یافته‌های پژوهش

نظر به اینکه عملکرد مدل‌های مختلف سری زمانی، با توجه به داده‌های مختلف می‌تواند تحت تأثیر قرار گیرد، پیش از انجام هر اقدامی، به بررسی آماره‌های توصیفی متغیرها در جدول ۱ پرداخته می‌شود. بر اساس نتایج ارائه‌شده جدول ۱ میانگین بازده سهام عددی منفی و بسیار نزدیک به صفر است. همچنین این متغیر دارای چولگی مثبت می‌باشد که نشان‌دهنده آن است که بازده مثبت محتمل‌تر از بازده منفی می‌باشد. ضریب کشیدگی نشان‌دهنده کشیدگی نسبت به توزیع نرمال است.

جدول ۱. آماره‌های توصیفی بازده سهم ایران‌خودرو

آماره توصیفی	چولگی	کشیدگی	ابر چولگی	میانگین	انحراف معیار
بازده	۰/۱۵۳۹۸	۲/۲۸۵۶۳	۰/۸۳۷۹۴	-۰/۰۰۰۹۱	۰/۰۲۷۲۲

منبع : یافته‌های پژوهش

در این راستا فرض نرمال بودن توزیع سری بازده روزانه سهم ایران‌خودرو با آزمون‌های جاک– برا[1] و شاپیرو – ویلک[2] بررسی گردید که با توجه به P-مقدار کمتر از ۰/۰۵ این فرض رد می‌شود. در ادامه قبل از مدل‌سازی برای جلوگیری از انجام رگرسیون‌های کاذب، مانایی سری بازده توسط دو نوع آزمون مانایی دیکی– فولر تعمیم‌یافته[3] و کواتکویسکی فیلپس- اشمیت - شین[4] مورد بررسی قرارگرفته است و مانایی سری بازده تایید شد. همچنین می‌توان از طریق آزمون آماره لیانگ -باکس[5] به بررسی ضرورت مدل کردن معادله میانگین و نیز وجود نوسانات خوشه‌ای در داده‌ها پرداخت.

1. Jarque-Bera test
2. Shapiro-Wilk test
3. Augmented Dickey–Fuller test
4. Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) tests
5. Ljung–Box

جدول ۲. نتایج آزمون آماره لیانگ -باکس

آماره لیانگ -باکس	بازده	مجذور بازده
	p-value = ۰/۰۰۷۷۵	p-value =۰
	باقی مانده بازده	مجذور باقی مانده بازده
	p-value = ۰/۵۰۶۷	p-value =۰/۰۰۰۱۵

منبع : یافته‌های پژوهش

با توجه به جدول ۲ دیده می‌شود که همبستگی سریالی بین داده‌ها در بازده تایید می‌شود و بیان می‌کند که مدل کردن معادله میانگین لازم است. همچنین، همبستگی سریالی بین داده‌ها در مجذورباقی مانده بازده تایید می‌شود. به عبارت دیگر، پدیده نوسانات خوشه‌ای درداده‌های مربوط به بازدهی روزانه مشاهده می‌شود و می‌توان از مدل‌های گارچ برای تخمین نوسان استفاده کرد. همچنین، وجود همبستگی سریالی بین داده‌ها در باقی مانده‌های بازده رد می‌شود ولی همبستگی سریالی بین داده‌ها در مجذور باقی مانده‌های رد نمی‌شود. به عبارت دیگر، پدیده نوسانات خوشه‌ای در داده‌های مربوط به بازدهی روزانه مشاهده می‌شود و ضرورت استفاده از مدل‌های با نوسانات تصادفی قوت می گیرد. درادامه به انتخاب مدل مناسب میانگین پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه تابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی در تعیین مرتبه یک مدل ARIMA زیاد مفید نیستند، با استفاده از تابع خودهمبستگی بسط یافته[1] (EACF)، مدل‌های زیر انتخاب شده‌اند.

