کاربردی از هندسه جبری در بهینه‌سازی

داود حسن‌زاده للکامی[1]

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۲۲)، (پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۳/۱۱)

DOI: 10.22047/ijee.2019.167343.1616

چکیده: هندسه جبری یکی از شاخه‌های پویای ریاضیات محض بوده که بخش وسیعی از تحقیقات حال حاضر متخصصان ریاضی در دنیا را به خود اختصاص داده است. در این شاخه از علم، مسائل هندسی با زبان جبر بیان و بررسی می‌شوند. با گسترش فناوری در دهه‌های اخیر، ارتقا سرعت و قدرت پردازش رایانه‌ها، به شاخه هندسه جبری محاسباتی بیش از پیش توجه شده است. امروزه، شاهد ارائه الگوریتم‌های متنوعی برای حل مسائل هندسه جبری با استفاده از نرم‌افزارهای مختلف هستیم. از سوی دیگر، بهینه‌سازی ریاضی یکی از شاخه‌های توانای ریاضیات کاربردی است که امروزه، کاربردهای وسیعی در سایر علوم (از جمله علوم اقتصادی، اجتماعی و مهندسی) دارد. در این مقاله، قصد داریم با بیان چگونگی استفاده از روش‌های هندسه جبری برای حل مسائل بهینه‌سازی، خواننده را با نگاه هندسه جبری به حل برخی از مسائل آشنا سازیم. این روش‌ها را با بیان یک مثال از بهینه‌سازی مقید توضیح داده می‌شود. سرانجام، با کدنویسی در یکی از نرم‌افزارهای هندسه جبری محاسباتی با نام CoCoA یک مسئله از بهینه‌سازی را حل می‌کنیم.

واژگان کلیدی: هندسه جبری، پایه گروبنر، بهینه‌سازی، نرم‌افزارCoCoA

۱- استادیار گروه علوم پایه، دکترای ریاضی، دانشگاه صنعتی اراک، اراک، ایران. lelekaami@gmail.com

۱. مقدمه

یکی از رویکردهای موجود برای حل مسائل هندسی در طول تاریخ، ایجاد مسیری دوطرفه بین هندسه و جبر است به‌طوری‌که مسائل هندسی را بتوان با زبان جبر بیان و حل کرد. هندسه جبری یکی از شاخه‌های پویای ریاضیات محض است که بخش وسیعی از تحقیقات حال حاضر متخصصان ریاضی را در دنیا به خود اختصاص داده است. گسترش فناوری در دهه‌های اخیر، به ویژه ارتقاء چشم‌گیر سرعت و قدرت پردازش رایانه‌ها، بر پیشرفت علوم مختلف سایه‌افکنده است. شاخه هندسه جبری محاسباتی نیز از این قاعده مستثنا نیست. امروزه، شاهد ارائه الگوریتم‌های متنوعی برای حل مسائل هندسه جبری به‌وسیله نرم‌افزارهای مختلف هستیم. اگرچه سالهاست که ریاضیدانان مشغول تدریس هندسه جبری در دانشگاه‌های مختلف دنیا هستند و هر ساله شاهد برگزاری سمینارهای معتبر بین‌المللی در این زمینه در کشورهای مختلف هستیم، آنقدرها نیز این علم در دانشگاه‌های ما شناخته شده نیست و شاید بتوان به تعداد اندکی از ریاضیدانان مقیم ایران، که در این زمینه به پژوهش و تدریس مشغول هستند، و سمینارهای محدودی که در خصوص هندسه جبری (محاسباتی) در ایران برگزار می‌شوند، اشاره کرد. هدف از این مقاله، آشنا ساختن خواننده با برخی از مفاهیم ابتدایی این حوزه است و با ارائه مثال کاربردی، نقش این مفاهیم را در سایر علوم مشخص شده است.

امروزه، بهینه‌سازی ریاضی ابزاری مناسب برای تصمیم‌گیری در بسیاری از صنایع مختلف است و در آن از روش‌های تحلیلی پیشرفته‌ای برای یافتن بهترین مقادیر ورودی با در نظر گرفتن محدودیت‌های فیزیکی یا محدودیت‌های کاربر استفاده می‌شود. کیفیت این جواب نیز با یک تابع عددی (که کاربر آن را فراهم می‌آورد) اندازه‌گیری می‌شود. مسائل بهینه‌سازی در بسیاری از حوزه‌های علم از قبیل صنایع، علوم مهندسی، هواشناسی و شیمی مشاهده می‌شوند. مسائل بهینه‌سازی که هدف از آنها مینیمم‌سازی یا ماکزیمم‌سازی یک تابع حقیقی است، در دنیای واقعی نقش مهمی دارند و می‌توان آنها را به دو رده مسائل بهینه‌سازی نامقید و مسائل بهینه‌سازی مقید تقسیم کرد. بسیاری از کاربردهای عملی در علوم، مهندسی، اقتصاد و حتی در زندگی روزمره را می‌توان به‌صورت مسائل بهینه‌سازی مقید مدلسازی کرد. گاهی از اوقات، این مدل یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای را در اختیار ما قرار می‌دهد و باید پاسخی را برای آن بیابیم. با استفاده از مفهوم پایه‌های گروبنر از حوزه هندسه جبری محاسباتی می‌توان یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای پیچیده را به دستگاهی تبدیل کرد که مجهولات آن به راحتی محاسبه می‌شوند.

