Publisher: Shahid Beheshti University
Journal of Financial Management Perspective
2023, Vol. 13, No.41
PP: 91-115
DOI: 10.48308/jfmp.2023.103891
P-ISSN: 2645-4637
E-ISSN: 2645-4645

Option Pricing Using Stochastic Interest Rate in Tehran Stock Exchange

Moslem Peymany *, Meysam Amiri **, Seyed Mohammad Sokout *

Research Paper

Abstract

The purpose of this paper is to investigate option pricing using stochastic interest rates and compare the performance of each of them with options pricing using non-stochastic interest rates (Black, Scholes and Merton model) in Tehran Stock Exchange. In this study, our data are option data traded in Tehran Stock Exchange from March 2018 to December 2022. During the research, the theoretical prices achieved from each model compared with the prices traded in the Tehran Stock Exchange. Based on the Root Mean Squared Error (RMSE) criterion and regression results, It was found that in the valuation of short-term options, there is not much difference between the option pricing using stochastic interest rate models and Black, Scholes and Merton model. While the pricing of long-term options have performed better than the Black, Scholes, and Merton models under stochastic interest rate. Also, using Vasicek interest rate model in option pricing is the most accurate option pricing result compared to other models. After that, Merton model and CIR model have been most accurate.

Keywords: Options; Stochastic Interest Rates; Merton model; Vasicek model; CIR model.

Received: 2023. March. 10, Accepted: 2023. June. 17.

* Associate Prof., Department of Finance and Banking, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran.
E-Mail: m.peymany@atu.ac.ir
** Assistant Prof., Department of Finance and Banking, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran.
E-Mail: amiry@atu.ac.ir
*** M.Sc. student in Financial Engineering and Risk Management, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran. (Corresponding Author).
E-Mail: sm.sokut@gmail.com

ناشر: دانشگاه شهیدبهشتی
نشریه چشم‌انداز مدیریت مالی
۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۴۱
ص‌ص. ۹۱- ۱۱۵

شاپای چاپی: ۲۶۴۵ -۴۶۳۷
شاپای الکترونیکی: ۲۶۴۵ -۴۶۴۵

مقاله پژوهشی

ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله با نرخ سود تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران

مسلم پیمانی *، میثم امیری **، سید محمد سکوت *

چکیده

هدف این مقاله قیمت‌گذاری اختیار معاملات مبتنی بر مدل‌های نرخ سود تصادفی و مقایسه عملکرد هر یک از آن‌ها با مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود غیرتصادفی (مدل بلک، شولز و مرتون) در بورس اوراق بهادار تهران است. در این پژوهش از داده‌های اختیار معامله که از ابتدای سال ۱۳۹۷ تا انتهای آذرماه ۱۴۰۱ در بورس اوراق بهادار تهران معامله شده‌اند استفاده شده است. در این مطالعه قیمت نظری به‌دست‌آمده از هر مدل با قیمت‌های معامله‌شده در بورس اوراق بهادار تهران مقایسه گردیدند. براساس معیار RMSE و همچنین نتایج رگرسیون‌های برازش‌شده، مشخص شد که در ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت، تفاوت چندانی میان مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی و مدل بلک، شولز و مرتون وجود ندارد. در حالی‌که ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های بلندمدت با استفاده از مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت سود تصادفی عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون داشته‌اند. در این میان، استفاده از مدل واسیچک در قیمت‌گذاری اختیار معامله، مناسب‌ترین و دقیق‌ترین روش قیمت گذاری اختیار معامله نسبت به مدل‌های دیگر است. پس از آن، به ترتیب مدل مرتون و مدل CIR بیشترین دقت را داشته‌اند.

کلیدواژه‌ها: اختیار معامله؛ مدل‌های نرخ سود تصادفی؛ مدل مرتون؛ مدل واسیچک؛ مدل CIR.

تاریخ دریافت مقاله ۰۹/ ۰۲/ ۱۴۰۱، تاریخ پذیرش مقاله ۰۷/ ۰۳/ ۱۴۰۲.

* دانشیار، گروه مالی و بانکداری، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.
E-Mail: m.peymany@atu.ac.ir

** استادیار، گروه مالی و بانکداری، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.
E-Mail: amiry@atu.ac.ir

*** دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی و مدیریت ریسک، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران (نویسنده مسئول).
E-Mail: sm.sokut@gmail.com

۱. مقدمه

یکی از اهداف مهم بازارهای مالی، جذب و هدایت نقدینگی‌های سرگردان در اقتصاد است. برای تحقق این هدف باید بازارهای مالی کارا باشند. کارایی تخصیصی یکی از انواع کارایی بازارهای مالی است که با تخصیص منابع به کارآمدترین و سودآورترین پروژه‌های سرمایه‌گذاری ارتباط دارد. تنوع در اوراق بهادار از جمله عواملی است که باعث افزایش کارایی تخصیصی بازار سرمایه می‌شود [۲:۲۹]. امروزه ابزارهای نوین مالی همچون اوراق مشتقه بخش زیادی از مازاد نقدینگی را در بازارهای سرمایه جذب می کند. اوراق اختیار معامله یکی از جذاب‌ترین ابزارهای مالی مشتقه محسوب می‌شود که در سال‌های اخیر معاملات این اوراق در بازارهای مبادلاتی سراسر جهان افزایش چشم‌گیری داشته است. اوراق اختیار معامله قراردادی است که در آن خریدار و فروشنده با یکدیگر توافق می‌کنند تا خریدار در ازای پرداخت مبلغی، حق یا اختیار خرید یا فروش یک دارایی معین را با قیمتی معین در آینده دریافت کند. قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله یکی از مباحث چالش برانگیز در حوزه ریاضیات مالی است که تاکنون محققان زیادی در این زمینه تلاش کرده‌اند [۱۲،۲۷]. از آن‌جا که قیمت‌گذاری، فرآیندی است که دائما در حال تکرار است به همین جهت از آن به عنوان فرآیندی پیوسته یاد می‌شود. در سال ۱۹۷۳ بلک، شولز و مرتون[۱] یک روش مبتکرانه جهت قیمت‌گذاری این اوراق ارائه دادند که امروزه به مدل بلک، شولز و مرتون معروف است. این مدل با اشکالاتی همچون فرض عدم وجود هزینه‌های معاملاتی، ثبات در نرخ سود بدون ریسک و نرخ تلاطم دارایی پایه و عدم تطبیق با توزیع آماری داده‌های قیمت سهام همراه شده‌است [۲].

نرخ سود بدون ریسک ثابت، یکی از مفروضات مهم مدل بلک، شولز و مرتون است. این درحالی است که مطالعات اخیر نشان دادند که قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های بلندمدت با فرض ثابت بودن نرخ سود همخوانی چندانی با قیمت‌های بازار ندارد. برای رفع این محدودیت، تعدادی از پژوهش گران با فرض پیروی نرخ سود بدون ریسک از یک فرآیند تصادفی، به مدل‌های انعطاف پذیرتر با واقعیات بازار دست یافتند. مدل‌های مرتون (۱۹۷۳)، واسیچک[۲] (۱۹۷۷) و کاکس، اینگرسول و راس[۳] (۱۹۸۵) از جمله مدل‌های نرخ سود تصادفی هستند که از آن‌ها برای قیمت‌گذاری اختیار معامله استفاده شده است [۲۴]. این مطالعه به دنبال آن است که از مدل‌های نرخ سود تصادفی برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله استفاده و عملکرد هرکدام از آن‌ها را با مدل قیمت‌گذاری تحت نرخ سود غیرتصادفی مقایسه کند.

---

[1] Black, Scholes & Merton
[2] Vasicek
[3] Cox, Ingersoll & Ross

اوراق اختیار معامله با ویژگی‌های منحصربفرد خود، شرایط مدیریت ریسک و بهره‌مندی از اهرم مالی را برای سرمایه‌گذاران فراهم می‌آورد. افزون براین اوراق اختیار معامله شرایطی را به‌وجود می‌آورد که می‌توان بدون استفاده از دارایی پایه، از نوسانات آن منتفع شد. یکی از روش‌های کسب درآمد در بازار نزولی، فروش استقراضی سهام است. از آن‌جا که در بازار سرمایه ایران، فروش استقراضی با محدودیت‌هایی روبرو است لذا سرمایه‌گذاران می‌توانند با استفاده از صدور اختیار خرید در بازارهای نزولی نیز کسب سود کنند. علاوه‌بر موارد یاد شده، هزینه‌های معاملاتی پایین اوراق اختیار معامله و رشد روز افزون ارزش معاملات بازار اختیار معامله بورس تهران و استقبال سرمایه‌گذاران با درجه‌های مختلف ریسک گریزی از این اوراق، اهمیت بررسی و ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله را دوچندان می‌کند [۱۰:۱۹]. علی رغم این موضوع به دلیل نوپا بودن بازار اختیار معامله در بورس تهران، تحقیقاتی که در حوزه قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله براساس داده‌های واقعی صورت گرفته بسیار کم است. در همین راستا پژوهش حاضر به دنبال بررسی عملکرد روش‌های مختلف ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی با استفاده از اختیار معامله‌های منتشرشده در بورس اوراق بهادار تهران است.