جدول ۳. آزمون انتخاب مدل

مدل	معیار آکائیک(AIC)	معیار بیزین(BIC)
ARIMA(۰,۰,۱)	-۲۰۵۵/۷۵۷	-۲۰۴۳/۳۱۸
ARIMA(۰,۰,۲)	-۲۰۵۹/۸۷۱	-۲۰۴۳/۲۸۵
ARIMA(۱,۰,۱)	-۲۰۶۰/۴۴۷	-۲۰۴۳/۸۶۱
ARIMA(۳,۰,۱)	-۲۰۶۰/۲۴۵	-۲۰۳۵/۳۶۷
ARIMA(۱,۰,۲)	-۲۰۵۸/۷۷۳	-۲۰۳۸/۰۴۱
ARIMA(۲,۰,۲)	-۲۰۵۸/۸۸۸	-۲۰۳۴/۰۱۰

منبع : یافته‌های پژوهش

با توجه به جدول ۳ دیده می‌شود مدل ARIMA(۱,۰,۱) ، مقادیر آکائیک و بیزین کوچکتری دارد، لذا نسبت به مدل‌های دیگر بهتر است.

بنابراین، مدل ARIMA(۱,۰,۱) برای سری بازده با میانگین صفر به صورت زیر می‌باشد.

$$y_t = -0.3742\, y_{t-1} - 0.6002\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t,\ \hat{\sigma} = 0.02648 \quad (۹)$$

1. Extended Auto Correlation Function

پس از آنکه اثرات آرچ مورد تأیید قرار گرفت و آزمون واریانس ناهمسانی روی داده‌ها دال بر وجود یک همبستگی قابل‌توجه از مربع نوسانات انجام گرفت، نوبت به تخمین پارامترهای مدل GARCH می‌رسد. مدل GARCH(۱،۱) یک کاندید مناسب برای مدل‌سازی واریانس شرطی است. برای این منظور از یک برآورد توام مدل ARMA(۱،۱)-GARCH(۱،۱) استفاده می‌شود که φ_1 و θ_1 ضرایب مدل ARMA(۱،۱) هستند. تخمین پارامترهای مدل‌ها در جدول ۴ ارائه می‌شوند.

جدول۴. برآورد توام پارامترهای مدل‌های GARCH

پارامتر	مدل	EGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)	SGARCH(1,1)
φ_1	مقدار	-۰/۳۸۶۳۷۸	-۰/۳۹۷۳۴۳	-۰/۴۰۱۶۵۹
	خطا	۰/۰۷۱۹۸۸	۰/۱۲۹۱۳۲	۰/۱۲۹۸۵۲
θ_1	مقدار	۰/۶۰۰۶۷۹	۰/۶۱۰۳۳۵	۰/۶۱۴۳۴۲
	خطا	۰/۰۶۲۳۷۱	۰/۱۰۸۹۶۶	۰/۱۰۹۴۵۴
ω	مقدار	-۰/۳۲۵۷۷۸	۰/۰۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰۳۳
	خطا	۰/۰۲۲۱۸۲	۰/۰۰۰۰۲۰	۰/۰۰۰۰۲۸
α_1	مقدار	-۰/۰۱۶۵۳۶	۰/۰۲۳۹۰۹	۰/۰۵۱۸۲۱
	خطا	۰/۰۲۴۴۶۱	۰/۰۲۹۴۰۹	۰/۰۲۸۶۱۱
β_1	مقدار	۰/۹۵۵۶۴۹	۰/۹۱۹۸۸۳	۰/۹۰۱۱۴۵
	خطا	۰/۰۰۳۰۶۹	۰/۰۴۶۲۳۹	۰/۰۵۸۵۲۹
γ_1	مقدار	۰/۰۸۹۳۴۸	۰/۰۴۱۰۰۸	-
	خطا	۰/۰۳۰۶۳۹	۰/۰۳۴۰۸۹	-

منبع : یافته‌های پژوهش

برای بازبینی مدل‌ها، مقادیر آماره‌های لیانگ-باکس در وقفه‌های ۱۰ و ۲۵ برای فرآیند باقیمانده‌های استانداردشده و مجذور باقیمانده‌های استانداردشده در جدول ۵ ارائه شده است. لازم به ذکر است که عدد داخل پرانتز نشان‌دهنده سطح معنی‌داری است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که هیچ‌گونه همبستگی سریالی در باقیمانده‌های استاندارد شده مدل برازش شده وجود ندارد. پس مدل تخمین زده شده مناسب می‌باشد.

