



چالش‌های دانش‌آموزان در ساخت اثبات‌های هندسی^۱ Students' Challenges in Constructing Geometric Proofs

F. Ahmadvpour

Abstract: Geometry is for a long time regarded as one of the main area for learning proof; while students face many difficulties in learning. It even happens very often that students by drawing a geometric figure, no longer see the need to prove the properties of that class of geometric objects. This study has been done by the aim of describing middle school students' performance and perceptions during understanding and doing geometric proof for gaining a more detailed cognition of gradual processes and complexities in the learning geometric proof.

The research has been conducted by phenomenography method and analyzing task-based interviews on ۵۳ middle school students. This report describes students' performance and their challenges during constructing a geometric proof in more detail.

Keywords: Geometric proofs, Generalisation and Abstraction, Formalisation, Middle School, Phenomenography

فاطمه احمدپور^۲

چکیده: هندسه از دیرباز به عنوان یکی از جایگاه‌های اصلی برای یادگیری اثبات مطرح بوده است؛ در حالی که دانش‌آموزان مشکلات فراوانی در یادگیری آن دارند. حتی بسیار اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان با ترسیم یک شکل هندسی، دیگر نیازی نمی‌بینند که ویژگی‌های مربوط به آن رده از اشیاء هندسی را اثبات کنند. پژوهش حاضر به هدف توصیف عملکرد و برداشت‌های دانش‌آموزان متوسطه اول، در حین درک و ساخت اثبات‌های هندسی انجام شده است تا شناخت عمیق‌تری از فرایندهای تدریجی و پیچیدگی‌های یادگیری اثبات‌های هندسی به دست آید.

این پژوهش به شیوه پدیدارنگاری و با تحلیل مصاحبه‌های فعالیت‌محور از ۵۳ دانش‌آموز متوسطه اول انجام شد. گزارش حاضر تصویر روشن‌تری از عملکرد دانش‌آموزان و چالش‌های آنها را در حین ساخت یک اثبات هندسی ارائه می‌دهد.

واژگان کلیدی: اثبات‌های هندسی، تعمیم و تجرید، صوری‌سازی، دوره متوسطه اول، پدیدارنگاری.

۱. تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۲۵، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۳۰

۲. استادیار برنامه ریزی درسی، دانشکده روانشناسی و علوم تربیتی دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران، رایانامه:

f.ahmadvpour.۸۶@gmail.com

مقدمه

محوریت اثبات در ریاضی ورزیدن، محققان بسیاری را از کشورهای مختلف بر آن داشته است که بر اهمیت اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای تاکید نمایند و پیشنهاد کنند اثبات از سال‌های ابتدایی مدرسه در تجربیات ریاضی دانش‌آموزان گنجانده شود (استیلیانیدز، ۲۰۰۷). یکی از مشکلات مهم گزارش شده در ادبیات پژوهشی اثبات، گذار ناگهانی و پرشتاب دانش‌آموزان از ریاضیات دوره ابتدایی به متوسطه است. بال^۲ و همکارانش (۲۰۰۲) در پژوهش خود این نارسایی شایع برنامه درسی دوره ابتدایی را توضیح می‌دهند: «تمرکز برنامه درسی ریاضی دوره ابتدایی در بسیاری از کشورها بر مفاهیم حساب، انجام محاسبات و الگوریتم‌ها است، درحالی که وقتی دانش‌آموزان وارد دوره متوسطه می‌شوند، به یکباره نیازمند فهمیدن و نوشتن اثبات، به خصوص در مبحث هندسه هستند» (صص. ۹۰۷-۹۰۸). محققان بسیاری بر این عقیده‌اند که آشنایی اندک و سریع دانش‌آموزان با اثبات، توجیهی است بر مشکلات فراوانی که دبیرستانی‌ها در مواجهه با اثبات دارند (استیلیانیدز، ۲۰۰۷).

در ایران نیز مانند بسیاری از مناطق دیگر دنیا، یک «شکاف آموزشی» در سال‌های نخست دوره متوسطه وجود دارد؛ به این معنا که میان اهداف و محتوای برنامه درسی دوره ابتدایی و متوسطه، هماهنگی کافی وجود ندارد. با توجه به این شکاف آموزشی و تجربه‌ی جدیدی که دانش‌آموزان در دوره متوسطه اول از اثبات و استدلال استنتاجی دارند، نوشتار حاضر درصدد بررسی تجربه‌های دانش‌آموزان متوسطه اول از یادگیری اثبات است. احمدپور و همکاران (۲۰۱۹) در پژوهشی مسیرهای متفاوت ادراک در فرایند خواندن اثبات را در یک مبحث نظریه اعداد برای دانش‌آموزان هفتم و هشتم شرح دادند. با توجه به اینکه هندسه از دیرباز به عنوان یکی از جایگاه‌های اصلی برای یادگیری اثبات مطرح بوده و با توجه به تفاوت اثبات‌های هندسی با دیگر اثبات‌های

^۱Stylianides

^۲ Ball

ریاضی (فرصت و چالشی که تجسم اشیاء هندسی به وجود می‌آورد)، در این پژوهش تمرکز بر تحلیل و بررسی ادراک دانش‌آموزان دوره متوسطه اول، هنگام ساخت اثبات‌های هندسی است. در این گزارش جزئیات عملکردها و برداشت‌های متفاوتی که دانش‌آموزان حین انجام یک اثبات هندسی دارند به دقت به تصویر کشیده می‌شود.

مرور پیشینه

- ساختار و صورت اثبات

درک یک اثبات چیزی بیش از ادراک تک تک سطرهای اثبات است و باید کل ساختار استنتاجی اثبات فهمیده شود (لرون^۱، ۱۹۸۳). میازاکی، فوجیتا و جونز^۲ (۲۰۱۷) ساختار اثبات‌های استنتاجی را بدین گونه تعریف می‌کنند:

شبکه‌ای مرتبط از استدلال‌های استنتاجی است که گزاره‌های منفرد و عمومی را ترکیب می‌کند. دیدن یک اثبات به عنوان یک شیء^۳ موجب درک ارزش اجزاء اثبات و روابط مابین‌شان می‌شود، چگونگی تشکیل اثبات از این اجزاء و چرایی نیاز یک اثبات به ساختارش را [نیز] نشان می‌دهد. (ص. ۲۲۶)

دو اثبات از لحاظ مفهومی هم‌ارز هستند، دقیقاً زمانی که ساختار یکسانی دارند. این در حالی است که استفاده از بازنمایی‌های متفاوت برای دو اثبات با ساختاری یکسان، موجب می‌شود صورت کاملاً متفاوتی داشته باشند.

ممکن است کسی ایده‌ی یک اثبات را بداند، ساختار آن را بفهمد، ولی نتواند آن را به صورت قابل قبول برای جامعه مورد نظر ارائه دهد. این امکان هم وجود دارد که کسی اثبات‌های صوری قابل قبول تولید کند، بدون آنکه درکی از ساختار آن داشته باشد.

^۱ Leron

^۲ Miyazaki, Fujita & Jones

^۳ «دیدن یک موجود ریاضی [در اینجا اثبات] به عنوان یک شیء به این معناست که قادریم به آن اشاره کنیم، مثل اینکه یک چیز واقعی باشد - یک ساختار ایستا که جایی در مکان و زمان وجود دارد. همچنین بدین معناست که قادریم با یک نگاه این ایده را تشخیص داده، با آن به عنوان یک کل، کار کنیم، بدون آنکه به جزئیات بپردازیم.» (اسفرد، ۱۹۹۱)

بنابراین برای شناسایی فرایندهایی که طی آنها یک اثبات درک می‌شود، توجه به دو جنبه‌ی اثبات ضروری است: الف) درک ساختار استنتاجی زیربنایی یک اثبات، ب) دسترسی به صورت اثبات. در هنگام ادراک اثبات، این دو تا حدی از هم مستقل درک می‌شوند ولی بر هم تاثیر دارد (احمدپور و همکاران، ۲۰۱۹). تحقیقات انجام شده نشان می‌دهد دانش‌آموزان به ویژگی‌های ظاهری اثبات بسیار توجه دارند، به طوری که می‌تواند آنها را به قبول اثبات‌های غیر معتبر سوق دهد (مارتین و هارل، ۱۹۸۹؛ هیللی و هویلز، ۲۰۰۰؛ ناث، ۲۰۰۲).^۱

