

تحلیل دینامیکی غیرخطی یک ربات انعطاف‌پذیر متحرک فضایی

حسن ظهور* و سید مهدی خرسندی جو**

چکیده: در این مقاله با استفاده از متغیرهای کمکی ساختار کلی مدل دینامیکی یک ربات متحرک فضایی با N لینک انعطاف‌پذیر و N مفصل لولا، که مجموعه‌ای از $5N+6$ معادله دیفرانسیل جزئی کوپل غیرخطی به همراه شرایط مرزی است، ارائه شده است. از بیان نیروها و گشتاورهای ناپایستار صرف نظر شده است، ولی اگر در نظر آورده شوند، ساختار کلی مدل دینامیکی عوض نخواهد شد. پایه ربات جسم صلب شش درجه آزادی در فضا ست و هر لینک آن، به عنوان یک تیر اویلر - برنولی، کلیه درجات آزادی فضایی الاستیک؛ یعنی کشش، فشار، پیچش و دو خمش فضایی را دارد. لینکها از ماده ایزوتروپیک الاستیک خطی ساخته شده و بسیار دقیق‌تر از تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی مدل شده‌اند، به طوری که نه تنها گرایش الاستیک سیستم مختصات سطح مقطع لینکها بزرگ است، بلکه هنگامی که گرایش الاستیک آنها کوچک منظور می‌شود، باز هم دقت مدلسازی آنها بیشتر از تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی باقی می‌ماند. این یافته‌ها تئوریهای تیر اویلر - برنولی دو بعدی و سه بعدی غیرخطی را که در آن گرایش الاستیک سیستم مختصات سطح مقطع عملاً کوچک است، ارتقا داده‌اند. تاکنون لئونارد اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳ میلادی) نقش مهمی در تحلیل ارتعاشات تیرها و پایداری ستونها داشته است. تیر اویلر - برنولی صلب‌ترین مدل برای تیرهاست و در آن تخت باقی ماندن سطح مقطع به فرض برنولی (۱۷۰۰-۱۷۸۲ میلادی) معروف است. تا قبل از نگارش مقالات در این زمینه [۱، ۳ و ۷]، به اشکالات موجود در فرمولاسیون تئوریهای تیر اویلر-برنولی دو بعدی و سه بعدی غیرخطی توجهی نشده بود. این موضوع کاربرد مهندسی و آموزشی قابل توجهی دارد.

واژه‌های کلیدی: مدل دینامیکی، لینک انعطاف‌پذیر، ربات متحرک، تیر اویلر- برنولی غیرخطی، دینامیک پیشرفته، رباتیک پیشرفته، مقاومت مصالح و ارتعاشات سیستم‌های ممتد.

* استاد و عضو قطب علمی طراحی، رباتیک و اتوماسیون، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران. zohoor@sharif.edu

** دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی مکانیک، تهران. mkhorsandijou@yahoo.com

۱. مقدمه

ربات متحرک یک سیستم سینماتیکی ماهر است. متحرک بودن پایه ربات حجم فضای کاری آن را افزایش می‌دهد و مهارت سینماتیکی آن را بالا می‌برد، زیرا سیستم درجات آزادی زاید^۱ را پیدا می‌کند و می‌تواند از پیکره‌های تکین و برخورد با موانع پرهیز کند. در رباتهای متحرک نمایان شدن انعطاف‌پذیری با شتاب حرکت پایه، شتاب حرکت و طول لینکهای بازوی مکانیکی ماهر و نسبت جرم بار گرفته شده توسط مجری نهایی بر جرم بازوی مکانیکی ماهر رابطه مستقیم و با مقاومت مکانیکی، مساحت و ابعاد سطح مقطع لینکهای بازوی مکانیکی ماهر رابطه معکوس دارد. برای افزایش حجم فضای کاری، پایه ربات متحرک می‌شود و ممکن است لینکها بدون تغییر در سطح مقطع با طول بلندتری ساخته شوند. گاهی برای تقلیل مصرف انرژی، افزایش قابلیت مانور و استفاده از عمل‌کننده‌های کوچک‌تر، ربات از طریق کاهش مساحت سطح مقطع و ثابت ماندن طول لینکها سبک‌تر ساخته شود و در نتیجه، انعطاف‌پذیری لینکها زیاد می‌شود و نمی‌توان لینکها را صلب فرض کرد.

در این مقاله، که خلاصه‌ای از پایان نامه ارائه شده در مرجع [۱] است، پایه ربات یک جسم صلب شش درجه آزادی در فضاست و لینکها قابلیت دریافت تغییرشکل‌های الاستیک محوری، پیچشی و خمشی فضایی را دارند و از ماده ایزوتروپیک الاستیک خطی ساخته شده‌اند. گرایش الاستیک سطح مقطع در لینک بلند بسیار زیاد و در لینک کوتاه ناچیز است. تیر اویلر-برنولی سه بعدی غیرخطی^۲ یک تیر کوتاه به حساب می‌آید، زیرا گرایش الاستیک سطح مقطع آن عملاً ناچیز فرض شده است. عبارات ارتقا یافته و کاملاً ارتقا یافته^۳ هر دو برای لینک کوتاه کاربرد دارند و به ترمهای الاستیک جدیدی در معادلات حرکت و روابط شرایط مرزی اشاره می‌کنند که در تئوری تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی مشاهده نشده‌اند. ترمهای الاستیک جدید یاد شده تئوریهای تیر اویلر - برنولی سه بعدی و دو بعدی غیرخطی را، که در آنها گرایش الاستیک سطح مقطع عملاً کوچک است، تصحیح می‌کنند.

ترمهای الاستیک جدید از تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک کاملاً ارتقا یافته نشئت گرفته‌اند. تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک ارتقا یافته فقط بخشی از ترمهای جدید مذکور را

-
1. Redundant
 2. Nonlinear 3D Euler-Bernoulli beam
 3. Enhanced & Fully-enhanced

با عنوان ترمهای الاستیک جدید اولیه در معادلات حرکت و روابط شرایط مرزی ظاهر می‌کند. در تئوری تیر اوایلر - برنولی سه بعدی غیرخطی حتی ترمهای الاستیک جدید اولیه نیز ملاحظه نشده‌اند. ترمهای الاستیک جدیدی که در تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک کاملاً ارتقا یافته موجودند، ولی در تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک ارتقا یافته وجود ندارند و ترمهای الاستیک جدید ثانویه نام دارند. اگر تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک لینک بلند بر حسب تغییرات مشتقات جزئی مکانی درجات آزادی الاستیک نوشته و سپس، به جای مختصات دورانی الاستیک آن عدد صفر قرار داده شود، تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک ارتقا یافته است و اگر بر حسب تغییرات درجات آزادی الاستیک نوشته شود و سپس، عدد صفر به جای مختصات دورانی الاستیک آن قرار گیرد، تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک کاملاً ارتقا یافته به دست می‌آید.