۲. تعریف مسئله

در این بخش درباره ایده نظریه بهینه‌سازی بحث شده است. مسائل بهینه‌سازی در بسیاری از رشته‌ها و حوزه‌های مختلف مشترک‌اند. در این مسائل باید جواب‌هایی را بیابیم که با توجه به

اهداف مشخصی بهینه یا نزدیک به بهینه هستند. معمولاً ما قادر به حل این مسائل در یک گام نیستیم و با انجام دادن مراحل متوالی به جواب مدنظر می‌رسیم و اغلب، فرایند حل آنها به چند گام تقسیم می‌شوند که یکی پس از دیگری اجرا می‌شود؛ این گام‌ها عبارت‌اند از: تشخیص و تعریف مسئله، ساخت مدل و حل مسئله، ارزیابی و به‌کارگیری جواب. محققان، کاربران و سازمان‌ها، مانند شرکت‌ها یا مؤسسه‌های عمومی، در زندگی روزمره خود با تعداد بسیار زیادی از مسائل بهینه‌سازی و برنامه‌ریزی آنها روبرو هستند. در چنین مسائلی تصمیم‌گیری‌های متفاوتی وجود دارد و کاربر یا سازمان باید یکی از آنها را انتخاب کند. انتخاب هر یک از تصمیم‌های موجود تأثیر ویژه‌ای بر کاربر یا سازمان دارد که می‌توان آن را با برخی از محک‌های ارزیابی اندازه‌گیری کرد. محک‌های ارزیابی به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که بتوان تأثیرات حاصل از انتخاب یک یا چند تصمیم را توصیف کرد. در مسائل بهینه‌سازی، کاربران و سازمان‌ها به یافتن تصمیمی از میان سایر تصمیم‌های ممکن علاقه‌مندند که مقدار یک تابع ارزیابی (که بر اساس یک محک ارزیابی منتخب تعریف شده است) را مینیمم یا ماکزیمم سازد. معمولاً کاربران و سازمان‌ها نمی‌توانند آزادانه از میان همه گزینه‌های مختلف یکی را انتخاب کنند و قیدهایی برای محدود ساختن تعداد حالات مختلف وجود دارد. محدودیت‌های رایج حاصل از قوانین، محدودیت‌های فنی یا ارتباطات میان‌فردی بین افراد مختلف هستند (Lange, 2004). آیا می‌توان از روش‌های هندسه جبری برای حل مدل‌های ریاضی حاصل از نظریه بهینه‌سازی استفاده کرد؟ در این مقاله به دنبال پاسخگویی به این سؤال هستیم.

۳. روش تحقیق

در مسائل بهینه‌سازی، یک تصمیم باید به نحوی انتخاب شود که همه قیدهای موجود در نظر گرفته شود و تابع ارزیابی را ماکزیمم/مینیمم سازد. فرایند برنامه‌ریزی برای حل اینگونه مسائل شامل چندین مرحله است: تشخیص مسئله، تعریف مسئله و ساخت یک مدل برای آن مسئله. مسئله هنگامی تشخیص داده می‌شود که کاربران یا مؤسسات به وجود راه حل‌های مختلف و تأثیر انتخاب هر یک از آنها بر تجارت خود پی برده باشند. پس از آنکه مسئله را تشخیص دادیم، باید آن را تعریف و تشریح کنیم. بدین منظور، باید حالات ممکن برای تصمیم‌های موجود را فرمول‌بندی و وجود قیدهای مختلف را بررسی کنیم و محک‌های ارزیابی را، که تحت تأثیر انتخاب حالت‌های مختلف تصمیم‌گیری قرار دارند، انتخاب و اهداف فرایند برنامه‌ریزی را تعیین کنیم. سرانجام، یک مدل برای مسئله می‌سازیم که اساس و ماهیت آن را نمایش می‌دهد. بنابراین، یک مدل نمایش ساده‌ای از حالت دنیای واقعی است. در مدل‌های ریاضی حقیقت با استخراج روابط بسیار نزدیک و خصوصیت‌های یک مسئله تشریح و سپس، با استفاده از نمادها و عبارات ریاضی فرمول‌بندی می‌شود. هنگام فرمول‌بندی یک مدل برای مسائل بهینه‌سازی، انتخاب‌های موجود برای تصمیم‌گیری با مجموعه‌ای از متغیرهای

تصمیم‌گیری $\{x_1,\ldots,x_n\}$ توصیف می‌شوند. برخی از مسائل بهینه‌سازی را می‌توان با یک دستگاه معادلات مانند (۱) مدلسازی کرد.

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_t(x_1,\ldots,x_n)=0. \end{cases} \tag{۱}$$

در اینجا اگر $f_1,f_2,\ldots,f_t$ توابعی گویا یا چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه می‌توانیم با استفاده از روش‌های هندسه جبری، دستگاه (۱) را حل کنیم. در ادامه، ابتدا مفاهیم پایه‌ای از هندسه جبری یادآوری می‌شود. سپس، الگوریتم بوخبرگر بیان و با استفاده از آن یک مسئله از دنیای بهینه‌سازی حل می‌شود. در انتها با استفاده از کدنویسی در نرم افزار هندسه جبری محاسباتی به نام CoCoA کاربرد روش گفته شده نشان داده می‌شود.

