

Binary Normal Modal Logic

Fatemeh Shirmohammadzadeh Maleki*

Abstract

In this article, first we define a Kripke semantics for normal modal Logic with a binary operator and we introduce a system K^2 which is sound and complete for this semantics. Then, we will introduce two translations and show that binary normal modal logic K^2 , and unary normal modal logic K , i.e. modal logic with one binary operator, are very closely related by these two translations. We call a translation a faithful interpretation if provability is preserved in both directions. So, with this terminology we will show that these two translations are faithful interpretation of K into K^2 and vice versa. A logic extending K will be a set of formulas containing K closed under its rules and uniform substitution. A logic extending K^2 is similarly defined. Finally, we will prove that the classes of logics extending K and K^2 are closely related as well and there is a 1-1-correspondence between the logics extending K and extending K^2 .

Keywords: Normal modal logic, Binary normal modal logic, Kripke semantics, Binary Kripke semantics, Completeness, Faithful interpretation.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

* Assistant Professor, Research Institute of Hikmat and Philosophy of Iran, f.shmaleki2012@yahoo.com

Date received: 2023/02/08, Date of acceptance: 2023/05/07



Copyright © 2010, IHCS (Institute for Humanities and Cultural Studies). This is an Open Access article. This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



پروہشگاہ علوم انسانی و مطالعات فرہنگی
پرتال جامع علوم انسانی

منطق وجهی نرمال دوموضوعی

فاطمه شیرمحمدزاده ملکی*

چکیده

در این مقاله، ابتدا معناشناسی کریپکی برای منطق وجهی نرمال با یک عملگر دوموضوعی را تعریف کرده و سیستمی به نام K^2 که نسبت به این معناشناسی درست و تمام است را معرفی خواهیم کرد. سپس دو نوع ترجمه ارائه خواهیم کرد و با استفاده از این ترجمه‌ها نشان خواهیم داد که منطق وجهی نرمال دوموضوعی (K^2) و منطق وجهی نرمال استاندارد (K) بسیار به هم مرتبط هستند. یک ترجمه را تعبیر-پایدار می‌نامیم در صورتی که اثبات‌پذیری در هر دو جهت حفظ شود. طبق این تعریف، ثابت خواهیم کرد که هر دو ترجمه‌ی معرفی شده، تعبیر-پایدار از K به K^2 و بالعکس هستند. یک توسعه از منطق K ، یک مجموعه از فرمول‌ها است که شامل K است و تحت قواعد آن و جانشینی یکنواخت بسته است. توسعه‌ی از منطق K^2 را نیز به همین صورت تعریف خواهیم کرد. در نهایت ثابت خواهیم کرد که یک تناظر یک‌به‌یک بین توسعه‌هایی از منطق K و منطق K^2 وجود دارد.

کلیدواژه‌ها: منطق وجهی نرمال، منطق وجهی نرمال دوموضوعی، معناشناسی کریپکی، معناشناسی کریپکی دوموضوعی، تمامیت، تعبیر پایدار.

۱. مقدمه

عملگر دوموضوعی برای منطق‌های وجهی غیر-نرمال نخستین بار توسط دیانگ و شیرمحمدزاده در [4] معرفی شده است. هدف آنها از معرفی عملگر دوموضوعی برای منطق‌های وجهی

* استادیار، موسسه پژوهشی حکمت و فلسفه ایران، f.shmaleki2012@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۱۹، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۷



غیرنرمال، پیدا کردن همتای وجهی برای منطق زیرشهودی WF بود. دستگاہ WF منطق تعریف شده از اصل‌ها و قواعد زیر است:

$$\begin{array}{ll} \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{.۸} & A \rightarrow A \vee B \text{. ۱} \\ \frac{A}{B \rightarrow A} \text{.۹} & B \rightarrow A \vee B \text{. ۲} \\ \frac{A \quad B}{A \wedge B} \text{.۱۰} & A \wedge B \rightarrow A \text{. ۳} \\ \frac{A \rightarrow B \quad A \rightarrow C}{A \rightarrow B \wedge C} \text{.۱۱} & A \wedge B \rightarrow B \text{. ۴} \\ \frac{A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{A \vee B \rightarrow C} \text{.۱۲} & A \rightarrow A \text{. ۵} \\ \frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C} \text{.۱۳} & \perp \rightarrow A \text{. ۶} \\ \frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D}{(A \rightarrow C) \leftrightarrow (B \rightarrow D)} \text{.۱۴} & A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \text{. ۷} \end{array}$$