- تعمیم و تجرید: گذار از خاص به عام

ساختار یک اثبات، شی‌ای مجرد است و فرایند یافتن آن مانند فرایند فهم یک مفهوم، از طریق تعمیم و تجرید انجام می‌گردد. بنابراین در این‌جا، ادبیات مربوط به تعمیم و تجرید بیان می‌شود. تعمیم و تجرید، دو جزء مهم در فرایند اثبات و البته بسیاری از حوزه‌های دیگر ریاضی هستند. اما استفاده از اصطلاحات «تعمیم» و «تجرید» در حوزه‌های مختلف آموزش ریاضی یکسان نیست. هارل و تال^۲ (۱۹۹۱) «تعمیم» را برای اطلاق به «فرایند به‌کارگیری یک استدلال در زمینه‌ای وسیع‌تر» استفاده کردند و فرایند «تجرید» را این‌گونه تشریح کردند: «وقتی شخص بر روی ویژگی‌های به‌خصوصی از یک شیء معین تمرکز کرده و سپس این ویژگی‌ها را جدای از منشاء اصلی (شیء اولیه) مد نظر قرار می‌دهد» (ص. ۳۹). میسن^۳ (۱۹۸۹) نیز در توصیف «تجرید»، به جداسازی ویژگی‌های تعریف‌کننده‌ی یک رده اشاره کرده و می‌گوید:

هنگام تجرید، تغییر توجه ظریفی رخ می‌دهد. توجه، از یک حالت تعمیم یافته به یک شیء یا ویژگی معطوف می‌شود... در آن تغییر توجه بسیار ظریف، صورت و قالب یک چیز محسوس، دور ریخته می‌شود. (ص. ۲)

^۱ Martin & Harel, ۱۹۸۹; Healy & Hoyles, ۲۰۰۰; Knuth, ۲۰۰۲

^۲ Tall

^۳ Mason

در اینجا، اصطلاح «تعمیم» برای بازشناسی یک ویژگی مشترک بین همه‌ی اشیاء یک رده به کار می‌رود. همان‌طور که بعد از این مورد بحث قرار خواهد گرفت، به کار بردن فرایند تعمیم در اثبات کردن، به معنای شناسایی رویه‌ای است که به توان آن را روی هر عضوی از یک رده انجام داد. همچنین تجرید، به معنای ساختِ ساختِ ایده‌ای است که مشخصه‌ی یک رده باشد. در اثبات کردن، تجرید، ساختِ ساختِ ساختاری است که به ایده‌ی زیربنایی یک رویه کلی «جسمیت»^۱ (اسفرد^۲، ۱۹۹۱) می‌دهد. جنبه‌ی مشترک هر دو فرایند تعمیم و تجرید، تاکید بر تعدادی از ویژگی‌ها و در نتیجه نادیده گرفتن بقیه آنهاست. در این صورت هر چند تعمیم و تجرید دو فرایند با ماهیت و کارکرد متفاوت هستند، ولی وجود این جنبه مشترک موجب می‌شود که در زمان مشاهده‌ی عملکرد دانش‌آموزان تمایز این دو از یکدیگر مشکل باشد.

- انواع بازنمایی و صوری‌سازی

در صورت یک اثبات می‌توان از بازنمایی‌های مختلف استفاده نمود. نام‌ها، نمادها، نمودارها و دیگر بازنمایی‌ها در فرایند شکل‌گیری ساختار یک اثبات نقش دارد. بنابراین ادبیات مربوط به بازنمایی و به خصوص آنچه به اثبات مربوط است، مرور خواهد شد. استفاده از بازنمایی‌های نمادی، در طی برنامه‌درسی ریاضی دانش‌آموزان دوره متوسطه اول به مرور پررنگ‌تر و پر اهمیت‌تر می‌شود. وقتی ایده‌های ریاضی به صورت نمادی، بازنمایی می‌شوند، «برای فرایندهای مکانیکی سازگار و تعدیل می‌گردند» (دیویس و هرش^۳، ۱۹۸۱، ص. ۱۳۶). به عبارت دیگر این امکان فراهم می‌شود که به جای مجردات، با نمادهای نشان‌دهنده‌ی آنها کار شود. بیشترین قدرت جبر، از همین صوری‌سازی است. البته صوری‌سازی خیلی پیش‌تر از این‌ها و در سال‌های ابتدایی مدرسه به کار گرفته می‌شود؛ همان زمانی که به جای «پنج» انتزاعی و مجرد، روی نماد

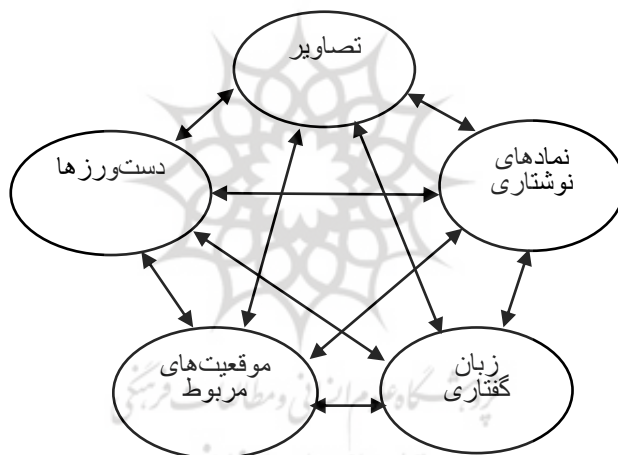
^۱ Reification

^۲ Sfard

^۳ Davis & Hersh

«۵»، عملیات انجام می‌گیرد. به علاوه *صوری سازی*، به یک شیء شخصی (که یک مفهوم مجرد در ذهن فرد است) صورتی می‌دهد که می‌توان آن را با دیگران به اشتراک گذاشت.

در پنج بازنمایی که کلمنت^۱ (۲۰۰۴)، بر اساس کارهای لش، پست و بیر^۲، ۱۹۸۷؛ شکل ۲ را ببینید) تصویر کرده است، نمادهای نوشتاری اغلب به مفاهیم مجرد و انتزاعی مربوط است و موقعیت‌ها، دست‌ورزها^۳ و تصاویر با مثال‌های عینی و فهم تجربی ارتباط دارد. البته این امکان وجود دارد که افراد مفاهیم مجرد خود را در قالب تصاویر، دست‌ورزها و موقعیت‌های مرتبط نیز نشان دهند. اسفرد (۱۹۹۱) نیز اذعان می‌کند «اگرچه ویژگی ساختاری بیشتر در نگاه فرد است تا در خود نمادها، اما به نظر می‌رسد بعضی از بازنمایی‌ها نسبت به سایرین، برای تعبیر ساختاری مستعدترند» (ص. ۵).



شکل ۲: پنج بازنمایی تصویر شده توسط کلمنت (۲۰۰۴)

^۱ Clement

^۲ Lesh, Post & Behr

^۳ Manipulatives

دست‌ورزها مصنوعاتی هستند که دانش‌آموزان به منظور جست‌وجو، به دست آوردن یا بررسی مفاهیم ریاضی و انجام فعالیت‌های حل مسئله بر اساس شواهد ادراکی به‌کار می‌گیرند (بارتولینی و مارتینیون، ۲۰۱۴). چرتکه و چینه‌ها [بلوک‌های دینز (Dienes blocks)] مثال‌هایی از دست‌ورزهای معروف هستند.

چارچوب نظری

برای تحلیل درک و فهم اثبات، پژوهش‌های تاثیرگذاری انجام شده است: طبقه‌بندی‌هایی مانند «طرحواره‌های اثبات»^۱ از هارل و سودر (۱۹۹۸)، طبقه‌بندی مجیبا-راموس، فولر، وبر، رودز و سمکف^۲ (۲۰۱۲) در ارزیابی‌های درک و فهم اثبات. این مطالعات در مورد ادراک دانش‌آموزان از اثبات بیشتر به طبقه‌بندی و تمایز میان انواع ادراک محدود می‌شود. مطالعه احمدپور و همکاران (۲۰۱۹) مدلی ارائه می‌دهد که علاوه بر ارائه مراحل ادراک در فرایند خواندن و ساخت اثبات، به مسیرهای مختلف در فرایند ادراک اثبات و نحوه رشد ادراک و ماهیت گذار بین سطوح اثبات نیز می‌پردازد و نسبت به گذشته تصویر روشن‌تری از این فرایند و زبان غنی‌تری برای توصیف آن فراهم می‌کند. این مدل (شکل ۳)، شبکه‌ای مرتبط از سطوح و حالت‌های مختلف ادراک اثبات است و از این جهت که فراتر از فهرست‌بندی انواع ادراک پیش‌رفته و رشد فهم و درک را در یک فرایند یادگیری به تصویر می‌کشد، تا حدی شبیه به مدل پیری و کایرن^۳ (۱۹۸۹) و هرشوویچ و برگرن^۴ (۱۹۸۸) عمل می‌کند.

