

تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی دوره اول متوسطه ایران بر اساس تعابیر مختلف احتمال

مجتبی اسکندری^۱، ابراهیم ریحانی^۲، زهرا رحیمی^۳ و احسان بهرامی سامانی^۴

چکیده

هدف از انجام مطالعه حاضر، تحلیل محتوای بخش احتمال در کتاب‌های درسی ریاضی دوره اول متوسطه ایران بر اساس تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال است. این پژوهش، از نظر هدف، کاربردی و از نظر نحوه گردآوری داده‌ها توصیفی محسوب می‌شود. رویکرد پژوهش، کمی است و با روش تحلیل محتوای مقوله‌ای انجام شده است. جامعه آماری، کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های هفتم، هشتم و نهم چاپ ۱۴۰۰ و نمونه، به صورت هدفمند، بخش احتمال این کتاب‌ها انتخاب شده است. ابزار پژوهش، فرم تحلیل محتوای محقق‌ساخته بر اساس تعابیر سه‌گانه احتمال است. روایی محتوایی و صوری ابزار پژوهش توسط تنی چند از اعضای هیئت علمی دانشگاه‌های کشور در رشته‌های آموزش ریاضی، آمار و برنامه‌ریزی درسی و مؤلفین کتب درسی ریاضی مورد تأیید قرار گرفت. جهت اطمینان از پایایی روش کدگذاری، درصد توافق بین کدگذاران محاسبه شد. یافته‌های پژوهش نشان داد که ۷۶ درصد از تکالیف موجود در بخش احتمال کتب درسی ریاضی دوره اول متوسطه بر حسب تعبیر کلاسیک طراحی شده است و دو تعبیر دیگر فقط ۲۴ درصد از تکالیف را در بر می‌گیرد. از این ۲۴ درصد، فقط ۵ درصد به تعبیر فراوانی‌گرا مرتبط است و این میزان برای تعبیر فراوانی‌گرا، به عنوان مکمل تعبیر کلاسیک کافی به نظر نمی‌رسد. بررسی‌های تکمیلی نشان داد که در سه کتاب مزبور، فقط یک تکلیف با هدف برقراری ارتباط بین تعابیر احتمال طراحی شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل محتوا، کتاب‌های درسی ریاضی، دوره اول متوسطه، تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال

۱. دانشجوی دکتری رشته آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران، ایران mojtabae66@gmail.com
 ۲. دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران، ایران (نویسنده مسئول) e_reyhani@sru.ac.ir
 ۳. استادیار گروه آموزش و پرورش، دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکده روانشناسی و علوم تربیتی، تهران، ایران za.rahimi@atu.ac.ir
 ۴. دانشیار گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، تهران، ایران e_bahrami@sbu.ac.ir
- این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی طبق ابلاغ گزنت شماره ۵۰۳۲ مورخ ۱۴۰۲/۳/۶ انجام گردیده است.
تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۲۳ تاریخ دریافت مقاله نهایی: ۱۴۰۲/۳/۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۲۴

مقدمه

کاربرد گسترده مفاهیم احتمال در علوم مختلف و در زندگی روزمره، ضرورت وجود مباحث مربوط به آن را در آموزش مدرسه‌ای و به تبع آن در اسناد برنامه‌درسی و کتاب‌های درسی ریاضی توجیه می‌کند. دانش‌آموزان با مفهوم تصادفی بودن^۱ نه تنها در کلاس‌های ریاضی، بلکه در فعالیت‌های بیولوژیکی، اقتصادی، هواشناسی، سیاسی و اجتماعی (بازی‌ها و ورزش) روبرو می‌شوند (Batenero & Diaz, 2012). لزوم آموزش احتمال باعث شده است که این شاخه از ریاضیات در برنامه‌درسی بسیاری از کشورها در دوره ابتدایی یا متوسطه اول گنجانده شود و در دوره متوسطه دوم ادامه یابد (Langrall, 2018). در کشور ما نیز مفاهیم مرتبط با احتمال از پایه دوم دبستان در کتاب‌های درسی ریاضی معرفی شده و در دوره‌های متوسطه اول و دوم توسعه یافته است. در برنامه درسی ملی ایران هم، احتمال به عنوان یکی از مفاهیم قلمرو حوزه آموزش ریاضیات مورد تاکید قرار گرفته است (ص ۳۴). با این حال، صرف گنجاندن احتمال در برنامه‌درسی یا کتاب‌های درسی، ایجاد درک کامل و معنادار از مفاهیم احتمال را تضمین نخواهد کرد.

تدریس و یادگیری احتمال مانند سایر شاخه‌های ریاضیات با چالش‌هایی روبرو است که برخی از آنها مختص خود احتمال است. به عنوان مثال، دیدگاه چندوجهی^۲ احتمال یا عدم برگشت‌پذیری^۳ آزمایش‌های تصادفی، معمولاً در زمینه‌های دیگر [ریاضیات] یافت نمی‌شود و لذا مشکلاتی را برای معلمان و دانش‌آموزان ایجاد می‌کند (Batenero et al, 2016). منظور از دیدگاه چندوجهی، تعابیر و معانی مختلفی است که از احتمال وقوع یک پیشامد، در طی تاریخ شکل‌گیری و توسعه نظریه احتمال به وجود آمده است. این تعابیر در برنامه‌های درسی و کتب درسی به یک اندازه مورد توجه قرار نگرفته‌اند (Martin et al, 2022; Gandhi, 2022; Kazk & Leavy, 2018; Jones et al, 2007). در حال حاضر سه تعبیر (معنی) اساسی احتمال که در ریاضیات مدرسه‌ای مورد کاربرد و تأکید قرار گرفته، تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی^۴ است. به این تعابیر در کتب و پژوهش‌های مختلف پرداخته شده است (به عنوان مثال، Batenero et al, 2005; Jones et al, 2007; Behboodian, 2011; Burgos et al, 2022; Kazk & Borovcnik, 2016; 2018; Nikiforido, 2018; Odafe, 2011; Leavy, 2018; Borovcnik & Kapadia,

بر اساس تعبیر کلاسیک که در زمینه بازی‌های شانس ایجاد شده است، احتمال یک پیشامد، نسبت تعداد برآمدهای مطلوب به تعداد کل برآمدهای هم‌احتمال^۵ است. تعبیر فراوانی‌گرا، احتمال یک پیشامد را به عنوان مقدار حد فراوانی نسبی آن پیشامد پس از تعداد زیادی آزمایش^۶ در نظر

¹. Randomness

². Multifaceted view

³. Lack of reversibility

⁴. Classical, Frequentist and Subjective

⁵. Equally likely

⁶. Trial

می‌گیرد و از دیدگاه ذهنی احتمال به‌عنوان درجه‌ای شخصی از باور (یا قدرت قضاوت) نسبت به رخ دادن یک پیشامد، تعبیر می‌شود (Kazk & Leavy, 2022). هر سه تعبیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی مورد نقد قرار گرفته‌اند، با این وجود هر کدام از آنها در طی تاریخ ظهور و رشد نظریه احتمال نقشی عمده ایفا کرده و در دوره‌های مختلف سنی و تحصیلی، در ایجاد معنی احتمال وقوع یک پیشامد در ذهن افراد، مؤثر و کارآمد بوده‌اند.

مرور مطالعات نشان می‌دهد که آموزش مفهوم احتمال یک پیشامد تصادفی، مستلزم طراحی و اجرای تکالیفی است که تعابیر سه‌گانه احتمال را به‌طور هم‌زمان در نظر داشته و مورد استفاده و مقایسه قرار دهد. به عبارتی، آموزش احتمال نمی‌تواند به هیچ یک از این سه تعبیر محدود شود؛ زیرا همه آنها به لحاظ دیالکتیکی و تجربی درهم تنیده‌اند (Batanero & Diaz, 2007) و در مقایسه با یکدیگر، امکانات متفاوتی را برای تفسیر موقعیت‌ها به‌صورت تصادفی فراهم می‌کنند (Eichler & Vogel, 2014). به عنوان مثال تمرکز بر رویکرد کلاسیک به صورت مجزا منجر به تقلیل درک احتمال به شمارش پیشامدهای ابتدایی و استفاده افراطی از ترکیبیات می‌شود و تمرکز صرف بر رویکرد فراوانی‌گرا به دلیل ماهیت تجربی آن، مسائل تعلیمی مانند سردرگمی بین مشاهده واقعیت (فراوانی تثبیت شده) و دانش نظری (احتمال) را ایجاد می‌کند (Chaput et al, 2011). لذا اگر می‌خواهیم دانش‌آموزان درک خوبی از احتمال داشته باشند و بتوانند آن را در موقعیت‌های عملی به کار ببرند، تفسیر کلاسیک و فراوانی‌گرا را نباید از هم جدا کرد. برجسته کردن ایده‌های اصلی هر سه رویکرد با استفاده از دیدگاه‌های فلسفی زیربنایی آن -از جمله زمینه تاریخی ظهور آنها- باعث مشخص شدن جنبه‌های مهمی می‌شود که هنگام تأمل و برنامه‌ریزی برای تدریس احتمال، باید مورد توجه معلمان واقع شود (Eichler & Vogel, 2014).

محتوای کتاب درسی، یکی از نخستین بسترهای آموزش مدرسه‌ای است که می‌تواند محملی برای توجه مناسب به تعابیر مختلف احتمال فراهم کند و در عین حال راهنمای عمل معلمان باشد. بخصوص در نظام آموزشی متمرکز ایران که کتاب‌های درسی در سراسر کشور، مشترک بوده و مسئولیت معلمان، تدریس بر اساس محتوای ارائه شده در این کتاب‌هاست. به همین لحاظ، محتوای مناسب کتب درسی، از اهمیتی ویژه برخوردار است. این موضوع در برخی استان‌ها و مناطق کمتر برخوردار -که کتب درسی تنها منبعی است که در دسترس دانش‌آموزان قرار دارد- و در دروسی نظیر ریاضیات که آموزش آن با چالش‌های بیشتری همراه است، اهمیتی مضاعف می‌یابد. از این رو بسیاری از مطالعات به تحلیل محتوای کتاب‌های درسی می‌پردازند تا از انسجام و اعتبار محتوای کتب درسی و مطابقت آن با نتایج مستند پژوهش‌های معتبر ملی و بین‌المللی اطمینان نسبی حاصل کنند. این نوع تحلیل‌ها می‌تواند در ویرایش‌های آتی کتاب‌های درسی، رفع کاستی‌ها و نواقص احتمالی و نیز تأکید بر نقاط قوت آن، مبنایی علمی و متقن به‌دست دهد.