به همین منظور در بخش دوم به ارائه مبانی نظری و پیشینه پژوهش پرداخته شده است. روش تحقیق و داده‌های مورد مطالعه در بخش سوم مقاله توضیح داده شده و در بخش چهارم، آمار توصیفی داده‌های استفاده شده و یافته‌های پژوهش مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرند. نهایتا در بخش پنجم و ششم جمع بندی، محدودیت‌ها و پیشنهاداتی جهت تحقیقات آتی مطرح خواهد شد.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

معرفی مدل‌های مورد بررسی در پژوهش

یکی از سوالات مهم مطرح شده در حوزه مالی، نحوه ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله است. طی چند دهه اخیر مدل‌های قیمت‌گذاری متعددی جهت ارزش‌گذاری اختیار معامله مطرح شده‌اند. مدل درخت دوجمله‌ای و مدل بلک، شولز و مرتون از جمله مهم‌ترین مدل‌های ارزش‌گذاری هستند که در دهه ۱۹۷۰ میلادی توسعه یافتند. ارائه مدل بلک، شولز و مرتون تحول عظیمی در حوزه مالی ایجاد کرد و در سال ۱۹۹۷ منجر به دریافت جایزه نوبل اقتصاد شد. مدل بلک، شولز و مرتون مبتنی بر ایجاد یک پرتفوی بدون ریسک در فضای بدون آربیتراژ است. در نتیجه آن‌ها نشان دادند در یک بازار کارا، این پرتفوی باید عایدی معادل نرخ سود بدون ریسک را داشته باشد [۲۳].

بلک، شولز و مرتون با حل معادله دیفرانسیل جزئی به فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله دست یافتند. اگر قیمت اختیار معامله را C در نظر بگیریم، با فرض اینکه قیمت فعلی سهم S_t، قیمت

اعمال اختیار معامله[1] K، تلاطم تاریخی[2] بازدهی سهم σ، زمان باقی‌مانده تا سررسید[3] T و نرخ سود بدون ریسک r باشد، فرمول قیمت‌گذاری اختیار خرید بلک، شولز و مرتون به‌صورت زیر خواهد بود [۳۳۱:۱۵،۸].

$$C(S_t, K, \sigma, T, r) = S_t N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$ رابطه (۱)

در رابطه (۱) منظور از N(d) تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. همانطور که پیش‌تر توضیح داده شد برخی از فرضیات مدل بلک، شولز و مرتون در دنیای واقعی قابل پذیرش نیستند. فرض ثبات در نرخ سود بدون ریسک یکی از مهم‌ترین مفروضات مدل بلک، شولز و مرتون است که به آن انتقاداتی وارد شده است. در همین راستا برخی از پژوهش‌گران از مدل‌های تعادلی نرخ سود بدون ریسک استفاده کردند. با این‌حال تاکنون مطالعات کمی در این حوزه صورت گرفته است [۱۶].

طی چند دهه اخیر پژوهشگران جهت مدل‌سازی نرخ سود بدون ریسک از رویکردهای نوین مثل معادلات دیفرانسیل تصادفی استفاده کردند. یکی از مفروضات این روش، وابستگی نرخ سود و تغییرات آن به متغیرهای تصادفی است. فرض دیگر این است که نرخ سود بدون ریسک به‌صورتی تعیین می‌شود که هیچ‌گونه فرصت آربیتراژی وجود نداشته باشد [۳۹۱:۱۸]. به‌طور کلی، معادله دیفرانسیل تصادفی نرخ سود بدون ریسک در کوتاه‌مدت به صورت زیر است:

$$dr = u(r,t) + w(r,t)dZ$$ رابطه (۲)

در معادله بالا dZ فرآیند وینر بوده و u(r,t) نرخ رانش[4] و w(r,t) نرخ نوسان‌پذیری فرآیند می باشند. این مدل از نوع زمان–همگن[5] است. به عبارتی دیگر در این مدل، پارامترها تنها تابعی از نرخ سود هستند و زمان هیچ تاثیری در آن‌ها ندارد [۱۸۴:۲۱]. پژوهش‌گران متعددی بر روی رابطه (۲) کار کردند و مدل‌های حالت خاص به نام آن‌ها ثبت شده‌است. فرم کلی مدل‌های نرخ سود تصادفی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$dr_t = \kappa[\theta - r_t]dt + \delta r^{\gamma} dZ_t$$ رابطه (۳)

---

[1] Strike Price
[2] Historical Volatility
[3] Time to Maturity
[4] Drift
[5] Time-Homogeneous

این معادله طیف وسیعی از فرآیند نرخ سود بدون ریسک را دربر می‌گیرد. عبارت $\kappa[\theta - r_t]$ جزء رانش است که ویژگی بازگشت به میانگین بلندمدت یعنی θ را نشان می‌دهد. κ نیز سرعت بازگشت به میانگین است. همچنین r_t نرخ سود بدون ریسک کوتاه‌مدت و dZ_t فرآیند وینر استاندارد است. γ میزان حساسیت یا کشش نرخ سود به نوسان با توجه به میزان نرخ سود را نشان می‌دهد [۲۵]. در حالتی ساده‌تر می‌توان رابطه (۳) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

رابطه (۴)
$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \delta r^{\gamma} dZ_t$$

در این رابطه $\alpha = \kappa\theta$ و $\beta = -\kappa$ است. در ادامه برخی از مدل‌های نرخ سود تصادفی بررسی و نحوه ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله براساس این مدل‌ها بیان خواهندشد.

۱) مدل مرتون: مرتون در سال ۱۹۷۳ اولین مدل زمان–پیوسته نرخ سود بدون ریسک که تابعی از فرآیند وینر تعمیم یافته در شرایط خنثی نسبت به ریسک است را ارائه داد [۲۰]. مدل ارائه شده مرتون به‌صورت زیر است.

رابطه (۵)
$$dr_t = \alpha dt + \delta dZ_t$$

که α جزء رانش مدل و ثابت است. همچنین δ جزء نوسان مدل و مقداری ثابت و مثبت است. همانطور که مشاهده شد، مرتون با فرض ثابت بودن جزء رانش و نوسان، مدل خود را ارائه کرد. این فرض باعث وارد شدن انتقادات زیادی به مدل مرتون شده‌است. مدل ارائه شده توسط مرتون یک مدل گاوسین[۱] نامیده می‌شود؛ چرا که در این مدل نرخ سود کوتاه‌مدت از توزیع نرمال تبعیت می‌کند. نکته حائز اهمیت آن است که احتمال منفی شدن نرخ سود کوتاه‌مدت در مدل‌های گاوسین وجود دارد؛ در حالی‌که این موضوع به ندرت در جوامع اقتصادی مشاهده شده است [۱۹۷:۲۱،۳۸۲:۱۸].

حال می‌توان براساس مدل نرخ سود تصادفی مرتون، قیمت یک اختیار خرید را در زمان t که دارای قیمت اعمال K، تلاطم σ و قیمت فعلی S_t با سررسید T را بدست آورد.

رابطه (۶)
$$C(M) = S_t N(d_1) - Ke^{-A(t,T)+\frac{1}{2}B^2(t,T)\times(T-t)} N(d_2)$$

در این رابطه $N(d)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است و $T - t$ زمان باقی‌مانده تا سررسید اختیار را نشان می‌دهد. مقدار d_1 و d_2 بدین صورت محاسبه می‌شوند.

---

[۱] Gaussian model

رابطه (۷)
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+A(t,T)-\frac{1}{2}v^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - v\sqrt{T-t}$$

رابطه (۸)
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+A(t,T)-\frac{1}{2}v^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - B(t,T)\sqrt{T-t}$$

سایر مقادیر نیز به این شیوه محاسبه می‌شوند.

رابطه (۹)
$$v^2 = \sigma^2 + B^2(t,T) - 2\rho\sigma B(t,T)$$

رابطه (۱۰)
$$A(t,T) = r_t + \frac{1}{2}\alpha(T-t)^2$$

رابطه (۱۱)
$$B(t,T) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\delta(T-t)^{\frac{3}{2}}$$

در روابط فوق α و δ به ترتیب جزء رانش و نوسان تخمین زده شده مدل مرتون است. ρ نشان دهنده ضریب همبستگی میان قیمت دارایی پایه و نرخ سود بدون ریسک است. همانطور که مشاهده می‌شود در صورتی‌که نرخ سود غیرتصادفی باشد ($\alpha = 0$ و $\beta = 0$) با جایگذاری پارامترها در فرمول بالا، مدل ارائه شده توسط بلک، شولز و مرتون حاصل می‌شود.

۲) مدل واسیچک: یکی از فروض نامناسب مدل مرتون، ثابت در نظر گرفتن نرخ رانش مدل است. این نقص سبب می‌شود زمانی‌که جزء پیشران مدل مثبت (منفی) است شاهد افزایش (کاهش) دائمی در نرخ سود آتی باشیم. واسیچک (۱۹۷۷) مدل جدیدی از نرخ سود بدون ریسک را ارائه کرد و نقص مدل مرتون را برطرف نمود [۳۰،۳۹۶:۱۸]. مدل پیشنهادی واسیچک به‌صورت زیر می‌باشد.