جدول۵. نتایج آزمون آماره لیانگ -باکس

فرآیند / مدل	EGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)	SGARCH(1,1)
	(۰/۸۳۰۷)	(۰/۸۴۳۶)	(۰/۸۱۴۷)
باقیمانده‌های	Q(۱۰)=۵/۸۱۳۲	Q(۱۰)=۵/۶۵۲۳	Q(۱۰)=۶/۰۰۶۱
استانداردشده	(۰/۶۶۵۹)	(۰/۷۰۷۸)	(۰/۶۷۷۸)
	Q(۲۵)=۲۱/۴۷۳	Q(۲۵)=۲۰/۷۲۵	Q(۲۵)=۲۱/۲۶۴
	(۰/۵۲۸۹)	(۰/۵۷۱)	(۰/۵۱۲)
مجذور باقیمانده‌های	Q(۱۰)=۹/۰۳۳۷	Q(۱۰)=۸/۵۹۴۳	Q(۱۰)=۹/۲۱۲۸
استانداردشده	(۰/۵۶۹۷)	(۰/۶۰۵۷)	(۰/۶۳۰۳)
	Q(۲۵)=۲۳/۱۳۵	Q(۲۵)=۲۲/۵۱۷	Q(۲۵)=۲۲/۰۹۴

منبع : یافته‌های پژوهش

با توجه به این‌که هدف پژوهش محاسبه قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک‌شولز توسعه‌یافته با نوسانات مختلف است در جدول ۶ نوسان محاسبه شده تحت داده‌های تاریخی و همچنین، براساس معادله نوسانات، نوسان غیرشرطی مدل‌های گارچ استاندارد، گارچ آستانه و گارچ نمایی ارائه شده است. طبق نتایج به دست آمده نوسان محاسبه شده تحت گارچ نمایی، کمترین مقدار و برای تاریخی بیشترین مقدار است.

جدول۶. نوسان تاریخی و نوسان غیرشرطی مدل‌های گارچ

گارچ نمایی	گارچ آستانه	گارچ استاندارد	تاریخی
۰/۰۲۰۹۱۰۰۸	۰/۰۲۶۴۸۷۳۴	۰/۰۲۶۳۸۶۶۴	۰/۰۲۷۲۲۰۹۳

منبع: یافته‌های پژوهش

قیمت اختیار خرید اروپایی و خطای آن تحت مدل بلک‌شولز با نوسان تاریخی و گارچ استاندارد در جدول ۷ و با نوسان گارچ آستانه و نمایی در جدول ۸ ارائه شده است. لازم به ذکر است که قیمت و خطای محاسبه شده در سه بازه زمانی کوتاه‌مدت (۳۴ روز)، میان مدت (۴۶ روز) و بلندمدت (۹۴ روز) با سه قیمت اعمال متفاوت و تحت دو حالت حل تحلیلی و شبیه‌سازی مونت کارلو به دست آمده است. بر اساس چهار نوسان در نظر گرفته شده با مقایسه روش‌های تحلیلی و مونت‌کارلو مشاهده می‌شود که روش مونت‌کارلو خطای کمتری را نشان می‌دهد. همچنین، می‌توان دید که در بازه زمانی کوتاه‌مدت نسبت به بازه زمانی بلندمدت، مقدار خطای قیمت‌گذاری در هر دو روش تحلیلی و مونت‌کارلو کمتر است. طبق نتایج به دست آمده در بازه زمانی کوتاه‌مدت و با قیمت اعمال ۱۴۰۰، هر چهار نوسان در نظر گرفته شده منجر به قیمت اختیار خرید یکسان شده است و در میان‌مدت با قیمت اعمال ۲۰۰۰، گارچ استاندارد قیمت نزدیک‌تر به قیمت واقعی را نشان می‌دهد. در بلندمدت با قیمت اعمال ۲۰۰۰، نوسان تاریخی نتایج بهتری را ارائه می‌دهد. با مقایسه سه بازه زمانی در نظر گرفته شده و در قیمت اعمال ۲۶۰۰ دیده می‌شود که قیمت به دست آمده با نوسان تاریخی به قیمت واقعی نزدیک‌تر است.