از سوی دیگر علی‌رغم توجه به تعابیر مختلف احتمال در مطالعات خارجی، پژوهش‌های داخلی کمتر بر این موضوع تمرکز داشته‌اند. بدین ترتیب، به لحاظ اهمیت رسالت کتاب‌های درسی و نیز لزوم پرداختن به تعابیر مختلف احتمال در این کتب به منظور ایجاد درکی جامع از مفهوم احتمال نزد دانش‌آموزان، این پژوهش به تحلیل کتاب‌های درسی ریاضی در دوره اول متوسطه ایران بر اساس تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی پرداخته است. محققین این مطالعه قصد دارند ضمن معرفی نسبتاً مبسوط تعابیر احتمال، میزان توجه به این تعابیر را در کتب مذکور، مورد بررسی و کنکاش قرار دهند. نتایج این تحلیل می‌تواند مورد استفاده مؤلفین کتب درسی ریاضی و آموزشگران ریاضی قرار گرفته و در نهایت موجب ارتقای سطح آموزش مفاهیم احتمال در دوره متوسطه اول و نیز دوره‌های دیگر، گردد. بدین ترتیب، پژوهش حاضر در صدد پاسخ‌گویی به سؤالات زیر است:

۱- کتاب درسی ریاضی پایه هفتم ایران، به هر یک از تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال چگونه و به چه میزان پرداخته است؟

۲- کتاب درسی ریاضی پایه هشتم ایران، به هر یک از تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال چگونه و به چه میزان پرداخته است؟

۳- کتاب درسی ریاضی پایه نهم ایران، به هر یک از تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال چگونه و به چه میزان پرداخته است؟

۴- کتاب‌های درسی ریاضی دوره اول متوسطه ایران، به هر یک از تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال و نیز نحوه ارتباط بین آنها، چگونه و به چه میزان پرداخته است؟

بنابراین، پس از اشاره مختصر به تاریخچه شکل‌گیری تعابیر احتمال، به تشریح چستی آنها پرداخته و سپس اهمیت توجه هم‌زمان به این تعابیر، به منظور ایجاد درک دقیق و عمیق نسبت به مفهوم احتمال، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در نگاه تاریخی به مباحث مربوط به احتمال، چنین به نظر می‌رسد که ایده‌شناسی به قدمت تمدن است، اما برداشت‌های مختلفی از آن وجود دارد که تاریخ تفکر را تا به امروز در بر گرفته است (Batanero et al, 2005). از نظر تاریخی، از دوره رنسانس تا کنون بازی‌های شانسی رواج داشته‌اند. مردم در خلال بازی‌های شانسی، ایده‌های شهودی درباره فراوانی وقوع پیشامدهای معین و در نتیجه احتمال وقوع آنها به دست می‌آوردند، ولی مطالعات سازمان‌یافته درباره شانسی وقوع پیشامدها تا قرن پانزدهم هنوز آغاز نشده بود (Jahanipour, 1998). احتمال از زمان ظهور خود از دو منظر اصلی، هرچند متفاوت، تصور شده است. جنبه آماری^۱ احتمال که به ضرورت یافتن قوانین ریاضی عینی حاکم بر فرایندهای تصادفی مربوط است و در آن، مقادیر احتمال از طریق داده‌های جمع‌آوری شده از پیمایش‌ها و آزمایش‌ها، تخصیص داده می‌شود. مکمل

^۱. Statistical side

این چشم‌انداز، جنبه معرفتی^۱ است که احتمال را به‌عنوان درجه اعتقاد شخصی می‌داند^۲ که به اطلاعاتی که فرد در دسترس دارد، بستگی دارد (Hacking, 1975, cited in Batanero et al, 2016). مفهوم احتمال یک پیشامد خاص از یک آزمایش، موضوعی است با معانی و تفاسیر مختلف. برای مثال عبارت «شانس وجود نفت در یک ناحیه معین ۶۰٪ است» را به دو طریق می‌توان تعبیر کرد. نخست اینکه در ۶۰٪ از نواحی که شرایط ظاهری محیطی آنها شبیه به شرایط حاکم بر نواحی تحت بررسی است، به مرور زمان نفت یافت می‌شود. تعبیر دیگر این است که وجود نفت در این ناحیه بیشتر قابل قبول است تا عدم وجود آن و این میزان برابر ۶/۰ است. دو تعبیر مذکور از احتمال یک پیشامد، [به ترتیب] تعبیر فراوانی و تعبیر ذهنی (یا شخصی) احتمال نامیده می‌شود (2003 Ross).

در پژوهش‌های انجام شده در زمینه آموزش ریاضی مدرسه‌ای و به‌طور خاص آموزش احتمال، سه تعبیر کلاسیک (هم‌شانسی یا نظری)، فراوانی‌گرا (عینی یا تجربی) و ذهنی (شخصی) از احتمال به کرات مورد بررسی و تأکید قرار گرفته‌اند.

۱) **تعبیر احتمال به طریق کلاسیک:** رویکرد کلاسیک با Laplace و اثر پیشگامانه‌اش «مقاله فلسفی در مورد احتمال»^۳ در سال ۱۸۱۴، مرتبط است. بر این اساس، احتمال یک پیشامد به وسیله کسری از برآمدهای مطلوب برای آن پیشامد بر فضای نمونه به‌دست می‌آید. این رویکرد، از یک فرض ضمنی هم‌شانسی برای همه برآمدهای منفرد فضای نمونه استفاده می‌کند و رویکردی «پیشینی»^۴ به احتمال است که امکان محاسبه احتمال را قبل از انجام هر آزمایشی فراهم می‌کند (Borovcnik et al, 1991). این تعبیر، مفهوم هم‌شانسی یا مفهوم نظری احتمال نیز نامیده می‌شود. محاسبه احتمال پیشامد آمدن «مجموع ۷» در دو بار پرتاب یک تاس سالم یا «حداقل دو بار رو» در چهار پرتاب یک سکه سالم، بدون اینکه چنین آزمایش‌هایی در واقعیت و به صورت عملی اتفاق بیفتند، مثال‌هایی از کاربرد این رویکرد است.

بر این تعریف نقدهایی وارد است. به عنوان مثال، این تعبیر با مفهوم هم‌شانسی مرتبط است و استفاده از عبارت هم‌شانسی برای دو پیشامد، معادل داشتن احتمال برابر است. در واقع این تعریف از احتمال، دچار یک دور است. همچنین، اگرچه هم‌شانسی در برخی موقعیت‌ها مانند انجام یک بازی شانسی روشن است، اما به سختی می‌توان آن را جایی بیرون از بازی‌های شانسی پیدا کرد. در واقع موقعیت‌هایی با احتمال‌های برابر، بیشتر مصنوعی هستند تا واقعی، بنابر این فرض هم‌شانسی پیشامدها، مانع استفاده از احتمال برای طیف گسترده‌ای از پدیده‌های طبیعی می‌شود (Nasiri, 2006; Borovcnik & Kapadia, 2018; Behboodian, 2011). علاوه بر این، از نقطه نظر ریاضی، احتمال

¹. Epistemic side

². Personal degree of belief

³. Essai Philosophique sur les les Probabilités

⁴. Priori

Laplacian فقط در مجموعه متناهی^۱ از برآمدهای ممکن در یک فرآیند تصادفی قابل استفاده است و در مورد مجموعه نامتناهی نمی‌توان این رویکرد احتمال را اتخاذ کرد (Eichler & Vogel, 2014).

۲) **تعبیر احتمال به طریق فراوانی گرا:** در تعبیر فراوانی گرا، تخمین احتمال بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده از طریق یک آزمایش تصادفی یا شبیه‌سازی رفتار پدیده، مورد نظر است. این تخمین‌ها زمانی تثبیت می‌شوند که آزمایش یا شبیه‌سازی چندین بار تکرار شود و تغییرات مشهود در تخمین‌های فراوانی نسبی، کاهش یابد. اگر هیچ راهی برای فرض هم‌احتمالی برآمدهای یک پدیده تصادفی نظری وجود نداشته باشد، آنگاه رویکرد فراوانی گرا ممکن است تنها راه تخمین احتمال باشد (English & Watson, 2016). معرفی قانون اعداد بزرگ توسط Bernoulli منشأ معنای فراوانی گرای احتمال بود: اگر آزمایشی تصادفی بارها به اندازه کافی تکرار شود، احتمال اینکه فاصله بین فراوانی مشاهده شده یک پیشامد و احتمال وقوع آن پیشامد، کوچکتر از مقدار معین باشد، می‌تواند [به مقدار دلخواه] به ۱ نزدیک شود. این تعریف، محاسبه احتمال را به آزمایش‌هایی با پیشامدهای غیرهم‌شانس بسط می‌دهد (Burgos et al, 2022). به بیان دیگر، اگر آزمایشی را تحت شرایط یکسان n بار تکرار کنیم و r بار پیشامد E در این n آزمایش رخ دهد. می‌گوئیم r فراوانی و کسر $\frac{r}{n}$ فراوانی نسبی پیشامد E در این آزمایش است. حال اگر n را بزرگ کنیم، r هم بزرگ شده یا ثابت می‌ماند و این باعث می‌گردد $\frac{r}{n}$ دست‌خوش نوسان شود. با این حال کسر $\frac{r}{n}$ ، با وجود همه نوسان‌ها، سرانجام به سمت عدد ثابتی، که آن را احتمال پیشامد E به طریق فراوانی نسبی می‌نامند، گرایش پیدا می‌کند (Behboodian, 2011). تعبیر احتمال به طریق فراوانی گرا را تعبیر عینی یا تجربی هم می‌نامند. «در یک کیسه ۴ مهره قرمز و یک مهره آبی وجود دارد. بدون نگاه کردن و با جای‌گذاری، ۵۰ بار یک مهره از کیسه خارج کنید و سپس بر مبنای نتایج مشاهده شده، احتمال استخراج مهره قرمز از کیسه مفروض را برآورد کنید»، مثالی از مسائلی است که با رویکرد فراوانی گرا می‌توان پاسخ آن را به دست آورد.

به این تعبیر نیز نقدهایی وارد است. انجام آزمایش‌های مکرر تحت شرایط کاملاً یکسان در عمل میسر نیست و تعبیر فراوانی گرا، مقدار دقیق احتمال یک پیشامد را ارائه نمی‌دهد و فقط یک تخمینی از آن به دست می‌دهد. بعلاوه وقتی تکرار یک تجربه به دفعات بسیار زیاد غیرممکن باشد، نمی‌توان برآورد آن را پیدا کرد و تصمیم‌گیری در مورد تعداد آزمایش‌های مورد نیاز برای برآورد مناسب احتمال یک پیشامد بسیار دشوار است (Chaput et al, 2011; Behboodian, 2011; Ross, 1997). (Kapadia & Borovcnik, 2018).