همتای وجهی برای منطق زیر شهودی WF به عنوان یک مسأله‌ی باز در [3, 8] مطرح شده بود، تا اینکه دیانگ و شیرمحمدزاده در سال ۲۰۲۱ [4] با معرفی معناشناسی همسایگی دوموضعی و منطق وجهی (غیرنرمال) دوموضعی به این مسأله‌ی باز پاسخ دادند و شیرمحمدزاده در مقاله‌ای دیگر [9] همتاهای وجهی دوموضعی برای سایر منطق‌های زیرشهودی را معرفی کرد. اخیراً و در مقاله‌ای دیگر [5]، رابطه‌ی بین منطق‌های وجهی یک موضعی و منطق‌های وجهی دوموضعی به طور گسترده‌تری مورد بررسی قرار گرفته است. نخستین بار در سال ۱۹۷۰ معناشناسی همسایگی که گسترشی از معناشناسی کریپکی است، برای بررسی منطق‌های وجهی کلاسیک معرفی شد. در مدل‌های همسایگی برای منطق وجهی، به هر حالتی، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های جهان نسبت داده می‌شود که همسایگی آن حالت نامیده می‌شود و فرمول وجهی $\Box A$ در جهان w درست است اگر و تنها اگر مجموعه جهان‌هایی که در آنها A درست است یک همسایگی از w باشد [۲]. منیری و شیرمحمدزاده معناشناسی همسایگی را برای منطق IPC و BPC معرفی کرده و قضایای درستی و تمامیت را برای آنها ثابت کرده‌اند [۶،۷].

ساختار این مقاله به شرح زیر است. در بخش ۲، تعاریف و قضایای مربوط به منطق وجهی نرمال یک موضعی (استاندارد)، که در سایر بخش‌های این مقاله نیاز خواهیم داشت را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، یک معناشناسی کریپکی برای منطق وجهی نرمال با یک عملگر دوموضعی را تعریف کرده و سیستمی معرفی خواهیم کرد که نسبت به این معناشناسی درست و تمام است. در بخش ۴، با ارائه‌ی ترجمه‌هایی از زبان منطق وجهی نرمال استاندارد به

زبان منطق وجهی نرمال دوموضوعی و بالعکس، نشان خواهیم داد که نه تنها فرمول‌های منطق وجهی نرمال K و منطق وجهی نرمال دوموضوعی K^2 با استفاده از ترجمه‌هایی به هم مرتبط هستند، بلکه توسیع‌های این منطق‌ها نیز با استفاده از این ترجمه‌ها ارتباط بسیار نزدیکی باهم دارند و در تناظر یک‌به‌یک هستند.

۲. منطق وجهی نرمال

در این بخش به معرفی منطق وجهی نرمال یک موضوعی K خواهیم پرداخت. برای مطالعه بیشتر راجع به این منطق به [1, 2, 10, 11] مراجعه شود.

منطق وجهی نرمال، منطق ضرورت و امکان است و یک گزاره ضرورتاً درست است هرگاه در هر جهان ممکن، راست باشد. در حالت کلی زبان منطق وجهی با افزودن عملگر \Box به زبان منطق کلاسیک، به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۲ زبان وجهی نرمال $L^\square(At)$ ، کوچکترین مجموعه فرمول‌های تولید شده توسط دستور زبان زیر است (p متغیر اتمی است و مجموعه‌ی متغیرهای اتمی را با \mathbb{P} نشان می‌دهیم):

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \Box A.$$

توجه داشته باشیم که زبان منطق کلاسیک غیر وجهی، $L_c(At)$ ، یک زیرزبان از $L^\square(At)$ است و نمادهای \leftrightarrow ، \rightarrow ، \vee و \top طبق معمول تعریف می‌شوند. ضمناً عملگر \Diamond را برحسب عملگر \Box به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\Diamond A \leftrightarrow \neg(\Box \neg A)$$

تعبیر $\Box A$ آن است که « A ضرورتاً درست است» و تعبیر $\Diamond A$ ، آن است که « A ممکن است».

تعریف ۲.۲ (قاب کریپکی) دوتایی $F = \langle W, R \rangle$ یک قاب کریپکی منطق وجهی نرمال نامیده می‌شود، در صورتی که W یک مجموعه ناتهی از عناصر باشد که جهان (ممکن) نامیده می‌شوند و R یک رابطه‌ی دوتایی روی W است که رابطه‌ی دسترس‌پذیری نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲ (مدل کریپکی) سه تایی $M = \langle W, R, V \rangle$ یک مدل کریپکی منطق وجهی نرمال نامیده می‌شود، در صورتی که $\langle W, R \rangle$ یک قاب کریپکی و $V: \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ یک تابع ارزش‌گذاری روی این قاب باشد.

تعریف ۴.۲ (درستی) فرض کنید $M = \langle W, R, V \rangle$ یک مدل کریپکی و $w \in W$ باشد. درستی فرمول A به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

$$۱. \quad w \in V(p) \text{ اگر و تنها اگر } M, w \models p.$$

$$۲. \quad M, w \models \neg A \text{ اگر و تنها اگر } M, w \not\models A.$$

$$۳. \quad M, w \models A \wedge B \text{ اگر و تنها اگر } M, w \models A \text{ و } M, w \models B.$$

$$۴. \quad M, w \models \Box A \text{ اگر و تنها اگر برای هر } w' \in W \text{ با } w R w' \text{ داشته باشیم } M, w' \models A.$$

تعریف ۵.۲ یک فرمول وجهی A در یک مدل کریپکی $M = \langle W, R, V \rangle$ راست است هرگاه به ازای هر $w \in W$ ، $M, w \models A$. در این صورت می‌نویسیم $M \models A$. فرمول وجهی A معتبر است هرگاه در هر مدل کریپکی وجهی راست باشد.