ترمهای الاستیک جدید اولیه بدین دلیل ظاهر شده‌اند که تغییرات کرنش موجود در تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک ارتقا یافته، از قسمت خطی میدان کرنش^۱ دقیق بر حسب تغییرات مشتقات جزئی مکانی درجات آزادی الاستیک به دست آمده و سپس، در آن عدد صفر به جای مختصات دورانی الاستیک قرار گرفته است. برای به دست آوردن مدل دینامیکی تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک ارتقا یافته باید به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء بر حسب تغییرات درجات آزادی الاستیک نوشته شود؛ به عبارت دیگر، انتگرال‌گیری جزء به جزء که حاوی عملیات مشتق‌گیری است، بعد از جایگذاری عدد صفر به جای مختصات دورانی الاستیک انجام می‌شود. لذا، تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک ارتقا یافته نمی‌تواند ترمهای الاستیک جدید ثانویه را در معادلات حرکت و شرایط مرزی ظاهر کند.

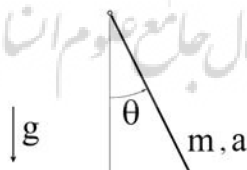
ترمهای الاستیک جدید، که متشکل از ترمهای الاستیک جدید اولیه و ثانویه است، بدین دلیل ظاهر شده‌اند که تغییرات کرنش موجود در تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک کاملاً ارتقا یافته، از قسمت خطی میدان کرنش دقیق به گونه‌ای به دست آمده که بر حسب تغییرات درجات آزادی الاستیک بوده و سپس، در آن عدد صفر به جای مختصات دورانی الاستیک قرار گرفته است. تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک کاملاً ارتقا یافته فقط بر حسب تغییرات درجات آزادی الاستیک است و لذا، برای به دست آوردن مدل دینامیکی نیاز به انتگرال‌گیری جزء به

جزء ندارد. این در حالی است که قبل از جایگذاری عدد صفر به جای مختصات دورانی الاستیک؛ یعنی هنگام به دست آوردن تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک کاملاً ارتقا یافته، از انتگرال‌گیری جزء به جزء که حاوی عملیات مشتق‌گیری است، استفاده شده است. بنابراین، تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک کاملاً ارتقا یافته تمام ترمهای الاستیک جدید را در معادلات حرکت و روابط شرایط مرزی ظاهر می‌کند.

ترمهای الاستیک جدید در تئوری تیر اویلر-برنولی سه بعدی غیرخطی مشاهده نمی‌شوند، زیرا در این تئوری [۲] تغییرات کرنش موجود در تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک از قسمت خطی میدان کرنش تقریبی که در آن مختصات دورانی الاستیک عملاً با عدد صفر جایگزین شده‌اند، حاصل می‌شود. اصلاحات حاصل از ترمهای الاستیک جدید در تغییرات کرنش، تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک، معادلات حرکت و نیروها و گشتاورهای داخلی در مقاطع مختلف تیر کوتاه ظاهر شده است [۱، ۳ و ۶]. این اصلاحات از فرمولاسیون تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی بلند که جامع‌ترین فرمولاسیون [۱، ۲ و ۷] است، استخراج شده است.

برای نشان دادن اهمیت موضوع ترمهای الاستیک جدید یاد شده در فرمولاسیون لازم است به مثال زیر توجه شود. نکته آموزشی کلیدی برای حل این مثال در درسهای دینامیک و رباتیک پیشرفته مطرح است و در آموزش مهندسی اهمیت چشمگیری دارد. نتایج حاصل از این مقاله در درسهای مقاومت مصالح و ارتعاشات سیستم‌های ممتد نیز قابل بررسی است و نکته مورد بحث در استخراج آنها دخالت داشته است.

■ مثال - تعیین معادله ارتعاش آزاد آونگ شکل ۱ که از یک میله صلب نازک یکنواخت به جرم m ، طول a و یک لولا در انتها تشکیل شده است، با فرض کوچک بودن دامنه ارتعاش و صرف نظر از تلفات انرژی



شکل ۱: ارتعاش آزاد میله صلب نازک یکنواخت به جرم m و طول a تحت تأثیر جاذبه

◀ روش صحیح حل:

لاگرانژین دقیق عبارت است از:

$$L = T - U = \frac{1}{6} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a g \cos[\theta]$$

با توجه به رابطه $d/dt(\partial L/\partial \dot{\theta}) - \partial L/\partial \theta = 0$ ، معادله حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{3} m a^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m a g \sin[\theta] = 0$$

به دلیل کوچک بودن θ می‌توان $\sin \theta$ را با θ جایگزین کرد. بنابراین، معادله خواسته شده عبارت است از:

$$\ddot{\theta} + (1.5g/a)\theta = 0$$

◀ روش نادرست حل:

با توجه به کوچک بودن θ می‌توان در لگرانژین $\cos \theta$ را با عدد یک جایگزین کرد:

$$L = T - U = \frac{1}{6} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a g [1]$$

در اینجا لگرانژین دقیق نیست، لذا، مشتق‌گیری موجود در رابطه

$$d/dt(\partial L/\partial \dot{\theta}) - \partial L/\partial \theta = 0$$

موجب از بین رفتن یک ترم معادله می‌شود و معادله خواسته می‌شود به صورت نادرست زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{3} m a^2 \ddot{\theta} + 0 = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

نکته آموزشی دریافت شده از مطالب بیان شده در این مقاله بدین صورت خلاصه می‌شود: اگر پارامتری در یک سیستم کوچک باشد، مشتقات مکانی و زمانی آن را نباید در حالت عمومی کوچک به حساب آورد. بنابراین، فقط وقتی می‌توان آن را در فرمولاسیون کوچک منظور کرد که از آن برای فرمولهای بعدی مشتق گرفته نشود. در غیر این صورت، اگر از آن

مشتق گرفته شود، ترمهایی در فرمولها از بین خواهد رفت. در این مقاله مشتقات مکانی و در مثال ارائه شده مشتقات زمانی مطرح هستند.

در تئوری تیر اویلر-برنولی فقط کرنش محوری در نظر گرفته می‌شود و به عبارت دیگر، از کرنشهای برشی جانبی سطح مقطع صرف‌نظر می‌شود [۲]. در تئوریهای تیر با قابلیت تغییر شکل برشی، اعوجاج برون صفحه‌ای ناشی از کرنشهای برشی جانبی سطح مقطع در نظر گرفته است [۲]. در تئوریهای تیر سه‌بعدی اعوجاجهای برون و درون صفحه‌ای در نظر گرفته و لذا، اثر تنشهای سه بعدی نیز کاملاً در نظر گرفته می‌شود [۲]. در تئوری تیر اویلر-برنولی قبل و بعد از تغییر شکل الاستیک سطح مقطع تیر همواره تخت و عمود بر تار میانی باقی می‌ماند [۲]. مدل تیر اویلر-برنولی مدل تیری است که در آن از اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی صرف‌نظر می‌شود [۸]. لئونارد اویلر^۱، که از برجسته‌ترین ریاضیدانان قرن خود است، بسیاری از اصول ریاضیات نوین را برای حل مسائلی که دارای مفهوم فیزیکی است به دست آورده است، علاوه بر نقش وی در سینماتیک و سینتیک اجسام صلب، شهرت وی به دلیل تحلیل ارتعاشات تیرها و پایداری ستونها (بار کمانش اویلر) است. وی سهم بزرگی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی، در هندسه و توپولوژی، در تئوری توابع و در تئوری اعداد دارد [۹]. دانیل برنولی^۲، ریاضیدان سوئیس متولد هلند، در سال ۱۷۳۸ میلادی کتاب هیدرودینامیکا^۳ را منتشر کرده است. این کتاب متضمن اولین مثالی است که اکنون نگرش مکانیکی آماری به فیزیک گازها نامیده می‌شود. وی قانون بویل را برای گازها اثبات کرد. این قانون مشاهده تجربی رابرت بویل معاصر نیوتن است [۱۰]. تیر اویلر-برنولی صلب‌ترین مدل برای تیرهاست و در آن تخت باقی ماندن سطح مقطع به فرض برنولی^۴ معروف است.