^۱. Finite

۳) **تعبیر احتمال به طریق ذهنی:** اگر احتمال پیشامدی به عنوان میزان یقین و عقیده شخص بر اساس اطلاعات، تجربیات و احساسی که نسبت به وقوع آن دارد تلقی گردد، می‌گویند احتمال به طریق شخصی تعبیر شده است (Behboodian, 2011). فرض اساسی در اینجا این است که افراد، احتمال خاص خود را دارند که از یک الگوی ترجیح ضمنی بین تصمیمات ناشی می‌شود (et al, 1991). به پیشنهاد Godino et al (1987)، می‌توان معنای ذهنی احتمال را در دوره ابتدایی به روشی شهودی معرفی کرد؛ این رویکرد شامل تخصیص احتمالات کیفی به پیشامدها یا مکان‌یابی این پیشامدها در پیوستار احتمال^۱ [غیرممکن، بعید، به احتمال مساوی، محتمل، تقریباً قطعی، و قطعی^۲] و سپس تجدیدنظر در این احتمالات پس از کسب تجربیات جدید یا از طریق استفاده از احتمال شرطی است (Gómez-Torres et al, 2016). احتمالات ذهنی به عوامل متعددی نظیر دانش فرد^۳، شرایط مشاهده شخص، نوع پیشامدی که عدم قطعیت آن منعکس می‌شود و داده‌های موجود در مورد پدیده‌های تصادفی بستگی دارد. دیدگاه ذهنی در مورد احتمال، ارتباط نزدیکی با فرمول بی‌زی^۴ دارد که امکان تجدیدنظر در تخمین «پیشینی» احتمال، با پردازش اطلاعات جدید و تخمین یک احتمال «پسینی»^۵ جدید را فراهم می‌کند (Eichler & Vogel, 2014). در این دیدگاه، برای رساندن معنی^۶ احتمال، نیازی به تکرار موقعیت مشابه نیست (Batanero et al, 2016). برای مثال وقتی پزشکی احتمال زنده ماندن بیمار را زیاد قلمداد می‌کند، این اظهار صرفاً حاکی از اطلاعات و عقیده اوست و ممکن است نظر یک فرد غیرمتخصص، یا حتی پزشک دیگر با او یکی نباشد (Behboodian, 2011). لذا در دیدگاه ذهنی، اختلاف نظر در مورد وضعیت علمی نتایجی که به قضاوت‌های شخصی بستگی دارد، باقی است (Batanero & Díaz, 2012). این نوع تعیین احتمال اغلب جنبه کیفی و احساسی دارد و برای پایه‌ریزی تئوری احتمال لازم است آنرا به‌نحوی به جنبه کمی تبدیل کرد (Behboodian, 2011).

سه تعبیر فوق در اکثر پژوهش‌های مربوط به آموزش احتمال که به بررسی معانی چندگانه احتمال پرداخته‌اند، به عنوان تعابیر اصلی و مرتبط با ریاضیات مدرسه‌ای مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. تعابیر دیگری از احتمال نیز وجود دارد که در ادامه مورد تشریح قرار می‌گیرد.

تعبیر شهودی:^۷ تعبیر شهودی به برداشت‌های اولیه و نادقیق انسان‌ها قبل از شکل‌گیری علمی نظریه احتمال و نیز درک کودکان قبل از آشنایی با مفاهیم رسمی احتمال اشاره دارد. ردپای احتمال را می‌توان در فرهنگ‌های باستانی مانند بابلی‌ها یافت (Borovcnik et al, 1991). این ایده‌های مربوط

¹. Probability continuum

². Impossible, unlikely, evenly likely, likely, almost certain, and certain

³. Subject

⁴. Bayesian formula

⁵. A posteriori

⁶. Sense

⁷. Intuitive

به شانس، احتمال و بازی‌های شانسی که در اوایل تاریخ در فرهنگ‌های مختلف ظهور کردند خیلی مبهم [شهودی] بودند، لذا به ایده اختصاص اعداد به پیشامدهای غیرقطعی نیاز بود تا بتوان درست‌نمایی^۱ آنها را مقایسه و ریاضیات را در جهان وسیع عدم قطعیت^۲ اعمال کرد (Batenero & Díaz, 2012). ایده‌های شهودی در مورد شانس و احتمال همچنین در کودکان خردسال ظاهر می‌شود که از عبارات کیفی (مانند «ممکن^۳» یا «بعید») برای بیان درجه اعتقاد خود به وقوع پیشامدهای تصادفی استفاده می‌کنند. این ایده‌های شهودی می‌توانند توسط معلم برای کمک به کودکان در درک کامل‌تر و استفاده از احتمالات به عنوان ابزاری برای مقایسه درست‌نمایی پیشامدهای مختلف، استفاده شوند (Batenero et al, 2016).

معنای ریاضی (اصل موضوعی^۴): در طول قرن بیستم، برخی ریاضی‌دانان سعی کردند نظریه ریاضیات احتمال را صورت‌بندی^۵ کنند. به دنبال کار Borel در مورد نظریه مجموعه‌ها و اندازه‌گیری، Kolmogorov، که دیدگاه فراوانی‌گرا را تأیید می‌کرد، یک نظریه اصل موضوعی را استنتاج کرد (Batenero et al, 2016). وی از نظریه مجموعه‌ها و نظریه اندازه استفاده کرد و از انتگرال لیبگ برای به‌دست آوردن یک سیستم اصل موضوعی رضایت‌بخش استفاده کرد، که توسط مکاتب مختلف، پذیرفته شد (Batenero & Díaz, 2012).

بررسی پژوهش‌های انجام شده در حیطه تعابیر احتمال، حاکی از توجه بیشتر به تعابیر کلاسیک و فراوانی‌گرا نسبت به تعبیر ذهنی است. به عنوان مثال، Steinbrin (1991) بیان می‌دارد که یک اصل آموزشی مهم در سیستم‌های تکالیف آمار و احتمال^۶، کار موازی، هم در سطح آزمایشی/تجربی و هم در سطح مدل‌سازی نظری است. هر دو سطح باید به یکدیگر مرتبط باشند و از اتکای بی‌مورد به یکی از این دو حالت باید اجتناب شود. به این معنا، دو وجه احتمال، یعنی احتمال لاپلاسی و احتمال به عنوان فراوانی نسبی، باید به عنوان اشکال مشابهی از یک مفهوم و بدون اینکه از یکدیگر تمیز داده شوند، با هم مرتبط شوند. Stohl (2005) نیز معتقد است در روش تدریسی که رویکردهای کلاسیک و فراوانی‌گرا به‌طور توأمان استفاده شود، دانش‌آموزان می‌توانند شهودهای احتمالاتی مناسب‌تری ایجاد کنند و از شکل‌گیری برخی بدفهمی‌ها جلوگیری می‌شود. به تعبیر دیگر، توسعه پداگوژی مؤثر، مستلزم طرح‌های آموزشی مناسبی است که هماهنگی احتمال تجربی با احتمال نظری را تسهیل می‌کند (Prodromou, 2012).

مطالعه پیشینه پژوهشی مطالعات موجود، حاکی از فقر توجه پژوهش‌های داخلی به آموزش احتمال است. نزدیک‌ترین مطالعات به مسأله پژوهش حاضر، پژوهش پیمایشی Kahaki et al (2019)

¹. Likelihood

². Uncertainty

³. Probable

⁴. Axiomatic

⁵. Formalise

⁶. Stochastics

است که به بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه هشتم در مورد مفهوم احتمال پرداخته و در نهایت، هفت دسته از بدفهمی‌های احتمالاتی را شناسایی و معرفی کرده است. در پژوهش مشابه دیگری Rabbani (2013) به شناسایی اشتباهات مفهومی دانشجویان در مبحث احتمال شرطی پرداخته و معتقد است دانشجویان احتمال شرطی را به صورت رویه‌ای^۱ درک کرده و خود را ملزم به یادگیری مفاهیم اولیه نمی‌کنند.

در مطالعات خارجی با اقبال بیشتری نسبت به بررسی تعابیر سه‌گانه احتمال مواجه هستیم. برخی پژوهش‌ها به لزوم آموزش احتمال بر مبنای هر سه رویکرد تأکید کرده‌اند. برای مثال، Batanero & Díaz (2007) پس از تشریح تعابیر مختلف احتمال بیان کرده‌اند که آموزش [احتمال] نمی‌تواند به هیچ یک از این معانی مختلف محدود شود و همه آنها به لحاظ دیالکتیکی و تجربی درهم تنیده‌اند. Eichler & Vogel (2014) نیز معتقدند که در فرایند آموزش احتمال، روشن کردن روابط متقابل و تفاوت بین سه رویکرد کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی مفید است. آنها دانش مربوط به تمایز و ارتباط بین احتمال «پیشینی» (رویکرد کلاسیک) و احتمال «پسینی» (رویکرد فراوانی) و همچنین ترکیب احتمال «پیشینی» و «پسینی» (رویکرد ذهنی) را به عنوان دانشی که معلمان باید داشته باشند، مطرح کردند. Dollard (2011) هم در پژوهش خود، با اشاره به بدفهمی‌های مختلف دانشجو معلمان دوره ابتدایی در مورد تفسیرهای کلاسیک و فراوانی‌گرا، بر آموزشی که شامل معانی مختلف احتمال، از جمله ذهنی، کلاسیک و فراوانی‌گرا باشد، تأکید می‌کند.

برخی پژوهشگران میزان و نحوه پرداختن به تعابیر سه‌گانه احتمال در اسناد برنامه درسی و کتاب‌های درسی ریاضی را بررسی کرده‌اند. به عنوان مثال Jones et al (2007) در پژوهشی به بررسی عناصر کلیدی احتمال در اسناد برنامه‌درسی ایالات متحده (۱۹۸۹)، استرالیا (۱۹۹۱) و بریتانیا (۱۹۸۹) پرداختند. آنها با بررسی و مقایسه عناصر کلیدی احتمال در سه دوره ابتدایی، متوسطه اول و متوسطه دوم، به این نتیجه رسیدند که در سه سند مذکور، به‌ویژه در دوره متوسطه دوم، بر دو رویکرد کلاسیک و فراوانی‌گرا نسبت به رویکرد ذهنی، تأکید بیشتری شده است. Gómez & Contreras (2014) نیز با بررسی برنامه‌درسی اسپانیا نشان دادند که این برنامه‌درسی در دوره اول (۶-۸ سالگی) شامل موضوعات مرتبط با معنای شهودی احتمال است. در دوره دوم (۸ تا ۱۰ سالگی) آمار و احتمال را به هم متصل و معانی ذهنی و فراوانی را معرفی می‌کند و معانی کلاسیک و فراوانی‌گرا را تا حدی در دوره سوم (۱۰-۱۲ سالگی) رسمی‌سازی می‌کند. Kurt & Coşkuntuncel (2020) نیز در بررسی برنامه‌درسی ترکیه به این نتیجه رسیدند که در برنامه‌درسی جدید منتشر شده، زمان اختصاص داده شده به احتمال کاهش یافته و تنها بر معنای کلاسیک احتمال تأکید شده است.