جدول ۷. قیمت اختیار خرید اروپایی و خطای آن تحت مدل بلک‌شولز با نوسان تاریخی و گارچ استاندارد

مونت کارلو بلک شولز با نوسان گارچ استاندارد		بلک شولز با نوسان گارچ استاندارد		مونت کارلو بلک شولز با نوسان تاریخی		بلک شولز با نوسان تاریخی		قیمت بازار	قیمت اعمال	قیمت سهم	تاریخ اعمال
درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت				
۰/۷۵	۱۲۲۵/۶	۰/۷۶	۱۲۲۵/۵	۰/۷۵	۱۲۲۵/۶۲	۰/۷۶	۱۲۲۵/۵۹	۱۲۳۵	۱۴۰۰	۲۵۹۲	۳۴
۴۳/۶۰	۱۸۶/۱۰	۵۸/۴۷	۱۳۷/۰۲	۴۲/۱۱	۱۹۱/۰۳	۴۲/۱۶	۱۹۰/۸۷	۳۳۰	۲۶۰۰	۲۵۹۲	۳۴
۵۰/۰۰	۱۰۲/۴۹	۷۶/۰۱	۴۹/۱۶	۴۷/۶۲	۱۰۷/۳۶	۴۷/۶۸	۱۰۷/۲۴	۲۰۵	۲۸۰۰	۲۵۹۲	۳۴
۱۲/۶۸	۶۶۵/۳۱	۱۰/۸۰	۶۷۹/۶۶	۱۲/۵۰	۶۶۶/۷۰	۱۲/۵۱	۶۶۶/۶۳	۷۶۲	۲۰۰۰	۲۵۹۲	۴۶
۳۸/۶۲	۲۲۲/۸۰	۵۸/۵۷	۱۵۰/۳۷	۳۷/۰۵	۲۲۸/۴۸	۳۷/۱۱	۲۲۸/۲۹	۳۶۳	۲۶۰۰	۲۵۹۲	۴۶
۵۳/۲۱	۱۳۶/۱۵	۷۹/۹۰	۵۸/۴۸	۵۱/۲۲	۱۴۱/۹۴	۵۱/۲۷	۱۴۱/۷۸	۲۹۱	۲۸۰۰	۲۵۹۲	۴۶
۱۶/۷۹	۷۴۸/۸۳	۱۸/۴۴	۷۳۳/۹۹	۱۶/۴۳	۷۵۲/۰۴	۱۶/۴۵	۷۵۱/۹۰	۹۰۰	۲۰۰۰	۲۵۹۲	۹۴
۳۱/۸۳	۳۴۴/۲۵	۵۷/۳۳	۲۱۵/۴۵	۳۰/۲۸	۳۵۲/۰۵	۳۰/۳۴	۳۵۱/۷۷	۵۰۵	۲۶۰۰	۲۵۹۲	۹۴
۳۸/۴۰	۲۵۲/۵۳	۷۶/۵۴	۹۶/۱۸	۳۶/۳۷	۲۶۰/۸۷	۳۶/۴۳	۲۶۰/۵۹	۴۱۰	۲۸۰۰	۲۵۹۲	۹۴

منبع : یافته‌های پژوهش

جدول ۸. قیمت اختیار خرید اروپایی و خطای آن تحت مدل بلک‌شولز با نوسان گارچ آستانه و نمایی