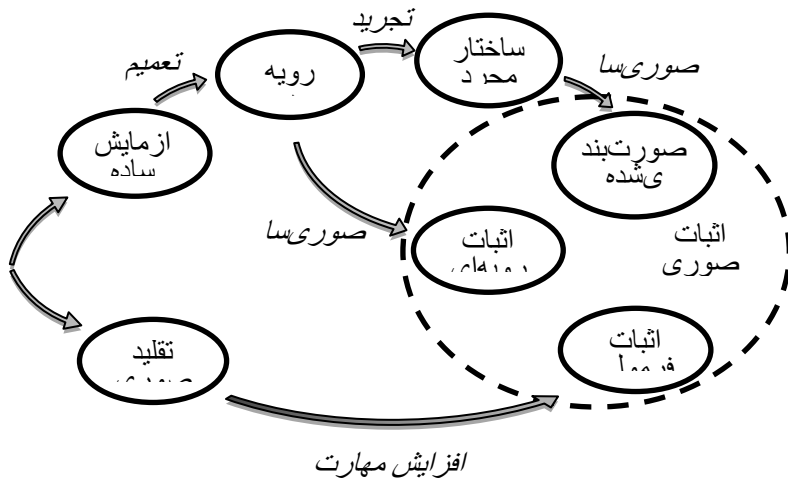
پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

^۱ Proof Schemes

^۲ Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff

^۳ Pirie & Kieren

^۴ Herscovics & Bergeron



شکل ۳: مدل درک دانش‌آموزان در فرایند خواندن و انجام اثبات (احمدپور و همکاران، ۲۰۱۹)

- مسیر ساختار

انتهای مسیر ساختار به یک «اثبات صورت‌بندی شده» می‌رسد. فرایند درک و فهم یک اثبات صورت‌بندی شده، مسیری است که می‌تواند شامل چهار مرحله باشد. این چهار مرحله به وسیله سه فرایند مشخص و جزئی به هم مرتبط می‌شوند. از طریق تعمیم، «آزمایش ساده» به یک «رویه کلی» می‌رسد. تجربید یک «رویه کلی» منجر به داشتن یک «ساختار مجرد» می‌شود. در نهایت صورتی‌سازی «ساختار مجرد»، یک «اثبات صورت‌بندی شده» فراهم می‌کند (شکل ۳ را ببینید).

«آزمایش ساده» شامل بررسی مثال‌های مشخص و خاص برای آزمودن تجربی یک ادعا، به‌دست‌آوردن فهم بهتری نسبت به آن و تشخیص ویژگی‌ها و مشخصه‌های مشترک بین مثال‌هاست. با تکیه و تاکید روی برخی از ویژگی‌های مثال‌ها و در نتیجه کنار گذاشتن بقیه ویژگی‌ها، یک رویه شناسایی می‌شود که به ازای تمام اعضای یک رده بزرگتر از اشیاء برقرار است. این رویه، «رویه کلی» نامیده می‌شود. سپس ایده‌ی زیربنایی آن رویه تشخیص داده می‌شود که ساختاری را برای اثبات فراهم می‌کند. در نهایت ساختار صورتی شده و به عنوان یک «اثبات صورت‌بندی شده» بیان می‌شود.

- مسیر صورت

بسیار دیده شده است که پاسخ‌های نوشتاری دانش‌آموزان به مسائل ریاضی، از لحاظ نحوی به یکدیگر شبیه هستند، اما معناداری آنها برای دانش‌آموزان متفاوت است. برخی از دانش‌آموزان با تقلید از اصطلاحات، عبارات و نمادها، فقط بر صورت تمرکز می‌کنند، در نتیجه پاسخ‌های نوشتاری آنها توخالی است و برایشان معنادار نیست. مسیر صورت از «تقلید صوری» شروع و با افزایش مهارت تکنیکی به «اثبات فرمولی» می‌رسد (شکل ۳ را ملاحظه کنید).

- مسیر رویه

این مسیر فرعی مانند مسیر ساختار آغاز می‌شود، تعمیم صورت می‌گیرد ولی بدون اینکه تجرید رخ دهد، فرد رویه‌ای که در دست دارد، صوری می‌کند (شکل ۳ را ببینید). در این حالت به دلیل صوری‌سازی زود هنگام، درک مطلوب حاصل نمی‌شود. محصول این فرایند، اثبات رویه‌ای است. ترجمه‌ی رویه به صورت نمادین به درک و فهم دانش‌آموزان عمق نمی‌بخشد. بلکه آنها ایده‌هایشان را در یک زبان مختصرتر ارائه می‌دهند. در حالی که رویه‌ی پنهان شده در آن، هنوز هم یک رویه‌ی کلی برای انجام عملیات روی اشیاء ریاضی است. از نظر بالاشف^۱ (۱۹۸۸) چنین اثبات‌هایی هنوز عملیاتی^۲ هستند تا مفهومی^۳. «اثبات‌های عملیاتی آنهایی هستند که با استفاده از عمل واقعی یا نمایش انجام می‌شوند و در مقابل اثبات‌های مفهومی آنهایی هستند که درگیر انجام عملی نمی‌شود، بلکه بر اساس صورت‌بندی ویژگی‌ها و روابط بین آنها در سوال ساخته می‌شوند» (بالاشف، ۱۹۹۸، ص. ۲۱۷).

^۱ Balacheff

^۲ Pragmatic

^۳ Conceptual

- غیرخطی بودن مدل

پیکان‌هایی که در مدل (شکل ۳) کشیده شده‌اند، مسیرها را از لحاظ نظری نشان می‌دهند. دانش‌آموزان می‌توانند در مسیرهای مختلف مدل حرکت کنند. در حین تغییر درک، آنها گاهی به مراحل عقب باز می‌گردند و گاهی از مسیری به مسیر دیگر می‌روند. «فهمیدن دارای سطوح مختلف اما غیر خطی است. [فهمیدن] یک پدیده بازگشتی است و بازگشت زمانی اتفاق می‌افتد که تفکر در بین سطوح خبرگی حرکت می‌کند» (پیری و کایرن، ۱۹۸۹، ص. ۸). به علاوه امکان دارد از این مسیر به مسیر دیگری رفته و برگردد، بنابراین فهمیدن هم بر اساس صورت و هم بر اساس ساختار شکل می‌گیرد. اسفرد (۱۹۹۱) نیز گفته‌ی مشابهی در این باره دارد:

به نظر می‌رسد در فرایند یادگیری، گاهی درک و فهم دانش‌آموز - این احساس مهارت و تسلطی که به همراه توانایی «دیدن» ساختارهای مجرد می‌آید - ناگزیر در پشت زبردستی تکنیکی قرار می‌گیرد. این بدین معنا است که در برخی از موارد، فراگیر باید [سختی] انجام مقدار مشخصی تمرین مکانیکی را تحمل کند که همراه با شک به معنا و احساس ناکافی بودن فهم (صرفاً ابزاری) است. حتی ریاضیدان حرفه‌ای نمی‌تواند از این سرنوشت فرار کند و اغلب در مورد لزوم تلاش سخت، برای معنای ایده‌های ظاهراً ساده شکایت می‌کند. (ص. ۳۲)

روش‌شناسی

این پژوهش به هدف توصیف و تحلیل تجربیات دانش‌آموزان متوسطه اول در ادراک و ساخت یک اثبات هندسی طراحی و بنابراین به شیوه پدیدارنگاری انجام شد. این روش از سنت‌های پژوهش کیفی است و «اشکال مختلف تفکر را مشخص و نظام‌مند می‌کند» (مارتون^۱، ۱۹۸۱، ص. ۱۸۰). پدیدارنگاری را می‌توان برای تحقیق در مورد تفکر افراد (برداشت‌های آنها)، تغییرات در رشد تفکرشان، از جمله تغییراتی که در نتیجه آموزش رخ می‌دهد، مورد استفاده قرار داد (گال و همکاران، ۱۹۹۶). در این روش پژوهشی

^۱ Marton

«تصورات و شیوه‌های ادراک به‌عنوان ویژگی‌های فردی دیده نمی‌شوند. بلکه تصورات [شرکت‌کنندگان در پژوهش] نسبت به واقعیت به عنوان طبقه‌های توصیفی در نظر گرفته می‌شوند تا برای تسهیل درک موارد مشخص از عملکرد انسانی مورد استفاده قرار گیرند.» (مارتون، ۱۹۸۱، ص. ۱۷۷).