^۱. Procedural

و بسیاری از اهداف آموزشی که قبلاً در برنامه گنجانده شده بودند (مثلاً احتمال پیشامدهای وابسته) به سطح دبیرستان منتقل شده است.

از مطالعات مربوط به کتاب‌های درسی، به پژوهش Martin et al (2022) می‌توان اشاره داشت. این پژوهش با بررسی تکالیف احتمال در کتاب‌های درسی ایالت کبک^۱ کانادا گزارش می‌کند که تقریباً تمام تکالیف طوری طراحی شده‌اند که حل آنها نیازمند رویکرد نظری است و فضای کمی برای رویکرد فراوانی‌گرا وجود دارد. مطالعه Gandhi (2022) مطالعه دیگری است که با هدف کشف غالب‌ترین تفسیر احتمال نزد معلمان و با این فرض که ادراک معلمان تحت تأثیر کتاب‌های درسی قرار می‌گیرد، کتاب‌های درسی ریاضی متوسطه اول هند را بررسی کرده است. یافته‌های مطالعه وی نشان می‌دهد که در این کتاب‌ها، مفاهیم احتمال بیشتر از طریق تفسیر کلاسیک معرفی شده و فقط تعداد اندکی از مثال‌ها با رویکرد تجربی طراحی و ارائه شده است.

دسته دیگری از پژوهش‌ها، به دنبال راه‌کارهایی برای ارتباط دادن تعابیر سه‌گانه احتمال به یکدیگر بوده‌اند. اغلب این پژوهش‌ها بر مدل‌سازی و استفاده از شبیه‌سازی^۲ تأکید دارند. برای مثال et al Chaput (2011) در مطالعه‌ای با هدف بررسی رویکرد فراوانی‌گرا و تأثیر مدل‌سازی و شبیه‌سازی در یاددهی آمار و احتمال، ضمن پرداختن به دو رویکرد کلاسیک و فراوانی‌گرا و در جستجوی بهترین روش برای تدریس احتمال در مقطع متوسطه، ادعا می‌کنند که دیدگاه مدل‌سازی به ترکیبی بین این دو رویکرد دست می‌یابد. به اعتقاد آنها استفاده از مدل‌سازی در فرایند آموزش مفاهیم احتمال، رویکردهای کلاسیک و فراوانی‌گرا را به هم پیوند می‌دهد و در عین حال، به یادگیری فرآیند مدل‌سازی کمک می‌کند. آنها معتقدند که تقابل بین نتایج نظری به‌دست آمده از یک مدل و یک واقعیت تجربی، حائز اهمیت است و لذا باید در برنامه‌درسی مدرسه وجود داشته باشد.

مطالعه Prodromou (2012)، با هدفی مشابه به بررسی توانایی دانشجومعلمان ابتدایی در برقرار کردن پیوندی دوسویه بین احتمال تجربی و احتمال نظری، به موضوع پیوند بین دو تعبیر کلاسیک و فراوانی‌گرا پرداخته است. به‌زعم او از دانش‌آموزان انتظار می‌رود رویکردهای نظری و تجربی/آزمایشی احتمال را بررسی و مقایسه کنند. وی در بیان چگونگی انجام این بررسی و مقایسه، معتقد است دانش‌آموزان باید احتمالات را با استفاده از کسرها توصیف کنند، آزمایش‌های تصادفی را انجام دهند و فراوانی‌های مشاهده‌شده در آزمایش‌ها را با فراوانی‌های مورد انتظار مقایسه کنند تا نشان دهند که چگونه احتمال تجربی، زمانی که آزمایش چندین بار در شرایط یکسان انجام شود، به احتمال نظری نزدیک می‌شود. به نظر او معلمان نباید به استفاده از مواد عینی برای معرفی تجربی (یا آزمایشی) مفهوم احتمال و یافتن فراوانی‌های نسبی اکتفا کنند و در دسترس بودن گسترده رایانه‌ها، تحقیقات کلاسی را با استفاده از شبیه‌سازی‌ها، ترویج می‌کند.

^۱. Québec

^۲. Simulation

English & Watson (2016) نیز با ورود به این عرصه، به بررسی توسعه درک دانش‌آموزان کلاس چهارم، هنگام گذار^۱ از فراوانی‌های نسبی برآمدهای آزمایشی به احتمالات نظری، پرداخته‌اند. این مطالعه با تکیه بر رویکرد مدل‌سازی به بررسی موارد زیر می‌پردازد: انتظارات اولیه دانش‌آموزان از نتایج پرتاب سکه، چگونگی تغییر انتظارات آن‌ها با انجام تعداد تکراری آزمایش، و اینکه چگونه شبیه‌سازی کامپیوتری به درک دانش‌آموزان از رابطه بین تخمین‌های تجربی احتمالات و عدد حاصل از احتمالات نظری کمک می‌کند. محققین این مطالعه با ابراز نگرانی از باورهای شهودی دانش‌آموزان که می‌تواند از توسعه پیوندهای تجربی-نظری کم کند، بر لزوم در نظر گرفتن آنها در فرایند آموزش احتمال تأکید کرده و اذعان می‌دارند که مشارکت‌کننده‌های آنها از طریق مشاهده نتایج افزایش تعداد آزمایش‌ها از طریق شبیه‌سازی، رابطه بین فراوانی نسبی تجربی و احتمال نظری را درک کردند. آنها با تأکید بر اهمیت فرایند مدل‌سازی، معتقدند با درگیر کردن دانش‌آموزان خردسال در تمام مراحل فرآیندهای مدل‌سازی احتمالاتی، می‌توان درک اساسی برای پیوند بین تخمین‌های تجربی و احتمالات نظری، ایجاد کرد.

در مجموع، مرور پژوهش‌های انجام شده حاکی از لزوم پرداختن به تعابیر مختلف احتمال در برنامه‌درسی، کتب درسی و البته کلاس‌های درس ریاضی، به منظور ایجاد درک عمیق و معنادار از مفهوم احتمال است. با پذیرش اهمیت این موضوع و در نظر داشتن این‌که در مطالعات داخلی، پژوهشی با محوریت شناسایی و ردیابی تعابیر احتمال انجام نشده است، این پژوهش با تشریح تعابیر احتمال و نیز تحلیل کتاب‌های درسی ریاضی در دوره اول متوسطه بر اساس این تعابیر، درصدد پر کردن بخشی از خلاء موجود در این زمینه است.

روش‌شناسی پژوهش

رویکرد پژوهش حاضر کمی است و با روش تحلیل محتوا از نوع مقوله‌ای^۲ انجام شده است. این پژوهش از نظر هدف، کاربردی و از نظر نحوه گردآوری داده‌ها توصیفی است. از آنجا که در این مطالعه، مقولات و شاخص‌ها از قبل تعیین شده‌اند و محققان به دنبال یافتن مصادیق آنها در محتوای مورد نظر هستند، این پژوهش قیاسی محسوب می‌شود.

در مطالعه حاضر، جامعه آماری، کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های هفتم، هشتم و نهم چاپ ۱۴۰۰ است و بخش احتمال این کتب، به صورت هدفمند، به عنوان نمونه انتخاب شد. ساختار کتاب‌های ریاضی دوره اول متوسطه از سه بخش اصلی فعالیت، کار در کلاس و تمرین تشکیل شده است. در توضیح این سه بخش، در مقدمه کتاب ریاضی نهم (۱۴۰۰) چنین آمده است که «در انجام یک فعالیت به‌طور عمده آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم بودن در ساختن دانش، مد

^۱. Transition

^۲. Catagorical

نظر است. کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده و حل تمرین به عهده دانش‌آموزان است؛ اما ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.» در این مطالعه بخش احتمال هر سه کتاب درسی ریاضی بررسی شد تا مشخص شود در تکالیف ارائه شده در بخش‌های فعالیت، کار در کلاس و تمرین به هر یک از تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی و نیز نحوه ارتباط بین آنها، چگونه و به چه میزان پرداخته شده است.

از آنجا که در فرایند تحلیل محتوا، شاخص‌های هر مقوله باید به صورت روشن تعریف شود، جهت تحلیل و طبقه‌بندی دقیق و عینی تکالیف احتمال، با بررسی پیشینه موضوع و تعاریف نظری تعابیر سه‌گانه احتمال، شاخص‌های هریک از این تعابیر (مقوله‌ها) طبق جدول شماره ۱ تعیین شد. نسخه مشروح این جدول، پس از تأیید شدن روایی صوری و محتوایی آن توسط تنی چند از اعضای هیأت علمی دانشگاه‌های کشور در رشته‌های آموزش ریاضی، آمار و برنامه‌ریزی و نیز مؤلفین کتاب‌های درسی ریاضی در دوره اول متوسطه، به شکل فرم تحلیل محتوا (چک لیست) مورد استفاده قرار گرفت. به منظور تأمین پایایی کدگذاری، کلیه تکالیف بخش احتمال کتاب ریاضی پایه هفتم (۴۶ درصد از کل تکالیف) با استفاده از فرم تحلیل محتوای مذکور، توسط دو نفر از پژوهشگران، تحلیل و دسته‌بندی شد و ضریب توافق بین کدگذاران عدد ۰/۸۹ به دست آمد که میزان قابل قبولی است. پس از آن با استفاده از این ابزار، محتوای بخش احتمال هر سه کتاب ریاضی دوره اول متوسطه توسط کدگذار اول، مورد تحلیل قرار گرفت و نتایج مشخص شد.

جدول ۱- شاخص‌های دسته‌بندی تکالیف در تعابیر سه‌گانه

منابع	شاخص‌ها	تعابیر (مقوله)
Borovcnik et al (1991) Batenero & Diaz (2007) Behboodian (2011) Kapadia & Borovcnik (2018) Batenero et al (2021) Kazk & Leavy (2022)	تکالیفی شامل: ۱- فضای نمونه با برآمدهای هم‌شانس ۲- کسر حاصل از نسبت حالت‌های مطلوب به حالت‌های ممکن ۳- انتظار ۴- عادلانه بودن بازی شانسی (با فضای نمونه هم‌شانس)	کلاسیک
Batenero & Diaz (2007) Behboodian (2011) English & Watson (2016) Burgos et al (2022) Kazk & Leavy (2022)	تکالیفی شامل: ۱- آزمایش‌های تکرارپذیر ۲- ثبت پسینی داده‌ها ۳- محاسبه فراوانی نسبی ۴- تخمین احتمال برحسب فراوانی نسبی ۵- جدول فراوانی نسبی	فراوانی‌گرا
Borovcnik et al (1991) Batenero & Diaz (2007) Behboodian (2011)	تکالیفی شامل: ۱- قضاوت بر اساس تجارب شخصی	ذهنی

Eichler & Vogel (2014) Batenero et al (2016) Kazk & Leavy (2022)	۲- تخمین احتمال پیشامدها (که ممکن است غیرهم‌شانس باشد) به صورت کیفی ۳- اصلاح تخمین با استفاده از داده‌های جدید ۴- احتمال شرطی	
--	---	--

برای تحلیل محتوا، ابتدا تکالیفی که به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم به محاسبه یا برآورد احتمال یک پیشامد اختصاص داشت، مشخص شد (انتخاب واحدها). سپس همه واحدها (تکالیف تعیین شده در مرحله اول) با سه تعبیر احتمال (مقوله‌ها) و شاخص‌های آن مطابقت داده و در جدول مربوط ثبت شد. در نهایت واحدهایی که در هر مقوله قرار گرفتند، شناسایی و شمارش شدند و فراوانی آنها مورد بررسی قرار گرفت تا مشخص شود تکالیف به چه نسبتی در مقوله‌های سه‌گانه قرار می‌گیرند.