-
1. Leonhard Euler (1707-1783 A.D.)
 2. Daniel Bernoulli (1700-1782 A.D.)
 3. Hydrodynamica
 4. Bernoulli's Hypothesis

۲. سینماتیک

در شکل ۲ ربات متحرک فضایی با لینکهای انعطاف پذیر نشان داده شده است. پایه متحرک ربات یک جسم صلب در نظر گرفته شده و شش درجه آزادی آن در (۱) نشان داده شده است. این درجات آزادی مؤلفه‌های موقعیت مرکز جرم و زوایای اوپلر مربوط به گرایش پایه متحرک ربات نسبت به سیستم مختصات مرجع اینرسی است. m_0 جرم، B_0 مرکز جرم و F_{B_0} سیستم مختصات اصلی بدنه پایه ربات است. F_{E_0} سیستم مختصات مفصل در پایه و محور سوم آن محور مفصلی لولای اول ربات است.

$$x_0(t), y_0(t), z_0(t), \theta_0(t), \phi_0(t), \psi_0(t) \quad (1)$$

اولین لینک از طریق اولین مفصل لولا به پایه ربات متصل است. مطابق شکل ۲، ربات متحرک مورد بحث دارای N لینک انعطاف پذیر و N مفصل لولا است. متغیر مفصلی لولای n ام ربات در رابطه (۲) نشان داده شده است.

$$\Theta_n(t) \quad (2)$$

هر لینک انعطاف پذیر یک محیط پیوسته قابل تغییر شکل است و به عنوان یک تیر سه بعدی، با چهار درجه آزادی الاستیک مستقل؛ یعنی، تغییر مکان محوری، دو تغییر مکان خمشی فضایی و تغییر جهت پیچشی مورد بررسی قرار گرفته است. این درجات آزادی در رابطه (۳) نشان داده شده‌اند.

$$u_n(t, s_n), v_n(t, s_n), w_n(t, s_n), \gamma_n(t, s_n) \quad (3)$$

متغیرهای غیر تابع زمان و مکان در رابطه (۴) ارائه شده‌اند. متغیر غیر تابع مکان یک مختصات لاگرانژی در نظر گرفته و در شکل ۳ با s_n نشان داده شده است. s_n در طول تیر به طور پیوسته تغییر می‌کند و لذا، بینهایت درجه آزادی را در چهار درجه آزادی فوق‌الذکر مستتر می‌گرداند. لینکها قبل از تغییر شکل الاستیک بدون انحناء و به طول L_n است.

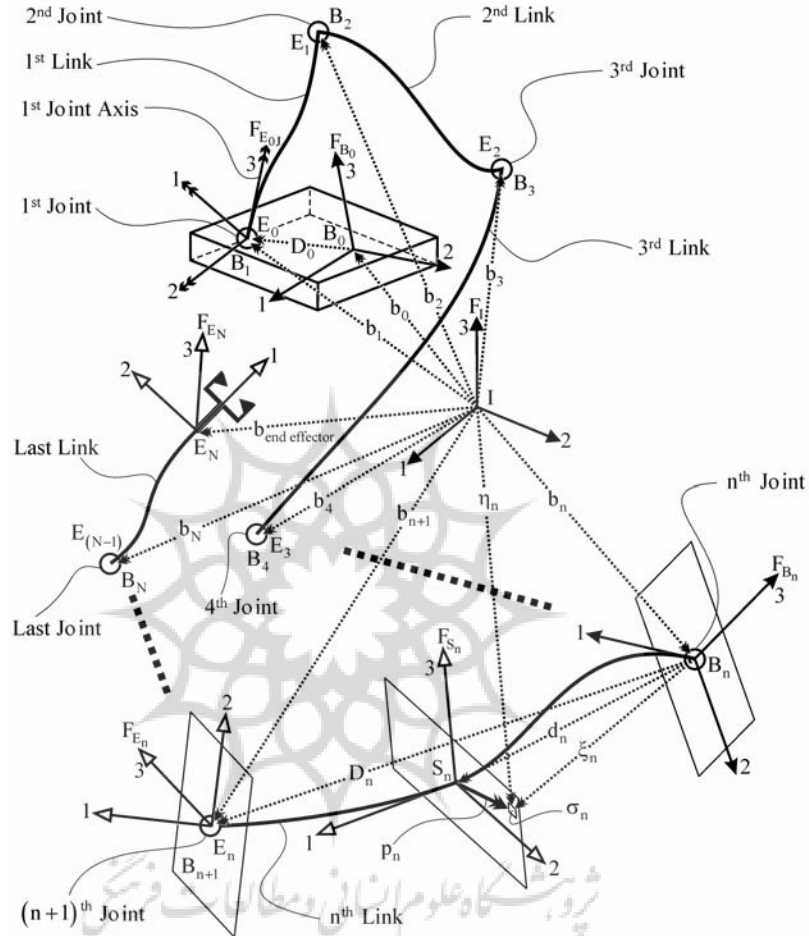
$$\begin{aligned} 0 \leq s_n \leq L_n; \quad n = 1, 2, \dots, N \\ 0 \leq t \end{aligned} \quad (4)$$

درجه آزادی ربات مورد بحث برابر $6+5N$ است، زیرا دارای N لینک انعطاف پذیر فضایی، N مفصل لولا و یک پایه شش درجه آزادی است. ربات بدون قیود تماسی در نظر گرفته شده و بنابراین، یک سیستم دینامیکی هولونومیک است. مدل سازی دینامیکی بدون قید این سیستم به کمک متغیرهای تابع (۱)، (۲) و (۳) که درجات آزادی سیستم است، انجام پذیرفته است.

$$u_n(t, s_n), v_n(t, s_n), w_n(t, s_n), \alpha_n(t, s_n), \beta_n(t, s_n), \gamma_n(t, s_n) \quad (5)$$