۴. نتایج تحقیق

۴-۱. نگاهی کوتاه به هندسه جبری

در این بخش، برخی از تعاریف از حوزه هندسه جبری یادآوری می‌شود (Cox, Little & O'Shea, 2007). یک تک‌جمله‌ای برحسب مجهولات $x_1,\ldots,x_n$، حاصلضربی به فرم $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ است که تمام توان‌های $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ اعداد صحیح نامنفی هستند. درجه کل این تک‌جمله‌ای برابر با مجموع $\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ است. می‌توان نماد تک‌جمله‌ای‌ها را به‌صورت ساده‌تری نیز بیان کرد. فرض کنیم $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ یک n-تایی از اعداد صحیح نامنفی باشد. در این صورت، $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ را قرار می‌دهیم. اگر $\alpha=(0,\ldots,0)$، آن‌گاه $x^\alpha=1$ را قرار می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم که $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ درجه کل تک‌جمله‌ای x^α را نشان می‌دهد. فرض کنیم k یک میدان دلخواه (مانند $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{R}$) باشد. یک چندجمله‌ای f برحسب $x_1,\ldots,x_n$ با ضرایب در k ترکیب خطی متناهی (با ضرایب در k) از تک‌جمله‌ای‌هاست. یک چندجمله‌ای f را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$f=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha,\quad a_\alpha\in k,$$

که در آن مجموع روی تعداد متناهی n-تایی $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ انجام می‌شود. مجموعه همه چندجمله‌ای‌های برحسب $x_1,\ldots,x_n$ با ضرایب در k را با نماد $k[x_1,\ldots,x_n]$ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که تحت عمل جمع و ضرب، $k[x_1,\ldots,x_n]$ در همه اصول یک میدان به‌جز وجود وارون ضربی صدق می‌کند. چنین ساختار ریاضی را یک حلقه جابه‌جایی می‌نامند (Atiyah & Macdonald, 1969). به همین دلیل، $k[x_1,\ldots,x_n]$ را حلقه چندجمله‌ایها می‌نامند.

تعریف ۱: (Hartshorne, 1977): فرض کنید k یک میدان و n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این

صورت فضای آفین n-بعدی روی k را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$k^n = \{(a_1,\ldots,a_n)|a_1,\ldots,a_n \in k\}$$

به‌عنوان مثالی از یک فضای آفین، حالت $k = \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. در این حالت، فضای آشنا $\mathbb{R}^n$ از حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبرخطی به‌دست می‌آید. اکنون تعریف اولین شیء هندسی در هندسه جبری یادآوری می‌شود.

تعریف ۲: فرض کنید k یک میدان و $f_1,f_2,\ldots,f_t$ چندجمله‌ای‌هایی در $k[x_1,\ldots,x_n]$ باشند. در این صورت قرار می‌دهیم:

$$V(f_1,f_2,\ldots,f_t) = \{(a_1,\ldots,a_n) \in k^n|f_i(a_1,\ldots,a_n) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq t\}.$$

مجموعه $V(f_1,f_2,\ldots,f_t)$ را چندگونای آفین تعریف‌شده توسط $f_1,f_2,\ldots,f_t$ می‌نامیم.

از این‌رو، یک چندگونای آفین $V(f_1,f_2,\ldots,f_t) \subset k^n$ برابر با مجموعه همه جواب‌های دستگاه معادلات (۱) است. اکنون، مفهوم ایده‌آل مطرح و ارتباط آن با چندگونای آفین نشان داده می‌شود. اهمیت واقعی ایده‌آل‌ها در آن است که بیان جدیدی را برای محاسبه چندگونای آفین (و لذا، مجموعه جواب دستگاه معادلات) در اختیار ما قرار می‌دهند.

تعریف ۳: یک زیرمجموعه $I \subset k[x_1,\ldots,x_n]$ را ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$0 \in I$؛

اگر $f,g \in I$، آن‌گاه $f + g \in I$؛

اگر $f \in I$ و $h \in k[x_1,\ldots,x_n]$، آن‌گاه $hf \in I$.

اولین مثال طبیعی از یک ایده‌آل، ایده‌آل تولید شده توسط تعداد متناهی از چندجمله‌ایهاست.

تعریف ۴: فرض کنید $f_1,\ldots,f_t$ چندجمله‌ای‌هایی در $k[x_1,\ldots,x_n]$ باشند. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$< f_1,\ldots,f_t >= \left\{\sum_{i=1}^{t} h_i f_i | h_1,\ldots,h_t \in k[x_1,\ldots,x_n]\right\}.$$

در واقع، $< f_1,\ldots,f_t >$ یک ایده‌آل از $k[x_1,\ldots,x_n]$ است که آن را ایده‌آل تولیدشده توسط $f_1,\ldots,f_t$ می‌نامند. گوییم یک ایده‌آل I متناهی‌مولد است، هرگاه $f_1,\ldots,f_t \in k[x_1,\ldots,x_n]$ موجود باشند، به‌طوری‌که $I =< f_1,\ldots,f_t >$. در این حالت گوییم که $f_1,\ldots,f_t$ یک پایه برای I هستند.

تعریف ۵: فرض کنید $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ مجموعه همه n-تایی‌هایی با درایه‌هایی از اعداد صحیح نامنفی باشد. یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $k[x_1,\ldots,x_n]$ یک رابطه $>$ روی $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ (یا به‌طور معادل هر رابطه‌ای روی مجموعه تک‌جمله‌ای‌های x^α، $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$) است که در اصول زیر صدق می‌کند:

ترتیب $>$ یک ترتیب کامل (خطی) روی $Z_{\geq 0}^{n}$ است؛

اگر $\alpha > \beta$ و $\gamma \in Z_{\geq 0}^{n}$، آن‌گاه $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$؛

ترتیب $>$ یک خوش‌ترتیبی روی $Z_{\geq 0}^{n}$ است.

انواع مختلفی از ترتیب تک‌جمله‌ای مانند ترتیب lexicographic (یا به اختصار lex)، ترتیب graded lex (یا به اختصار grlex) و ترتیب graded reverse lex وجود دارند. در اینجا فقط از ترتیب lex استفاده می‌شود و برای اطلاعات بیشتر به منبع (Cox et al., 2007) مراجعه شود.