رابطه (۱۲)
$$dr_t = \kappa[\theta - r_t]dt + \delta dZ_t$$

در این رابطه، $\kappa[\theta - r_t]$ جزء پیشران مدل، κ سرعت بازگشت به میانگین، θ میانگین نرخ سود بلندمدت و δ جزء نوسان مدل است. قابل توجه است که این دینامیک تحت معیار احتمالات واقعی است. این مدل از فرآیند اورنشتاین–اولنبک[1] پیروی می‌کند. بدین صورت که در این مدل شاهد بازگشت به میانگین هستیم؛ یعنی هنگامی که $r>\theta$ باشد، نرخ پیشران منفی بوده و نرخ سود بدون ریسک به سمت θ کاهش می‌یابد. هنگامی که $r<\theta$ باشد، نرخ پیشران مثبت است و نرخ سود بدون ریسک به سمت θ افزایش پیدا می‌کند. به عبارتی θ سطح بلندمدت نرخ سود بدون ریسک را نشان می‌دهد. یکی از نقصیه های مدل واسیچک این است که همانند مدل مرتون، نرخ

---
[1] Ornstein-Uhlenbeck

نوسان‌پذیری نرخ سود کوتاه‌مدت را ثابت در نظر می‌گیرد. این امر احتمال منفی شدن نرخ سود بدون ریسک را رد نمی‌کند [۲۰۰:۲۱].

بنابر موارد ذکر شده می‌توان قیمت یک اختیار خرید را در زمان t که دارای قیمت اعمال K، تلاطم σ و قیمت فعلی S_t با سررسید T را بدست آورد.

$$C(Vas) = S_t N(d_1) - Ke^{-A(t,T)+\frac{1}{2}B^2(t,T)\times(T-t)} N(d_2) \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

در این رابطه N(d) تابع توزیع تجمعی نرمال است استاندارد است و $T-t$ زمان باقی‌مانده تا سررسید اختیار را نشان می‌دهد. مقدار d_1 و d_2 و v همانند روابط (۷)، (۸) و (۹) محاسبه شده و محاسبه سایر مقادیر به این شکل انجام می‌شود.

$$A(t,T) = -\frac{\alpha}{\beta}(T-t) + \left(r_t + \frac{\alpha}{\beta}\right)\varphi(t,T)$$

$$= \theta(T-t) + (r_t - \theta)\varphi(t,T) \quad \text{رابطه (۱۴)}$$

$$B(t,T) = -\frac{\delta}{\beta}\sqrt{(T-t) - \varphi(t,T) + \frac{\beta}{2}\varphi^2(t,T)} \quad \text{رابطه (۱۵)}$$

$$\varphi(t,T) = -\frac{1}{\beta}\left(1 - e^{\beta(T-t)}\right) = \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) \quad \text{رابطه (۱۶)}$$

در روابط فوق θ و κ به ترتیب میانگین نرخ سود بلندمدت و سرعت بازگشت به میانگین تخمین زده شده مرتبط با مدل واسیچک است. α و β نیز از طریق $\alpha = \kappa\theta$ و $\beta = -\kappa$ محاسبه می‌شوند.

۳) مدل کاکس، اینگرسول و راس: مدل تک عاملی نرخ سود که توسط کاکس، اینگرسول و راس (۱۹۸۵) پیشنهاد داده شد فرض می‌کند که نرخ سود بدون ریسک از یک فرآیند ریشه دوم[1] پیروی می‌کند. بدین صورت که:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \delta\sqrt{r_t}dZ_t \quad \text{رابطه (۱۷)}$$

در رابطه فوق، عبارت $\kappa(\theta - r_t)$ جزء رانش، κ سرعت بازگشت به میانگین، θ میانگین نرخ سود بلندمدت و $\delta\sqrt{r_t}$ جزء نوسان مدل است. مدل نرخ سود تصادفی کاکس–اینگرسول–راس تحت عنوان CIR شناخته می‌شود. نرخ سود بدون ریسک در مدل CIR همانند مدل واسیچک

[1] Square-Root process

خاصیت بازگشت به سطح نرخ سود بدون ریسک بلند مدت (θ) را دارد اما تفاوت‌هایی نیز میان این دو مدل وجود دارد. یکی از آن‌ها تفاوت در جزء نوسانات است. بدین صورت که در مدل CIR نوسانات ثابت نیست؛ بلکه تابعی افزایشی از نرخ سود بدون ریسک است. این ویژگی از طریق اضافه کردن ریشه دوم نرخ سود به نرخ نوسان پذیری مدل صورت گرفته است و با این کار، مهم‌ترین نقیصه مدل واسیچک، که همان منفی شدن نرخ سود بدون ریسک است، رفع شد [۱۰،۲۱:۲۱۴]. ارزش اوراق اختیار معامله تحت مدل نرخ سود تصادفی CIR به‌صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$C(CIR) = [S_t N(d_1) - K\, exp(-\int_t^T r_t^*\, dt)\, N(d_2)]$$

$$+\delta C_0[S_t \phi(d_1) - K \exp(-\int_t^T r_t^*\, dt)$$

$$\times \left(\phi(d_2) - \sigma\sqrt{T-t} N(d_2)\right)] + \delta C_1[d_2 S_t \phi(d_1)$$

$$-d_1 K \exp(-\int_t^T r_t^*\, dt)\, \phi(d_2)] \quad \text{رابطه (۱۸)}$$

در رابطه (۱۸) S_t قیمت فعلی سهم، K قیمت توافقی، σ تلاطم، $T-t$ زمان باقی‌مانده تا سررسید و C قیمت نظری اختیار خرید در زمان t است. N(d) تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و $\phi(d)$ تابع چگالی است. سایر پارامترها نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\exp(-\int_t^T r_t^*\, dt) = \exp\left(-\left(\frac{r_t-\theta}{\kappa}\right)\left(1-e^{-\kappa(T-t)}\right) - \theta(T-t)\right) \quad \text{رابطه (۱۹)}$$

رابطه فوق ارزش یک ورقه قرضه با ارزش اسمی یک دلار و سررسید T را تحت نرخ سود تصادفی CIR در زمان t نشان می‌دهد.

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \times$$

$$\left[ln\frac{S_t}{K} + \frac{r_t-\theta}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa(T-t)}\right) + \theta(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right] \quad \text{رابطه (۲۰)}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad \text{رابطه (۲۱)}$$

$$C_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\frac{\lambda(r_t-\theta)}{\kappa}\left(\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} - (T-t)e^{-\kappa(T-t)}\right) + \frac{\lambda\theta(T-t)}{\kappa}\left(1-\frac{1-e^{\kappa(T-t)}}{\kappa}\right)\right]$$ رابطه (۲۲)

$$C_1 = -\frac{\rho}{\sigma(T-t)}.C_{11}$$ رابطه (۲۳)

$$C_{11} = \frac{2\sqrt{\theta}\left((1+2e^{\kappa(T-t)})\sqrt{r_t}-3e^{\frac{\kappa(T-t)}{2}}\sqrt{r_t-\theta(1-e^{\kappa(T-t)})}\right)}{2e^{\kappa(T-t)}\kappa^2\sqrt{\theta}} + \frac{\left(\theta(1+2e^{\kappa(T-t)}-r_t\right)\psi}{2e^{\kappa(T-t)}\kappa^2\sqrt{\theta}}$$ رابطه (۲۴)

$$\psi = \ln\left[\frac{\theta\left(2e^{\kappa(T-t)}-1\right)+r_t+2\,e^{\frac{\kappa(T-t)}{2}}\sqrt{\theta^2\left(e^{\kappa(T-t)}-1\right)+\theta\, r_t}}{\left(\sqrt{r_t}+\sqrt{\theta}\right)^2}\right]$$ رابطه (۲۵)

در روابط بالا θ و κ به ترتیب میانگین نرخ سود بلندمدت و سرعت بازگشت به میانگین تخمین زده شده مرتبط با مدل CIR است. α و β نیز از طریق $\alpha = \kappa\theta$ و $\beta = -\kappa$ محاسبه می‌شوند. δ نیز از طریق جزء نوسان مدل CIR تخمین زده می‌شود. همچنین منظور از λ قیمت بازاری ریسک[1] است که در این پژوهش ثابت در نظر گرفته می‌شود. قیمت بازاری ریسک را می‌توان به این صورت برآورد کرد:

$$\lambda(r,t) = \frac{\mu(r,t)-r_t}{\delta(r,t)}$$ رابطه (۲۶)

مروری بر مطالعات گذشته

در دهه‌های اخیر قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله تحت روش‌های مختلف مورد توجه محققان قرار گرفته است. پس از ارائه مدل بلک، شولز و مرتون در سال ۱۹۷۳، برخی از محققین به منظور رفع برخی از نواقص این مدل، به مدل‌های جدیدتری دست یافتند. رابینوویچ[2] (۱۹۸۹) طی پژوهشی فرمول‌هایی جهت قیمت‌گذاری اختیار معامله بر روی دارایی‌های پایه مختلف مثل سهام و اوراق قرضه هنگامی که نرخ سود بدون ریسک از فرآیند تصادفی پیروی می‌کند ارائه کرد. روش قیمت‌گذاری که توسط رابینوویچ گسترش یافت نقش همبستگی بین بازده‌های پیش‌بینی نشده در اوراق بهادار و تغییرات در نرخ سود کوتاه‌مدت را در تعیین قیمت اختیار معامله‌ها برجسته می‌کند. رابینوویچ به این نتیجه رسید که زمانی این همبستگی و واریانس آنی نرخ سود کوتاه‌مدت زیاد

---

[1] Market Price of Risk

[2] Rabinovitch

باشد، قیمت‌های بدست آمده از این مدل با قیمت‌های بدست آمده از مدل بلک، شولز و مرتون متفاوت خواهد بود [۲۶].