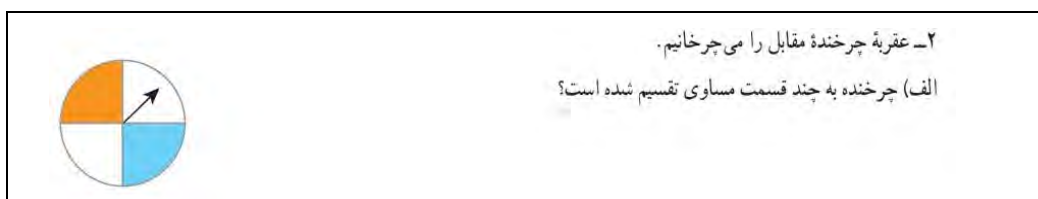
لازم به توضیح است که در کتاب‌های مذکور، دو دسته تکلیف مورد تحلیل قرار گرفت. یک دسته، تکالیفی که در آنها از دانش‌آموزان مستقیماً خواسته شده است تا احتمال یک پیشامد را محاسبه یا برآورد کنند (به صورت کمی یا کیفی). دسته دوم، تکالیفی که برای محاسبه احتمال یک پیشامد، یک قدم اولیه و اصلی محسوب می‌شوند. مثلاً تکالیفی که در آن از دانش‌آموزان خواسته شده تمام حالت‌های ممکن در یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه هم‌شانس را تعیین کنند؛ چون گام نخست و اصلی برای محاسبه یک پیشامد با روش کلاسیک است، در دسته تکالیف کلاسیک قرار می‌گیرد. همچنین، اگر تکالیفی شامل بیش از یک قسمت باشد، مثلاً قسمت‌های الف، ب، ج و...، هریک از قسمت‌ها به عنوان یک تکلیف مجزا محسوب و شمارش شده است. برای تکالیفی که دارای چند پرسش (بخش) هستند ولی توسط شماره یا حروف الفبا تفکیک نشده‌اند، به مؤلفین کتاب‌های درسی مراجعه شد و با آنها در این خصوص گفت و گو صورت گرفت. از گفت و گوهای انجام شده و نظرات مؤلفین، این اطمینان حاصل شد که، همسو با نظر محققین، پرسش‌های چندگانه این نوع تکالیف، در واقع، یک هدف واحد را دنبال می‌کنند و لذا به عنوان یک تکلیف شمارش شدند. برای تحلیل و مقایسه کمی بین داده‌ها، از فراوانی نسبی و درصد هریک از تعابیر، استفاده شد.

یافته‌های پژوهش

در این بخش، به منظور بررسی دقیق‌تر تکالیف بخش‌های احتمال و پاسخ‌گویی به سؤالات پژوهش، ابتدا یافته‌های مربوط به هریک از کتب پایه‌های هفتم، هشتم و نهم به‌طور جداگانه ارائه و بررسی شده است. در ادامه، داده‌های به‌دست آمده از سه کتاب با هم ادغام شده و مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است.

سؤال اول: کتاب درسی ریاضی پایه هفتم ایران، به هر یک از تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال چگونه و به چه میزان پرداخته است؟

بخش احتمال کتاب ریاضی پایه هفتم در مجموع ۶۲ تکلیف دارد که ۲۰ مورد در فعالیت، ۲۲ مورد در کار در کلاس و ۲۰ مورد در تمرین‌ها ارائه شده است. ۶ مورد از این تکالیف به احتمال وقوع یک پیشامد مرتبط نیست و لذا در هیچ یک از سه تعبیر اصلی احتمال دسته‌بندی نمی‌شود. مثالی از این موارد در شکل ۱ ارائه شده است.



شکل ۱- یک نمونه تکلیف از کتاب پایه هفتم که به احتمال وقوع یک پیشامد مرتبط نیست

۵۶ تکلیف باقی مانده، بر حسب نوع تعبیر مورد نظر، تحلیل شد. نتایج این تحلیل در جدول ۲

ارائه شده است.

جدول ۲- فراوانی و درصد تعابیر احتمال در کتاب ریاضی پایه هفتم


مجموع	ذهنی		فراوانی‌گرا		کلاسیک		نوع تعبیر بخش	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد		
۳۶	۲۰	۵۵	۱۱	۴۰	۲	۲۳	۷	فعالیت
۳۴	۱۹	۴۰	۸	۴۰	۲	۲۹	۹	کار در کلاس
۳۰	۱۷	۵	۱	۲۰	۱	۴۸	۱۵	تمرین
۱۰۰	۵۶	۱۰۰	۲۰	۱۰۰	۵	۱۰۰	۳۱	مجموع
۱۰۰		۳۶		۹		۵۵		درصد از کل

همانطور که در جدول ۲ مشهود است بیش از نیمی (۵۵ درصد) از تکالیف احتمال بر حسب تعبیر کلاسیک طراحی شده‌اند. این تکالیف طبق رویکرد Laplacian بر مبنای هم‌شانسی برآمدها در یک فضای نمونه طراحی شده‌اند و دانش‌آموزان به صورت پیشینی و بر حسب نسبت حالت‌های مطلوب به کل حالت‌های ممکن، اقدام به محاسبه می‌کنند. در این نوع تکالیف، نیازی به انجام کوشش فیزیکی یا آزمایش به صورت دستی یا با استفاده از رایانه نیست. این نوع تکالیف بیشتر بر مبنای آزمایش‌های تصادفی مصنوعی طراحی می‌شوند و روش‌های به کار رفته برای حل آنها قابلیت اجرایی در بسیاری از موقعیت‌های تصادفی زندگی روزمره را ندارد. با این حال، چون در آموزش معنای احتمال در موقعیت‌های تصادفی با برآمدهای هم‌شانس از قبیل پرتاب سکه و تاس، کارآمد

بوده و نیز با توجه به ضابطه ساده و قابل فهم آن در انجام محاسبات احتمالاتی، مورد اقبال معلمان و دانش‌آموزان هستند. نمونه‌ای از این تکالیف در شکل ۲ ملاحظه می‌شود.

ریاضی پایه هفتم صفحه ۱۲۰ (تعبیر کلاسیک)

۴- در هر کیسه فقط یک مهره سیاه وجود دارد و بقیه مهره‌ها سفیدند. از هر کیسه یک مهره را به صورت تصادفی بیرون می‌آوریم. احتمال بیرون آمدن مهره سیاه از کدام کیسه بیشتر است؟ چرا؟



شکل ۲- یک نمونه تکلیف با تعبیر کلاسیک احتمال از کتاب ریاضی پایه هفتم

طبق جدول ۲ تنها ۹ درصد از تکالیف فصل احتمال کتاب ریاضی پایه هفتم بر حسب تعبیر فراوانی‌گرا طراحی شده است. این تکالیف بیشتر جنبه تجربی و آزمایشی دارند و در آنها مقدار احتمال وقوع یک پیشامد پس از انجام آزمایش‌های مکرر و با تقسیم تعداد دفعات مشاهده یک برآمد معین بر کل آزمایش‌ها به دست می‌آید، از این رو بیشتر یک تخمین از احتمال وقوع پیشامد مفروض است تا مقدار واقعی آن. لذا، نتایج حاصل از رویکرد تجربی لزوماً برابر با نتایج حاصل از رویکرد نظری نیست. نمونه‌ای از تکالیف با تعبیر فراوانی‌گرا، در شکل ۳ آمده است.

ریاضی پایه هفتم صفحه ۱۲۱ (تعبیر فراوانی‌گرا)

۱- در یک کیسه ۱ مهره قرمز و ۲ مهره آبی قرار دهید. یک مهره را به صورت تصادفی از کیسه بیرون بیاورید و رنگ آن را یادداشت کنید. مهره را دوباره درون کیسه قرار دهید. این آزمایش را ۹ بار دیگر هم انجام دهید و جدول زیر را کامل کنید:

نوبت آزمایش	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
رنگ مهره										

جدولتان را با دوستانتان مقایسه کنید. آیا جدول همه با هم یکسان است؟
 در چه کسری از آزمایش‌ها مهره قرمز از کیسه بیرون آمد؟
 در چه کسری مهره آبی؟
 حاصل جمع این دو کسر را حساب کنید.
 پاسخ‌ها را با دوستانتان مقایسه کنید. چه تفاوت‌ها و شباهت‌هایی مشاهده می‌کنید؟

شکل ۳- یک نمونه تکلیف با تعبیر فراوانی‌گرای احتمال از کتاب ریاضی پایه هفتم

علاوه بر این، مطابق با جدول ۲، حدود یک سوم از تکالیف احتمال بر حسب تعابیر ذهنی طراحی شده‌اند. در این نوع تکالیف، در دوره ابتدایی و متوسطه اول که دانش‌آموزان به صورت رسمی با فرمول بیز آشنا نیستند، دانش‌آموزان بر حسب اطلاعات، تجارب و ترجیح شخصی خود یک تخمین خردمندانه در مورد احتمال وقوع یک پیشامد ارائه می‌دهند که می‌تواند با به‌دست آمدن اطلاعات جدید مورد تجدیدنظر قرار گیرد و اصلاح شود. در دوره ابتدایی و متوسطه اول این نوع احتمال بیشتر جنبه کیفی دارد تا کمی، اما در مواردی که کمی‌سازی دقیق ممکن نیست، یا ضرورتی ندارد، می‌تواند مفید باشد. این رویکرد همچنین در امتحان کردن نتایج کمی حائز اهمیت است؛ به این صورت که دانش‌آموز کمیتی را که به عنوان احتمال وقوع یک پیشامد محاسبه می‌کند با درک کیفی خود تطبیق دهد تا از وقوع خطای فاحش جلوگیری نماید. نمونه‌ای از این تکالیف در شکل ۴ ارائه شده است.