به کمک شش مختصات وابسته الاستیک در رابطه (۵) تغییر شکل الاستیک لینک به سادگی شکل ۳ قابل توصیف است. با توجه به وجود دو قید هولونومیک میان این مختصات، تغییر شکل نشان داده شده دارای چهار درجه آزادی الاستیک؛ یعنی تغییر مکان محوری، تغییر جهت پیچشی و دو تغییر مکان خمشی فضایی است. لینکها مطابق تئوری تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی مدل شده است و بنابراین، قبل و بعد از تغییر شکل الاستیک همواره سطح مقطع آنها تخت و عمود بر تار میانی باقی می ماند. لینکها باریک^۱، با سطح مقطع غیر خاص و بدون اعوجاج درون صفحه ای در نظر گرفته می شوند. مطابق فرض برنولی، قبل و بعد از تغییر شکل الاستیک، همواره سطح مقطع لینکها تخت باقی می ماند؛ یعنی از اعوجاج خارج صفحه ای سطح مقطع صرف نظر شده است. طبق اصل سینت - ونانت^۲ در پیچش، فرض نبودن اعوجاج خارج صفحه ای، فقط در مقطع دایره ای قابل قبول است و لذا، در سایر مقاطع دارای خطا است. با توجه به اینکه از اعوجاجهای داخل و خارج صفحه ای سطح مقطع لینکها صرف نظر شده است، باید بردار P_n را که در شکل ۲ نشان داده شده است، ثابت در نظر گرفت. این بردار برابر $[0 \ \hat{y}_n \ \hat{z}_n]^T$ است.

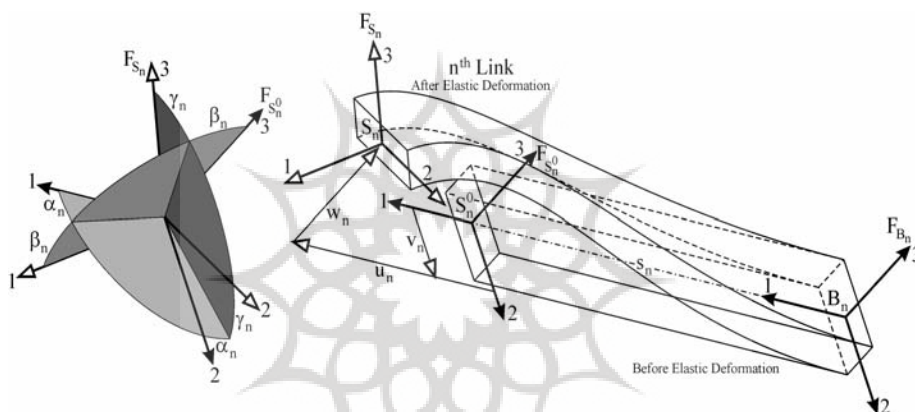
-
1. Slender
 2. Saint Venant's Theory of Torsion



شکل ۲: ربات متحرک فضایی با لینکهای انعطاف پذیر

مرکز سطح مقطع در ابتدا و انتهای لینک با B_n و E_n نشان داده شده است. مرکز سطح مقطعی از لینک که قبل از تغییر شکل الاستیک در فاصله s_n از B_n قرار دارد، با S_n^0 و بعد از تغییر شکل الاستیک با S_n نشان داده شده است. u_n ، v_n و w_n به ترتیب مؤلفه‌های موقعیت الاستیک مبدأ مختصات سطح مقطع لینک n در امتداد محورهای اول، دوم و سوم مختصات F_{B_n} است. u_n کشیدگی یا فشردگی الاستیک و v_n و w_n خیزهای ناشی از خمش

فضایی الاستیک هستند. α_n ، β_n و γ_n زوایای اوپلر الاستیک مختصات سطح مقطع لینک n ام بوده و به ترتیب حول محور سوم مختصات F_{B_n} ، حول محور دوم مختصات F_{B_n} بعد از تأثیر α_n و حول محور اول مختصات F_{S_n} قرار دارند. در صورتی که دو زاویه دیگر صفر باشند، زاویه دوران ناشی از خمش است. این زاویه تابعی از u'_n و v'_n است. β_n در صورتی که دو زاویه دیگر صفر باشند، زاویه دوران ناشی از خمش است. این زاویه تابعی از u'_n ، v'_n و w'_n است. γ_n در صورتی که دو زاویه دیگر صفر باشند، زاویه دوران پیچشی است.



شکل ۳: شش مختصات الاستیک وابسته در لینک انعطاف‌پذیر

۳. سینماتیک مستقیم و معکوس

تعیین موقعیت و گرایش مجری نهایی ربات بر حسب زوایای مفصلی، به دلیل متحرک بودن پایه ربات و انعطاف‌پذیری لینکهای آن، از یک مسئله هندسی و سینماتیکی فراتر می‌رود و به یک مسئله سینماتیکی تبدیل می‌شود. در رباتهای پایه - ثابت با لینکهای صلب موقعیت و گرایش مجری نهایی فقط تابعی از مقدار نهایی متغیرهای مفصلی است، در حالی که در رباتهای متحرک با لینکهای انعطاف‌پذیر تعیین موقعیت و گرایش مجری نهایی بر حسب متغیرهای مفصلی صورت می‌گیرد و برعکس، به دلیل وابستگی به قوانین حرکت تنها یک مسئله سینماتیکی و هندسی نیست، زیرا باید درجات آزادی الاستیک، تاریخچه زمانی و ترتیب فعال شدن متغیرهای مفصلی نیز معلوم باشند و این نیاز به حل معادلات دیفرانسیل جزئی کوپل غیرخطی حاکم بر حرکت نیازمند است. لذا، بهتر است در رباتهای متحرک با

لینکهای انعطاف‌پذیر، رباتهای پایه - ثابت با لینکهای انعطاف‌پذیر و رباتهای متحرک با لینکهای صلب به جای عبارات سینماتیک مستقیم و سینماتیک معکوس از عبارات جدید سینتیک مستقیم و سینتیک معکوس استفاده شود. عبارات سینماتیک مستقیم و سینماتیک معکوس فقط در رباتهای پایه - ثابت با لینکهای صلب معنا دارند. برای بررسی مهارت سینماتیکی، پرهیز از پیکره‌های تکین و جلوگیری از برخورد ربات انعطاف‌پذیر متحرک با موانع، حل مسئله سینتیک معکوس الزامی است.