در پژوهشی دیگر، بیلی و استولز[۱] (۱۹۸۹) به بررسی قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله روی شاخص تحت یک مدل تعادلی ساده پرداختند. در مدل ارائه شده توسط بیلی و استولز نوسانات و نرخ سود بدون ریسک تابعی از یک متغیر تصادفی هستند. نتایج این تحقیق نشان داد که این مدل می‌تواند سوگیری‌های مشاهده شده در اختیار معامله‌های روی شاخص سهام را توضیح دهد [۶]. امین و جرو[۲] (۱۹۹۲) طی تحقیقی با عنوان قیمت‌گذاری اختیار معامله روی دارایی‌های ریسکی در اقتصاد با نرخ سود تصادفی، فرم بسته‌ای برای قیمت‌گذاری انواع اختیار خرید و اختیار فروش روی دارایی‌های ریسکی، پیمان آتی و قرارداد آتی ارائه کردند. امین و جرو در این مطالعه از مدل نرخ سود تصادفی هث، جرو و مورتون[۳] (۱۹۹۲) استفاده کردند [۳]. ریندل[۴] (۱۹۹۵) طی پژوهشی به بررسی عملکرد مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله امین و جرو پرداخت. او در این پژوهش از داده‌های اختیار معامله روی شاخص سهام اروپا در بازار اختیار سوئد استفاده کرد. ریندل به این نتیجه رسید که مدل امین و جرو (۱۹۹۲) به وضوح عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک و شولز (۱۹۷۳) دارد [۲۸].

باکشی، کائو و چن[۵] (۱۹۹۷) مشاهده کردند که استفاده از فرآیند نرخ سود تصادفی در مدل بلک، شولز و مرتون باعث بهبود جزئی در عملکرد قیمت گذاری اختیار معامله‌های روی شاخص اس اند پی ۵۰۰ با حداکثر سررسید یکسال می‌شود. در این مطالعه آن‌ها از داده‌های اختیار معامله روی LEAPS[۶] که سررسید دو تا سه سال دارند نیز استفاده کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که استفاده همزمان از مدل نوسانات تصادفی و مدل نرخ سود تصادفی، عملکرد قیمت‌گذاری اختیار معامله را بهبود نمی‌بخشد. به‌علاوه این پژوهش نشان داد که استفاده از مدل‌های نرخ سود تصادفی برای اختیار معامله‌های بلندمدت عملکرد پوشش ریسک را در موارد خاص افزایش می‌دهد [۷]. کیم و کونیتومو۷ (۱۹۹۹) در مطالعه‌ای با استفاده از رویکرد بسط مجانبی روشی برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله ارائه کردند. آن‌ها مدل بلک، شولز و مرتون را با استفاده از مدل نرخ سود تصادفی کاکس، اینگرسول و راس (۱۹۸۵) بسط دادند و به فرمولی صریح جهت ارزش‌گذاری این اوراق دست یافتند [۱۷]. همچنین کیم (۲۰۰۲) در پژوهشی عملکرد مدل‌های قیمت گذاری اوراق

---

[1] Baily & Stulz

[2] Amin & Jarrow

[3] Heath, Jarrow & Morton

[4] Rindell

[5] Bakshi, Cao & Chen

[6] Long-Term Equity Anticipation Securities

[7] Kim & Kunitomo

اختیار معامله تحت چندین فرآیند نرخ سود تصادفی را با استفاده از داده‌های روزانه شاخص نیکی۲۲۵[1] ژاپن بررسی کرد. در این مطالعه از مدل‌های نرخ سود بدون ریسک مرتون، واسیچک، کاکس–اینگرسول–راس و برنان–شوارتز مورد مطالعه قرار گرفت. یافته‌های این تحقیق نشان داد که استفاده از مدل‌های نرخ سود تصادفی در فرمول بلک، شولز و مرتون تاثیری در بهبود عملکرد کلی مدل بلک، شولز و مرتون ندارد [۱۶].

عبودی و ایژاکیان[2] (۲۰۱۳) طی پژوهشی یک تعمیم فرم بسته از مدل بلک، شولز و مرتون را ارائه کردند که در آن نرخ سود بدون ریسک از فرآیند گاوسی تصادفی پیروی می‌کند. این پژوهشگران نشان دادند که قیمت اختیار معامله سهام با نوسانات نرخ سود بدون ریسک و زمان تا سررسید آن‌ها افزایش می‌یابد. آزمایش‌های تجربی در این تحقیق نشان داد که قیمت گذاری اوراق اختیار معامله تحت مدل‌های نرخ سود تصادفی عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون دارد و هر چه زمان تا سررسید اوراق بیشتر باشد، میزان بهبود قیمت‌گذاری توسط مدل‌های نرخ سود تصادفی بیشتر می‌شود [۱]. هی و ژو[3] (۲۰۱۸) طی پژوهشی، فرمول فرم بسته قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی در قالب یک سری بی‌نهایت ارائه کردند. مدل آن‌ها از مدل نوسانات تصادفی هستون و مدل نرخ سود تصادفی CIR پیروی می‌کند. آن‌ها برای تایید فرمول‌شان، قیمت‌های اختیار محاسبه شده از طریق فرمول‌شان را با قیمت‌های بدست آمده از شبیه سازی مونت کارلو مقایسه کردند [۱۴]. آنتونلی، رامپونی و اسکارلاتی[4] (۲۰۲۱) در مطالعه‌ای با عنوان یک روش تطبیق لحظه ای برای قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی، یک روش تقریبی جدید و ساده برای قیمت‌گذاری اختیار با استفاده از مدل نرخ سود تصادفی CIR ارائه کردند [۴].

در پژوهش‌های داخلی صورت گرفته در حوزه مدل‌های نرخ سود تصادفی و ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی، اغلب روی داده‌های غیرواقعی کار شده است. الهی (۱۳۹۱) در پژوهشی با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو اقدام به ارزش‌گذاری اختیار فروش آمریکایی تحت نرخ سود تصادفی کرد. او به این نتیجه رسید که رویکرد فوق برآورد خوبی از قیمت اختیار فروش ارائه می‌دهد [۵۴:۱۱]. نام آور (۱۳۹۳) در مطالعه‌ای به بررسی روند تغییرات قیمت اختیار معامله با توجه به تغییرات پنج سهم بورسی پرداخت. او در یک حالت با استفاده از مدل بلک، شولز و مرتون روند تغییرات ارزش پرتفوی متشکل از اختیار خرید سهام را بررسی کرد و در حالت دوم با در نظر گرفتن نرخ سود تصادفی روند تغییرات ارزش پرتفوی شامل اختیار خرید و اوراق قرضه را بررسی و محاسبه کرد. نتیجه پژوهش نشان داد میزان سوددهی در حالت دوم برای دارنده آن پرتفوی

---

[1] Nikkei 225

[2] Abudy & Izhakian

[3] He & Zhu

[4] Antonelli, Ramponi & Scarlatti

بیشتر می‌شود. نکته حائز اهمیت آن‌جا است که در این تحقیق از داده‌های شبیه‌سازی شده و غیرواقعی استفاده شده است [۸۶:۲۲].

قاسمی (۱۳۹۴) طی پژوهشی، تاثیر اختیار معامله را در تامین مالی اسلامی بررسی کرد. او در این مطالعه، مدل‌های مختلف قیمت‌گذاری اختیار معامله را براساس چگونگی تعریف نرخ سود بدون ریسک بررسی و مقایسه کرد. در این مطالعه از داده‌های مربوط به اوراق اسناد خزانه اسلامی مالزی و اوراق اختیار خرید روی OKLI جهت تخمین دقت مدل‌های مختلف ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله استفاده شده است [۱۵۵:۱۳].

در حوزه بررسی مدل‌های نرخ سود تصادفی مطالعات داخلی انگشت شماری صورت گرفته است. پیمانی و هوشنگی (۱۳۹۶) در پژوهشی به مقایسه عملکرد مدل‌های تعادلی نرخ سود کوتاه‌مدت اوراق اسناد خزانه اسلامی پرداختند. در این تحقیق مشخص شد که مدل چان و همکاران[۱] (۱۹۹۲) یا به اختصار CKLS و مدل برنان–شوارتز[۲] (۱۹۸۰) عملکرد بهتری در برازش نرخ سود کوتاه‌مدت دارد. همچنین آن‌ها به این نتیجه رسیدند که نرخ سود اسناد خزانه اسلامی در ایران از قابلیت بازگشت به میانگین برخوردار است [۲۵]. نیسی، صفائی و نعمت الهی (۱۳۹۷) نیز طی مطالعه‌ای یک روش برای ارزش‌گذاری اختیار فروش آمریکایی تحت مدل نرخ سود تصادفی CIR ارائه کردند. در انتها نیز به قیاس نتایج عددی حاصل از آن با نتایج حاصل از روش شبیه‌سازی مونت کارلو پرداختند. تمرکز اصلی این تحقیق روی مدل‌سازی قیمت اختیار فروش آمریکایی و حل عددی آن بوده و داده‌های واقعی در آن استفاده نشده است [۲۴].

ملک محمدی (۱۳۹۹) طی پژوهشی به بررسی و مقایسه عملکرد مدل بلک، شولز و مرتون، مدل تلاطم تصادفی هستون و مدل دارای انتشار پرش مرتون در ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله های موجود در بورس اوراق بهادار تهران پرداخت. این تحقیق که با استفاده از داده‌های واقعی صورت گرفت، نشان داد که مدل بلک، شولز و مرتون عملکرد بهتری نسبت به دو مدل دیگر دارد. به‌علاوه مدل تلاطم تصادفی هستون نسبت به مدل دارای انتشار پرش مرتون دقت بهتری داشته است [۱۰۶:۱۹]. سعدایی جهرمی (۱۴۰۱) طی مطالعه‌ای، ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله را با استفاده از الگوریتم‌های یادگیری ماشینی (شبکه عصبی مصنوعی، رگرسیون بردار پشتیبان و تقویت گرادیان سریع) بررسی کرد. در این تحقیق از داده‌های اوراق اختیار معامله موجود در بورس اوراق بهادار تهران استفاده شد. یافته‌ها نشان داد که ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله با استفاده از الگوریتم‌های یادگیری ماشینی خطای پیش‌بینی کمتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون دارد.