ریاضی پایه هفتم صفحه ۱۱۸ (تعبیر ذهنی)

برای هر عبارت گزینه مناسب را انتخاب کنید. در مورد دلیل انتخاب خود با هم کلاسی هایتان گفت‌وگو کنید.

حتی است	ممکن است اما حتمی نیست	غیرممکن است
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

(الف) تیم ملی فوتبال ایران در اولین بازی بعدی خود پیروز شود.

(ب) مجموع دو عدد، عددی زوج باشد.


(ج) اگر بذر گندم بکاریم، جو سبز شود.

شکل ۴- یک نمونه تکالیف با تعبیر ذهنی احتمال از کتاب ریاضی پایه هفتم

سؤال دوم: کتاب درسی ریاضی پایه هشتم ایران، به هر یک از تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال چگونه و به چه میزان پرداخته است؟

در کتاب ریاضی پایه هشتم، بخش احتمال شامل ۵۶ تکالیف است. ۲۴ مورد از این تکالیف در فعالیت، ۵ مورد در کار در کلاس و ۲۷ مورد در تمرین‌ها ارائه شده‌است. در مجموع از ۵۶ تکالیف فصل احتمال، ۱۰ مورد از آنها به محاسبه یا تخمین احتمال یک پیشامد مرتبط نیست. مثالی از این موارد در شکل ۵ اشاره شده است.

۶- لوله‌های انشعاب آب به هر قسمت که برسند، دوشاخه می‌شوند.
پس از طی کردن ۵ قسمت، چند خروجی خواهیم داشت؟ با عدد توان‌دار نشان دهید.



شکل ۵- یک نمونه تکالیف از کتاب پایه هشتم که به احتمال وقوع یک پیشامد مرتبط نیست.

۴۶ تکالیف باقی‌مانده بر اساس تعابیر احتمال تحلیل شد. نتایج تحلیل این تکالیف در جدول

۳ آمده است.

جدول ۳- فراوانی و درصد تعابیر احتمال در کتاب ریاضی پایه هشتم

مجموع	ذهنی		فراوانی گرا		کلاسیک		نوع تعبير بخش
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فعالیت
۳۹	۱۸	۰	۰	۱۰۰	۱	۴۰/۵	۱۷
۹	۴	۰	۰	۰	۰	۹/۵	۴
۵۲	۲۴	۱۰۰	۳	۰	۰	۵۰	۲۱
۱۰۰	۴۶	۱۰۰	۳	۱۰۰	۱	۱۰۰	۴۲
۱۰۰		۶/۵		۲		۹۱/۵	درصد از کل

در این کتاب نیز همانند کتاب پایه هفتم، توزیع تکالیف مربوط به محاسبه یا برآورد احتمال یک پیشامد در تعابیر سه‌گانه، ناهمسان است و میزان این ناهمسانی از پایه هفتم بیشتر است. همان‌طور که در جدول ۳ قابل بررسی است، بیش از ۹۱ درصد تکالیف فصل احتمال در قالب تعبير کلاسیک ارائه شده است و دو تعبير دیگر کمتر از ۱۰ درصد از کل تکالیف را پوشش می‌دهد. در واقع، در این کتاب به تعبير فراوانی گرا، توجه چندانی نشده است و فقط یک تکالیف بر حسب این تعبير وجود دارد. اوضاع برای تعبير ذهنی نیز بهتر نیست. بر اساس جدول ۳، تعبير ذهنی فقط در سه تکالیف (تقریباً ۷ درصد) گنجانده شده و ظرفیت و کاربردهای آن چنانچه باید، مورد توجه قرار نگرفته است. از هر سه نوع تکالیف در کتاب پایه هشتم، یک نمونه در شکل ۶ ارائه شده است (تکالیف با رویکرد فراوانی گرا همین یک مورد است).

ریاضی پایه هشتم صفحه ۱۳۵ (تعبیر کلاسیک)



۴- دو تاس را می‌اندازیم:

- الف) با رسم جدول مناسب، همهٔ ۳۶ حالت ممکن را پیدا کنید.
 ب) احتمال اینکه یکی از تاس‌ها ۳ و تاس دیگر ۵ بیاید، چقدر است؟
 ج) احتمال اینکه هر دو تاس ۵ بیاید، چقدر است؟

ریاضی پایه هشتم صفحه ۱۳۲ (تعبیر فراوانی گرا)

	هر دو، سخت	هر دو، رو	یکی رو، یکی پشت
در ۲۰ آزمایش			
در ۸۰ آزمایش			

۲- دو سکه بردارید و ۲۰ بار آزمایش کنید.
 نتایج ۲۰ آزمایش را با رسم چوب‌خط در جدول ثبت کنید.
 نتایج آزمایش خودتان را با نتایج سه هم‌گروهی‌تان جمع کنید و با استفاده از نتایج مربوط به ۸۰ آزمایش، درستی فکرتان را بررسی کنید.

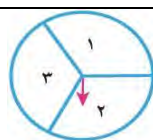
ریاضی پایه هشتم صفحه ۱۳۱ (تعبیر ذهنی)

۶- یک سکه در چهار پرتاب پشت سر هم، رو آمده است. فکر می‌کنید اگر بار پنجم آن را بیندازیم، چه می‌آید؟ چرا؟

شکل ۶- سه نمونه از تکالیف با تعابیر سه‌گانه احتمال از کتاب ریاضی پایه هشتم

سؤال سوم: کتاب درسی ریاضی پایه نهم ایران، به هر یک از تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال چگونه و به چه میزان پرداخته است؟

در کتاب ریاضی پایه نهم، فصلی به نام و «آمار و احتمال» وجود ندارد و فقط در درس چهارم از فصل مجموعه‌ها، با عنوان «مجموعه‌ها و احتمال»، مفاهیم احتمال مطرح شده و لذا این مبحث، چندان مفصل و مبسوط نیست. در بخش مذکور ۲۲ تکلیف ارائه شده که ۳ مورد از آنها قابل تحلیل بر حسب تعابیر سه‌گانه احتمال نیست و نمونه‌ای از آن در شکل ۷ ذکر شده است.



با توجه به چرخنده مقابل، همه حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعه S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید:

$A = \{3, 1\}$ (عقربه روی ناحیه ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

$B = \{1, 2\}$ _____

$C = \{2, 3\}$ _____

$D = \{2\}$ _____

پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

شکل ۷- یک نمونه تکلیف از کتاب پایه نهم که به احتمال وقوع یک پیشامد مرتبط نیست

در مجموع ۱۹ تکلیف در این کتاب تحلیل شده و نتایج آن در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول ۴- فراوانی و درصد تعابیر احتمال در کتاب ریاضی پایه نهم

مجموع		ذهنی		فراوانی‌گرا		کلاسیک		نوع تعبير بخش
درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	
۲۶/۵	۵	۰	۰	۰	۰	۲۶/۵	۵	فعالیت
۱۰/۵	۲	۰	۰	۰	۰	۱۰/۵	۲	کار در کلاس
۶۳	۱۲	۰	۰	۰	۰	۶۳	۱۲	تمرین
۱۰۰	۱۹	۰	۰	۰	۰	۱۰۰	۱۹	مجموع
۱۰۰		۰		۰		۱۰۰		درصد از کل

همان‌طور که در جدول ۴ مشخص است، در کتاب ریاضی پایه نهم تمام تکالیف با رویکرد کلاسیک طراحی شده و حتی یک تکلیف به تعابیر فراوانی‌گرا و ذهنی اشاره ندارد. این وضعیت

نشان می‌دهد که ناهمسانی توجه به تعابیر سه‌گانه احتمال، از پایه هفتم تا پایه نهم روندی فزاینده داشته است. تا آنجا که در کتاب ریاضی پایه نهم دو رویکرد مهم و اساسی احتمال به‌طور کل مدنظر قرار نگرفته است. نمونه‌ای از تکالیف این کتاب در شکل ۸ قابل ملاحظه است.

ریاضی پایه نهم صفحه ۱۷ (تعبیر کلاسیک)

۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

(الف) این مهره آبی باشد. (ب) این مهره سبز نباشد.

شکل ۸- یک نمونه از تکالیف با تعبیر کلاسیک از کتاب ریاضی پایه نهم

سؤال چهارم: کتاب‌های درسی ریاضی دوره اول متوسطه ایران، به هر یک از تعابیر کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال و نیز نحوه ارتباط بین آنها، چگونه و به چه میزان پرداخته است؟

از آنجا که در این پژوهش به دنبال تحلیل محتوای بخش احتمال در هر سه کتاب ریاضی دوره اول متوسطه بر اساس تعابیر سه‌گانه احتمال هستیم، پس از تحلیل جداگانه سه کتاب، در جدول ۵، آمار توصیفی از مجموع تکالیف احتمال کل کتاب‌های دوره اول متوسطه ارائه شده است.

جدول ۵- فراوانی و درصد تعابیر احتمال در کتاب‌های ریاضی دوره اول متوسطه

مجموع		ذهنی		فراوانی‌گرا		کلاسیک		نوع تعبیر بخش
درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	
۴۶	۵۶	۸۷	۲۰	۸۳	۵	۳۳/۷	۳۱	هفتم
۳۸	۴۶	۱۳	۳	۱۷	۱	۴۵/۷	۴۲	هشتم
۱۶	۱۹	۰	۰	۰	۰	۲۰/۶	۱۹	نهم
۱۰۰	۱۲۱	۱۰۰	۲۳	۱۰۰	۶	۱۰۰	۹۲	مجموع
۱۰۰		۱۹		۵		۷۶		درصد از کل

با تجمیع جداول مربوط به سه پایه هفتم، هشتم و نهم، مشخص شد که سوگیری زیادی به سمت تعبیر کلاسیک وجود دارد. آن‌گونه که در جدول ۵ قابل مشاهده است، از مجموع ۱۲۱ تکلیف، ۹۲ تکلیف (۷۶ درصد) با رویکرد کلاسیک، ۲۳ تکلیف (۱۹ درصد) با رویکرد ذهنی و فقط ۶ تکلیف (۵ درصد) با رویکرد فراوانی‌گرا ارائه شده‌اند. توزیع تکالیف احتمال در تعابیر سه‌گانه در نمودار ۱ قابل ملاحظه است.



نمودار ۱- درصد توزیع تکالیف احتمال کتاب‌های ریاضی دوره اول متوسطه در تعبیر احتمال

بررسی تکمیلی تکالیف ارائه شده در بخش احتمال در هر سه کتاب درسی ریاضی دوره اول متوسطه نشان می‌دهد فقط یک مورد از این تکالیف (در کتاب هشتم) از دانش‌آموزان خواسته که عادلانه بودن یک بازی را ابتدا به صورت نظری بررسی و سپس با انجام تعدادی آزمایش، درستی فکر و ایده خود را تأیید نمایند (شکل ۹).