۴. تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک

از میدان جابه‌جایی الاستیک دقیق ابتدا کرنش دقیق؛ یعنی قسمت خطی کرنش گرین - لاگرانژ دقیق و سپس، تغییرات آن به دست آورده شده‌اند. با استفاده از قانون هوک برای مواد ایزوتروپیک الاستیک خطی تنش دقیق به دست آمده و با جایگذاری در رابطه (۶) تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک لینکهای بلند مشخص شده است. در این مقاله و مراجع [۷ و ۱] از مشتقات جزئی میدان جابه‌جایی الاستیک نسبت به مختصات لاگرانژی سطح مقطع صرف‌نظر شده است که اثرهای این صرف‌نظر کردن در دست بررسی است.

$$\delta U_n^e = \int_0^{L_n} \int_{A_n} \left\{ \tau_{n_{xx}} \delta \hat{\epsilon}_{n_{xx}} + 2\tau_{n_{xy}} \delta \hat{\epsilon}_{n_{xy}} + 2\tau_{n_{xz}} \delta \hat{\epsilon}_{n_{xz}} \right\} dA_n ds_n \quad (6)$$

این رابطه بر حسب تغییرات مشتقات جزئی درجات آزادی الاستیک؛ یعنی $\delta u'_n$ ، $\delta v'_n$ ، $\delta w'_n$ ، $\delta u''_n$ ، $\delta v''_n$ ، $\delta w''_n$ ، $\delta \gamma'_n$ ، $\delta \gamma_n$ است و به کمک اتحادهای انتگرال‌گیری جزء به جزء در روابط (۷) بر حسب تغییرات درجات آزادی الاستیک؛ یعنی، δu_n ، δv_n ، δw_n ، $\delta \gamma_n$ نوشته می‌شود تا در مدل‌سازی دینامیکی قابل استفاده باشد. شایان ذکر است که روابط (۷) شرایط مرزی را نیز ظاهر می‌کنند.

(۷)

$$\int_0^L F \delta u' ds = (F \delta u) \Big|_0^L - \int_0^L F' \delta u ds \quad , \quad \int_0^L F \delta u'' ds = (F \delta u') \Big|_0^L - (F' \delta u) \Big|_0^L + \int_0^L F'' \delta u ds$$

اگر در تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک لینک بلند که بر حسب $\delta u'_n$ ، $\delta v'_n$ ، $\delta w'_n$ ، $\delta \gamma'_n$ ، $\delta \gamma_n$ ، $\delta u''_n$ ، $\delta v''_n$ ، $\delta w''_n$ نوشته شده است، به جای مختصات دورانی الاستیک عدد صفر گذاشته

شود، تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک ارتقا یافته است؛ یعنی، رابطه (۸) به دست می‌آید. این اقدام موجب حذف هیچ ترم الاستیک جدیدی از تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک نمی‌شود، ولی مانع از ظاهر شدن ترمهای الاستیک جدید ثانویه در معادلات حرکت و شرایط مرزی می‌شود، زیرا باید رابطه (۸) به کمک روابط (۷) بر حسب δu_n ، δv_n و δw_n نوشته شود.

(۸)

$$\delta U_n^e = \int_0^{l_n} \left\{ 2GJ\gamma'_n \delta \gamma'_n + E \left[A_n u'_n - J \frac{v_n'^2 + w_n'^2}{(1+u'_n)^3} \right] \delta u'_n - J \left[E \left(\frac{u_n'' v_n''}{1+u'_n} + \gamma'_n w_n'' \right) - G\gamma'_n w_n'' \right] \frac{1}{(1+u'_n)^2} \delta v'_n + J \left[E \left(\gamma'_n v_n'' - \frac{u_n'' w_n''}{1+u'_n} \right) + G\gamma'_n v_n'' \right] \frac{1}{(1+u'_n)^2} \delta w'_n + JE \frac{v_n''}{(1+u'_n)^2} \delta v_n'' + JE \frac{w_n''}{(1+u'_n)^2} \delta w_n'' \right\} ds_n$$

به منظور ساده‌تر شدن بررسیها، تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک ارتقاء یافته در رابطه (۸) به صورت رابطه (۹) بازنویسی شده است.

(۹)

$$\delta U_n^e = \int_0^{l_n} \left\{ EA_n e_n \delta e_n + EJ \kappa_{nz} \delta \kappa_{nz} + EJ \kappa_{ny} \delta \kappa_{ny} + 2GJ \kappa_{nx} \delta \kappa_{nx} + (EJ - GJ) \frac{\kappa_{nx}}{1+u'_n} (\kappa_{ny} \delta v'_n + \kappa_{nz} \delta w'_n) \right\} ds_n$$

اگر در تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک لینک بلند که بر حسب δu_n ، δv_n ، δw_n و $\delta \gamma_n$ نوشته شده است به جای مختصات دورانی الاستیک عدد صفر جایگزین شود، تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک کاملاً ارتقاء یافته است؛ یعنی رابطه (۱۳۹) در مرجع [۱] یا رابطه (۵) در مرجع [۶] به دست می‌آید. این اقدام موجب حذف هیچ ترم الاستیک جدیدی از تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک، معادلات حرکت و شرایط مرزی نمی‌شود. رابطه (۸) و تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک کاملاً ارتقا یافته در مراجع [۶ و ۱] متعلق به لینک کوتاه است و اگر چه آنها ظاهراً متفاوت به نظر می‌رسند، ولی هر دو یکسان هستند.

۴.۱. مقایسه با تئوری تیر اویلر- برنولی سه بعدی غیر خطی

میدان جابه جایی الاستیک در تئوری تیر اویلر- برنولی سه بعدی غیرخطی و در لینکهای کوتاه و بلند یکسان است. کرنش لینک کوتاه از جایگذاری عدد صفر به جای مختصات الاستیک دورانی در کرنش لینک بلند به دست می‌آید. کرنش در تئوری تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی از روابط (۱۰) به دست می‌آید و نشان می‌دهد که در این تئوری مختصات الاستیک دورانی موجود در کرنش عملاً با عدد صفر جایگزین شده است [۲]. لذا، کرنش و تنش در تئوری تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی و در لینک کوتاه یکسان است.

$$(10)$$

$$\hat{\epsilon}_{n_{xx}} = e_n - \hat{y}_n \kappa_{nz} + \hat{z}_n \kappa_{ny}, \quad \hat{\epsilon}_{n_{yy}} = -0.5 \kappa_{nx} \hat{z}_n, \quad \hat{\epsilon}_{n_{zz}} = 0.5 \kappa_{nx} \hat{y}_n, \quad \hat{\epsilon}_{n_{xy}} = \hat{\epsilon}_{n_{zz}} = \hat{\epsilon}_{n_{yz}} = 0$$

تغییرات کرنش لینک کوتاه از جایگذاری عدد صفر به جای مختصات الاستیک دورانی در تغییرات کرنش لینک بلند به دست می‌آید. تغییرات کرنش در تئوری تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی از روابط (۱۰) استخراج شده و مطابق روابط (۱۱) است [۲]. با توجه به تقریبی بودن روابط (۱۰)، ترم‌هایی از روابط (۱۱) حذف شده‌اند. بنابراین، تغییرات کرنش و تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک در تئوری تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی و در لینک کوتاه متفاوت است.

$$(11)$$

$$\delta \hat{\epsilon}_{n_{xx}} = \delta e_n - \hat{y}_n \delta \kappa_{nz} + \hat{z}_n \delta \kappa_{ny}, \quad \delta \hat{\epsilon}_{n_{yy}} = -0.5 \hat{z}_n \delta \kappa_{nx}, \quad \delta \hat{\epsilon}_{n_{zz}} = 0.5 \hat{y}_n \delta \kappa_{nx}, \quad \delta \hat{\epsilon}_{n_{xy}} = \delta \hat{\epsilon}_{n_{zz}} = \delta \hat{\epsilon}_{n_{yz}} = 0$$