مونت کارلو بلک شولز با نوسان گارچ نمایی		بلک شولز با نوسان گارچ نمایی		مونت کارلو بلک شولز با نوسان گارچ آستانه		بلک شولز با نوسان گارچ آستانه		قیمت بازار	قیمت اعمال	قیمت سهم	تاریخ اعمال
درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت				
۰/۷۶	۱۲۲۵/۶۱	۰/۷۶	۱۲۲۵/۵۹	۰/۷۵	۱۲۲۵/۶۲	۰/۷۶	۱۲۲۵/۵۹	۱۲۳۵	۱۴۰۰	۲۵۹۲	۳۴
۵۳/۳۷	۱۵۳/۸۶	۵۹/۳۳	۱۳۴/۱۹	۴۳/۴۲	۱۸۶/۷۰	۵۸/۴۴	۱۳۷/۱۴	۳۳۰	۲۶۰۰	۲۵۹۲	۳۴
۶۵/۳۳	۷۱/۰۶	۷۴/۶۸	۵۱/۹۰	۴۹/۷۱	۱۰۳/۰۸	۷۳/۵۴	۵۴/۲۴	۲۰۵	۲۸۰۰	۲۵۹۲	۳۴
۱۳/۵۲	۶۵۸/۹۷	۱۳/۵۶	۶۵۸/۶۵	۱۲/۶۶	۶۶۵/۴۷	۱۳/۲۹	۶۶۰/۷۱	۷۶۲	۲۰۰۰	۲۵۹۲	۴۶
۴۸/۸۴	۱۸۵/۶۹	۵۹/۵۵	۱۴۶/۸۱	۳۸/۴۳	۲۲۳/۴۹	۵۸/۷۴	۱۴۹/۷۴	۳۶۳	۲۶۰۰	۲۵۹۲	۴۶
۶۶/۱۶	۹۸/۴۵	۷۹/۶۸	۵۹/۱۱	۵۲/۹۷	۱۳۶/۸۵	۷۸/۷۹	۶۱/۷۰	۲۹۱	۲۸۰۰	۲۵۹۲	۴۶
۱۸/۶۶	۷۳۲/۰۵	۱۹/۶۸	۷۲۲/۸۴	۱۶/۷۵	۷۴۹/۲۱	۱۹/۵۶	۷۲۳/۹۷	۹۰۰	۲۰۰۰	۲۵۹۲	۹۴
۴۱/۹۰	۲۹۳/۴۰	۵۹/۷۰	۲۰۳/۵۱	۳۱/۶۴	۳۴۵/۱۹	۵۹/۰۷	۲۰۶/۶۸	۵۰۵	۲۶۰۰	۲۵۹۲	۹۴
۵۱/۷۷	۱۹۷/۷۰	۷۷/۱۲	۹۳/۷۸	۳۸/۱۶	۲۵۳/۵۴	۷۶/۳۹	۹۶/۷۸	۴۱۰	۲۸۰۰	۲۵۹۲	۹۴

منبع : یافته‌های پژوهش

ارزش در معرض خطر شرطی برای قیمت اختیار خرید تحت مقادیر مختلف نوسان در جدول ۹ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود مقادیر ارزش در معرض خطر شرطی در حالت‌های یک درصد و پنج درصد بسیار نزدیک به هم هستند و می‌توان نتیجه گرفت مقادیر ارزش در معرض خطر بسیار نزدیک به ارزش در معرض خطر شرطی می‌باشد. نتایج جدول ۹ نشان می‌دهد در بازه زمانی کوتاه و میان‌مدت گارچ نمایی بیشترین مقدار ارزش در معرض خطر شرطی را دارد در حالی که در بلندمدت با قیمت اعمال ۲۰۰۰، گارچ استاندارد بیشترین مقدار ارزش در معرض خطر شرطی را به خود اختصاص داده است. در حالی که در همه بازه‌های زمانی ارزش در معرض خطر شرطی برای نوسان تاریخی کمترین را دارد و می‌توان نتیجه گرفت استفاده از نوسان تاریخی در قیمت اختیار ریسک واقعی‌تری را ارائه داده است.