ریاضی پایه هشتم صفحه ۱۳۲

۱- سارا، ستاره و محدثه یک بازی طراحی کرده‌اند. آنها دو سکه را هم‌زمان می‌اندازند. اگر هر دو، رو آمد، سارا امتیاز می‌گیرد و اگر هر دو، پشت آمد، ستاره. اگر هم، یکی رو و یکی پشت آمد، محدثه امتیاز می‌گیرد.

فکر می‌کنید این بازی عادلانه است؟ یعنی شانس امتیاز گرفتن بازیکن‌ها با هم مساوی است؟

۲- دو سکه بردارید و ۲۰ بار آزمایش کنید.

نتایج ۲۰ آزمایش را با رسم چوب‌خط در جدول ثبت کنید.

نتایج آزمایش خودتان را با نتایج سه هم‌گروهی‌تان جمع کنید و با استفاده از نتایج مربوط به ۸۰ آزمایش، درستی فکرتان را بررسی کنید.

	هر دو، رو	هر دو، پشت	یکی رو، یکی پشت
در ۲۰ آزمایش			
در ۸۰ آزمایش			

آیا نتیجه آزمایش‌ها، پاسخ شما به فعالیت ۱ را تأیید می‌کند؟

شکل ۹- یک نمونه تکالیف که برای انجام آن باید بیش از یک تعبیر احتمال به کار گرفته شود

این نوع تکالیف علاوه بر اینکه به رویکردهای کلاسیک و فراوانی‌گرا و حتی ذهنی به صورت جداگانه توجه دارند، دانش‌آموزان را به بررسی ارتباط آنها سوق داده و با انجام دقیق تکالیف به کمک راهنمایی و تأکید معلم، می‌توانند درک عمیق‌تر و جامع‌تری از معانی احتمال در ذهن آنها ایجاد کنند. علی‌رغم ارزشمندی چنین تکالیفی که مورد توصیه و تأکید پژوهشگران حوزه آموزش احتمال است، فقدان توجه به آنها در کتاب‌های ریاضی دوره اول متوسطه مشهود است.

بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش با هدف تحلیل محتوای بخش احتمال کتاب‌های درسی ریاضی ایران، در دوره اول متوسطه بر حسب تعابیر سه‌گانه کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی و با روش تحلیل محتوای کمی، انجام شد. این سه تعبیر از احتمال در ریاضیات مدرسه‌ای، مورد تأکید است و بسیاری از آموزشگران ریاضی معتقدند بهتر است این تعابیر در کنار هم و به عنوان مکمل یکدیگر در جریان یاددهی احتمال، آموزش داده شود تا منجر به ایجاد درکی عمیق و همه‌جانبه از مفهوم احتمال در ذهن دانش‌آموزان شود.

این در حالی است که نتایج تحلیل کتاب ریاضی پایه هفتم نشان داد که بیش از نصف تکالیف بخش احتمال این کتاب، به رویکرد کلاسیک پرداخته است و تنها ۹ درصد از تکالیف به رویکرد فراوانی‌گرا اختصاص دارد. رویکرد ذهنی نیز ۳۶ درصد از تکالیف را پوشش داده است. بعلاوه، هیچ یک از تکالیف به برقراری ارتباط بین این رویکردها پرداخته است. کتاب ریاضی پایه هشتم نیز، این روند را با شدت بیشتر ادامه داده است. به طوری که بیش از ۹۰ درصد تکالیف احتمال این کتاب به رویکرد کلاسیک پرداخته است و تنها ۲ درصد از آنها، به تعبیر فراوانی‌گرا و کمتر از ۱۰ درصد به تعبیر ذهنی اختصاص دارد. نتایج تحلیل کتاب ریاضی پایه نهم نیز نشان داد دو تعبیر ذهنی و فراوانی‌گرا به طور کلی از دایره توجه مؤلفین خارج شده و تمامی تکالیف با تعبیر کلاسیک طراحی شده‌اند.

در پاسخ به سؤال چهارم و در یک جمع‌بندی کلی مشخص شد که بیش از سه چهارم تکالیف بخش احتمال کتب دوره اول متوسطه بر حسب تعبیر کلاسیک طراحی شده است و دو تعبیر دیگر کمتر از یک چهارم تکالیف را در بر می‌گیرند. از این تعداد فقط ۵ درصد به تعبیر فراوانی‌گرا مرتبط است و این مقدار، برای تعبیری که می‌تواند مکمل تعبیر کلاسیک باشد، کافی به نظر نمی‌رسد. بررسی کتب درسی در هند و کانادا نتایجی مشابه را گزارش می‌کند. در کتاب‌های درسی ریاضی متوسطه اول هند نیز مفاهیم احتمال بیشتر از طریق تفسیر کلاسیک معرفی شده و فقط تعداد اندکی از مثال‌ها بر حسب رویکرد تجربی طراحی و ارائه شده است (Gandhi, 2022). همچنین، در کتاب‌های درسی ایالت کبک کانادا، تقریباً تمام تکالیف طوری طراحی شده‌اند که برای حل آنها باید از رویکرد نظری استفاده کرد و فضای کمی برای رویکرد فراوانی‌گرا در نظر گرفته شده است (Martin et al, 2022). توجه کمتر به تعبیر ذهنی در برنامه‌های درسی و کتب درسی، مورد انتقاد برخی پژوهشگران این حوزه قرار گرفته است. Kazak & Leavy (2022) از اینکه علی‌رغم مشارک‌های تحقیقاتی، از تصور کودکان از احتمال ذهنی کمترین درک وجود دارد، گله‌مندند. Chaput et al (2011) نیز معتقدند تصور ذهنی از احتمال به ندرت در آموزش احتمال پایه مورد توجه قرار می‌گیرد. علاوه بر اینها Kazak & Leavy (2018) نیز تأکید کرده‌اند که تفسیرهای کلاسیک، فراوانی‌گرا و ذهنی از احتمال،

سه دیدگاه اصلی در تعیین کمی^۱ عدم قطعیت هستند. حال آنکه دو مورد اول در مواد برنامه‌درسی مدرسه‌ای مورد توجه قرار می‌گیرند و مفهوم ذهنی، علی‌رغم ارتباط نزدیک با استدلال‌های روزمره مردم، یا نادیده گرفته می‌شود یا به صورت حداقلی به آن پرداخته می‌شود.

پژوهشگران مطالعه حاضر، چرایی این ناهمسانی در توجه به تعابیر سه‌گانه احتمال را از برخی مؤلفین کتاب‌های درسی ریاضی کشور جویا شدند و با آن‌ها در این خصوص گفت و گو کردند. در این گفت و گوها مشخص شده که مؤلفین، فقدان پژوهش‌های علمی معتبر داخلی را -که به معرفی و بررسی مفاهیم و تعابیر مختلف احتمال و ارتباط بین آنها پرداخته باشد- در حصول این نتیجه بی‌تأثیر نمی‌دانند. یکی دیگر از دلایل اصلی این نتایج، عدم وجود استانداردهای محتوایی ریاضی به تفکیک پایه‌های تحصیلی در کشور است. تدوین چنین استانداردهایی می‌تواند راهنمای عمل مؤلفین کتاب‌های درسی، در پرداختن متوازن و متناسب، به هریک از مفاهیم و تعابیر احتمال در پایه‌های مختلف دوازده سال تحصیلی باشد. یکی از مؤلفین نیز به گسستی که در روند تألیف کتاب‌های هفتم و سپس هشتم و نهم وجود داشته است، اشاره کرد و معتقد بود این فاصله -بین تألیف کتاب هفتم با کتاب‌های هشتم و نهم- تا حدی باعث تضعیف روابط طولی و انسجام کلی مطالب در کتب ریاضی دوره متوسطه شده است.

گفتنی است که پژوهشگران این مطالعه مدعی نیستند که در طراحی تکالیف احتمالاتی در کتب ریاضی دوره اول متوسطه، هر سه تعبیر باید دقیقاً به یک اندازه مورد توجه و استفاده قرار گیرد. ولی اختلاف موجود بین میزان استفاده از این تعابیر در کتاب‌های درسی دوره اول متوسطه، محل تأمل و بررسی است. چرا که در دوره‌های تحصیلی بعدی، یعنی دوره متوسطه دوم و دانشگاه و نیز در علوم مختلف، اهمیت و کاربرد تعابیر فراوانی‌گرا و ذهنی، کمتر از تعبیر کلاسیک نیست. حتی برخی پژوهشگران معتقدند که رویکرد کلاسیک بیشتر مربوط به بازی‌های شانس و موقعیت‌های مصنوعی است که در آن همه برآمدهای ممکن هم‌شانس هستند و در موقعیت‌های غیرحتمی دنیای واقعی، به ندرت چنین پیشامدهایی دیده می‌شود. لذا این پژوهشگران بر لزوم آموزش دو رویکرد دیگر در کنار رویکرد کلاسیک به احتمال، تأکید دارند (Batanero & Diaz, 2012: Prodromou, 2012: Eichler & Vogel, 2014: Stohl, 2005).

مطالعه پیشینه موضوع نشان می‌دهد برای ایجاد درک دقیق و جامع از مفهوم احتمال یک پیشامد، می‌توان معانی مختلف احتمال را در طی سال‌های تحصیلی و برحسب موقعیت‌های احتمالاتی مختلف، معرفی نمود و مورد استفاده قرار داد (Batanero & Diaz, 2012). همچنین مناسب است دانش‌آموزان با تکالیفی مواجه شوند که ظرفیت به‌کارگیری هم‌زمان تعابیر را برای به‌دست آوردن احتمال یک پیشامد دارند (Steinbring, 1991: Stohl, 2005). در این صورت دانش‌آموزان می‌توانند

^۱. Quantification

هم به صورت نظری و هم عملی احتمال یک پیشامد خاص را به دست آورده و به مقایسه اختلاف‌ها و شباهت‌های آن‌ها پردازند. در نهایت دانش‌آموزان با ادغام روش‌های نظری و عملی (پیشینی و پسینی) در یک رویکرد ذهنی، می‌توانند به درک همه جانبه و گسترده از مفاهیم احتمال دست یابند (Eichler & Vogel, 2014). بررسی تکمیلی تکالیف احتمال ارائه شده در کتاب‌های درسی ریاضی نشان داد که بجز در یک مورد، این تکالیف به گونه‌ای طراحی نشده‌اند که امکان استفاده از معانی مختلف احتمال وجود داشته باشد.