شرکت‌کنندگان این تحقیق، ۵۳ دانش‌آموز دوره متوسطه اول (دختر و پسر) هستند. هدف احصای تفاوت در برداشتها بود، پس در انتخاب شرکت‌کنندگان از قاعده تفاوت حداکثر استفاده شد (به استناد فلیک، ۱۹۹۸). ابزار گردآوری اطلاعات، شامل مصاحبه‌های نیمه‌ساختاری با دانش‌آموزان بود. مصاحبه‌ها حول مسئله هندسی زیر بود: در هر مثلث، اگر پاره خطی را از یک راس به وسط ضلع مقابل وصل کنید، مساحت در دو مثلث به دست آمده برابر است. می‌توانید درستی آن را نشان دهید؟

مسئله خارج از کتاب درسی ولی متناسب با دانسته‌های دانش‌آموزان متوسطه اول است، هر چند که برای شرکت‌کنندگان ساده و سرراست نبود.

دانش‌آموزان به صورت انفرادی به حل مسائل مطرح شده توسط مصاحبه‌کننده پرداختند. زمان حل فعالیت‌ها بنا به خواسته‌ی هر دانش‌آموز متغیر بود. در هر زمانی که از کار متوقف می‌شدند، روش حل و دلایل انتخاب‌های خود را شرح می‌دادند. مصاحبه‌کننده علاوه بر پرسیدن سوالات محرک^۱ از پیش تعیین شده، بنابر شرایط خاص هر مصاحبه، سوالاتی را مطرح می‌کرد.

روند مصاحبه ضبط صوتی شده و یادداشت‌های میدانی از جزئیات رفتار شرکت‌کنندگان در تحقیق تهیه گردید. هر چه تعداد مصاحبه‌های انجام شده بیشتر می‌شد، تعداد پاسخ‌های تکراری در میان جواب‌ها دریافتی از دانش‌آموزان بیشتر می‌شد، تا نهایتاً در مصاحبه‌های پایانی، پاسخ جدیدی دیده نشد.

برای تحلیل مصاحبه‌های ضبط شده، ابتدا با تمام جزئیات پیاده‌سازی شدند. در ادامه، پیاده‌سازی‌ها با پاسخ‌های مکتوب دانش‌آموزان با تصویر پاسخ‌های مکتوب، تلفیق

^۱ Trigger

شدند. سپس داده‌های حاصل، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند؛ نتایج تحلیل شده در طبقه‌بندی‌های توصیفی قرار گرفتند. این شیوه بر اساس رویه کدگذاری کیفی و بر اساس مدل احمدپور و همکاران (۲۰۱۹) انجام شد. هدف توصیف و تحلیل تجارب دانش‌آموزان در حین ساخت اثبات بود.

فرایند تحلیل، تکراری و چند باره بود؛ داده‌ها به روش تحلیل محتوا (فیلیک، ۱۳۸۸) خلاصه و ساختاربندی شد. داده‌ها بر اساس تکنیک تلخیص تحلیل محتوا، بازگویی شد؛ سپس گزاره‌هایی که ارتباط چندانی به پرسش تحقیق نداشتند یا معنای مشابهی با سایر عبارات‌ها داشتند، کنار گذاشته می‌شدند. به این ترتیب گزاره‌های مربوط، دسته‌بندی و خلاصه شدند. در مرحله بعد، بر اساس چارچوب نظری بحث، داده‌های حاصل دوباره واکاوی، با دقت بیشتری توصیف و نهایتاً ساختاربندی شدند.

بحث و نتایج

این بخش به بررسی این امر خواهد پرداخت که آیا مدل مطرح شده در چارچوب نظری در یک موقعیت هندسی نیز معتبر است؟ بر اساس داده‌های حاصل از مصاحبه و ادبیات پژوهشی مربوط، هر مرحله از مدل، در یک موقعیت هندسی توصیف و با مثالی تشریح می‌شود.

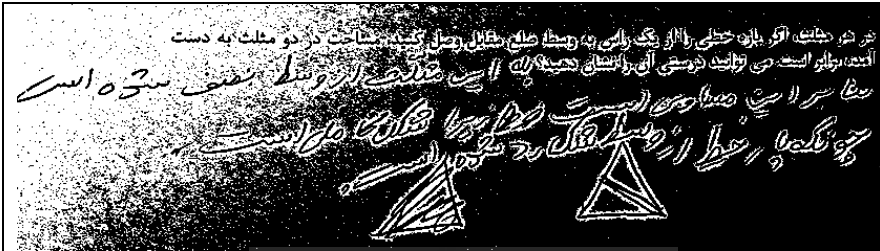
مسیر ساختار

- آزمایش مبتدیانه^۱

در حین انجام فعالیت‌های هندسی، وقتی دانش‌آموزی با مدل‌های اشیاء هندسی دست‌ورزی می‌کند و روابط بین اشکال و خصوصیات آنها را مشاهده و بررسی می‌کند، ممکن است فکر کند «با دیدن می‌توان باور کرد» یا «حس زدن همان تصدیق کردن است» و یا «با ترسیم شکل، ادعا اثبات می‌شود»، در این صورت حاصل تلاش او ناکافی و نامعتبر است. دانش‌آموزانی که مسئله‌حل‌کن‌های مبتدی هستند برای سنجش اعتبار یک ادعا، چند مثال را بررسی کرده و این روش را برای تصدیق درستی یک گزاره،

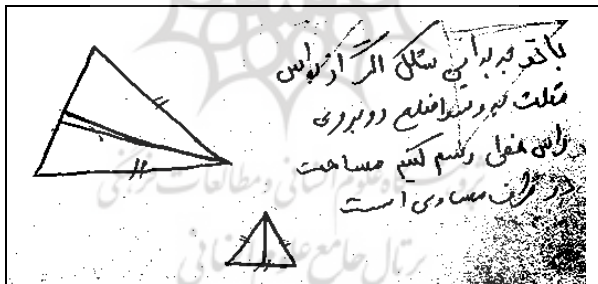
^۱ Naïve Experience

متقاعدکننده و کافی می‌دانند. در این حالت فرد، به تعبیر بالاشف (۱۹۸۸) «تجربه‌گرایی مبتدیانه»^۱ دارد؛ «ابزاری بسیار ابتدایی (و همان‌طور که می‌دانیم ناکافی) برای اثبات و یکی از اولین صورت‌های فرایند تعمیم است» (ص. ۲۱۸).
 علی دانش‌آموز پایه هفتم در پاسخ به سوال تحقیق، با رسم شکلی نادقیق و اکتفا به حس بصری، درستی گزاره مطرح شده در سوال را باور کرد (شکل ۴ را ببینید).



شکل ۴: پاسخ علی دانش‌آموز پایه هفتم

مهرداد نیز دانش‌آموز پایه هفتم در پاسخ به سوال تحقیق، با رسم شکل در حالت‌های خاص مثلث متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع و اکتفا به حس بصری، درستی گزاره مطرح شده در سوال را بررسی کرد (شکل ۵ را ببینید).