---

[1] Chan et al.

[2] Brennan & Schwartz

همچنین از بین الگوریتم‌های یادگیری ماشینی استفاده شده در این تحقیق، الگوریتم تقویت گرادیان سریع دارای کمترین خطای پیش‌بینی بوده است [۱۰۳:۲۹].

۳. روش‌شناسی پژوهش

روش تحقیق

این پژوهش مبتنی بر داده‌های عینی بوده و از نظر هدف، کاربردی و از حیث ماهیت و روش تحقیق، یک تحقیق پس رویدادی محسوب می‌شود. مراحل اجرایی پژوهش شامل مطالعات کتابخانه‌ای، جمع‌آوری داده‌ها، تخمین پارامترهای مدل نرخ سود تصادفی با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی، عملیاتی‌سازی ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی و در نهایت محاسبه دقت هر مدل و مقایسه آن با مدل قیمت‌گذاری تحت نرخ سود غیرتصادفی است.

برای محاسبه قیمت نظری مبتنی بر مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی ابتدا می‌بایست پارامترهای مربوط به هر مدل را برآورد کرد. حداقل مربعات معمولی یکی از روش‌های تخمین پارامتر برای مدل‌های نرخ سود تصادفی محسوب می‌شود که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است. برای این کار در مرحله اول فرم زمان پیوسته هر مدل به حالت زمان گسسته تبدیل می‌شوند؛ چرا که مدل زمان گسسته اجازه می‌دهد واریانس تغییرات نرخ سود بدون ریسک، مستقیما به سطح نرخ سود بستگی داشته باشد [۲۵]. طی فرآیند گسسته سازی، یک خطای جزئی به‌جود می‌آید که می‌توان با کوچک در نظر گرفتن بازه زمانی dt، مقدار خطای حاصل از این فرآیند را حداقل کرد. فرآیند گسسته سازی مدل‌های نرخ سود تصادفی براساس روش چان و همکاران (۱۹۹۲) و نومن[۱] (۱۹۹۷) به‌صورت زیر انجام می‌گیرد [۲۵].

۱) مدل مرتون: فرآیند گسسته سازی مدل نرخ سود تصافی مرتون به‌صورت زیر است.

رابطه (۲۷)
$$r_{t+1} - r_t = \alpha_t + \delta\, \varepsilon_{t+1}$$

پارامتر α در رابطه (۲۷) را می‌توان با حداقل رساندن تابع هدف OLS تخمین زد.

رابطه (۲۸)
$$(\hat{\alpha}) = argmin \sum_{i=1}^{N-1} \left(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - \alpha\right)^2$$

۲) مدل واسیچک: مدل نرخ سود تصادفی واسیچک به‌صورت زیر به حالت زمان گسسته تبدیل می‌شود.

---

[۱] Nowman

رابطه (۲۹)
$$r_{t+1} - r_t = \alpha + \beta r_t + \delta\, \varepsilon_{t+1}$$

پارامترهای α و β با حداقل‌سازی تابع هدف OLS برآورد می‌شوند.

رابطه (۳۰)
$$\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = argmin \sum_{i=1}^{N-1} \left(r_{t_{i+1}} - r_{t_i} - \alpha - \beta r_{t_i}\right)^2$$

۳) مدل کاکس، اینگرسول و راس: فرآیند گسسته سازی مدل نرخ سود تصادفی ارائه شده توسط کاکس، اینگرسول و راس به حالت زیر انجام می‌گردد.

رابطه (۳۱)
$$r_{t+1} - r_t = \alpha + \beta r_t + \delta \sqrt{r_t}\, \varepsilon_{t+1}$$

که برای سادگی انجام رگرسیون، رابطه (۳۱) به‌صورت زیر تغییر می‌کند.

رابطه (۳۲)
$$\frac{r_{t+1} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{\alpha}{\sqrt{r_t}} + \beta \sqrt{r_t} + \delta \varepsilon_{t+1}$$

پارامترهای رابطه (۳۲) را می‌توان با حداقل‌سازی تابع هدف OLS تخمین زد.

رابطه (۳۳)
$$\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = argmin \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sqrt{r_{t_i}}} - \frac{\alpha}{\sqrt{r_{t_i}}} - \beta \sqrt{r_{t_i}}\right)^2$$

روش حداقل مربعات معمولی شامل پنج فرض اساسی است. این فروض شامل عدم وجود تورش، صفر بودن میانگین جملات خطا، ثابت بودن واریانس جملات خطا (رابطه (۳۴))، عدم همبستگی میان جملات خطا و عدم همبستگی میان متغیر مستقل و جملات خطا می‌باشد [۹]. در این تحقیق، رگرسیون‌ها با فرض برقراری این فروض انجام می‌شود.

رابطه (۳۴)
$$E[\varepsilon_{t+1}] = 0,\ E[\varepsilon_{t+1}^2] = \delta^2$$

یکی از پارامترهای مورد نیاز جهت ارزش‌گذاری اختیار معامله با مدل نرخ سود تصادفی CIR قیمت بازاری ریسک است. مقدار قیمت بازاری ریسک یا λ از طریق رابطه (۲۶) برآورد می‌شود. مقدار r_t در این رابطه از طریق حداقل سازی مجموع مربعات خطای رابطه (۳۵) حاصل می‌شود.

رابطه (۳۵)
$$r_t = \frac{1}{T-t} \log(\exp(-\int_0^{T-t} r_t^*\, dt)) + \varepsilon_t$$

تلاطم نرخ بازده دارایی پایه یکی دیگر از پارامترهای مورد نیاز برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله است. در این مطالعه برای تخمین پارامتر تلاطم ابتدا براساس قیمت روزانه سهام پایه،

بازدهی لگاریتمی روزانه برای یک دوره ۹۰ روزه محاسبه می‌شود. البته هیچ رویه ثابتی در مورد تعداد روزهای انتخابی این دوره وجود ندارد اما معمولا از داده‌های قیمت ۲۰ تا ۱۸۰ روزه استفاده می‌شود [۱۶]. پس از محاسبه بازده لگاریتمی روزانه، با استفاده از تابع انحراف معیار نمونه، تلاطم بازدهی روزانه محاسبه می‌شود. مقدار σ یا تلاطم تاریخی از حاصل‌ضرب انحراف معیار بازدهی روزانه در ریشه دوم تعداد روزهای معاملاتی سالانه حاصل می‌شود.

مهم‌ترین هدف این پژوهش، مقایسه عملکرد مدل‌های مختلف ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله است. برای مقایسه عملکرد این مدل‌ها و محاسبه میزان خطای پیش بینی آن‌ها باید قیمت نظری بدست آمده از هر مدل را با قیمت‌های واقعی معامله شده در بورس اوراق بهادار تهران مقایسه شود. خطای جذر میانگین مربعات یکی از ابزارهای آماری که از آن به عنوان معیاری جهت محاسبه دقت در پیش بینی استفاده می‌شود. خطای جذر میانگین مربعات که از این پس با RMSE نشان می‌دهیم، میزان خطای خروجی یک مدل پیش بینی کننده یا برآوردگر را نسبت به مقادیر واقعی آن محاسبه می‌کند. از آن‌جا که در RMSE اثر مقادیر مثبت و منفی قادر به خنثی کردن یکدیگر نیستند و برای خطاهای بزرگ، جریمه بیشتری در نظر گرفته می‌شود، از این رو روشی مناسب جهت مقایسه مدل‌های پیش بینی کننده است [۵]. معیار RMSE که در این تحقیق از آن استفاده شده به شرح ذیل است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{C_j^{model\ price} - C_j^{market\ price}}{C_j^{market\ price}}\right)^2} \quad \text{رابطه (۳۶)}$$

در رابطه (۳۶) $C_j^{\text{market price}}$ قیمت بازار مشاهده j ام، $C_j^{\text{model price}}$ قیمت بدست آمده توسط هر مدل برای مشاهده j ام است. n نیز نشان دهنده تعداد کل مشاهدات است.

تحقیقات گذشته نشان دادند استفاده از مدل‌های نرخ سود تصادفی درارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله برای سررسیدهای کوتاه‌مدت، نتایج مشابهی با مدل ارزش‌گذاری بلک، شولز و مرتون دارد. به‌علاوه با افزایش زمان باقی‌مانده تا سررسید، مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون دارند [۱،۷]. بدین منظور داده‌های مورد بررسی را براساس زمان باقی‌مانده تا سررسید، به دو بخش کوتاه‌مدت و بلندمدت تقسیم می‌شوند و خطای هر گروه را بطور جداگانه ارائه می‌شوند. براساس میانگین روزهای باقی‌مانده تا سررسید اختیار معامله‌های بررسی شده در این تحقیق، اختیار معامله‌هایی که حداقل ۶۰ روز تا سررسید آن‌ها باقی مانده باشد را در گروه اختیار معامله‌های بلندمدت و مابقی در گروه اختیار معامله های کوتاه‌مدت قرار می‌دهیم.