تعریف ۶: (ترتیب lexicographic). فرض کنیم $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ و $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in Z_{\geq 0}^{n}$. می‌گوییم $\alpha >_{lex} \beta$ اگر در بردار تفاضل $\alpha - \beta \in Z_{\geq 0}^{n}$، سمت چپ‌ترین درایه ناصفر یک عدد مثبت باشد. اگر $\alpha >_{lex} \beta$، آن‌گاه می‌نویسیم $x^{\alpha} >_{lex} x^{\beta}$.

ترتیب lex مشابه با مرتب‌سازی کلمات در فرهنگ‌لغت انگلیسی است. برای مثال، داریم $x^5yz^2 >_{lex} x^4yz^2$. زیرا سمت چپ‌ترین درایه ناصفر بردار تفاضل $(5,1,2) - (4,1,2) \in Z_{\geq 0}^{n}$ یک عدد مثبت است. ترتیب تک‌جمله‌ای را می‌توان برای چندجمله‌ای‌ها نیز به‌کار برد. برای مثال، فرض کنیم $h = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in k[x,y,z]$. در این صورت با استفاده از ترتیب lex می‌توانیم جملات h را به‌صورت نزولی $h = -5x^3 + 7x^2z^2 + 4xy^2z + 4z^2$ مرتب کنیم.

تعریف ۷: فرض کنیم $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ یک چندجمله‌ای ناصفر در $k[x_1,\dots,x_n]$ بوده و $>$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای باشد. درجه چندگانه f برابر با $multideg(f) = max\{\alpha \in Z_{\geq 0}^{n} | a_{\alpha} \neq 0\}$ است (که در آن ماکزیمم نسبت به $>$ انتخاب می‌شود). ضریب پیشرو f برابر با $LC(f) = a_{multideg(f)} \in k$ بوده، تک‌جمله‌ای پیشرو f برابر با $LM(f) = x^{multideg(f)}$ بوده و جمله پیشرو f برابر با $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$ است.

برای نشان دادن این تعاریف، چندجمله‌ای $h = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in k[x,y,z]$ را به همراه ترتیب lex در نظر بگیرید. در این صورت داریم: $multideg(f) = (3,0,0)$، $LC(f) = -5$ و $LT(f) = -5x^3$.

تعریف ۸: فرض کنیم $I \subset k[x_1,\dots,x_n]$ یک ایده‌آل ناصفر باشد. با نماد $LT(I)$ مجموعه جمله‌های پیشرو عناصر I را نشان می‌دهیم. همچنین، ایده‌آل تولیدشده به‌وسیله عناصر $LT(I)$ را با نماد $< LT(I) >$ نشان می‌دهیم.

اکنون آماده‌ایم که پایه گروبنر یک ایده‌آل را تعریف کنیم.

تعریف ۹: یک ترتیب تک‌جمله‌ای را در نظر بگیرید. یک زیرمجموعه متناهی $G = \{g_1,\dots,g_t\}$ از ایده‌آل I را یک پایه گروبنر[1] می‌نامند، هرگاه $< LT(I) > = < LT(g_1),\dots,LT(g_t) >$ باشد.

1- Groebner Bases

در واقع، پایه گروبنر هر ایده‌آل یک پایه برای آن است. از این‌رو، $I = < G >$ است. نتیجه بسیار مهمی که از گزاره زیر به‌دست می‌آید، این است که چندگوناها فقط به ایده‌آل تولیدشده به‌وسیله معادلات تعریف‌کننده آن چندگونا وابسته است و نه به خود آن معادلات.

گزاره ۱: اگر $f_1,...,f_t$ و $g_1,...,g_s$ پایه‌های یک ایده‌آل یکسان در $k[x_1,...,x_n]$ باشند؛ یعنی $< f_1,...,f_t > = < g_1,...,g_s >$ باشد، آن‌گاه $V(f_1,...,f_t) = V(g_1,...,g_s)$ است.

اثبات: به گزاره ۴ از صفحه ۳۲ در منبع (Cox et al., 2007) مراجعه شود.

قضیه پایه هیلبرت (قضیه ۷-۵ از (Atiyah & Macdonald, 1969)) بیان می‌کند که هر ایده‌آل از $k[x_1,...,x_n]$ متناهی‌مولد است. توجه کنید که یک ایده‌آل ممکن است دارای پایه‌های مختلفی باشد. بر اساس گزاره ۱، با تغییر مناسب پایه یک ایده‌آل می‌توانیم راحت‌تر از قبل چندگونای وابسته به آن را محاسبه کنیم. این توانایی تغییر دادن پایه‌ها، بدون آنکه تغییر در چندگونا ایجاد شود، بسیار مهم است. از دیدگاه عملی، در زیربخش ۴-۲ خواهیم دید که با ترکیب گزاره ۱ با پایه‌های گروبنر، ابزاری قوی برای درک بهتر چندگونا به‌دست می‌آید؛ به عبارت دقیق‌تر، دستگاه معادلات (۱) را در نظر بگیرید. اگر I ایده‌آل تولیدشده توسط چندجمله‌ای‌های $f_1,...,f_t$ از دستگاه (۱) و G یک پایه گروبنر برای I باشد، آن‌گاه بنابر گزاره ۱ داریم: $V(I) = V(< G >)$. لذا، اگر بتوانیم نقاط $V(< G >)$ را به روشی ساده و راحت‌تر بیابیم، آن‌گاه به‌راحتی می‌توانیم همه پاسخ‌های دستگاه معادلات اصلی (۱) را نیز محاسبه کنیم. در زیربخش ۴-۲ الگوریتم بوخبرگر[1] را برای پیدا کردن پایه گروبنر یک ایده‌آل مفروض از $k[x_1,...,x_n]$ معرفی می‌کنیم.