جدول۹. ارزش در معرض خطر شرطی برای قیمت اختیار خرید تحت مقادیر مختلف نوسان

ارزش در معرض خطر شرطی گارچ نمایی		ارزش در معرض خطر شرطی گارچ آستانه		ارزش در معرض خطر شرطی گارچ استاندارد		ارزش در معرض خطر شرطی تاریخی		قیمت بازار	قیمت اعمال	قیمت سهم	تاریخ اعمال
۵درصد	۱ درصد	۵درصد	۱ درصد	۵درصد	۱ درصد	۵درصد	۱ درصد				
۱۲۰۶/۴۲	۱۲۰۶/۳۹	۱۱۹۴/۹	۱۱۹۴/۸۶	۱۱۹۵/۱۳	۱۱۹۵/۰۹	۱۱۹۳/۱۸	۱۱۹۳/۱۴	۱۲۳۵	۱۴۰۰	۲۵۹۲	۳۴
۳۵/۲۱	۳۵/۱۸	۲۳/۷۰	۲۳/۶۵	۲۳/۹۲	۲۳/۸۸	۲۲/۰۹	۲۱/۹۳	۳۳۰	۲۶۰۰	۲۵۹۲	۳۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲۰۵	۲۸۰۰	۲۵۹۲	۳۴
۶۳۰/۷۴	۶۳۰/۷۱	۶۱۵/۲۱	۶۱۵/۱۵	۶۱۵/۵۲	۶۱۵/۴۷	۶۱۲/۹۰	۶۱۲/۸۴	۷۶۲	۲۰۰۰	۲۵۹۲	۴۶
۵۰/۱۳	۵۰/۱۰	۳۴/۶۰	۳۴/۵۵	۳۴/۹۱	۳۴/۸۶	۳۲/۲۹	۳۲/۲۴	۳۶۳	۲۶۰۰	۲۵۹۲	۴۶
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲۹۱	۲۸۰۰	۲۵۹۲	۴۶
۶۶۹/۲۲	۶۶۹/۱۵	۶۳۷/۹	۶۳۷/۸۰	۷۱۸/۶۰	۷۱۸/۵۹	۶۳۳/۵۰	۶۳۳/۱۶	۹۰۰	۲۰۰۰	۲۵۹۲	۹۴
۱۰۸/۱۸	۱۰۸/۱۲	۷۶/۸۷	۷۶/۷۶۸	۷۷/۴۹	۷۷/۳۹	۷۲/۲۳	۷۲/۱۲	۵۰۵	۲۶۰۰	۲۵۹۲	۹۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۴۱۰	۲۸۰۰	۲۵۹۲	۹۴

منبع : یافته‌های پژوهش

بحث و نتیجه گیری

با توجه به نقش اساسی بازارهای مالی در توسعه اقتصادی هر کشور، بررسی دقیق این بازارها از جنبه‌های مختلف ضروری به نظر می‌رسد. اختیار معامله، یکی از ابزارهای معامله‌ای است که به منظور کاهش ریسک به بازارهای مالی معرفی شده است. در این راستا، استفاده از مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری طیف وسیعی از قراردادهای اختیار معامله مرسوم است. در این مدل ثابت بودن نوسان بازده‌ها یک فرض اساسی است.

در این پژوهش به توسیع مدل بلک شولز تحت نوسانات گارچ پرداخته شده است. برای این منظور، از داده‌های ایران‌خودرو در بازه ۹/۱/ ۱۳۹۹ تا ۹/۲۳/ ۱۴۰۱ استفاده شد. درمجموع پژوهش‌های داخلی محدودی در خصوص قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی صورت پذیرفته است و پژوهش‌های موجود متمرکز بر روی یکی از مدل‌های بلک‌شولز یا هستون می‌باشند. به‌عنوان نمونه نیسی و همکاران (۱۳۹۵) با افزودن فرایند واریانسِ افزون به دینامیک دارایی پایه، به مدل هستون مضاعف دست یافتند که نوسان در این مدل از روش گارچ محاسبه نشده است و یا باغستانی و همکاران (۱۳۹۷) از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای تعیین قیمت اختیار استفاده نمودند که در این پژوهش نیز نوسان ثابت در نظر گرفته شده است. ابوالی و همکاران (۱۳۹۸) نیز با ثابت در نظر گرفتن نوسان معادله‌ای جدید برای قیمت‌گذاری اختیار معامله ارائه و آزمون نمودند. اگر چه امیری (۱۳۹۹) و بهرادمهر و طهماسبی (۱۴۰۱) به قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله در مدل بلک‌شولز با برآورد نوسان در بازار به روش گارچ پرداختند اما به مقایسه قیمت اختیار در روش‌های مختلف پرداخته نشده است و ضمن اینکه ریسک قیمت اختیار (ارزش در معرض خطر شرطی) در هیچ یک از پژوهش‌های داخلی تعیین نشده است. در پژوهش‌های خارجی نیز شراز و همکاران (۲۰۱۴) فقط به قیمت‌گذاری اختیار خرید به روش گارچ استاندارد پرداختند. در حالی که در پژوهش حاضر به عملکرد مدل‌های بلک شولز در قیمت‌گذاری اختیار خرید با رویکردهای مختلف نوسان تحت داده‌های تاریخی و مدل‌های گارچ پرداخته شده است و نتایج با هم مقایسه گردیده است. از آنجایی که نوسان، پارامتر کلیدی در قیمت‌گذاری اختیار است، نوسان تاریخی، گارچ استاندارد، گارچ نمایی و گارچ آستانه، برای تعیین بهترین رویکرد نوسان برای قیمت‌گذاری اختیارها استفاده شده‌اند تا اثر نامتقارنی شوک‌ها بر روی قیمت اختیار اعمال گردد. همچنین عملکرد قیمت‌گذاری مدل‌ها در طول دوره‌های کوتاه‌مدت، میان مدت و بلندمدت ارزیابی شد و در نهایت، ارزش در معرض خطر شرطی برای هر یک از قیمتها تعیین گردید که این موضوع نیز نوآوری دیگر این پژوهش نسبت به سایر پژوهش‌های موجود می‌باشد. نتایج مقایسه مقادیر قیمت اختیار خرید نشان می‌دهد ضمن اینکه قیمت اختیار با نوسان تاریخی نسبت به مدل‌های گارچ قیمت نزدیک‌تری به قیمت بازار نشان می‌دهد ریسک واقعی‌تری را نیز ارائه داده است و بنابراین، جهت قیمت‌گذاری اختیار خرید پیشنهاد می‌گردد.