تغییرات کرنش و تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک در لینک کوتاه از کرنش دقیق قبل از جایگذاری صفر در مختصات دورانی الاستیک و در تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی از کرنش تقریبی بعد از جایگذاری صفر در مختصات دورانی الاستیک به دست آمده‌اند. بنابراین، تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک در تئوری تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی؛ یعنی رابطه (۱۲) ترم‌هایی را از دست داده است. این رابطه در حالت خاصی نوشته شده است که سطح مقطع همانند مقاطع دایره و مربع دارای گشتاورهای دوم برابر است.

$$\delta U_n^e = \int_0^{L_n} \left\{ EA_n e_n \delta e_n + EJ \kappa_{nz} \delta \kappa_{nz} + EJ \kappa_{ny} \delta \kappa_{ny} + 2 GJ \kappa_{nx} \delta \kappa_{nx} \right\} ds_n \quad (12)$$

تئوری تیر اویلر - برنولی سه بعدی غیرخطی مجموع ترمهای الاستیک جدید اولیه و ثانویه را در مقایسه با حالت کاملاً ارتقا یافته و ترمهای الاستیک جدید اولیه را در مقایسه با حالت ارتقاء یافته مشاهده نمی کند. ترمهای الاستیک جدید اولیه متعلق به تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک در (۱۳) نشان داده شده اند.

(۱۳)

$$(EJ - GJ) \frac{\kappa_{n_x}}{1 + u'_n} (\kappa_{n_y} \delta v'_n + \kappa_{n_z} \delta w'_n) = J(-E + G) \frac{\gamma'_n w''_n}{(1 + u'_n)^2} \delta v'_n + J(E - G) \frac{\gamma'_n v''_n}{(1 + u'_n)^2} \delta w'_n$$

۵. ساختار کلی مدل دینامیکی

با استفاده از متغیرهای کمکی و اصل هامیلتون در رابطه (۱۴)، ساختار کلی مدل دینامیکی ربات متحرک فضایی با N مفصل لولا و N لینک بلند انعطاف پذیر به دست آمده است. این ساختار معادلات (۱۵) و روابط شرایط مرزی (۱۶) است. بر خلاف متغیرهای کمکی، ساختار کلی به دست آمده برای لینکهای بلند و لینکهای کوتاه یکسان است و با در نظر گرفتن نیروها و گشتاورهای ناپایستار تغییر نخواهد کرد. شایان ذکر است که از نیروها و گشتاورهای ناپایستار، که موجب ایجاد ترمهای انرژیزا و استهلاکی در معادلات حرکت می شوند، صرف نظر شده است.

$$\int_0^t \left\{ \delta T_0 - \delta U_0^g + \sum_{n=1}^N (\delta T_n - \delta U_n^g - \delta U_n^c) \right\} dt = 0 \quad (14)$$

با تعیین متغیرهای کمکی A_m^n ، \bar{A}_m^n ، B_m^n و \bar{B}_m^n در روابط (۱۵) و (۱۶) مدل دینامیکی ربات و حالت‌های خاص آن به دست می آیند.

(۱۵)

$$\begin{aligned} A_1^0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{l_n} A_1^n ds_n &= 0, & A_2^0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{l_n} A_2^n ds_n &= 0, & A_3^0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{l_n} A_3^n ds_n &= 0, \\ A_4^0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{l_n} A_4^n ds_n &= 0, & A_5^0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{l_n} A_5^n ds_n &= 0, & A_6^0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{l_n} A_6^n ds_n &= 0, \\ \sum_{n=k}^N \int_0^{l_n} A_{5k+2}^n ds_n &= 0; (k=1,2,\dots,N), & A_{5n+3}^n &= 0, & A_{5n+4}^n &= 0, & A_{5n+5}^n &= 0, & A_{5n+6}^n &= 0; (n=1,2,\dots,N) \end{aligned}$$

مجموعه معادلات دیفرانسیل جزئی کوپل غیرخطی در روابط (۱۵) تحت شرایط مرزی ارائه شده در روابط (۱۶) قرار دارند:

(۱۶)

$$\left[\begin{aligned} & (B_{5n+3}^n = 0 \text{ or } \gamma_n = 0) \& (B_{5n+4}^n = 0 \text{ or } u_n = 0) \& (B_{5n+5}^n = 0 \text{ or } v_n = 0) \& \\ & (B_{5n+6}^n = 0 \text{ or } w_n = 0) \& (\bar{B}_{5n+4}^n = 0 \text{ or } u'_n = 0) \& (\bar{B}_{5n+5}^n = 0 \text{ or } v'_n = 0) \& \\ & (\bar{B}_{5n+6}^n = 0 \text{ or } w'_n = 0) \end{aligned} \right]_{s_n = 0}; 1 \leq n \leq N \quad \&$$

$$\left[\begin{aligned} & (B_{5N+3}^N = 0 \text{ or } \gamma_N = 0) \& (B_{5N+4}^N = 0 \text{ or } u_N = 0) \& (B_{5N+5}^N = 0 \text{ or } v_N = 0) \& \\ & (B_{5N+6}^N = 0 \text{ or } w_N = 0) \& (\bar{B}_{5N+4}^N = 0 \text{ or } u'_N = 0) \& (\bar{B}_{5N+5}^N = 0 \text{ or } v'_N = 0) \& \\ & (\bar{B}_{5N+6}^N = 0 \text{ or } w'_N = 0) \end{aligned} \right]_{s_N = L_N} \quad \&$$

$$\left[\begin{aligned} & (B_{5k+3}^k + \sum_{n=k+1}^N \int_0^{L_n} A_{5k+3}^n ds_n = 0 \text{ or } \gamma_k = 0) \& (B_{5k+4}^k + \sum_{n=k+1}^N \int_0^{L_n} A_{5k+4}^n ds_n = 0 \text{ or } u_k = 0) \& \\ & (B_{5k+5}^k + \sum_{n=k+1}^N \int_0^{L_n} A_{5k+5}^n ds_n = 0 \text{ or } v_k = 0) \& (B_{5k+6}^k + \sum_{n=k+1}^N \int_0^{L_n} A_{5k+6}^n ds_n = 0 \text{ or } w_k = 0) \& \\ & (\bar{B}_{5k+4}^k + \sum_{n=k+1}^N \int_0^{L_n} \bar{A}_{5k+4}^n ds_n = 0 \text{ or } u'_k = 0) \& (\bar{B}_{5k+5}^k + \sum_{n=k+1}^N \int_0^{L_n} \bar{A}_{5k+5}^n ds_n = 0 \text{ or } v'_k = 0) \& \\ & (\bar{B}_{5k+6}^k + \sum_{n=k+1}^N \int_0^{L_n} \bar{A}_{5k+6}^n ds_n = 0 \text{ or } w'_k = 0) \end{aligned} \right]_{s_k = L_k}; 1 \leq k \leq N-1$$