افزون براین به منظور بررسی بهتر و دقیق‌تر هرکدام از مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله در پیش‌بینی قیمت اوراق اختیار معامله از تکنیک رگرسیونی استفاده می‌شود. بدین منظور با استفاده از قیمت‌های بازار و قیمت‌های بدست آمده از هر مدل، رگرسیونی به شکل زیر را تخمین می زنیم.

$$C_j^{market\ price} = \alpha + \beta\ C_j^{model\ price} + \varepsilon_t$$ رابطه (۳۷)

در رابطه (۳۷) نیز $C_j^{market\ price}$ قیمت بازار مشاهده j ام، $C_j^{model\ price}$ قیمت برآورد شده توسط هر مدل برای مشاهده j ام است. ε_t نیز نشان دهنده جزء اخلال رگرسیون است. مقادیر α و β در رابطه (۳۸) را می‌توان با حداقل‌سازی تابع هدف OLS تخمین زد.

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = argmin \sum_{j=1}^{n} \left(C_j^{market\ price} - \alpha - \beta\ C_j^{model\ price} \right)^2$$ رابطه (۳۸)

در این رگرسیون، هر چقدر مقدار β تخمین زده شده به عدد یک نزدیک‌تر باشد، پیش‌بینی کنندگی آن مدل صحیح‌تر است. رگرسیون فوق نیز با فرض برقراری فروض کلاسیک انجام می‌شود.

داده‌های مورد مطالعه

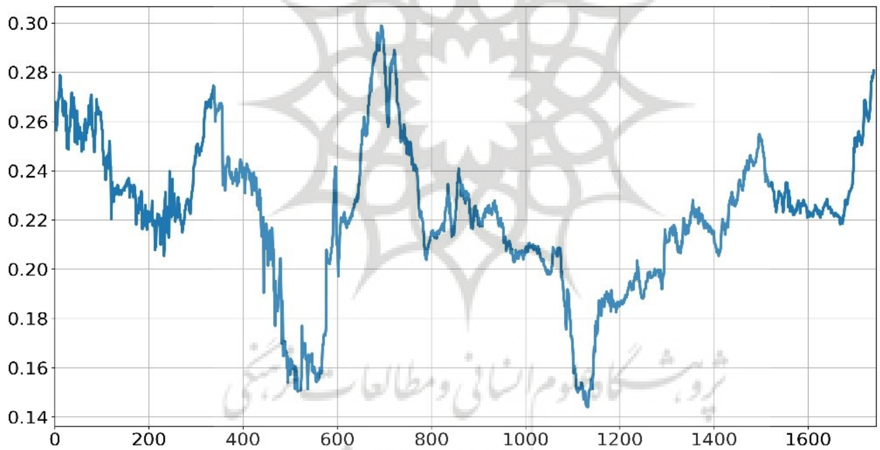
برای انجام آزمون‌های پژوهش باید داده‌های روزانه اختیار معامله جمع‌آوری شوند. رشد معاملات اوراق اختیار معامله در بورس اوراق بهادار تهران از فروردین ۱۳۹۷ آغاز شد. به همین دلیل در تحقیق پیش‌رو از اختیار معامله‌هایی که از ابتدای سال ۹۷ تا پایان آذرماه ۱۴۰۱ در بورس اوراق بهادار تهران معامله شده‌اند استفاده شده است. در این بازه زمانی تعداد کل داده‌های معاملاتی روزانه ۶۰۵۴۳ است. تمامی این داده‌ها از قابلیت اتکای لازم برخوردار نیستند. لذا می‌بایست این داده‌ها فیلتر شوند. برای این منظور بر روی این داده‌ها چهار شرط اعمال می‌شود. اول اینکه هر اختیار معامله باید دارای ۵۰ روز معاملاتی باشد؛ زیرا اوراقی که به‌طور متناوب معامله می‌شوند از قابلیت اتکای بیشتری برخوردارند. دوم اینکه حاصل تقسیم تعداد روزهایی که نماد معامله شده است بر کل تعداد روزهای دوره معاملاتی هر اختیار معامله حداقل ۰/۶ باشد. این شرط باعث می‌شود تنها اوراقی که نقدشوندگی بالایی داشته‌اند انتخاب شوند. شرط سوم این است که برای قیمت‌گذاری اختیار برای هر روز معاملاتی باید حداقل ۵ روز تا سررسید آن باقی مانده باشد. چرا که ممکن است روزهای نزدیک به سررسید، معاملاتی با قیمت‌های پرت صورت گیرند که از قابلیت اتکای لازم برخوردار نباشند. شرط چهارم اینکه اگر برای یک روز معاملاتی، قیمت پایانی اختیار کمتر از ۱۰ ریال باشد، آن روز معاملاتی حذف می گردد. علت اجرای شرط آخر این است که

داده‌های پرت مربوط به اختیار معامله‌های بسیار در زیان حذف شوند. پس از اجرای فیلتر ۶۹۱۴ داده روزانه مربوط به ۹۲ اختیار، چهار شرط فوق را همزمان دارا می‌باشند.

برای قیمت گذاری اوراق اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی ابتدا باید پارامترهای هر مدل براساس سری زمانی نرخ سود بدون ریسک تخمین زده شوند. در این پژوهش سری زمانی نرخ سود بدون ریسک از طریق محاسبه روزانه نرخ بازده تا سررسید اوراق اسناد خزانه اسلامی استخراج و به بازدهی سالانه تبدیل می‌گردد. نرخ بازده سالانه اسناد خزانه اسلامی از طریق رابطه (۳۹) بدست می‌آید.

$$r_t = \left(\frac{1000000}{P}\right)^{\frac{365}{t}} - 1 \qquad \text{رابطه (۳۹)}$$

در رابطه بالا، r_t برابر نرخ بازدهی تا سررسید (گسسته) و P نشان دهنده قیمت پایانی اسناد خزانه اسلامی و t نشان دهنده تعداد روزهای باقی‌مانده تا سررسید اوراق است. به دلیل اینکه در روزهای معاملاتی چندین اوراق اسناد خزانه اسلامی مورد معامله واقع می‌شود به همین جهت از میانگین نرخ بازدهی آن‌ها به عنوان نرخ سود سالانه در آن روز معاملاتی استفاده شود [۲۵]. بدین ترتیب از مهرماه سال ۹۴ تا پایان آذرماه ۱۴۰۱، تعداد ۱۷۴۰ داده به عنوان نرخ بازده بدون ریسک استخراج شد.



نمودار ۱. سری زمانی نرخ سود سالانه طی سال‌های ۱۳۹۴ و ۱۴۰۱

طبق روند نرخ بازدهی اوراق اسناد خزانه اسلامی، واضح است که با وجود رفتار نوسانی نرخ سود بدون ریسک، این نرخ پس از صعود و نزول‌های مقطعی، به سمت میانگین بلندمدت بازگشته است؛ در نتیجه می‌توان بیان کرد که نرخ بازدهی اوراق اسناد خزانه اسلامی از قابلیت بازگشت به میانگین

برخوردار است. همانطور که مشاهده می‌شود که طی ۷ سال گذشته، نرخ بازده سالانه اوراق اسناد خزانه اسلامی بین ۱۴/۴ درصد و ۲۹/۸ درصد در حال نوسان بوده و معمولا به سمت میانگین بلندمدت یعنی ۲۲/۱۷ درصد کشیده می‌شود.

۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌ها

در جدول شماره (۱) آمار توصیفی (کمینه، بیشینه و میانگین) ۶۹۱۴ داده اختیار معامله که در این تحقیق مورد بررسی واقع شده قابل مشاهده است.

جدول ۱. آمار توصیفی داده‌های اختیار معامله

پارامترها	کمینه	بیشینه	میانگین
قیمت سهم پایه (S_t) (ریال)	۳۹۸	۳۷،۲۶۰	۵،۴۳۸
قیمت اعمال (K) (ریال)	۵۰۰	۳۰،۳۲۰	۵،۳۶۸
نرخ سود بدون ریسک (r_t) (درصد)	۱۴/۴	۲۹/۸	۲۲/۱۷
انحراف معیار سالانه بازدهی (σ) (درصد)	۸	۱۳۷	۴۹/۶
زمان باقی‌مانده تا سررسید (T) (کسری از سال)	۰/۰۱۳	۰/۸۰	۰/۲۰۶
قیمت بازار اوراق اختیار معامله (ریال)	۱۰	۱۶،۰۴۱	۹۷۵

تمامی اختیار معامله‌های مورد استفاده در این پژوهش، بر روی ۱۵ سهم پایه منتشر شده‌اند. کمترین و بیشترین قیمت این سهام در زمان بررسی آن به ترتیب برابر ۳۹۸ ریال و ۳۷،۲۶۰ ریال بوده است. همچنین انحراف معیار سالانه بازدهی سهم پایه که از آن به عنوان تلاطم تاریخی دارایی پایه یاد می‌شود دارای کمترین مقدار ۸ درصد و بیشترین مقدار ۱۳۷ درصد است و میانگینی برابر با ۴۹/۶ درصد دارد. میانگین قیمت اعمال اوراق اختیار معامله‌ای که در این تحقیق بررسی شده‌اند، برابر ۵،۳۶۸ ریال بوده و این مقدار در بازه ۵۰۰ ریال و ۳۰،۳۲۰ ریال متغیر بوده است. علاوه‌براین زمان باقی‌مانده تا سررسید اوراق اختیار معامله‌های بررسی شده حداقل ۵ روز و حداکثر ۲۸۸ روز بوده است. میانگین تعداد روزهای باقی‌مانده تا سررسید برابر ۷۴ روز می‌باشد. قیمت‌های بازاری اوراق اختیار معامله بین ارقام ۱۰ ریال و ۱۶،۰۴۱ ریال بوده و بطور متوسط ۹۷۵ ریال معامله شده‌اند.