در ادامه پیشنهاد می‌گردد در پژوهش‌های آتی از مدل گارچ ناپارامتریک برای مدلسازی و تحلیل داده‌ها استفاده گردد. همچنین، پیشنهاد می‌گردد ضمن به‌کارگیری نوسان تصادفی، جمله پرش نیز در مدل‌ها اضافه گردد تا به قیمت واقعی‌تری دست یافته شود. در حقیقت، مدل‌های فرایندهای لوی پرش انتشار

و پرش محض، فرایندهای پرش-انتشار مرتون و کو و فرایندهای پرش محض هذلولوی، گاوسی معکوس نرمال و سایر مدل‌ها را با نوسان تصادفی ترکیب نماییم که این موضوع می‌تواند تحولی در موضوع قیمت-گذاری اختیارها ایجاد نماید.

ملاحظات اخلاقی

حامی مالی: مقاله حامی مالی ندارد.

مشارکت نویسندگان: تمام نویسندگان در آماده‌سازی مقاله مشارکت داشته‌اند.

تعارض منافع: بنا بر اظهار نویسندگان در این مقاله هیچ‌گونه تعارض منافعی وجود ندارد.

تعهد کپی‌رایت: طبق تعهد نویسندگان حق کپی‌رایت رعایت شده‌است.

References

Abvali, M., Khalili Araghi, M., Hassanabadi, H., & Yaghoobnezhad, A., (2019). Optional Trading Pricing with a New Analytic Method for the Black-Scholes Equation. *Journal of Financial Management Strategy, 7(26)*, 135-155. (In Persian)

Amiri, M. (2020). Option Pricing Under Black– Scholes, Boness and Binomial Tree Models-Evidence from the Gold Coin Option Contracts in Iran Mercantile Exchange.*Journal of Securities Exchange,13(50)*, 141-170. (In Persian)

Angelidis, T., Benos, A., & Degiannakis, S. (2004). The use of GARCH models in VaR estimation. *In Statistical Methodology* (Vol. 1, Issues 1–2, pp. 105–128).

Baghestani, M., Pishbahar, E., & Dahsti, G. (2018). The Pricing of Asian Options Using Monte Carlo Simulation (Case Study: Soybean Meal). Agricultural Economics: *Iranian Journal of Agricultural Economics (Economics and Agriculture Journal), 12(3)*, 1-26. (In Persian)

Bahradmehr, N., & Tahmasebi, N. (2022). Pricing The Gold Coin Options of Iran Mercantile Exchange Market: "Black Scholes" and "Put-Call Parity" Approaches. *Journal of Financial Economics (Financial Economics AND Development),* 16(3 (60)), 69-91. (In Persian)

Black, F. (1976). Studies of stock market volatility changes. Proceedings of the American statistical association bisiness and economic statistics section,177-181.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *In Journal of Econometrics* (Vol. 31, Issue 3, pp. 307–327).