برای معرفی دستگاه اصل موضوعی منطق وجهی نرمال، اصول و قواعد زیر را در نظر می‌گیریم:

هر اصل‌بندی از منطق گزاره‌ای	PC
$\frac{\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)}{A \quad A \rightarrow B}$	K
$\frac{A}{B}$	MP
$\frac{A}{\Box A}$	Nec

تعریف ۶.۲ منطق K را کوچکترین مجموعه از فرمول‌های بسته تحت نمونه جانشین‌های PC و K و قواعد استنتاجی MP و Nec قرار می‌دهیم. منطق K را **منطق وجهی نرمال** می‌نامند. در منطق وجهی، اصل K ، اصل توزیع پذیری نامیده می‌شود و قواعد MP و Nec به ترتیب قاعده‌ی وضع مقدم و قاعده‌ی ضرورت نامیده می‌شوند. توجه داشته باشیم که مفاهیم "برهان" و "قضیه" در منطق K به روش‌های معمول همیشگی تعریف می‌شوند. اثبات قضیه‌ی زیر را می‌توان در [1] یافت.

قضیه ۷.۲ (تمامیت) منطق K نسبت به رده‌ی همه‌ی قاب‌های کریپکی درست و قویاً تمام است.

۳. معنائشناسی برای منطق وجهی نرمال دوموضعی با ارائه یک سیستم

در این بخش، یک معنائشناسی کریپکی برای منطق وجهی نرمال با یک عملگر دوموضعی را تعریف کرده و سیستمی را معرفی خواهیم کرد که نسبت به این معنائشناسی درست و تمام است. برای این منظور، ابتدا زبان وجهی نرمال دوموضعی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳ زبان وجهی نرمال دوموضعی $L_c(At)$ ، کوچکترین مجموعه فرمول‌های تولید شده توسط دستور زبان زیر است (p متغیر اتمی است):

$$p | \neg A | A \wedge B | A \Rightarrow B.$$

توجه داشته باشیم که همانند زبان وجهی نرمال، $L_c(At)$ یک زیرزبان از $L_c(At)$ است و نمادهای \leftrightarrow ، \rightarrow ، \vee و \top طبق معمول و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A \vee B &:= \neg A \wedge \neg B, \\ A \rightarrow B &:= \neg A \vee B, \\ A \leftrightarrow B &:= (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A). \end{aligned}$$

تعریف ۲.۳ (قاب کریپکی دوموضعی) دوتایی $F = \langle W, R \rangle$ یک قاب کریپکی دوموضعی منطق وجهی نرمال دوموضعی نامیده می‌شود، در صورتی که W یک مجموعه ناتهی از جهان‌ها و R یک رابطه‌ی دوتایی روی W باشد. مدل کریپکی دوموضعی منطق وجهی نرمال دوموضعی، سه تایی $M = \langle W, R, V \rangle$ است که در آن (W, R) یک قاب کریپکی منطق وجهی نرمال دوموضعی است و $V: \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ یک تابع ارزشگذاری است.

تعریف ۳.۳ (درستی) فرض کنید $M = \langle W, R, V \rangle$ ، یک مدل کریپکی دوموضعی و $w \in W$ باشد. درستی فرمول A به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

$$1. w \in V(p) \text{ اگر و تنها اگر } M, w \models p.$$

$$2. M, w \models \neg A \text{ اگر و تنها اگر } M, w \not\models A.$$

$$3. M, w \models A \wedge B \text{ اگر و تنها اگر } M, w \models A \text{ و } M, w \models B.$$

۴. $M, w \models A \Rightarrow B$ اگر و تنها اگر برای هر $w' \in W$ با $w R w'$ داشته باشیم: اگر

$$M, w' \models A \text{ آنگاه } M, w' \models B.$$

در ادامه‌ی این بخش اصل و قاعده‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{(A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D)}{A \Rightarrow B} \text{ Imp} \quad K \Rightarrow$$

تعریف ۴.۳ منطق K^2 را کوچکترین مجموعه از فرمول‌های بسته تحت نمونه جانشین‌های PC و K_{\Rightarrow} و قاعده‌های Imp و MP قرار می‌دهیم. منطق K^2 را منطق وجهی نرمال دوموضوعی می‌نامیم.

لم ۵.۳ در منطق وجهی نرمال دوموضوعی، دو قاعده زیر اثبات می‌شوند:

$$\frac{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \rightarrow (E \rightarrow F)}{(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \rightarrow (E \Rightarrow F)} \text{ الف}$$

$$\frac{(A_1 \rightarrow B_1) \wedge \dots \wedge (A_n \rightarrow B_n) \rightarrow (E \rightarrow F)}{(A_1 \Rightarrow B_1) \wedge \dots \wedge (A_n \Rightarrow B_n) \rightarrow (E \Rightarrow F)} \text{ ب}$$

اثبات. تنها به اثبات مورد الف می‌پردازیم:

فرض $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \rightarrow (E \rightarrow F)$ ۱.