۴-۲. بهینه‌سازی مقید: قید تساوی

مسائل اقتصادی عموماً شامل ماکزیمم‌سازی کمیت‌هایی از قبیل سود یا بهره، نسبت به یک قید مانند درآمد است. لذا نیاز به تکنیک‌هایی برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید داریم. در بهینه‌سازی ریاضی، به فرایندی که یک تابع هدف را نسبت به چند متغیر در حضور چند قید از همان متغیرها بهینه می‌سازد، بهینه‌سازی مقید گویند. تابع هدف، یا یک تابع هزینه یا یک تابع انرژی است که باید مینیمم شود یا یک تابع سود یا تابع پاداش است که باید ماکزیمم شود. ما به‌عنوان مشتری، همواره تمایل داریم که تابع سودمان ماکزیمم شود، اما معمولاً با محدودیت‌هایی از قبیل حساب بانکی مواجه هستیم. تولیدکنندگان نیز به دنبال تولید حداکثری هستند، اما آنها نیز دارای تعداد معدودی کارگر، تجهیزات و سرمایه محدود هستند.

در چنین شرایطی یک تابع هدف $f(x_1,...,x_n)$ داریم که در آن $x_1,...,x_n$ متغیرهای منتخب است

1- Buchberger's algorithm

و همچنین یک یا چند تابع قید $g_1(x_1,\ldots,x_n)$ ، ... ، $g_k(x_1,\ldots,x_n)$ و $h_1(x_1,\ldots,x_n)$ ، ... ، $h_l(x_1,\ldots,x_n)$ داریم. معمولاً این مسائل نیز به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\mathit{Maximise}\ /\ \mathit{Minimise}\ f(x_1,\ldots,x_n)\\ &\text{subject to}\\ &g_1(x_1,\ldots,x_n)\le b_1,\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)\le b_k\\ &h_1(x_1,\ldots,x_n)=c_1,\ldots,h_l(x_1,\ldots,x_n)=c_l\end{aligned}$$

روش ضرایب لاگرانژ یکی از ابزارهای مهم برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی می‌باشد که ما را به حل هر دو نوع مسائل قید تساوی و قید نامساوی قادر می‌سازد. روش ضرایب لاگرانژ و روش‌های مشتق شده از آن به‌صورت گسترده‌ای در علوم، مهندسی، اقتصاد و زندگی روزمره به‌کار برده می‌شوند. در این بخش، فقط مسائل بهینه‌سازی غیرخطی با یک قید تساوی در نظر گرفته شده است. اما روش ما را می‌توان به دو یا چند قید برابری نیز توسعه داد. فرم استاندارد این‌گونه مسائل بهینه‌سازی غیرخطی را می‌توان به‌صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\begin{aligned}&\mathit{Maximise}\ /\ \mathit{Minimise}\ f(x_1,\ldots,x_n)\\ &\mathit{subject\ to}\ \ g(x_1,\ldots,x_n)=0.\end{aligned}$$

تابع لاگرانژ L به‌صورت زیر ساخته می‌شود:

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=f(x_1,\ldots,x_n)+\lambda g(x_1,\ldots,x_n)$$

که در آن λ را ضریب لاگرانژ می‌نامند. نقاط اکسترمم f و ضریب لاگرانژ λ در معادله $\nabla L=0$ (یعنی $i=1,\ldots,n \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}=0,$ و $g(x_1,\ldots,x_n)=0$) صدق می‌کنند.

روش ضرایب لاگرانژ به‌طور وسیعی برای حل مسائل مقادیر اکسترمم در علوم، اقتصاد و مهندسی به‌طور وسیعی به‌کار برده می‌شود. در اینجا مثالی ارائه می‌شود. مسئله تخصیص سه کالای زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید سه کالا با تعداد x، y و z و قیمت‌های ۱۰، ۲۰ و ۳۰ تومان موجودند که ارزش کل، به‌صورت $10x+20y+30z=50$ ثابت است. فرض کنید که تابع سود نیز به‌صورت $U(x,y,z)=xy^2z^3$ داده شده باشد. حال اگر تابع لاگرانژ را بسازیم، آن‌گاه همان‌طور که ذکر شد، مقدار ماکزیمم U روی مجموعه مقادیر کالاها در حضور قید مذکور در معادلات زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases}y^2z^3-10\lambda=0\\ 2xyz^3-20\lambda=0\\ 3xy^2z^2-30\lambda=0\\ 10x+20y+30z-50=0.\end{cases}\qquad(۲)$$

بسیاری از روش‌های برنامه‌نویسی محاسباتی بر اساس قواعد روش ضرایب لاگرانژ ساخته شده‌اند. در اینجا قصد داریم دستگاه معادلات (۲) را با استفاده از پایه گروبنر حل کنیم. توجه کنید که این معادلات یک چندگونای آفین را در $\mathbb{R}^4$ تعریف می‌کنند. با محاسبه یک پایه گروبنر برای ایده‌آل تولیدشده توسط چندجمله‌ای‌های سمت چپ معادلات از دستگاه (۲) در $\mathbb{R}[x\ y\ z\ \lambda]$ شروع می‌کنیم. بدین منظور از الگوریتم بوخبرگر استفاده می‌کنیم. ابتدا باید برخی از نمادگذاری‌ها را یادآوری کنیم. از نماد $\overline{f}^F$ برای نمایش باقیمانده تقسیم f بر s-تایی مرتب $F=(f_1,\ldots,f_s)$ استفاده می‌کنیم. فرض کنیم که $f,g\in k[x_1,\ldots,x_n]$ چندجمله‌ای‌های ناصفر باشند. اگر $multideg(f)=\alpha$ و $multideg(g)=\beta$، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ که در آن به‌ازای هر i داریم $\gamma_i=max(\alpha_i,\beta_i)$. ما x^γ را کوچک‌ترین مضرب مشترک $LM(f)$ و $LM(g)$ می‌نامیم و می‌نویسیم $x^\gamma=LCM(LM(f),LM(g))$. حال مفهوم S-چندجمله‌ای f و g را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$S(f,g)=\frac{x^\gamma}{LT(f)}\cdot f-\frac{x^\gamma}{LT(g)}\cdot g$$

اکنون با استفاده از نمادها و مفاهیم مذکور، الگوریتم بوخبرگر را برای یافتن پایه گروبنر بیان می‌کنیم.