Carr, P, & Wu, L. (2016). Analyzing volatility risk and risk premium in option contracts: A new theory. *In Journal of Financial Economics* (Vol. 120, Issue 1, pp.1–20).

Darabi, R., and Marufkhani, M. (2015). Valuation of new financial instruments. Auditor 18(82), 72-79. (In Persian)

Duan, J. C. (1995). The GARCH option pricing model. *Mathematical finance*, 5(1), 13-32.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *In Econometrica* (Vol. 50, Issue 4, p.987).

French , K. R., Schwert , G. W., & Staumbaugh, R. F. (1987). Expected Stock Returns and Volatility. *Journal of Financial Economics(*Vol. 19, Issue 1, pp.3-29).

Glosten, L. R, Jagannathan, R, & Runkle, D. E. (1993). On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *In The Journal of Finance* (Vol. 48, Issue 5, pp. 1779–1801).

Gong, H, Thavaneswaran, A, & Singh, J. (2010). Stochastic Volatility Models with Application in Option Pricing. *In Journal of Statistical Theory and Practice* (Vol. 4, Issue 4, pp. 541–557).

Hajizadeh, E., & Mahootchi, M. (2019). A Simulation Based Optimization Model for Pricing Basket Options. F*inancial Engineering and Securities Management (Portfolio Management)*, 10(38), 306-327. (In Persian)

Harris , D. (2018). Pricing European Style Options, University of rovidence, 1-49.

Hall, J. (2002). Fundamentals of financial engineering and risk management. Translated by Salehabadi, Ali, Sayah. Sajjad (2019). Tehran: Bors *Information and Services Company*, Bors Publications. (In Persian).

İltüzer, Z. (2022). Option pricing with neural networks vs. Black-Scholes under different volatility forecasting approaches for BIST 30 index options. *In Borsa Istanbul Review* (Vol. 22, Issue 4, pp. 725–742).

Kimiagari, A. and Afride Sani, A. (2009), Presentation of an integrated method for option pricing based on two models, Black Shoeless and Binary Tree (Case Study of Iran Stock Exchange Market), I*nternational Quarterly Journal of Industrial Engineering and Production Management*, 19(4), 119-127. (In Persian)

Nissi, A, Maliki, B, and Rezaian, R. (2016). Estimating the parameters of the European option pricing model under the underlying asset with stochastic volatility using the loss function approach, *Journal of Financial Engineering and Securities Management*, 7(28), 91-115. (In Persian)

Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *In Econometrica* (Vol. 59, Issue 2, p. 347).

Pan, Z., Wang, Y., Liu, L., & Wang, Q. (2019). Improving volatility prediction and option valuation using VIX information: A volatility spillover GARCH model. In *Journal of Futures Markets* (Vol. 39, Issue 6, pp. 744–776).

Papantonis, I. (2016). Volatility risk premium implications of GARCH option pricing models. *In Economic Modelling* (Vol. 58, pp. 104–115).

Shahmoradi, A, & Zanganeh, M. (2016). Calculation of value at risk for major indices of Tehran Stock Exchange using parametric method. *Journal of Economic Research*, 42(79). 121-149. (In Persian)

Sheraz, M., & Preda, V. (2014). Implied Volatility in Black-scholes Model with Garch Volatility. *In Procedia Economics and Finan*ce (Vol. 8, pp. 658–663).

Tehrani, R., Mohammadi, S., & Porebrahimi, M. (2011). Modeling and forecasting the volatility of Tehran Exchange Dividend Price Index (Tedpix). *Financial Research Journal*, *12*(30), 23-36. (In Persian)

Wang, X.-T., Zhao, Z.-F., & Fang, X.-F. (2015). Option pricing and portfolio hedging under the mixed hedging strategy. In Physica A: Statistical Mechanics and its Applications (Vol. 424, pp. 194–206).

Tsay, R. S. (2005). Analysis of financial time series. John wiley & sons.

Zakoian, J. M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *In Journal of Economic Dynamics and Control* (Vol. 18, Issue 5, pp. 931–955).

Zhang, W., & Zhang, J. E. (2020). GARCH Option Pricing Models and the Variance Risk Premium. *In Journal of Risk and Financial Management* (Vol. 13, Issue 3, p. 51).