طبق ۱ $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (E \rightarrow F))$ ۲.

طبق ۲ و قاعده Imp $(A \rightarrow B) \Rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (E \rightarrow F))$ ۲.

۳ $((A \rightarrow B) \Rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (E \rightarrow F))) \rightarrow ((A \Rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \Rightarrow (E \rightarrow F)))$

اصل K_{\Rightarrow}

طبق ۲، ۳ و قاعده MP $(A \Rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \Rightarrow (E \rightarrow F))$ ۴.

اصل K_{\Rightarrow} $((C \rightarrow D) \Rightarrow (E \rightarrow F)) \rightarrow ((C \Rightarrow D) \rightarrow (E \Rightarrow F))$ ۵.

طبق ۴ و ۵ $(A \Rightarrow B) \rightarrow ((C \Rightarrow D) \rightarrow (E \Rightarrow F))$ ۶.

طبق ۶ $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \rightarrow (E \Rightarrow F)$ ۷.

در ادامه و با استفاده از مدل‌های کانونی، تمامیت منطق وجهی نرمال دوموضوعی را اثبات خواهیم کرد. توجه داشته باشیم که مفاهیم برهان و قضیه در منطق K^2 به روش‌های معمول همیشگی تعریف می‌شوند.

تعریف ۶.۳ مدل $M^{K^2} = \langle W_{K^2}, R_{K^2}, V_{K^2} \rangle$ را مدل کانونی منطق K^2 نامیده و به صورت زیر

تعریف می‌کنیم:

۱. W_{K^2} مجموعه‌ی همه‌ی K^2 -سازگار ماکسیمال‌ها است.

۲. رابطه‌ی دوتایی R_{K^2} روی W_{K^2} به این صورت تعریف می‌شود: اگر برای هر فرمول

$$A \text{ و } B, \text{ از } \neg B \wedge A \in v \text{ نتیجه بگیریم } \neg(A \Rightarrow B) \in w, \text{ آنگاه داریم } R_{K^2} w v.$$

۳. تابع ارزشگذار V_{K^2} به صورت $V_{K^2} = \{w \in W_{K^2} \mid p \in w\}$ تعریف می‌شود.

لم ۷.۳ $R_{K^2}wv$ اگر و تنها اگر برای هر فرمول A و B ، $A \Rightarrow B \in w$ نتیجه دهد
 $\neg A \vee B \in v$.

اثبات. ابتدا راست به چپ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $R_{K^2}wv$ و $\neg A \vee B \notin v$. حال از آنجایی که v یک K^2 -سازگار ماکسیمال است، نتیجه می‌گیریم که $\neg B \wedge A \in v$. طبق فرض داریم $R_{K^2}wv$ ، لذا $\neg(A \Rightarrow B) \in w$. حال چون w سازگار است، در نتیجه $A \Rightarrow B \notin w$ و حکم اثبات می‌شود.

برای اثبات چپ به راست، فرض کنید v با w رابطه نداشته باشد، یعنی $\neg B \wedge A \in v$ و $\neg(A \Rightarrow B) \notin w$. در این صورت، از آنجایی که w یک K^2 -سازگار ماکسیمال است، نتیجه می‌گیریم که $A \Rightarrow B \in w$. لذا طبق فرض مسئله داریم $\neg A \vee B \in v$ ، اما این یک تناقض است. در نتیجه $R_{K^2}wv$.

در ادامه به اثبات لم وجود خواهیم پرداخت.

لم ۸.۳ (لم وجود) اگر $\neg(A \Rightarrow B) \in w$ ، آنگاه جهان v در W_{K^2} موجود است به طوری که
 $\neg B \wedge A \in v$ و $R_{K^2}wv$.

اثبات. فرض کنید $\neg(A \Rightarrow B) \in w$. یک جهان مانند v خواهیم ساخت به طوری که $R_{K^2}wv$ و $\neg B \wedge A \in v$. برای این منظور مجموعه‌ی v^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v^* = \{\neg B \wedge A\} \cup \{\neg C \vee D \mid C \Rightarrow D \in w\}$$

ابتدا نشان خواهیم داد که v^* سازگار است. فرض کنید چنین نباشد، لذا فرمول‌های $\neg C_1 \vee D_1, \dots, \neg C_n \vee D_n$ موجود هستند به طوری که:

$$\vdash (\neg C_1 \vee D_1) \wedge \dots \wedge (\neg C_n \vee D_n) \rightarrow \neg(\neg B \wedge A)$$

لذا،

$$\vdash (C_1 \rightarrow D_1) \wedge \dots \wedge (C_n \rightarrow D_n) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

حال طبق لم ۵.۳، نتیجه می‌گیریم

$$\vdash (C_1 \Rightarrow D_1) \wedge \dots \wedge (C_n \Rightarrow D_n) \rightarrow (A \Rightarrow B).$$