۵. ۱. ربات متحرک فضایی با لینکهای انعطاف پذیر بلند و کوتاه

در ارتباط با متغیرهای کمکی موجود در روابط (۱۵) و (۱۶) در رباتهای متحرک فضایی با لینکهای انعطاف پذیر بلند و کوتاه گفتنی است که حجم متغیرهای کمکی $A_1^n, A_2^n, \dots, A_6^n, A_{5n+2}^n, \bar{A}_{5n+4}^n, \dots, \bar{A}_{5n+6}^n$ وابسته به N است و لذا، با افزایش N به شدت افزایش می یابد. به همین دلیل، این متغیرهای کمکی در مراجع [۷ و ۱] در حالت کلی تعیین نشده،

ولی در حالت $N=2$ تعیین شده‌اند. متغیرهای کمکی $A_{5n+3}^n, \dots, A_{5n+6}^n, B_{5n+3}^n, \dots, B_{5n+6}^n$ و A_6^0 دارای حجم مستقل از N بوده و در مرجع [۱] تعیین شده‌اند. متغیرهای کمکی A_1^0, \dots, A_6^0 در روابط (۱۷) ارائه شده‌اند.

(۱۷)

$$\begin{bmatrix} A_1^0 & A_2^0 & A_3^0 \end{bmatrix} = -m_0 [\ddot{x}_0 \quad \ddot{y}_0 \quad \ddot{z}_0 + g] \quad , \quad \begin{bmatrix} A_4^0 & A_5^0 & A_6^0 \end{bmatrix}^T = -[I_0] \omega^{B_0} - \bar{\omega}^{B_0} [I_0] \omega^{B_0}$$

متغیرهای کمکی ربات متحرک فضایی با لینکهای انعطاف پذیر کوتاه از طریق جایگذاری عدد صفر به جای مختصات دورانی الاستیک در متغیرهای کمکی ربات متحرک فضایی با لینکهای انعطاف پذیر بلند به دست می‌آیند. برای لینکهای کوتاهی که دارای مقطع دایره و مربع است، همواره برابر صفر است.

۵.۲. ربات متحرک فضایی با دو لینک کوتاه انعطاف پذیر ارتقا یافته

در حالت خاص $N=2$ ، پنجاه متغیر کمکی در مدل دینامیکی ربات وجود دارد و در مرجع [۱] تعیین شده‌اند. برای ربات متحرک فضایی با دو لینک انعطاف پذیر کوتاه ارتقا یافته، معادلات (۱۵) به صورت شانزده معادله دیفرانسیل جزئی کوپل غیرخطی (۱۸) در می‌آید [۱] و [۳]:

(۱۸)

$$A_n^0 + \int_0^{L_1} A_n^1 ds_1 + \int_0^{L_2} A_n^2 ds_2 = 0; \quad (n=1, 2, \dots, 6), \quad \int_0^{L_1} A_7^1 ds_1 + \int_0^{L_2} A_7^2 ds_2 = 0, \quad \int_0^{L_2} A_{12}^2 ds_2 = 0, \\ A_8^1 = 0, \quad A_9^1 = 0, \quad A_{10}^1 = 0, \quad A_{11}^1 = 0, \quad A_{13}^2 = 0, \quad A_{14}^2 = 0, \quad A_{15}^2 = 0, \quad A_{16}^2 = 0$$

با صرف نظر کردن از انعطاف پذیری لینکها، صحت مدل دینامیکی این ربات در حالت خاص آونگ دوتایی نشان داده شده است [۱ و ۳]:

۵.۳. تیر اویلر- برنولی سه بعدی غیرخطی کوتاه ارتقا یافته با پایه متحرک فضایی

متغیرهای کمکی در حالت خاصی که ربات به یک تیر اویلر- برنولی سه بعدی غیرخطی کوتاه ارتقا یافته با پایه متحرک فضایی کاهش می‌یابد، تعیین شده‌اند. در این حالت مدل دینامیکی

از ده معادله دیفرانسیل جزئی کوپل غیرخطی تحت شرایط مرزی مشخص تشکیل شده است. به دلیل وجود ترمهای الاستیک جدید اولیه (۱۳)، در معادلات حرکت خمشی فضایی و معادلات نیروهای برشی جانبی ترمهای الاستیک جدیدی ظاهر می‌شوند [۴ و ۱]. این ترمها در تیر اوپلر- برنولی سه بعدی غیرخطی [۲]، بر خلاف تیر اوپلر- برنولی سه بعدی غیرخطی ارتقا یافته، در نظر گرفته نشده‌اند [۴ و ۱]. با صرف نظر کردن از انعطاف‌پذیری، صحت مدل دینامیکی در حالت خاص میله صلب متحرک فضایی نشان داده شده است [۴ و ۱].

۵. ۴. تیرهای اوپلر- برنولی سه بعدی غیرخطی کوتاه ارتقا یافته و کاملاً ارتقا یافته

متغیرهای کمکی در حالت‌های خاصی که ربات به یک تیر اوپلر- برنولی سه بعدی غیرخطی کوتاه ارتقا یافته و کاملاً ارتقا یافته با پایه ثابت کاهش می‌یابد، تعیین شده‌اند. در هر یک از این حالتها، مدل دینامیکی از چهار معادله دیفرانسیل جزئی کوپل غیرخطی تحت شرایط مرزی مشخص تشکیل شده است [۵، ۴، ۱ و ۶]. اگر بر اساس تئوری تیر اوپلر- برنولی سه بعدی غیرخطی [۲] معادلات حرکت و شرایط مرزی استخراج شوند، کل ترمهای الاستیک جدید اولیه و ثانویه ظاهر نخواهند شد. این ترمهای الاستیک جدید عوامل تصحیح و ارتقای تئوریهای تیر اوپلر- برنولی سه بعدی و دو بعدی غیرخطی هستند. شایان ذکر است که این ترمها در گشتاورهای پیچشی و خمشی تیر ظاهر نمی‌شوند.

۵. ۵. تیر اوپلر- برنولی دو بعدی غیرخطی کوتاه کاملاً ارتقا یافته

متغیرهای کمکی در حالت خاصی که ربات به یک تیر اوپلر- برنولی دو بعدی غیرخطی کوتاه کاملاً ارتقا یافته با پایه ثابت کاهش می‌یابد، تعیین شده‌اند. در این حالت، مدل دینامیکی از دو معادله دیفرانسیل جزئی کوپل غیرخطی تحت شرایط مرزی مشخص تشکیل شده است [۱]. با توجه به اینکه در تیر اوپلر- برنولی سه بعدی غیرخطی کوتاه کاملاً ارتقا یافته گرایش الاستیک ناچیز است، در تیر اوپلر- برنولی دو بعدی غیرخطی کوتاه کاملاً ارتقا یافته نیز دوران الاستیک ناچیز است و لذا، در معادلات بر معادلات به دست آمده بعد از تمام مشتق‌گیریها به جای عدد صفر قرار گرفته است. این معادلات بر معادلات حاکم بر ارتعاشات صفحه‌ای در تئوری تیر اوپلر- برنولی دو بعدی غیرخطی^۱ که در آن نیز دوران الاستیک عملاً ناچیز فرض شده