در گام بعدی می‌بایست پارامترهای مدل نرخ سود تصادفی برآورد شوند. تخمین پارامتر هرکدام از مدل‌های نرخ سود تصادفی با استفاده از سری زمانی نرخ سود بدون ریسک و با اجرای روش

حداقل مربعات معمولی در محیط پایتون[1] انجام می‌گیرد. نتایج تخمین این پارامترها در جدول شماره (۲) ارائه شده است.

جدول ۲. نتایج برآورد پارامترهای مدل‌های نرخ سود تصادفی

مدل	α	β	δ	γ	F	λ	$\mu = -\frac{\alpha}{\beta}$
مرتون	۰/۰۰۱۱ (۰/۸۹)	۰	۰/۳۴۷ (۰/۰۰)	۰	–	–	–
واسیچک	۰/۱۶۴۷ (۰/۰۱۵)	–۰/۰۰۷۴ (۰/۰۱۵)	۰/۳۷۳ (۰/۰۰)	۰	۵/۹۱۴ (۰/۰۱۵۱)	–	٪۲۲/۲۵
CIR	۰/۱۶۵۲ (۰/۰۱۱)	–۰/۰۰۷۴ (۰/۰۱۳)	۰/۰۸۰ (۰/۰۰)	۰/۵	۳/۲۳۴ (۰/۰۳۹۷)	۰/۰۴۴۳ (۰/۰۰)	٪۲۲/۳۲

طبق جدول شماره (۲) و سطح معنی داری آماره F، مدل واسیچک و مدل کاکس، اینگرسول و راس در سطح اطمینان ۹۵ درصد معنی‌دار هستند. علاوه‌براین بررسی آماره t پارامتر β نشان می دهد که فرض صفر بودن β رد شده که این امر تایید کننده خاصیت بازگشت به میانگین در نرخ بازده اوراق اسناد خزانه اسلامی است. یکی از قابلیت‌های مدل‌های نرخ سود تصادفی، استخراج میانگین نرخ سود در بلندمدت براساس رابطه $\mu = -\frac{\alpha}{\beta}$ است که در ستون آخر جدول ارائه شده است.

پس از تخمین پارامترهای مدل‌های نرخ سود تصادفی، قیمت‌گذاری اختیار معامله انجام می‌شود. همانطور که عنوان شد، در این مطالعه اوراق اختیار معامله براساس زمان باقی‌مانده تا سررسید به دو گروه کوتاه‌مدت و بلندمدت تقسیم شده و خطای هر گروه بطور جداگانه اندازه‌گیری می شود. براساس داده‌های گردآوری شده و همچنین پارامترهای تخمین زده شده، عملیات ارزش‌گذاری و محاسبه خطای هر مدل در محیط پایتون انجام می‌شود که نتایج آن در جدول (۳) قابل مشاهده است.

جدول ۳. خطای مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله

مدل	میانگین RSME (کوتاه مدت)	میانگین RMSE (بلندمدت)	میانگین RMSE (کل)
بلک، شولز و مرتون	۰/۴۵۴۲	۰/۳۹۱۲	۰/۴۱۹۵
مرتون	۰/۴۵۱۸	۰/۳۷۴۷	۰/۴۰۹۶
واسیچک	۰/۴۴۹۱	۰/۳۶۹۸	۰/۴۰۵۹
CIR	۰/۴۴۸۸	۰/۳۷۷۵	۰/۴۰۹۷

[1] Python

براساس خطاهای بدست آمده می‌توان بیان کرد که بطور کلی مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی نسبت به مدل‌های تحت نرخ سود غیرتصادفی عملکرد بهتری در پیش‌بینی قیمت بازار اوراق اختیار معامله موجود در بورس اوراق بهادار تهران دارد. در این میان ارزش‌گذاری اختیار معامله با مدل واسیچک بر مبنای خطای مدل، دقت بیشتری در پیش‌بینی قیمت بازار اوراق اختیار معامله نسبت به سایر مدل‌ها داشته است و پس از آن به ترتیب مدل مرتون و مدل CIR دارای عملکرد دقیق‌تری بوده‌اند.

هر چند که در میان مدل‌های بررسی شده، استفاده از مدل نرخ سود بدون ریسک CIR در ارزش گذاری اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت دارای خطای کمتری است؛ اما بطور کلی می‌توان گفت ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت با استفاده از مدل بلک، شولز و مرتون نتایج نسبتا مشابهی با مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله با نرخ سود تصادفی دارد. از طرفی استفاده از مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله با نرخ سود تصادفی برای اختیار معامله‌های بلندمدت دارای عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون است. در میان مدل‌های نرخ سود تصادفی، عملکرد مدل واسیچک برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های بلندمدت نتیجه بهتری داشته است.

به منظور بررسی جزئی‌تر دقت هر مدل در ادامه با استفاده از تکنیک رگرسیونی نتایج قابل توجهی بدست می‌آید. بدین منظور با استفاده از قیمت‌های بازار و قیمت‌های بدست آمده از هر مدل، رگرسیونی به شکل رابطه (۳۷) تخمین زده می‌شود. در این رابطه هر چه β به عدد یک نزدیک‌تر باشد، پیش‌بینی کنندگی آن مدل صحیح‌تر است. بنابراین آزمون t را برای β با فرض برابر یک بودن محاسبه می‌کنیم. مقادیر Prob مربوطه در جدول زیر در داخل پرانتز مقادیر ستون β ارائه شده است. با اجرای رگرسیون نتایج جدول (۴) بدست می‌آید.

جدول ۴. نتایج رگرسیون‌های برازش شده برای هر مدل ارزش‌گذاری اختیار معامله (کل داده‌ها)

مدل	β	R Square	F
بلک، شولز و مرتون	۱/۱۲۱۶ (۰/۰۰)	۰/۹۰۰۳	۶۲۴۷۰ (۰/۰۰)
مرتون	۱/۱۲۰۶ (۰/۰۰)	۰/۹۰۳۰	۶۴۴۰۰ (۰/۰۰)
واسیچک	۱/۱۱۱۶ (۰/۰۰)	۰/۹۰۶۸	۶۷۲۶۰ (۰/۰۰)
CIR	۱/۰۹۷۴ (۰/۰۰)	۰/۹۰۶۶	۶۷۱۳۰ (۰/۰۰)

جدول ۵. نتایج رگرسیون‌های برازش شده برای هر مدل ارزش‌گذاری اختیار معامله (اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت)

مدل	β	R Square	F
بلک، شولز و مرتون	۱/۰۲۴۸ (۰/۰۰)	۰/۹۲۵۲	۳۶۸۰۰ (۰/۰۰)
مرتون	۱/۰۲۴۶ (۰/۰۰)	۰/۹۲۶۰	۳۷۲۱۰ (۰/۰۰)
واسیچک	۱/۰۲۲۹ (۰/۰۰)	۰/۹۲۷۳	۳۷۹۱۰ (۰/۰۰)
CIR	۱/۰۰۹۱ (۰/۰۷۳)	۰/۹۲۹۶	۳۹۳۰۰ (۰/۰۰)

جدول ۶. نتایج رگرسیون‌های برازش شده برای هر مدل ارزش‌گذاری اختیار معامله (اختیار معامله‌های بلندمدت)

مدل	β	R Square	F
بلک، شولز و مرتون	۱/۱۷۵۷ (۰/۰۰)	۰/۸۹۴۹	۳۳۵۴۰ (۰/۰۰)
مرتون	۱/۱۷۴۴ (۰/۰۰)	۰/۸۹۸۱	۳۴۷۰۰ (۰/۰۰)
واسیچک	۱/۱۶۱۱ (۰/۰۰)	۰/۹۰۱۶	۳۶۰۹۰ (۰/۰۰)
CIR	۱/۱۴۶۲ (۰/۰۰)	۰/۹۰۱۱	۳۵۸۹۰ (۰/۰۰)

طبق جداول (۴)، (۵) و (۶) آماره F تمامی رگرسیون‌ها معنی‌دار است. طبق جدول (۴) مقادیر ضریب تعیین نشان می‌دهد که برازش مدل واسیچک با تفاوتی جزئی نسبت به دیگر مدل‌ها، بهتر بوده است. این در حالی است که مقادیر ضریب تعیین در جدول (۵) نشان می‌دهد که برازش مدل CIR برای اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت بهتر بوده است. به‌علاوه داده‌های قیمتی از لحاظ مانایی بررسی شدند. براساس نتایج آزمون ریشه واحد، داده‌ها از مانایی قابل قبول برخوردار بودند. یافته‌ها حاکی از آن است فرض یک بودن ضریب β برای مدل CIR هنگام ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت در سطح اطمینان ۹۵ درصد رد می‌شود. به‌علاوه فرض یک بودن β برای سایر مدل‌ها نیز رد می‌شود بدین ترتیب می‌توان گفت که ضریب تمامی مدل‌ها تفاوت معنی‌داری با عدد یک دارد. با این وجود بطور کلی دقت مدل واسیچک نسبت به دیگر مدل‌ها بیشتر است.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه عملکرد مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله با نرخ سود تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران بررسی و نتایج آن با یک مدل قیمت‌گذاری با نرخ سود غیرتصادفی (مدل بلک، شولز و مرتون) مقایسه گردید. برآورد ضرایب مدل‌های نرخ سود تصادفی با استفاده از نرخ بازده

سالانه اوراق اسناد خزانه اسلامی و به روش حداقل مربعات معمولی انجام شد. سپس قیمت نظری اختیار معامله برای همه مدل‌ها محاسبه گردید .پس از مرحله ارزش‌گذاری، با استفاده از معیار RMSE قیمت‌های بدست آمده از هر مدل، با قیمت‌های معامله شده در بورس اوراق بهادار تهران مقایسه شده و با بهره‌گیری از روش رگرسیونی، دقت مدل‌ها مقایسه گردید.