از آنجایی که $(C_1 \Rightarrow D_1) \wedge \dots \wedge (C_n \Rightarrow D_n) \in w$ ، نتیجه می‌شود که $(A \Rightarrow B) \in w$. اما این یک تناقض است، زیرا w یک K^2 -سازگار ماکسیمال است. لذا نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ی v^* سازگار است. طبق لم لیندن باؤم، توسیعی از v^* مانند v موجود است و طبق

مراحل ساخت v داریم $v \models B \wedge A$. همچنین برای همه‌ی فرمول‌های C, D که $C \Rightarrow D \in w$ داریم، $v \models C \vee D$. لذا طبق لم ۷.۳، نتیجه می‌گیریم که $R_{K^2} w v$.
لم ۹.۳ (لم درستی) برای هر فرمول C ، $M^{K^2}, w \models C$ اگر و تنها اگر $C \in w$.
اثبات. اثبات با استقراء روی پیچیدگی فرمول C انجام می‌شود. در مرحله‌ی استقراء، حالت $C = A \Rightarrow B$ را اثبات می‌کنیم. اثبات بقیه‌ی حالت‌ها از فرض استقراء، ساده است. اثبات راست به چپ برای این حالت به صورت زیر انجام می‌شود:

$$M^{K^2}, w \models \neg(A \Rightarrow B) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \exists v (R_{K^2} w v \text{ و } M^{K^2}, v \models \neg B \wedge A)$$

$$\text{طبق فرض استقراء} \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \exists v (R_{K^2} w v \text{ و } \neg B \wedge A \in v)$$

$$\text{طبق تعریف } R_{K^2} \quad \text{تنها اگر} \quad \neg(A \Rightarrow B) \in w.$$

اثبات چپ به راست نیز با استفاده از لم ۸.۳، به راحتی اثبات می‌شود.

قضیه ۱۰.۳ (تمامیت) منطق K^2 نسبت رده‌ی همه‌ی قاب‌های کریپکی دوموضعی درست و قویاً تمام است.

اثبات. درست بودن این منطق به سادگی اثبات می‌شود. برای اثبات تمامیت قوی، کافی است برای هر مجموعه‌ی K^2 -سازگار از فرمول‌ها مانند Γ ، یک مدل مانند M و جهانی مانند w در M پیدا کنیم، به طوری که، $M, w \models \Gamma$. برای این منظور فرض کنید Σ یک مجموعه‌ی سازگار از منطق K^2 باشد. آنگاه طبق لم لیندن باؤم، توسیعی از Σ ، مانند Σ^* موجود است که سازگار ماکسیمال است. در نتیجه، طبق لم درستی داریم، $M^{K^2}, \Sigma^* \models \Sigma$.

۴. رابطه بین منطق‌های نرمال یک‌موضعی و دوموضعی

در این بخش نشان خواهیم داد که نه تنها فرمول‌های منطق وجهی نرمال یک‌موضعی K و منطق وجهی نرمال دوموضعی K^2 با استفاده از ترجمه‌هایی به هم مرتبط هستند، بلکه توسیعی‌های این منطق‌ها نیز در تناظر یک‌به‌یک با یکدیگر هستند.

تعریف ۱.۴ نگاشت \star از L^\square به L^\Rightarrow را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$۱. (p)^\star := p$$

$$۲. (\neg A)^\star := \neg A^\star$$

$$۳. (A \wedge B)^* := A^* \wedge B^*$$

$$۴. (\Box A)^* := \top \Rightarrow A^*$$

قضیه ۲.۴ اگر $\vdash_K A$ ، آنگاه $\vdash_{K^2} A^*$.

اثبات. با استقراء روی استنتاج A اثبات می‌شود. تنها به اثبات قانون Nec و اصل K خواهیم پرداخت.
ابتدا قانون Nec :

$$۱. \vdash_{K^2} A^* \quad \text{طبق فرض استقراء}$$

$$۲. \vdash_{K^2} \top \rightarrow A^* \quad \text{طبق ۱}$$

$$۳. \vdash_{K^2} \top \Rightarrow A^* \quad \text{طبق ۲ و قانون Imp}$$

$$۴. \vdash_{K^2} (\Box A)^* \quad \text{طبق ۳ و تعریف *}$$

در ادامه به بررسی اصل K خواهیم پرداخت، یعنی نشان خواهیم داد که $\vdash_{K^2} (\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B))^*$:

$$۱. \vdash_{K^2} (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{تاتولوژی}$$

$$۲. \vdash_{K^2} (\top \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((\top \rightarrow A) \rightarrow (\top \rightarrow B)) \quad \text{طبق ۱}$$

$$۳. \vdash_{K^2} (\top \rightarrow (A^* \rightarrow B^*)) \rightarrow ((\top \rightarrow A^*) \rightarrow (\top \rightarrow B^*)) \quad \text{جانشینی در ۲}$$

$$۴. \vdash_{K^2} (\top \rightarrow (A^* \rightarrow B^*)) \Rightarrow ((\top \rightarrow A^*) \rightarrow (\top \rightarrow B^*)) \quad \text{طبق ۳ و قانون Imp}$$