شکل ۵: پاسخ مهرداد دانش‌آموز پایه هفتم

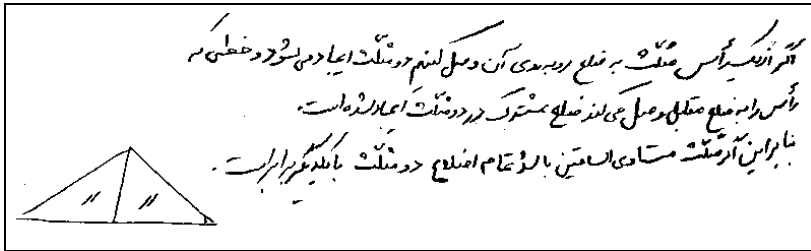
^۱ Naïve Empiricism

۱	مهرداد	در هر مثلث اگر پاره‌خطی از رأسش به وسط ضلع مقابلش رسم کنیم، مساحت در دو طرف مساوی است. اگر شکل بکشیم معلوم می‌شود. من دو تا شکل کشیدم [شکل ۵]؛ این متساوی‌الساقینه، کشیدم دو تا شش‌گوشه. اینم متوازی‌الاضلاع، کشیدم اینم دو تا شش‌گوشه.
۲	مصاحبه‌کننده	چی نصف شده؟
۳	مهرداد	مساحتش.
۴	مصاحبه‌کننده	از کجا متوجه شدی مساحتش نصف شده؟
۵	مهرداد	از رو شکلش. شکلش که کشیدم، رسم کردم. قبلا هم اینو امتحان کرده بودم.
۶	مصاحبه‌کننده	در مثلث متساوی‌الاضلاعی که کشیدی، از کجا می‌دونی مساحت این دو تا با هم برابر [با اشاره به دو مثلث به دست آمده در مثلث متساوی‌الاضلاع شکل ۵]؟
۷	مهرداد	خب اگه شکل دقیقش رو بکشیم، معلوم می‌شود.

در مقایسه با سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی^۲ (۱۹۹۹)، علی و مهرداد در پایین‌ترین سطح یعنی «تجسم» هستند که با تفکر غیرکلامی شروع می‌شود و اجسام فقط با ظاهر آنها قضاوت می‌شوند. این در حالی است که دانش‌آموزی که در ادامه از آن صحبت می‌شود، در حال گذار از سطح تفکر «توصیفی» به تفکر «غیرصوری» است. برخی از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌داند و تا حدی روابط بین آنها شناسایی می‌کند. الهه دانش‌آموز پایه هشتم، به رسم شکل اکتفا نمی‌کند، در استدلال خود نسبت به مهرداد یک قدم بزرگ برمی‌دارد. وی در حالت مثلث متساوی‌الاضلاع، با اثبات هم‌نهستی دو مثلث به دست‌آمده، برابری مساحت‌ها را نتیجه گرفت (شکل ۶ را ببینید).

^۱ در هنگام پیاده‌سازی مصاحبه‌ها، توضیحات لازم و رخدادهای غیرکلامی در گروه آورده شده‌اند.

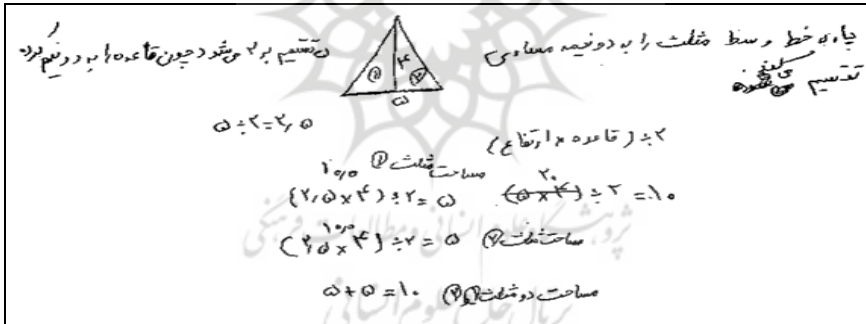
^۲ van Hiele



شکل ۶: پاسخ الهه دانش‌آموز پایه هشتم

۱	الهه	من گفتم آگه از یک رأس مثلث به ضلع روبه‌روی آن وصل کنیم، دو مثلث ایجاد می‌شود. این دو مثلث یک ضلع مشترک دارند. خطی که رأس را به ضلع مقابل وصل می‌کند، خودش یک ضلع مشترک بوده. آگه مثلثمون متساوی‌الساقین باشه که همه ساقاش برابرنه، پس این دو تا ساقش هم با هم برابرنه، یعنی ضلع پایین.
۲	مصاحبه‌کننده	کدوم ضلع‌ها می‌شه؟ دست می‌گذاری روشن؟
۳	الهه	[با اشاره به هر سه ضلع مثلث اولیه می‌گوید:] یعنی اینا در مثلث متساوی‌الساقین هر سه با هم برابرنه [منظورش مثلث متساوی‌الاضلاع است].
۴	مصاحبه‌کننده	هر سه تا ضلع با هم برابرنه؟
۵	الهه	بله.
۶	مصاحبه‌کننده	خب.
۷	الهه	[با اشاره به ضلع پایین] اگر این را هم نصف کنیم. ضلع‌های پایین هم با هم برابر می‌شوند. تقریباً نقش نمیساز داره [منظورش میانه است]. دیگه همین، گفتم دو تا مثلث ایجاد می‌شه، بنابراین می‌تونند با هم برابر باشند.
۸	مصاحبه‌کننده	وقتی دو مثلث برابر باشند، مساحتشون هم با هم برابرنه؟
۹	الهه	بله. اندازه اضلاع با هم برابره.

هر چند الهه لغات متساوی الساقین، ساق و نیمساز را به درستی به کار نمی‌گیرد ولی منظور خود، از هم‌نهستی دو مثلث به حالت سه ضلع را به سختی بیان می‌کند. اگر از اشکالات وی در نامیدن اشکال هندسی صرف نظر شود، وی نسبت به مهرداد، یک استدلال استنتاجی برای رده‌ای خاص از مثلث‌ها ارائه داده است. البته اشکال این استراتیژی آن است که از ویژگی‌های خاص رده مثلث‌های متساوی‌الاضلاع استفاده شده و بنابراین قابل تعمیم به همه مثلث‌ها نیست. مسئله حل‌کن‌های مبتدی، از جمله بیشتر شرکت‌کنندگان این پژوهش در دام ویژگی‌های رده خاصی از مثلث‌ها افتادند. وجه دیگر ساختار پاسخ الهه توسط به یک حلقه میانی (هم‌نهستی مثلث‌های ایجاد شده) در زنجیره استدلالی، برای رسیدن به برابری مثلث‌هاست؛ در صورتی که تعداد انگشت شماری از شرکت‌کنندگان از جمله شاهرخ دانش‌آموز پایه هفتم، از ابتدا مستقیم سراغ مساحت رفتند. وی با در نظر گرفتن یک مثلث با اندازه قاعده و ارتفاع معلوم، اقدام به محاسبه مساحت مثلث اولیه و دو مثلث حاصل از رسم میانه کرد (شکل ۷ را ببینید).



شکل ۷: پاسخ شاهرخ دانش‌آموز پایه هفتم^۱ (قسمت اول)

از آنجا که نحوه خواندن نوشته‌های متن ممکن است درستی پاسخ را تحت تاثیر قرار دهد،^۱ باید تاکید کرد شاهرخ اولین جمله خود را در مصاحبه به این شکل خواند: «پاره خط وسط، مثلث را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کند.»

در مصاحبه اذعان کرد که مثلث رسم شده دو ساق برابر دارد. او بدون اینکه در مورد برابری میانه و ارتفاع در مثلث‌های متساوی‌الساقین حرفی به میان آورد، ارتفاع را همان میانه در نظر گرفت. تکیه شاهرخ به دریافت بصری و باور اینکه با یافتن مثالی که در گزاره مورد سوال صدق کند، گزاره تصدیق می‌شود، نشان از ناپختگی پاسخ او دارد؛ هرچند که در بخش بعدی خواهیم دید اقدام به محاسبه مساحت در یک مثال عام، شاهرخ را از دام ویژگی‌های خاص مثالش بیرون می‌آورد.