یافته‌ها نشان می‌دهند که مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون داشته‌اند. همچنین در میان مدل‌های نرخ سود تصادفی، استفاده از مدل واسیچک در قیمت‌گذاری اختیار معامله، نسبت به مدل‌های دیگر، عملکرد بهتری داشته و از خطای پیش‌بینی کمتری برخوردار است. به‌علاوه نتایج نشان دادند که ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت با نرخ سود تصادفی تفاوت چندانی با مدل بلک، شولز و مرتون ندارند. در صورتی‌که استفاده از مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله با نرخ سود تصادفی برای اختیار معامله‌های بلندمدت دقت بیشتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون داشته است. در این مطالعه مدل بلک، شولز و مرتون نسبت به هر سه مدل فوق، دقت کمتری در تخمین قیمت اختیار معامله داشت و ضعیف‌ترین مدل در این پژوهش شناخته شد.

مقایسه نتایج این پژوهش با تحقیقات قبلی حاکی از تشابه عمومی بین آن‌ها است. برای نمونه ریندل (۱۹۹۵) به نتایج مشابه این مطالعه دست یافت. او به این نتیجه رسید که استفاده از نرخ سود تصادفی در قیمت‌گذاری اختیار معامله، به وضوح عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون داشته است [۲۸]. باکشی، کائو و چن (۱۹۹۷) نیز به این نتیجه رسیدند که استفاده از فرآیند تصادفی در مدل بلک، شولز و مرتون نتایج بهتری در پیش‌بینی قیمت اختیار معامله به همراه دارد [۷]. همچنین عبودی و ایژاکیان (۲۰۱۳) به نتایج یکسانی در این حوزه دست یافتند. آن‌ها نشان دادند که بکارگیری مدل‌های نرخ سود تصادفی در فرآیند قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله، بهبود قابل توجهی در قیمت‌گذاری این اوراق را به ارمغان می‌آورد [۱]. اما در مقابل کیم (۲۰۰۲) به این نتیجه رسید که استفاده از نرخ سود تصادفی در فرآیند قیمت‌گذاری تاثیر چندانی بر بهبود عملکرد مدل بلک، شولز و مرتون ندارد [۱۶].

۶. پیشنهادها و محدودیت‌ها

از محدودیت‌های پژوهش می‌توان به عمق کم بازار در بخش مشتقات اشاره کرد. هر چند که معاملات اوراق اختیار معامله از آذرماه ۱۳۹۵ در بورس اوراق بهادار تهران فراهم شد اما با این حال رشد معاملات این اوراق از فروردین ماه ۱۳۹۷ آغاز شد. با توجه به این محدودیت، بازه زمانی تحقیق از ابتدای سال ۱۳۹۷ تا پایان آذرماه ۱۴۰۱ انتخاب شد. به‌علاوه تعداد بسیار زیادی از نمادهای اختیار معامله به دلیل قیمت اعمال نامناسب، دارای روزهای معاملاتی صفر یا کمتر از ۵ روز بودند که عملا از قابلیت اتکای مناسبی برخوردار نبودند.

به پژوهش‌گران علاقمند به حوزه قیمت‌گذاری اختیار معامله پیشنهاد می‌شود که در مطالعات بعدی از مدل‌های چند عاملی نرخ سود در قیمت‌گذاری اختیار معامله استفاده نمایند. همچنین می‌توانند عملکرد مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله که همزمان تحت تلاطم تصادفی و نرخ سود تصادفی است را مورد بررسی قرار دهند.

سپاسگزاری

از کلیه افرادی که ما را در انجام این پژوهش یاری نمودند تشکر مینماییم. در این پژوهش از سازمان، نهاد یا شخصی کمک مالی دریافت نشده است.

منابع

1. Abudy, M., & Izhakian, Y. (2013). Pricing stock options with stochastic interest rate. *International Journal of Portfolio Analysis and Management*, *1*(3), 250-277.

2. Abvali, M., Khaliliaraghi, M., Hasanabadi, H., & Yaghoobnezhad, A. (2019). Optional trading pricing with a new analytic method for the Black Scholes equation. *Financial Management Strategy*, *7*(3), 135-155. (in Persian)

3. Amin, K. I., & Jarrow, R. A. (1992). Pricing options on risky assets in a stochastic interest rate economy 1. *Mathematical Finance*, *2*(4), 217-237.

4. Antonelli, F., Ramponi, A., & Scarlatti, S. (2021). A moment matching method for option pricing under stochastic interest rates. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, *37*(4), 802-822.

5. Azar, A., & Karimi, S. (2010). Neural Network Forecasts of Stock Return Using Accounting Ratios. *Financial Research Journal*, *11*(28). (in Persian)

6. Bailey, W., & Stulz, R. M. (1989). The pricing of stock index options in a general equilibrium model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *24*(1), 1-12.

7. Bakshi, G., Cao, C., & Chen, Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. *The Journal of finance*, *52*(5), 2003-2049.

8. Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, *81*(3), 637-654.

9. Brooks, C. (2019). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge university press.

10. Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates, Econometrica, 53, 385-407.

11. Elahi, M. (2013). *A Monte Carlo Approach for the American Put under Stochastic Interest Rates.* Sheikhbahaee University, Iran. (in Persian)

12. Fathi, S., & Seyyedian Hashemi, S. H. (2020). The Effect of Selective Macroeconomic Variables on the Options Market Efficiency; Meta-Analysis of the Violation of Options Arbitrage Restrictions. *Journal of Financial Management Perspective*, *10*(30), 81-98. (in Persian)

13. Ghasemi, F. (2015). *The Role of Options Contract in Islamic Finance (With emphasis on the capital market in Iran).* Payam Noor University, Iran. (in Persian)

14. He, X. J., & Zhu, S. P. (2018). A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate. *Journal of computational and applied mathematics*, *335*, 323-333.

15. Hull, J. C. (2021). *Option, Futures, and Other Derivatives: Eleventh Edition* . New York: Pearson.

16. Kim, Y. J. (2002). Option pricing under stochastic interest rates: an empirical investigation. *Asia-Pacific Financial Markets*, *9*, 23-44.

17. Kim, Y. J., & Kunitomo, N. (1999). Pricing options under stochastic interest rates: a new approach. *Asia-Pacific Financial Markets*, *6*, 49-70.

18. Kwok, Y. K. (2008). *Mathematical models of financial derivatives*. Springer.

19. Malekmohamadi, S. (2021). *Performance Comparison of Option Pricing Models in Tehran Stock Exchange.* Allameh Tabataba'i University, Iran. (in Persian)

20. Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, 141-183.

21. Munk, C. (2011). *Fixed income modelling*. Oxford University Press.

22. Namavar, F. (2014). *Research European option pricing under volatility interest rate in companies listed on the Stock Exchange.* University of Science & Culture, Iran. (in Persian)

23. Neisy, A., Maleki, B., & Rezaeian, R. (2016). The Parameters Estimation of European Option pricing model under Underlying Asset with Stochastic Volatility by Loss Function Method. *Financial Engineering and Portfolio Management*, *7*(28), 91-115. (in Persian)

24. Neisy, A., Safaei, M., & Nematollahi, N. (2018). A Numerical method for solving the problem of Pricing American Options under the CIR stochastic interest rate model. *Financial Engineering and Portfolio Management*, *9*(35), 259-281. (in Persian)

25. Peymany, M., & Hooshangi, Z. (2017). Estimation and Comparison of Short-Term Interest Rate Equilibrium Models Using Islamic Treasury Bills. *Financial Engineering and Portfolio Management*, *8(*33), 89-111. (in Persian)

26. Rabinovitch, R. (1989). Pricing stock and bond options when the default-free rate is stochastic. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *24*(4), 447-457.

27. Rafiee, M., Hesarzadeh, R., & Nasirzadeh, F. (2020). The impact of Tedan system analytical reports on the informational efficiency of Tehran Stock Exchange. *Journal of Financial Management Perspective*, *10*(32), 109-130. (in Persian)

28. Rindell, K. (1995). Pricing of index options when interest rates are stochastic: an empirical test. *Journal of Banking & Finance*, *19*(5), 785-802.

29. Saadaei Jahromi, S. (2022). *Option Pricing Using Machine Learning.* Allameh Tabataba'i University, Iran. (in Persian)

30. Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, *5*(2), 177-188.

استناد

پیمانی ، مسلم؛ امیری، میثم و سکوت ، سید محمد (۱۴۰۲). ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله با نرخ سود تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران. *چشم‌انداز مدیریت مالی*، ۱۳(۴۱)، ۹۱-۱۱۵.

Citation

Peymany, Moslem; Amiri, Meysam & Sokout, Seyed Mohammad (2023). Option Pricing Using Stochastic Interest Rate in Tehran Stock Exchange. *Journal of Financial Management Perspective*, 13(41), 91 - 115. (*in Persian*)