الگوریتم ۱: الگوریتم بوخبرگر (Buchberger's Algorithm)

INPUT: $F=\{f_1,\ldots,f_s\}\subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ with $f_i\neq 0$ for all i

OUTPUT: $G=\{g_1,\ldots,g_t\}$, a Groebner basis for $<f_1,\ldots,f_s>$

INITIALIZATION: $G:=F$, $G':=\{\{f_i,f_j\}|f_i\neq f_j\in G\}$

WHILE: $G'\neq\varnothing$ DO

Choose any $\{f,g\}\in G'$

$G':=G'-\{\{f,g\}\}$

$h:=\overline{S(f,g)}^G$

IF $h\neq 0$ THEN

$G':=G'\cup\{\{u,h\}|\forall u\in G\}$

$G:=G\cup\{h\}$

با استفاده از الگوریتم بوخبرگر دستگاه معادلات (۲) را حل می‌کنیم. فرض کنیم $f_1(x,y,z,\lambda)=y^2z^3-10\lambda$، $f_2(x,y,z,\lambda)=2xyz^3-20\lambda$، $f_3(x,y,z,\lambda)=3xy^2z^2-30\lambda$، $f_4(x,y,z,\lambda)=10x+20y+30z-50\in \square[x,y,z,\lambda]$ و ترتیب lex را به‌صورت $x>y>z>\lambda$ در نظر می‌گیریم.

INITIALIZATION:

$G := \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$,

$G' := \{\{f_1, f_2\}, \{f_1, f_3\}, \{f_1, f_4\}, \{f_2, f_3\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}\}$

Step 1:

Choose $\{f_1, f_2\} \in G'$

$G' := \{\{f_1, f_3\}, \{f_1, f_4\}, \{f_2, f_3\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}\}$

$$S(f_1, f_2) = \frac{lcm(y^2z^3, xyz^3)}{y^2z^3}(y^2z^3 - 10t) - \frac{lcm(y^2z^3, xyz^3)}{xyz^3}(2xyz^3 - 20t)$$
$$= -xy^2z^3 - 10xt + 20yt$$

چون $S(f_1, f_2) = -x \cdot f_1 - 2t \cdot f_4 + 60yt + 60zt - 100t$ ، داریم:

$$h := \overline{S(f_1, f_2)}^G = 60yt + 60zt - 100t$$

چون $h \neq 0$ ، قرار می‌دهیم $f_5 := 60yt + 60zt - 100t$. از این رو،

$$G' := \{\{f_1, f_3\}, \{f_1, f_4\}, \{f_2, f_3\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}, \{f_1, f_5\}, \{f_2, f_5\}, \{f_3, f_5\}, \{f_4, f_5\}\}$$

$G := \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$

STEP 2:

Choose $\{f_1, f_3\} \in G'$

$G' := \{\{f_1, f_4\}, \{f_2, f_3\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}, \{f_1, f_5\}, \{f_2, f_5\}, \{f_3, f_5\}, \{f_4, f_5\}\}$

$$S(f_1, f_3) = \frac{lcm(y^2z^3, xy^2z^2)}{y^2z^3}(f_1) - \frac{lcm(y^2z^3, xy^2z^2)}{xy^2z^2}(f_3)$$
$$= -2xy^2z^3 - 10xt + 30zt$$

چون $S(f_1, f_2) = -2x \cdot f_1 - 3t \cdot f_4 + f_5 + 60zt - 50t$ ، داریم:

$$h := \overline{S(f_1, f_2)}^G = 60zt - 50t$$

چون $h \neq 0$ ، قرار می‌دهیم $f_6 := 60zt - 50t$.

$G' := \{\{f_1, f_4\}, \{f_2, f_3\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}, \{f_1, f_5\}, \{f_2, f_5\}, \{f_3, f_5\}, \{f_4, f_5\},$
$\{f_1, f_6\}, \{f_2, f_6\}, \{f_3, f_6\}, \{f_4, f_6\}, \{f_5, f_6\}\}$

$G := \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

STEP 3:

Choose $\{f_1, f_4\} \in G'$

$G' := \{\{f_2, f_3\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}, \{f_1, f_5\}, \{f_2, f_5\}, \{f_3, f_5\}, \{f_4, f_5\}, \{f_1, f_6\},$
$\{f_2, f_6\}, \{f_3, f_6\}, \{f_4, f_6\}, \{f_5, f_6\}\}$

$$
\begin{aligned}
S(f_1, f_4) &= \frac{lcm(y^2z^3, x)}{y^2z^3}(f_1) - \frac{lcm(y^2z^3, x)}{x}(f_4) \\
&= -9xy^2z^3 - 10xt - 20y^3z^3 - 30y^2z^4 + 50y^2z^3
\end{aligned}
$$