- رویه کلی^۱

سمدنی^۲ (۱۹۸۴) در بحث خود از اثبات‌های حرکتی^۳، تحلیل بسیار خوبی مهیا می‌کند که می‌تواند معنای «رویه کلی» را به خوبی روشن نماید. وی اذعان می‌کند که یک اثبات حرکتی با انجام «حرکت‌های فیزیکی، عینی مشخص (دست‌ورزی با اشیاء، رسم شکل و حرکت جسم و غیره) روی یک مثال برای تایید ادعایی روی یک مورد داده شده، شروع شود» (ص. ۳۲). سپس رویه و روش استدلال به مثال‌های دیگر تعمیم داده می‌شود. زمانی می‌رسد که دیگر نیازی به حرکت‌های فیزیکی نیست، انواع حرکت‌ها در ذهن فرد دنبال می‌شوند. تا زمانی که شخص «بداند [آنها] چگونه برای مثال‌های متعدد دیگر انجام می‌شوند» (ص. ۳۲)، هر بار این اتفاق می‌افتد. این حالت همان درونی‌سازی در نظریه پیازه (۱۹۷۰) و مدل اسفرد (۱۹۹۱) است. زمانی که این فرایند تعمیم کامل می‌شود، شخص یک «رویه کلی» دارد که می‌تواند آن را روی هر عضوی از یک رده به کار گیرد.

ایده شاهرخ در قسمت قبل را به یاد آورید، اقدام به محاسبه مستقیم مساحت‌ها. ادامه داستان شاهرخ در مکالمه او با مصاحبه‌کننده منجر به یافتن یک مثال عام شد.

^۱ General Procedure

^۲ Sémadéni

^۳ Action Proof

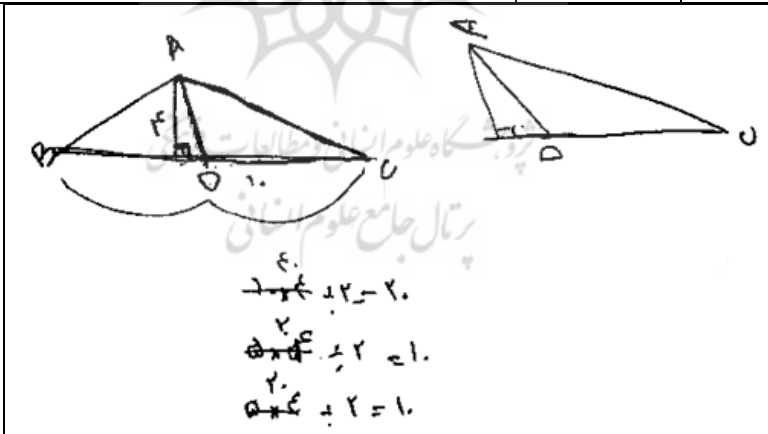
۱	مصاحبه‌کننده	پس شما یک مثلث متساوی‌الساقین در نظر گرفتی، اگر نخواهیم ساق‌هاش با هم برابر باشه چطور؟
۲	شاهرخ	[چند ثانیه سکوت]
۳	مصاحبه‌کننده	می‌خوای من یکیش رو برات برای مثال بکشم؟
۴	شاهرخ	یکی از ضلعاش اندازه‌اش کمتره.
۵	مصاحبه‌کننده	همین کار رو می‌خوام بکنم. مثلاً می‌خوام این یک ضلعش باشه [و شروع به ترسیم مثلث سمت چپ در شکل ۸ می‌کند]؛
۶	شاهرخ	باید یکم کمتر بگیرید.
۷	مصاحبه‌کننده	این رو یکم بیشتر می‌گیرم، این دو تا را به هم وصل می‌کنم. این یه مثلثه که هیچ کدوم از ضلع‌هاش با هم برابر
۸	شاهرخ	نیست.
۹	مصاحبه‌کننده	برابر نیست. حالا بیا از یک راسش به وسط ضلع مقابلش وصل کن.
۱۰	شاهرخ	[در حال رسم میانه]
۱۱	مصاحبه‌کننده	سعی کن وسط بکشی. [بعد از چند ثانیه]، خیلی خب حالا ببین از این رأس به وسط ضلع مقابل رسم کردی. الان دو تا مثلث به دست آوردی، آیا این دو مثلث هم مساحت‌هاش با هم برابر هستند؟
۱۲	شاهرخ	نه.
۱۳	مصاحبه‌کننده	چرا برابر نیست؟
۱۴	شاهرخ	چون، [بریده و نامفهوم حرف می‌زند]. اندازه‌هاشون، یکی شون مساوی نیستند [نمی‌تواند کلمات درستی را فراخوان کند ولی از اشاره‌ای که به شکل دارد مصاحبه‌کننده فکر می‌کند منظور او را متوجه شده است].

۱۵	مصاحبه‌کننده	این دو تا [مثلث] با هم برابر نیستند، شبیه هم نیستند.
۱۶	شاهرخ	بله.
۱۷	مصاحبه‌کننده	خودت بهم گفتی مساحت مثلث رو که می‌خوای پیدا کنی، قاعده رو ضرب در ارتفاع می‌کنی، بعد تقسیم بر دو می‌کنی.
۱۸	شاهرخ	بله.
۱۹	مصاحبه‌کننده	اشکالی داره، من [اجزاء] مثلث را نامگذاری کنم؟ [با تایید شاهرخ] C, B, A ، اسم اینجا رو هم می‌گذارم D . BD با DC چیه؟
۲۰	شاهرخ	برابره.
۲۱	مصاحبه‌کننده	اندازه‌هاشون یکیه. خب، حالا که [اندازه] قاعده یکی هست، وقتی که می‌خوایم مساحت رو به دست بیاریم، دیگه باید چی رو داشته باشیم؟
۲۲	شاهرخ	ارتفاع.
۲۳	مصاحبه‌کننده	ارتفاع. شما ارتفاع در این مثلث [با اشاره به مثلث ABD] رو برای من به دست بیار. نه، نه، ارتفاع وارد بر این قاعده [با اشاره به BD] رو پیدا کن. [بعد از رسم ارتفاع توسط شاهرخ]، آفرین. یعنی اینجا چه زاویه‌ایه؟
۲۴	شاهرخ	۹۰.
۲۵	مصاحبه‌کننده	آفرین، ۹۰ درجه. حالا می‌خوام ارتفاع این مثلث [با اشاره به مثلث ADC] رو رسم کنی. می‌دونی باید چطور رسم بشه؟ ارتفاع وارد بر این قاعده [با اشاره به DC] رو رسم کن.
۲۶	شاهرخ	این قاعده؟

۲۷	مصاحبه‌کننده	بله. [با توجه به حرکت دست شاهرخ] شما اول می‌خواستی ارتفاع وارد بر AC رو رسم کنی، درسته؟
۲۸	شاهرخ	بله.
۲۹	مصاحبه‌کننده	[بعد از چند لحظه‌ای که شاهرخ با مثلث کلنجر می‌رود و به جایی نمی‌رسد.] بذار مثلث رو برات اینجا دوباره رسم کنم. [شروع به رسم مثلث سمت راستی می‌کند.] این A ، C ، D . می‌خوایم ارتفاع وارد بر DC رو رسم کنیم.
۳۰	شاهرخ	[به رسم ارتفاع خارجی مثلث می‌پردازد.]
۳۱	مصاحبه‌کننده	آفرین! ^۱ دقیقا. یعنی این [اشاره به DC] رو چی کار می‌کنی؟
۳۲	شاهرخ	ادامه‌اش می‌دم.
۳۳	مصاحبه‌کننده	پس حالا اگر بنحوی این ارتفاع را در شکل قبلی بکشی، آن را کجا می‌کشی؟
۳۴	شاهرخ	روی همون ارتفاع قبلی.
۳۵	مصاحبه‌کننده	یعنی ارتفاع‌هاشون یکی شد؟
۳۶	شاهرخ	بله.
۳۷	مصاحبه‌کننده	حالا ارتفاع‌شون یکی شد. قاعده‌هاشون چی بود؟
۳۸	شاهرخ	قاعده‌هاشون یکیشون BD بود، یکی شون DC .
۳۹	مصاحبه‌کننده	اون وقت اندازه‌هاشون چی بودن با هم؟

^۱ غالب شرکت‌کنندگان در رسم ارتفاع خارجی با مشکل مواجه بودند. مسئله اصلی بر سر اشکال در درک مفهوم ارتفاع است. آنچه در جای جای مصاحبه‌ها دیده می‌شد، دانش‌آموزان بسیاری درک مفهومی از تعاریف میانه، ارتفاع و نیمساز ندارند و گاهی مانند رسم ارتفاع خارجی، به علت گذر زمان الگوریتم رسم را هم فراموش کرده‌اند. به این دلیل است که مصاحبه‌کننده از پاسخ درست شاهرخ متعجب و خوشحال شد.