دیگر موضوع حائز اهمیت، استفاده از راه‌کار مدل‌سازی و شبیه‌سازی موقعیت‌های تصادفی جهت ایجاد رابطه بین تعابیر احتمال، به ویژه تعابیر کلاسیک و فراوانی است (Chaput et al, 2011; English & Watson, 2016; Prodromou, 2012). در بخش احتمال کتاب‌های ریاضی پایه‌های هفتم، هشتم و نهم به راه‌کار مدل‌سازی، جهت برقراری ارتباط بین رویکردهای مختلف به احتمال، توجه چندانی نشده است. یافته‌های این مطالعه، به طور خلاصه، حاکی از آن است که در کتاب‌های درسی ریاضی دوره اول متوسطه ایران، تعابیر اصلی احتمال معرفی نشده‌اند؛ از آن مهم‌تر، تکالیف زیادی جهت تبیین کاربرد و اهمیت هریک از آنها و نیز درک ارتباط بین تعابیر احتمال، به منظور ایجاد درک گسترده از این مفاهیم، طراحی نشده است.

در پایان و بر اساس نتایج پژوهش، به مؤلفان کتب درسی ریاضی پیشنهاد می‌شود در فواصل بخش‌های مختلف فصل احتمال، به معرفی تعابیر سه‌گانه احتمال پردازند و ضمن در نظر داشتن اهمیت هر سه تعبیر، با طراحی تکالیف مناسب، اهمیت و کاربرد این تعابیر و ارتباط بین آنها را برای دانش‌آموزان تبیین و آشکار کنند. همچنین با توجه به تعداد اندک مطالعات داخلی در زمینه احتمال، به محققان حوزه آموزش ریاضی پیشنهاد می‌گردد با بهره‌گیری از تجربیات جهانی، به بررسی راهکارهای عملی آموزش مفهوم احتمال با تعابیر مختلف پردازند.

منابع

- Batanero, C., Begué, N., Álvarez-Arroyo, R., & Valenzuela-Ruiz, S. M. (2021). Prospective mathematics teachers understanding of classical and frequentist probability. *Mathematics*, 9(19), 2526.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability* (pp. 1–33). Springer Nature.
- Batanero, C., & Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. In J. P Van Bendegen & K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107–127). Springer.
- Batanero, C., & Diaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3(1), 3–13.
- Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15–37). Springer.
- Behboodian, J. (2011). *Introductory statistics and probability*. Imam Reza University press, Mashhad, Iran. [Persian]
- Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1491-1516.
- Borovcnik, M., Bentz, H. J., Kapadia, R. (1991). A Probabilistic Perspective. In Kapadia, R., Borovcnik, M. (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 27–71). Springer.
- Borovcnik M., Kapadia R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Twin Concepts. In Batanero C., Chernoff E. (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 3–22). Springer.
- Burgos, M., Batanero, C., & Godino, J. D. (2022). Algebraization Levels in the Study of Probability. *Mathematics*, 10(1), 1-16.
- Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist Approach Modeling and simulations in statistics education. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: challenges for teaching and teacher education* (pp. 85–95). Springer.
- Dollard, C. (2011). Preservice elementary teachers and the fundamentals of probability. *Statistics Education Research Journal*, 10(2), 27-47.
- Eichler, A., Vogel, M. (2014). Three Approaches for Modelling Situations with Randomness. In Chernoff, E., Sriraman, B. (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 75–95). Springer.
- English, L. D., & Watson, J. M. (2016). Development of probabilistic understanding in fourth grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(1), 28-62.
- Gandhi, H. (2022). Thirty-One Teachers' Epistemic Beliefs as They Worked with Random Generators: an Explorative Study. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 645–658.
- Gómez, E., & Contreras, J. M. (2014). Meanings of probability in Spanish curriculum for primary school. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education* (pp. 1–4). International Statistical Institute.
- Gómez-Torres, E., Batanero, C., Díaz, C., & Contreras, J. M. (2016). Developing a questionnaire to assess the probability content knowledge of prospective primary school teachers. *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 197-215.
- Jahanipour, R (1998). *Probability*. Tehran, Fatemi Press. [Persian]
- Jones, G., Langrall, C., & Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909–955). Information Age Publishing and NCTM.
- Kahaki, A., Reihani, I., & Bahrami Samani, E. (2019). Examining 8th students' understanding of probability. *Statistical Thinking*. 47, 57-80. [Persian]

- Kazak S., Leavy A.M. (2018). Emergent Reasoning About Uncertainty in Primary School Children with a Focus on Subjective Probability. In Leavy A., Meletiou-Mavrotheris M., Paparistodemou E. (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education. Early Mathematics Learning and Development* (pp. 37–54). Springer.
- Kazak, S., & Leavy, A. (2022). The emerging interplay between subjective and objective notions of probability in young children. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 538-557.
- Langrall, C. W. (2018). The status of probability in the elementary and lower secondary school mathematics curriculum: The rise and fall of probability in school mathematics in the United States. In C. Batanero, E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 39- 50). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Martin, V., Thibault, M., & Homier, M. (2022). Convergence and divergence in probability teaching in elementary and secondary school in Québec: A closer look at eight teachers' self-reported practices. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 659–678.
- Nasiri, P. (2006). *Engineering statistics and engineering probabilities*. Payam Noor University Press. [Persian]
- Nikiforido. Z. (2018). Probabilistic Thinking and Young Children: Theory and Pedagogy. In Leavy A., Meletiou-Mavrotheris M., Paparistodemou E. (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education. Early Mathematics Learning and Development* (pp. 21- 34). Springer.
- Odafe, U. V. (2011). Pre-Service Teachers' Conceptions of Probability. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 21(7), 592-605.
- Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM*, 44, 855-868.
- Rabbani, S. (2013). *Students' conceptual mistakes in conditional probability*. (Unpublished master's thesis). Shahid Rajaei Teacher Training University, Faculty of Science Branch. [Persian]
- Ross, S. (1997). *A first course in probability (for engineers and science researchers)*. Translators: Azarnoosh, H. A. et al. Ferdowsi University Press. Mashhad, Iran. [Persian]
- Ross, S. (2003). *An introduction to statistics and probability (for engineers and science researchers)*. Translators: Asadi, M., and Bozorgnia., Q. Ferdowsi University Press. Mashhad, Iran. [Persian]
- Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 135–168). Kluwer.
- Stohl H. (2005). Probability in Teacher Education and Development. In Jones G.A. (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 345-366). Springer.

Extended Abstract

An Analysis of Iranian Junior High School Mathematics Textbooks Based on Different Interpretations of Probability

Mojtaba Eskandari¹, Ebrahim Reyhani², Zahra Rahimi³, and Ehsan Bahrami Samani⁴

Introduction

Today, the concept of probability is not only used in different fields of science and daily life but also included in the school curricula of various countries, including Iran. However, teaching and learning the concept of probability is fraught with challenges, of which some are unique to probability itself such as the multifaceted nature of probability, which lends itself to different interpretations and meanings. Currently, the three basic interpretations of probability included in the school mathematics curriculum are classical, frequentist, and subjective interpretations. Despite the continued attention paid to different interpretations of probability in different studies worldwide, few studies have focused on this issue within the context of Iranian school curriculum. Therefore, considering the importance of textbooks in the Iranian centralized education system and the need to deal with different interpretations of probability in these books, this research aimed to analyze national mathematics textbooks taught in junior high schools in Iran based on classical, frequentist, and subjective interpretations of probability. The results are hoped to shed light on how much attention is given to each of the three aforementioned approaches in the mentioned textbooks.

Research Questions

The research questions were as follows:

1- How and to what extent is each of the classical, frequentist, and subjective interpretations of probability addressed in the seventh-grade high school math textbook?

¹. PhD Student in Mathematics Education, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran (mojtabae66@gmail.com)

². Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran (Corresponding Author) (e_reyhani@sru.ac.ir)

³. Assistant Professor, Department of Education, Faculty of Psychology and Educational Sciences, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran (za.rahimi@atu.ac.ir)

⁴. Associate Professor, Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran (e_bahrami@sbu.ac.ir)

2- How and to what extent is each of the classical, frequentist, and subjective interpretations of probability addressed in the eighth-grade high school math textbook?

3- How and to what extent is each of the classical, frequentist, and subjective interpretations of probability addressed in the ninth-grade high school math textbook?

4- How and to what extent do the mathematics textbooks designed to be taught in Iranian junior high schools deal with each of the classical, frequentist, and subjective interpretations of probability as well as the interaction between them?

Method

This applied research utilized a quantitative approach. The data were analyzed through content analysis. The statistical population included seventh-, eighth-, and ninth-grade math textbooks (2021 edition), and the sample was selected purposefully and proportionately to the statistical population. A researcher-developed rubric was used to analyze the content of selected textbooks regarding the three interpretations of probability. The content and face validity of the research tool were confirmed by the authors of mathematics textbooks and several university faculty members in the fields of mathematics, statistics, and curriculum planning. To ensure the reliability of coding, the degree of agreement between the coders was assessed, and the results showed high a level of intercoder agreement.

Results

The findings showed that 76% of the tasks in the probability section of mathematics textbooks taught in junior high schools were designed according to the classical interpretation, and the other two interpretations accounted for only 24% of the tasks, of which only 5% were related to the frequentist interpretation. This scant attention paid to the frequentist interpretation does not seem to be sufficient compared to the dominant presence of classical interpretation used in mathematical tasks. Additional analysis of the data showed that in the three above-mentioned books, only one task was designed with the aim of communicating the definition of probability.

Based on the findings, it was found that more than three-quarters of the tasks pertinent to the concept of probability in junior high school mathematics textbooks were designed according to the classical interpretation. The other two interpretations, namely, frequentist and subjective, were utilized in less than a quarter of all tasks. These results are in line with those reported by Gandhi (2022) in India and Martin et al. (2022) in Canada.

Discussion and Conclusions

In explaining the results of this study, it can be said that no reliable scientific research has been done in Iran to introduce and examine different approaches and interpretations of probability and the relationship between them. Therefore, it can be concluded that the lack of in-depth research is one of the main reasons that has caused the imbalance in the presentation of different interpretations of probability in Iranian mathematics textbooks in junior high schools. Another main reason that can be cited for the above results is that content standards related to mathematical concepts, including probability, are not met in Iran. Accordingly, it is suggested that the authors of mathematics textbooks in Iran introduce all three interpretations of probability to students and ensure that all these three

interpretations are reflected equally in tasks. Moreover, mathematics textbook writers are recommended to explain not only the importance and application of these approaches to probability but also how they are connected with each other. This is a crucial point because when students reach the next stages of their academic lives, i.e., senior high schools and university, the importance and application of frequentist and subjective interpretations increase in some cases. Finally, due to the fact that only few studies have been conducted on the concept of probability in Iran, it is suggested that more studies focus on how different approaches to and practical uses of probability can be included in high school mathematics textbooks.

Keywords: content analysis, mathematics textbooks, junior high school, classical probability, frequentist probability, subjective probability