چون $S(f_1, f_4) = (-9x - 20y - 30z + 50) \cdot f_1 - 10t \cdot f_4$ ، داریم:

$$h := \overline{S(f_1, f_4)}^{G} = 0$$

اگر این فرآیند را ادامه دهیم، الگوریتم خاتمه یافته و پایه گروبنر مد نظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
G = \{&y^2z^3 - 10t, 2xyz^3 - 20t,\ 3xy^2z^2 - 30t,\ 10x + 20y + 30z - 50, \\
&60yt + 60zt - 100t,\ 60zt - 50t,\ -30yz^4 + 50yz^3 - 300t, \\
&-20y^3z^2 + 50y^2z^2 - 400t,\ -600t^2 + 15625\ /\ 648t\}
\end{aligned}
$$

بنابر گزاره ۱، مجموعه جواب دستگاه معادلات (۲) برابر با $V(G)$ است. از این‌رو، باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم.

$$
\begin{cases}
y^2z^3 - 10\lambda = 0 \\
2xyz^3 - 20\lambda = 0 \\
3xy^2z^2 - 30\lambda = 0 \\
-30yz^4 + 50yz^3 - 300\lambda = 0 \\
-20y^3z^2 + 50y^2z^2 - 400\lambda = 0 \\
10x + 20y + 30z - 50 = 0 \\
60y\lambda + 60z\lambda - 100\lambda = 0 \\
60z\lambda - 50\lambda = 0 \\
-600\lambda^2 + \dfrac{15625}{648}\lambda = 0.
\end{cases}
\tag{۳}
$$

در اولین نگاه شاید این‌گونه به نظر برسد که این مجموعه از چندجمله‌ایها بسیار پیچیده‌تر از آن چندجمله‌ایهایی هستند که در (۲) وجود دارند. ضرایب عناصر پایه گروبنر اغلب نامأنوس‌تر از ضرایب مجموعه مولد اصلی هستند. با وجود این، با اندکی دقت خواهید دید که آخرین معادله چندجمله‌ای تنها به متغیر λ وابسته است. در واقع، هنگام فرایند یافتن پایه گروبنر، سایر متغیرها را حذف کرده‌ایم. هر دستگاه معادلات از فرم اخیر را می‌توان به‌راحتی حل کرد. به ویژه آخرین معادله فقط بر حسب یک متغیر بود و با استفاده از روش‌های حل معادلات تک متغیره می‌توان آن را حل و به کمک جانشانی پسرو سایر معادلات را بر حسب متغیرهای دیگر حل کرد. آخرین معادله از دستگاه (۳) دارای ریشه $\lambda = 0$ و $\lambda = 137\ /\ 3409$ می‌باشد. اگر λ را برابر با هر یک از این مقادیر قرار دهیم، سایر معادلات نیز حل می‌شوند. همان‌طور که اشاره شد، یکی از جواب‌ها برابر با $\lambda = 0$ است و معادله سوم از

دستگاه (۳) نشان می‌دهد که یکی از متغیرهای x، y و z برابر با صفر خواهد شد و در نتیجه، تابع سود نیز برابر با صفر می‌شود. اگر λ را برابر با $3409 / 137$ در نظر بگیریم، آن‌گاه به‌راحتی با حل سایر معادلات به جواب $x = y = z = 5 / 6$ می‌رسیم. اکنون، از این مطلب به‌راحتی می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم را محاسبه کرد.

۴-۳. نکته‌ای درباره به‌کار بردن الگوریتم

الگوریتم‌های مختلفی مانند الگوریتم بوخبرگر برای محاسبه پایه گروبنر یک ایده‌آل استفاده می‌شوند و به‌صورت گسترده‌ای در نرم‌افزارهای مختلف کامپیوتری مانند MAPLE، Singular و CoCoA به‌کار می‌روند. در ادامه این مقاله، از نرم‌افزار CoCoA برای انجام دادن محاسبات استفاده شده است. توجه کنید که در این مقاله به دنبال بیان پیچیدگی الگوریتم بوخبرگر نیستیم و علاقه‌مندان می‌توانند به منبع (Adams & Loustaunau, 1994; Winkler, 1996; Huynh, 1986) مراجعه کنند. نرم‌افزار CoCoA در سال ۱۹۸۷ میلادی در دانشگاه جنوا (ایتالیا) ساخته شد (Abbott et al., 2000).

مثال ۲: مقادیری را برای x، y و z بیابید که تابع $f(x,y,z) = \dfrac{6xyz}{x+2y+2z}$ را ماکزیمم سازد، به شرطی که x، y و z به رابطه $xyz = 16$ محدود شده باشند.

پاسخ: تابع لاگرانژ در این مثال به‌صورت زیر است:

$$L(x,y,z,t) = \frac{6xyz}{x+2y+2z} - t(xyz-16).$$

لذا، شرایط لازم برای ماکزیمم شدن $f(x,y,z,t)$ به‌وسیله دستگاه زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{6yz(x+2y+2z)-6xyz}{(x+2y+2z)^2} - tyz = 0 \\ \dfrac{6xz(x+2y+2z)-12xyz}{(x+2y+2z)^2} - txz = 0 \\ \dfrac{6xy(x+2y+2z)-12xyz}{(x+2y+2z)^2} - txy = 0 \\ xyz - 16 = 0. \end{cases}$$

به‌منظور استفاده از الگوریتم مناسب برای محاسبه پایه گروبنر مجبوریم این دستگاه معادلات گویا را به یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای تبدیل کنیم. لذا، داریم:

$$\begin{cases} 6yz(x+2y+2z) - 6xyz - tyz(x+2y+2z)^2 = 0 \\ 6xz(x+2y+2z) - 12xyz - txz(x+2y+2z)^2 = 0 \\ 6xy(x+2y+2z) - 12xyz - txy(x+2y+2z)^2 = 0 \\ xyz - 16 = 0. \end{cases} \tag{۴}$$