۴۰	شاهرخ	برابر.
۴۱	مصاحبه‌کننده	اون وقت مساحت‌ها برابر می‌شه، یا برابر نمی‌شه؟
۴۲	شاهرخ	بله.
۴۳	مصاحبه‌کننده	می‌شه؟
۴۴	شاهرخ	[با اندکی مکث] می‌تونم بهش عدد بدم؟
۴۵	مصاحبه‌کننده	بله، می‌شه.
۴۶	شاهرخ	[شروع به دادن عدد و انجام محاسبات شکل ۸ می‌کند]. بله، مساوی می‌شه.
۴۷	مصاحبه‌کننده	بسیار خوب. پس مساحت‌ها تونست با هم برابر بشه، درحالی که شکل مثلث‌ها مثل هم نبود.
۴۸	شاهرخ	بله.
۴۹	مصاحبه‌کننده	چطور شد که مساحت‌ها برابر شد؟
۵۰	شاهرخ	چون قاعده‌ها و ارتفاع‌ها برابر بود، مساحت‌ها برابر شد.



شکل ۸: پاسخ شاهرخ دانش‌آموز پایه هفتم (قسمت دوم)

از ابتدای شروع مکالمه در قسمت دوم تا سطر ۱۱، مصاحبه‌کننده تلاش می‌کند موقعیتی فراهم کند که شاهرخ درمورد پیش‌فرض خود در مورد برابری مساحت مثلث‌ها حرف بزند: «مساحت دو مثلث در صورتی برابر است که آن دو مثلث هم‌نهشت (برابر) باشند.» مانند شاهرخ بسیاری که به جهت استنباط دیداری، هم‌نهشتی را شرط لازم برابری مساحت می‌دانند، در حالی که شرط کافی است. به این ترتیب بعد از سطر ۱۶، مصاحبه‌کننده به دنبال ساخت مثال عامی است که شاهرخ علاوه بر اینکه متوجه پیش‌فرض غلط خود شود، درستی گزاره مورد سوال را هم برای هر مثلی درک نماید. حاصل گفت‌وگو منجر به شکل‌گیری رویه‌ای برای شاهرخ شد که می‌تواند آن را روی هر مثالی پیاده کند و برابری مثلث‌های حاصل از رسم میانه را ببیند. بنابراین تفکر او به سطح رویه کلی رسیده است. سطرهای ۴۴ تا ۴۶ در انتهای مصاحبه نشان می‌دهد، ساختار به صورت انتزاعی برای او شکل نگرفته و همچنان منشاء عملیاتی و نیاز به محاسبات عددی در فرایند فکری او دیده می‌شود.

- ساختار مجرد^۱

«سمدنی در جهت توسعه اثبات‌های حرکتی اظهار می‌کند که حرکت به سوی اثبات‌های مفهومی لزوماً وابسته به در نظر داشتن خصوصیات عام موقعیت‌هایی است که قبلاً در ذهن مجسم شده‌اند» (بالاشف، ۱۹۸۸، ص. ۲۱۷). این «در نظر داشتن» مترادف با تعبیر میسن (۱۹۸۹) از تجرید است: «تغییر توجه ظریفی رخ می‌دهد، توجه، از یک حالت تعمیم یافته به یک شیء یا ویژگی معطوف می‌شود» (ص. ۲). ساختار مجرد «یک شیء ریاضی تکامل یافته^۲» (اسفرد، ۱۹۹۱) می‌باشد و تولد این شیء به معنای این است که دیگر، منشاء‌های عملیاتی و رویه‌ای ساختار دیده نمی‌شوند. تجریدی که در اینجا مدنظر است شامل دو مرحله‌ی «چگالش» و «جسمیت‌یافتن» در تعبیر اسفرد (۱۹۹۱) است. تجرید فرایندی است که مرحله «رویه کلی» را به «ساختار مجرد» ارتقا می‌دهد.

^۱ Abstract Structure

^۲ A Fully-fledged Mathematical Object

تفاوت محصول فرایند تجرید و تعمیم آن است که ساختارهای مجرد تقریباً مستقل از نوع بازنمایی هستند و می‌توان استدلال را به انحاء مختلف ارائه نمود (اگرچه عامل‌های دیگری مانند فقدان مهارت در کار با نمادها، ممکن است این کار را با مشکل مواجه کند). به تعبیر اسفرد (۱۹۹۱) ادراک عملیاتی یک مفهوم

باعث می‌شود که بدان، به جای موجودی بالفعل، به مثابه یک موجود بالقوه بنگریم که بنا به درخواست، در یک دنباله از اعمال به وجود می‌آید. بنابراین، در حالی که ادراک ساختاری ایستا (یا بهتر، آن چنانکه فرگه (۱۹۷۰) می‌گفت بگوییم «بی زمان»)، آنی و یکپارچه است، ادراک عملیاتی، پویا، پی در پی و با جزئیات است. (ص. ۴)

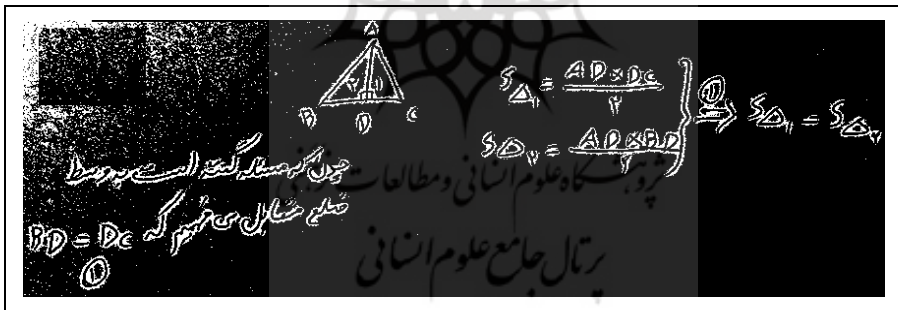
در فرایند یادگیری -هر نوع از یادگیری!- ویژگی‌های ثابت مشخصی مشاهده می‌شوند که ظاهراً تغییرات در محرک‌های بیرونی بر آنها اثری ندارند. تقدم ادراکات عملیاتی بر ساختاری^۱ یکی از چنین ویژگی‌های پایا است. ... پیازه، پیشگام این حوزه، در کتاب خود درباره‌ی معرفت‌شناسی تکوینی (۱۹۷۰، ص. ۱۶) نوشته است: «مفهوم انتزاع شده [ریاضیاتی]، از شی‌ای که عمل بر روی آن انجام گرفته، بیرون کشیده نمی‌شود، بلکه از خود عمل انتزاع می‌شود. به نظر من این، پایه‌ی تجرید منطقی و ریاضی است». (همان، ص. ۱۷)

نتایج پژوهش احمدپور و همکاران (۲۰۱۹)، هم سو با نقل اخیر از پیازه و اسفرد، نشان از تقدم تعمیم بر تجرید و بنابراین شکل‌گیری درک رویه‌ی یک اثبات نسبت به درک ساختار آن دارد.

^۱ به گفته اسفرد در حالت‌های نادری نوعی فهم شهودی خالص به دست می‌آید که «ادراک ساختاری مبهمی حاصل می‌شود، بدون آنکه پایه‌ی عملیاتی کاملی شکل گرفته باشد. احتمالاً این همان فهمی است که ریاضیدانان هنگام معرفی اولین نسخه‌ی مفهوم تابع داشتند. ... [این فهم] برای خلق یک نظریه‌ی ریاضی تکمیل شده، کافی نیست؛ اما مطمئناً در کشف قضایا و در تعیین جهت‌های پیشرفت بعدی، بسیار مفید خواهند بود.» (صص. ۲۹-۳۰)

شخصی که دارای «ساختار مجرد» است به تعبیر اسکمپ (۱۹۷۳)، ترجمه‌ی گویا، هم می‌داند چه کار می‌کند و هم می‌داند چرا این کار را می‌کند، یعنی قوانین و دلایل را هم‌زمان دارد. در حالی که در مرحله «رویه‌ی کلی» شخص فقط می‌داند چه کار می‌کند و درمورد چرایی عملش پاسخی ندارد.