$$۵. \vdash_{K^2} (\top \Rightarrow (A^* \rightarrow B^*)) \rightarrow ((\top \rightarrow A^*) \Rightarrow (\top \rightarrow B^*)) \quad \text{طبق ۴، اصل } K \Rightarrow \text{ و قانون MP}$$

$$۶. \vdash_{K^2} ((\top \rightarrow A^*) \Rightarrow (\top \rightarrow B^*)) \rightarrow ((\top \Rightarrow A^*) \rightarrow (\top \Rightarrow B^*)) \quad \text{اصل } K \Rightarrow$$

$$۷. \vdash_{K^2} (\top \Rightarrow (A^* \rightarrow B^*)) \rightarrow ((\top \Rightarrow A^*) \rightarrow (\top \Rightarrow B^*)) \quad \text{طبق ۵ و ۶}$$

$$۸. \vdash_{K^2} (\Box(A \rightarrow B))^* \rightarrow ((\Box A)^* \rightarrow (\Box B)^*) \quad \text{طبق ۷ و تعریف *}$$

$$۹. \vdash_{K^2} (\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B))^* \quad \text{طبق ۸ و تعریف *}$$

لذا حکم اثبات شد.

تعریف ۳.۴ نگاشت # از L^\Rightarrow به L^\Box را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$۱. (p)^\# := p$$

$$۲. (\neg A)^\# := \neg A^\#$$

$$۳. (A \wedge B)^\# := A^\# \wedge B^\#$$

$$۴. (A \Rightarrow B)^\# := \Box(A^\# \rightarrow B^\#)$$

قضیه ۴.۴ اگر $\vdash_{K^2} A$ ، آنگاه $\vdash_K A^\#$.

اثبات. با استقراء روی استنتاج A اثبات می شود. تنها به اثبات قانون Imp و اصل $K \Rightarrow$ خواهیم پرداخت.

ابتدا قانون Imp :

$$۱. \vdash_K (A \rightarrow B)^\# \quad \text{طبق فرض استقراء}$$

$$۲. \vdash_K A^\# \rightarrow B^\# \quad \text{طبق ۱}$$

$$۳. \vdash_K \Box(A^\# \rightarrow B^\#) \quad \text{طبق ۲ و قانون Nec}$$

$$۴. \vdash_K (A \Rightarrow B)^\# \quad \text{طبق ۳ و تعریف \#}$$

در ادامه به بررسی اصل $K \Rightarrow$ خواهیم پرداخت، یعنی نشان خواهیم داد که

$$\vdash_K (((A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow ((A \Rightarrow B) \rightarrow (C \Rightarrow D)))^\#$$

$$۱. \vdash_K \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B) \quad \text{اصل } K$$

$$۲. \vdash_K \Box((A^\# \rightarrow B^\#) \rightarrow (C^\# \rightarrow D^\#)) \rightarrow (\Box(A^\# \rightarrow B^\#) \rightarrow \Box(C^\# \rightarrow D^\#)) \quad \text{جانشینی}$$

در ۱

$$۳. \vdash_K ((A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D))^\# \rightarrow ((A \Rightarrow B) \rightarrow (C \Rightarrow D))^\# \quad \text{طبق ۲ و تعریف \#}$$

$$۴. \vdash_K (((A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow ((A \Rightarrow B) \rightarrow (C \Rightarrow D)))^\# \quad \text{طبق ۳ و تعریف \#}$$

لذا حکم اثبات شد.

$$\text{لم ۵.۴ } \vdash_{K^2} (\top \Rightarrow (A \rightarrow B)) \leftrightarrow (A \Rightarrow B)$$

اثبات.

$$۱. (A \rightarrow B) \rightarrow (\top \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad \text{تاتولوژی}$$

$$۲. (A \rightarrow B) \Rightarrow (\top \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad \text{طبق ۱ و قانون Imp}$$

$$\begin{array}{ll}
 K_{\Rightarrow} \text{ اصل} & ((A \rightarrow B) \Rightarrow (T \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow ((A \Rightarrow B) \rightarrow (T \Rightarrow (A \rightarrow B))) \quad ۳ \\
 & \text{طبق ۲ و ۳} & ((A \Rightarrow B) \rightarrow (T \Rightarrow (A \rightarrow B))) \quad ۴ \\
 & \text{تاتولوژی} & (T \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad ۵ \\
 & \text{طبق ۴ و قانون Imp} & (T \rightarrow (A \rightarrow B)) \Rightarrow (A \rightarrow B) \quad ۶ \\
 K_{\Rightarrow} \text{ اصل} & ((T \rightarrow (A \rightarrow B)) \Rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((T \Rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \Rightarrow B)) \quad ۷ \\
 & \text{طبق ۶ و ۷} & (T \Rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \Rightarrow B) \quad ۸ \\
 & \text{طبق ۴ و ۸} & (T \Rightarrow (A \rightarrow B)) \leftrightarrow (A \Rightarrow B) \quad ۹
 \end{array}$$

در ادامه دو ترجمه معرفی شده در بالا را با هم ترکیب خواهیم کرد.