است [۲] منطبق نیست. برخی از دلایل این تفاوت را باید متذکر شد؛ در تیر اویلر - برنولی دو بعدی غیرخطی کوتاه کاملاً ارتقا یافته کرنش محوری؛ یعنی e ، و مؤلفه \hat{E}_{xy} دقیق و به ترتیب برابر $\sqrt{(1+u')^2 + v'^2} - 1$ و $0.5v'[1 - \hat{\gamma}k_z / (1+e)]$ در نظر گرفته شده‌اند و سپس بعد از تمام مشتق‌گیریهای لازم در آنها به جای v' عدد صفر جایگزین شده است، ولی در تئوری تیر اویلر - برنولی دو بعدی غیرخطی عملاً در e و \hat{E}_{xy} ابتدا به جای v' عدد صفر جایگزین و از روابط تقریبی حاصل مشتق‌گیری شده است و در نتیجه، ترمهایی ممکن است از دست رفته باشند. در تئوری تیر اویلر - برنولی دو بعدی غیرخطی e و \hat{E}_{xy} به ترتیب برابر u' و صفر است. گفتنی است که اگرچه در این تئوری v' عملاً برابر صفر است، ولی از معادلات حرکت حذف نشده است [۶۱].

۶.۵. تیر اویلر- برنولی سه بعدی خطی کوتاه

متغیرهای کمکی در حالت خاصی که ربات به یک تیر اویلر-برنولی سه بعدی خطی کوتاه با پایه ثابت کاهش می‌یابد، تعیین شده‌اند. در این حالت مدل دینامیکی از چهار معادله دیفرانسیل جزئی غیرکوپل خطی تحت شرایط مرزی مشخص تشکیل شده است [۱]. با نادیده گرفتن ترمهای غیرخطی در این معادلات، معادلات شناخته شده (۱۹) و (۲۰) به دست می‌آیند [۵۱].

(۱۹)

$$A_1 = 2I(G\dot{\gamma} - \rho\dot{\gamma}) = 0, \quad A_2 = A(-\rho\ddot{u} + E\dot{u}') = 0, \quad A_3 = -\rho A\ddot{v} - EJv'' = 0, \quad A_4 = -\rho A\ddot{w} - EJw'' - \rho Ag = 0$$

معادلات (۱۹) مستقل از هم هستند و به ترتیب معادلات حرکت پیچشی، حرکت محوری و حرکت‌های خمشی در دو صفحه متعامد جانبی در یک تیر ایزوتروپیک الاستیک خطی با خواص مکانیکی و سطح مقطع ثابت است.

(۲۰)

$$B_1 = -G(2I)\dot{\gamma}, \quad B_2 = -EA\dot{u}', \quad B_3 = +EJv'', \quad B_4 = +EJw'', \quad \bar{B}_3 = -EJv', \quad \bar{B}_4 = -EJw'$$

متغیرهای کمکی در روابط (۲۰) به ترتیب گشتاور پیچشی، نیروی محوری، دو نیروی برشی جانبی و دو گشتاور خمشی در صفحات جانبی متعامد هستند [۵۱].

۶. نتایج

◀ ساختار کلی مدل دینامیکی ربات متحرک فضایی با N مفصل لولا و N لینک بلند انعطاف پذیر حاصل شده، که مدل دینامیکی واحدی برای سیستم‌های زیر است:

● رباتها یا آونگهای چندگانه با پایه ثابت یا پرنده با لینکهای صلب یا انعطاف پذیر که به صورت متوالی با مفاصل لولا به هم متصل شده‌اند.

● یک تیر اویلر برنولی دو بعدی یا سه بعدی غیرخطی بلند یا کوتاه تعمیم یافته یا ارتقا یافته یا کاملاً ارتقا یافته با پایه ثابت و یا متحرک فضایی

● یک تیر اویلر - برنولی سه بعدی خطی کوتاه

● یک جسم صلب فضایی بدون قید

◀ در ارتباط با ترمهای الاستیک جدید مطرح شده در این مقاله که موجب اصلاح تئوریهای تیر اویلر - برنولی دو بعدی و سه بعدی غیرخطی شده‌اند، یک نکته آموزشی مورد تأکید قرار می‌گیرد:

● اگر پارامتری در یک سیستم کوچک باشد، در حالت عمومی نباید مشتقات آن را کوچک محسوب کرد. در فرمولاسیون فقط وقتی می‌توان این پارامتر را کوچک منظور کرد که از آن برای استخراج فرمولهای بعدی مشتق گرفته نشود. در غیر این صورت، فرمولها برخی از ترمهای خود را از دست خواهند داد. توجه به این نکته موجب اصلاح تئوریهای تیر اویلر- برنولی دو بعدی و سه بعدی غیرخطی شده است.

مراجع

۱. خرسندی جو، سیدمهدی، "تحلیل دینامیکی غیرخطی یک ربات انعطاف پذیر متحرک فضایی"، پایان نامه دکترای تخصصی (Ph. D.)، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، بهمن ۱۳۸۵.

2. Nayfeh, Ali, H. and P. Frank Pai, **Linear and Nonlinear Structural Mechanics**, Wiley Series in Nonlinear Science, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.

3. Zohoor, H. and S. Mahdi, Khorsandijou, "Dynamic Model of a Flying Manipulator with Two Highly Flexible Links", **Applied Mathematical Modelling**, Vol. 32, Issue 10, pp. 2117-2132, October 2008.
 4. Zohoor, H. and S. Mahdi Khorsandijou, "Enhanced Nonlinear 3D Euler-Bernoulli Beam with Flying Support", **Nonlinear Dynamics**, Vol. 51, No. 1-2, pp. 217-230, January 2008.
 5. Zohoor, H. and, S. Mahdi Khorsandijou "Generalized Nonlinear 3D Euler-Bernoulli Beam", **Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering**, Vol. 32, No. B1, pp. 1-12, February 2008.
 6. Zohoor, H. and S. Mahdi Khorsandijou and Mohammad H. Abedinnasab, "Modified Nonlinear 3D Euler-Bernoulli Beam Theory", **JSME International Journal of System Design and Dynamics**, Vol. 2, No. 5, pp.1170-1182, 2008.
 7. Zohoor, H. and S. Mahdi Khorsandijou, "Dynamic Model of a Mobile Robot with Long Spatially Flexible Links", Accepted in **J. Scientia Iranica**, (Ref. No: 40.305.080220), Octobr 2008.
 8. P. Srinivasan, **Mechanical Vibration Analysis**, 1982.
 9. Jerry H. Ginsberg, **Advanced Engineering Dynamics**, Second Edition, Cambridge University Press, 1995.
۱۰. برنشتاین، جرمی، آینشتاین، ترجمه احمد بیرشک، شرکت سهامی انتشارات خوارزمی، ۱۳۷۸.
(دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۴/۱۹)
(پذیرش مقاله: ۱۳۸۷/۹/۱۴)