از ترتیب تک‌جمله‌ای lex به‌صورت $x > y > z > t$ استفاده می‌کنیم. ابتدا پایه گروبنر G از ایده‌آل تولیدشده توسط چندجمله‌ای‌های سمت چپ معادلات دستگاه (۴) را به‌وسیله کدنویسی در CoCoA به‌دست می‌آوریم:

```
Use R ::= QQ[x,y,z,t], Lex;
    F:=[6yz(x+2y+2z)-6xyz-tyz(x+2y+2z)^2,
    6xz(x+2y+2z)-12xyz-txz(x+2y+2z)^2,
    6xy(x+2y+2z)-12xyz-txy(x+2y+2z)^2, xyz-16];
J := Ideal(F);
G:=GBasis(J);
G;
```

نتیجه اجرای دستورهای بالا در CoCoA به‌صورت زیر است:

```
G=[-16x+32y, -8y+8z, -2/3z+12t^2, 18t^3-2/3]
```

لذا، از گزاره ۱ نتیجه می‌گیریم که مجموعه جواب‌های دستگاه معادلات (۴) برابر با مجموعه جواب‌های دستگاه معادلات (بسیار ساده) زیر است:

$$\begin{cases}-16x + 32y = 0\\ -8y + 8z = 0\\ -2 / 3z + 12t^2 = 0\\ 18t^3 - 2 / 3 = 0.\end{cases} \tag{۵}$$

از آخرین معادله از دستگاه (۵)، به‌راحتی مقدار t و سپس، با جانشانی پسرو نیز سایر مجهولات محاسبه می‌شوند. لذا، جواب مد نظر برابر با $(x,y,z) = (4,2,2)$ است.

۵. بحث و نتیجه گیری

هدف از ارائه این مقاله، آشنا ساختن خواننده با کاربرد زیبایی از مبحث هندسه جبری، یکی از شاخه‌های فعال تحقیقاتی، در دنیای علم است. گاهی درک رفتار یک مسئله بهینه‌سازی ممکن است شامل حل یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای باشد. در این صورت، با استفاده از هندسه جبری (محاسباتی) قادر خواهیم بود که به‌طور مؤثر این دستگاه را حل کنیم. نتایج این مطالعه را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

الف. درکنار ابزارهای سنتی ریاضیات برای حل مسائل بهینه‌سازی، ابزارهای قدرتمند دیگری نیز وجود دارند که ممکن است در متون کلاسیک دانشگاهی به آنها پرداخته نشود. در این مقاله، یکی از این ابزارها؛ یعنی هندسه جبری مطرح شد.

ب. اگر چه رشته‌هایی مانند جبر و هندسه جبری در ممکن است در اذهان بسیاری از افراد (حتی

افراد دانشگاهی در ایران) جزئی از ریاضیات محض محسوب شوند و کاربردی را برای آنها متصور نشوند، در این مقاله مثال کاملاً کاربردی از هندسه جبری ارائه شد.

پ. مجامع مهندسی ما اغلب با نرم‌افزارهایی کاربردی و محاسباتی مانند MATLAB آشنا هستند و حتی نرم‌افزاری را برای رشته‌های ریاضی محض و محاسبات در آن حوزه متصور نیستند. در این مقاله نرم‌افزار CoCoA و نحوه استفاده از برای حل عملی یک مثال کاربردی معرفی شد.

علاقه‌مندان به کسب اطلاعات بیشتر درباره ارتباط موجود بین هندسه جبری و بهینه‌سازی می‌توانند به منبع (Blekherman, Parrilo & Thomas, 2012) مراجعه کنند.

مراجع:

- Abbott, J., Bigatti, A.M. and Lagorio, G. (2000). CoCoA-5: A system for doing computations in commutative algebra, Available at http://cocoa.dima.unige.it.
- Adams, W.W. and Loustaunau, P. (1994). An introduction to Groebner bases, American Mathematical Society, Providence. Volume 3.
- Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G. (1969). *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley.
- Blekherman, G., Parrilo, P. A., Thomas, R. (2012). Semidefinite optimization and convex algebraic geometry (MPS-SIAM Series on Optimization), *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 13.
- Cox, D., Little, J. and O'Shea, D. (2007). *Ideals, varieties, and algorithms*, Springer Science+Business Media, LLC. Undergraduate Texts in Mathematics.
- Hartshorne, R. (1977). *Algebraic geometry*, no. 52, Springer-Verlag New York Inc.
- Huynh, D.T. (1986). A superexponential lower bound for Groebner bases and church-rosser commutative thue systems, *Information and Control*, 68, 196–206.
- Lange, K. (2004). *Optimization*, Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag New York.
- Winkler, F. (1996). *Polynomial algorithms in computer algebra*, Springer-Verlag Wien, New York.

◀ داود حسن‌زاده لِلِکامی: مدرک دکترای خود را در رشته ریاضی محض (گرایش جبر جابه‌جایی) از دانشگاه گیلان اخذ کرده‌اند. ایشان از سال ۱۳۹۲ فعالیت خود را به عنوان عضو هیأت علمی در دانشگاه صنعتی اراک آغاز کرده و هم‌اکنون نیز به عنوان استادیار در گروه علوم پایه مشغول فعالیت هستند. در کنار فعالیت‌های اجرایی و مدیریتی، ایشان در زمینه ریاضیات (جبر جابه‌جایی، هندسه‌جبری، گراف‌های جبری، توپولوژی و همولوژی)، برنامه‌نویسی کامپیوتر، توسعه نرم‌افزار، طراحی سایت، طراحی پایگاه داده و اتوماسیون اداری مشغول به کار آموزشی و پژوهشی هستند.