لم ۶.۴ الف. $\vdash_K A \leftrightarrow A^{*\#}$

ب. $\vdash_{K^2} A \leftrightarrow A^{*\#}$

اثبات الف. اثبات با استقرا روی پیچیدگی فرمول A انجام می‌شود. برای A اتمی حکم مورد نظر جزئی از تعاریف است. اثبات حالت‌های عطفی و فصلی با استفاده از فرض استقراء، ساده است. فرض کنید $A = \Box B$. بایستی نشان دهیم که $\vdash_K (\Box B) \leftrightarrow (\Box B)^{*\#}$. طبق تعریف $\#$ ، $(\Box B)^{*\#}$ برابر با $(T \Rightarrow B^*)^{\#}$ است و دوباره طبق تعریف $\#$ ، برابر با $\Box(T \rightarrow B^{*\#})$ یا همان $\Box(B^{*\#})$ است. در نهایت، طبق فرض استقراء، $\Box(B^{*\#})$ برابر با $\Box B$ است. لذا حکم اثبات شد.

ب. اثبات با استقرا روی پیچیدگی فرمول A انجام می‌شود. برای A اتمی حکم مورد نظر جزئی از تعاریف است. اثبات حالت‌های عطفی و فصلی با استفاده از فرض استقراء، ساده است. فرض کنید $A = B \Rightarrow C$. بایستی نشان دهیم که $\vdash_K (B \Rightarrow C) \leftrightarrow (B \Rightarrow C)^{*\#}$. طبق تعریف $\#$ ، $(B \Rightarrow C)^{*\#}$ برابر با $(\Box(B^{\#} \rightarrow C^{\#}))^*$ است و دوباره طبق تعریف $\#$ ، برابر با $(T \Rightarrow (B^{*\#} \rightarrow C^{*\#}))$ است. طبق لم ۵.۴، $(T \Rightarrow (B^{*\#} \rightarrow C^{*\#}))$ معادل با $(B^{*\#} \Rightarrow C^{*\#})$ است. در نهایت، طبق فرض استقراء، $(B^{*\#} \Rightarrow C^{*\#})$ برابر با $B \Rightarrow C$ است. لذا حکم اثبات شد.

قضیه ۷.۴ الف. اگر $\vdash_K A$ ، آنگاه $\vdash_{K^2} A^*$

ب. اگر $\vdash_K A^{\#}$ ، آنگاه $\vdash_{K^2} A$

اثبات الف. فرض کنید $\vdash_K A$ ، آنگاه طبق قضیه ۴.۴، داریم $\vdash_K A^{*\#}$. مطابق با لم ۶.۴، نیز

نتیجه می‌گیریم که $\vdash_K A$

ب. مشابه قسمت الف اثبات می‌شود.

نتیجه گیری ۸.۴ الف. $\vdash_{K^2} A^*$ اگر و تنها اگر $\vdash_K A$.

ب. $\vdash_K A^\#$ اگر و تنها اگر $\vdash_{K^2} A$.

اثبات. موارد الف و ب از قضایای ۲.۴، ۴.۴ و ۷.۴ به دست می آیند.

یک ترجمه را تعبیر-پایدار می نامیم، در صورتی که اثبات پذیری در هر دو جهت حفظ شود. نتیجه گیری ۸.۴ بیان می کند که ترجمه‌ی $*$ یک تعبیر-پایدار از منطق K به منطق K^2 است و ترجمه‌ی $\#$ یک تعبیر-پایدار از منطق K^2 به منطق K است. در ادامه خواهیم دید که کلاس‌های منطق‌هایی که، گسترش یافته‌ی منطق‌های K و K^2 هستند نیز به هم مرتبط هستند. یک توسیع از منطق K ، یک مجموعه از فرمول‌ها است که شامل K است و تحت قواعد آن و جانشینی یکنواخت بسته است. توسیعی از منطق K^2 نیز به همین صورت تعریف می شود.

تعریف ۹.۴ الف. فرض کنید \mathcal{L} یک توسیع از منطق K باشد. \mathcal{L}^* را به عنوان بستار $\{A^* \mid A \in \mathcal{L}\}$ تحت قواعد منطق K^2 تعریف می کنیم.

ب. فرض کنید \mathcal{L} یک توسیع از منطق K^2 باشد. $\mathcal{L}^\#$ را به عنوان بستار $\{A^\# \mid A \in \mathcal{L}\}$ تحت قواعد منطق K تعریف می کنیم.

لم ۱۰.۴ الف. اگر \mathcal{L} یک توسیع از منطق K باشد و $A \in \mathcal{L}^*$ ، آنگاه $A^\# \in \mathcal{L}$.

ب. اگر \mathcal{L} یک توسیع از منطق K^2 باشد و $A \in \mathcal{L}^\#$ ، آنگاه $A^* \in \mathcal{L}$.

اثبات. الف. فرض کنید $A \in \mathcal{L}^*$ ، آنگاه تعداد متناهی فرمول B_1^*, \dots, B_n^* ، با $B_i \in \mathcal{L}$ ،

$1 \leq i \leq n$ ، موجود است، به طوری که $\vdash_{K^2} A \wedge B_1^* \wedge \dots \wedge B_n^*$ و در نتیجه داریم $\vdash_{K^2} B_1^* \wedge \dots \wedge B_n^* \rightarrow A$

از طرفی دیگر و طبق قضیه ۴.۴، داریم $\vdash_K B_1^{\#} \wedge \dots \wedge B_n^{\#} \rightarrow A^\#$. طبق قسمت

"الف" از لم ۶.۴، نتیجه می گیریم $\vdash_K B_1 \wedge \dots \wedge B_n \rightarrow A^\#$. حال از آنجایی که $B_1 \wedge \dots \wedge B_n \in \mathcal{L}$ ،

لذا داریم $A^\# \in \mathcal{L}$.

ب. مشابه الف و با استفاده از قضیه‌ی ۲.۴، و قسمت "ب" از لم ۶.۴، نتیجه می شود.

قضیه ۱۱.۴ الف. اگر \mathcal{L} یک توسیع از منطق K باشد، آنگاه $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\#\#}$.

ب. اگر \mathcal{L} یک توسیع از منطق K^2 باشد، آنگاه $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{**}$.

اثبات. الف. ابتدا ثابت می کنیم $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^{**}$ فرض کنید $A \in \mathcal{L}$ ، آنگاه $A^* \in \mathcal{L}^*$ و $A^{**} \in \mathcal{L}^{\#\#}$

طبق لم ۶.۴، $\vdash_K A \leftrightarrow A^{**}$. در نتیجه $A \in \mathcal{L}^{\#\#}$. حال برای اثبات جهت عکس، فرض کنید

منطق وجهی نرمال دوموضوعی (فاطمه شیرمحمدزاده ملکی) ۱۰۱

$A \in \mathcal{L}^{* \#}$ آنگاه وجود دارد $B_1^{\#}, \dots, B_n^{\#}$ با $B_i \in \mathcal{L}^*$ ، $1 \leq i \leq n$ ، به طوری که $B_1^{\#} \wedge \dots \wedge B_n^{\#} \vdash_K A$ طبق قسمت "الف" از لم ۱۰.۴، هر $B_i^{\#}$ متعلق به \mathcal{L} است. در نتیجه $A \in \mathcal{L}$ ب. مشابه قسمت الف اثبات می شود.

قضیه ۱۱.۴ به خوبی نشان می دهد که یک تناظر یک به یک بین توسیع هایی از منطق K و منطق K^2 وجود دارد. به این معنی که هر بسطی از منطق وجهی نرمال K را می توان به خوبی به عنوان یک منطق وجهی نرمال دوموضوعی معادل نشان داد و بالعکس.

۵. نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا ثابت کردیم که منطق وجهی نرمال دوموضوعی K^2 نسبت به معناشناسی کریپکی دوموضوعی درست و تمام است. سپس، نشان دادیم که برای همه ی منطق های وجهی نرمالی که توسیعی از منطق K هستند، یک منطق وجهی نرمال دوموضوعی وجود دارد که اساساً معادل آن است و برعکس. به بیانی دیگر نشان داده شد که منطق وجهی نرمال دوموضوعی را می توان به طور پایا در منطق وجهی نرمال یک موضوعی استاندارد تفسیر کرد و بالعکس.

کتاب نامه

فاطمه شیرمحمدزاده ملکی، همناهای وجهی برای برخی منطق های زیر شهودی، منطق پژوهی، سال ۱۲، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۰، ۱۵۱-۱۷۳.

ضیاء موحد، منطق موجهاات، انتشارات هرمس

لطف الله نبوی، مبانی منطق موجهاات، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس

P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University press, 2014.

B. Chellas, *Modal logic: An Introduction*, Cambridge University Press, 1980.

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Two neighborhood Semantics for Subintuitionistic Logics, In 12th International Tbilisi Symposium on Logic, Language, and Computation, Tbilisi 2018, LNCS, pp 64-85, Volume 11456, Springer 2019.

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Binary Modal Companions for Subintuitionistic Logics, *Mathematics, Logic and their Philosophies*, pp 35-52, 2021.

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Binary modal logic and unary modal logic, *Logic Journal of the IGPL*, 2023, <https://doi.org/10.1093/jigpal/jzac083>.

۱۰۲ منطق پژوهی، سال ۱۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲

- M. Moniri, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Neighborhood Semantics for Basic and Intuitionistic Logic, *Logic and Logical Philosophy*, pp 339-355, Volume 24, 2015.
- M. Moniri, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Another Neighborhood Semantics for Intuitionistic Logic, *Logic Journal of the IGPL*, jzac069, September 2022, <https://doi.org/10.1093/jigpal/jzac069>
- F. Shirmohammadzadeh Maleki, D. de Jongh, Weak Subintuitionistic Logics, *Logic Journal of the IGPL*, 25 (2), pp. 214-231, 2017.