سینا دانش‌آموز پایه هشتم در پاسخ به سوال پژوهش، استدلال زیر را در برگه خود تحویل مصاحبه‌کننده داد. این دانش‌آموز در مدرسه تیزهوشان مشغول به تحصیل بود و مشخصا در هنگام مصاحبه دریافت سریعی داشت. مصاحبه او کوتاه و فقط دو دقیقه و سی و پنج ثانیه طول کشید، در حالی که مدت زمان دیگر مصاحبه‌ها غالبا بیش از بیست دقیقه بود. سینا در پاسخ کتبی خود، رده خاص مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را در نظر گرفته و برای آنها برابری مساحت‌های مثلث‌های حاصل از رسم یکی از میانه‌ها را به‌طور مستقیم در حالت کلی اثبات کرده بود. هرچند این پاسخ برای سوال پژوهش ناکافی است، اما پاسخ سینا برای این حالت خاص یک ساختار مجرد صورت‌یافته‌ای دارد که به راحتی قابل تعمیم به حالت کلی است. فقط کافی است سینا در حالت کلی ارتفاع مثلث‌ها را شناسایی کند.

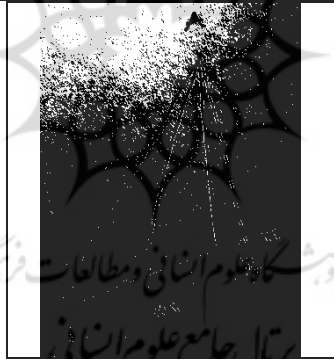


شکل ۹: پاسخ سینا دانش‌آموز پایه هشتم (قسمت اول)

۱	مصاحبه‌کننده	لطفاً بگو مسئله از شما چه چیزی خواسته و شما چه جوابی بهش دادی؟
۲	سینا	گفته اثبات کنید که مثلاً وقتی که از یک رأس مثلث پاره‌خطی به وسط ضلع مقابل وصل کنیم، مساحت دو مثلث [ایجاد

		شده] مساوی هستند.
۳	مصاحبه‌کننده	خب.
۴	سینا	من مساحت هر مثلث رو نوشتم چطور به دست میاد. گفته قاعده هر دو دوتاشون برابره، چون گفته به وسط ضلع وصل بشه. بعد دیگه مساحتشون برابر می‌شه.
۵	مصاحبه‌کننده	بین شما وقتی AD رو رسم کردی، BC رو نصف کرده. از کجا متوجه شدی AD ارتفاعه؟
۶	سینا	خب اینجا فرض گرفتم.
۷	مصاحبه‌کننده	فرض گرفتی. مثلث ABC چه مثلیه که میانه‌اش همون ارتفاعشه؟
۸	سینا	متساوی‌الاضلاع.
۹	مصاحبه‌کننده	متساوی‌الاضلاع. حالا بیا مثلثت رو متساوی‌الاضلاع در نظر بگیر، مختلف‌الاضلاع در نظر بگیر.
۱۰	سینا	[سینا شروع به کشیدن یک مثلث مختلف‌الاضلاع شکل ۱۰ کرد.]
۱۱	مصاحبه‌کننده	خیلی خب، آفرین، به وسط می‌کشی. آیا مساحت مثلث AMC با مساحت مثلث AMB برابر هست یا نه؟
۱۲	سینا	بله.
۱۳	مصاحبه‌کننده	اشکالی داره، من [اجزاء] مثلث را نامگذاری کنم؟ [با تایید سینا] A, B, C ، اسم اینجا رو هم می‌گذارم D . BD با DC چیه؟
۱۴	سینا	هوم. برابره دیگه.
۱۵	مصاحبه‌کننده	چرا برابره؟
۱۶	سینا	چون که کلا [چند لحظه سکوت]

۱۷	مصاحبه‌کننده	شما برای اینکه مساحت رو به دست بیاری مگه نگفتی ارتفاع رو می‌خوای؟
۱۸	سینا	بله.
۱۹	مصاحبه‌کننده	حالا دیگه AM ارتفاع نیست، ارتفاع رو بکش. برای AMB ارتفاع رو بکش.
۲۰	سینا	AMB
۲۱	مصاحبه‌کننده	کدوم قاعده رو باید در نظر بگیری؟
۲۲	سینا	BC
۲۳	مصاحبه‌کننده	آهان. این ارتفاعش شده [سینا AH را رسم کرد]. ارتفاع AMC چیه؟
۲۴	سینا	اونم همینه. خب قاعده‌شون برابره، ارتفاعشون هم برابره، پس مساحت‌ها برابرنده.



شکل ۱۰: پاسخ سینا دانش‌آموز پایه هشتم (قسمت دوم)

سینا از سطر ۱۰ به بعد، شروع به تعمیم استدلال اولیه خود برای مثلث‌های مختلف‌الاضلاع می‌کند. به راحتی اجزاء ساختار اثبات را یکی یکی شناسایی می‌کند. ارتفاع وارد بر قاعده‌های CM و MB که اندازه‌های برابر دارند، ترسیم می‌کند. با توجه به ارتفاع مشترک بین دو مثلث و برابری اندازه قاعده‌ها، برابری مساحت‌ها را نتیجه می‌گیرد. سینا بر خلاف شاهرخ ارتباط بین اجزاء یک ساختار مجرد را به صورت

نویسنده اول: فاطمه احمدپور
چالش‌های دانش‌آموزان در ساخت اثبات‌های هندسی...
یکپارچه و آنی در نظر داشت و نیازی به محاسبه و انجام عملیات حسابی یا جبری
برای دیدن برابری مساحت‌ها نداشت. به نظر می‌رسد وی به راحتی قادر به نوشتن
صورت جبری اثبات بود ولی مصاحبه‌کننده چنین درخواستی از وی نکرد.

- اثبات صورت‌بندی شده^۱

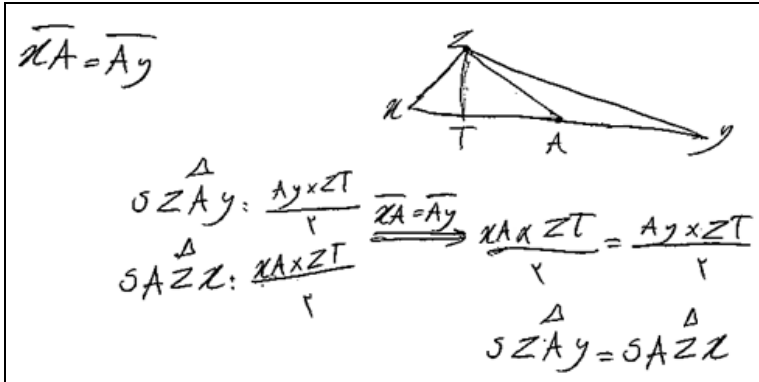
برای رسیدن به مرحله اثبات صورت‌بندی شده، توانایی توصیف ساختار مجرد به روشی
قابل قبول الزامی است. بالاشف (۱۹۸۸) اذعان داشت زبان روزمره به صورت‌بندی یک
اثبات کمک می‌کند، اما کافی نیست. جبر به عنوان زبان ریاضی نه فقط برای برقراری
ارتباط، بلکه به عنوان ابزاری برای استنتاج‌های منطقی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

گذار از «ساختار مجرد» به «اثبات صورت‌بندی شده» یک فرایند *صوری‌سازی* است
(شکل ۳ را ببینید). در این فرایند یک ساختار مجرد که یک شیء شخصی و وابسته به
فرد است، به صورت یک اثبات تبدیل می‌شود که می‌توان آن را با دیگران به اشتراک
گذاشت. اثبات به «صورتی» ارائه می‌شود که ساختار آن برای دیگران قابل دسترس
باشد.

فرایند فکری امیرحسین هم مشابه سینا در بخش قبل در طی مصاحبه پیش رفت تا
ساختار اثبات را به دست آورد. سپس ساختار ذهنی خود را به در قالب عبارات جبری
بازنمایی کرد (شکل ۱۱ را ببینید). در این حالت یک اثبات صورت‌بندی شده، ارائه شده
است.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

^۱ Formulated Proof



شکل ۱۱: پاسخ امیرحسین دانش‌آموز پایه هفتم

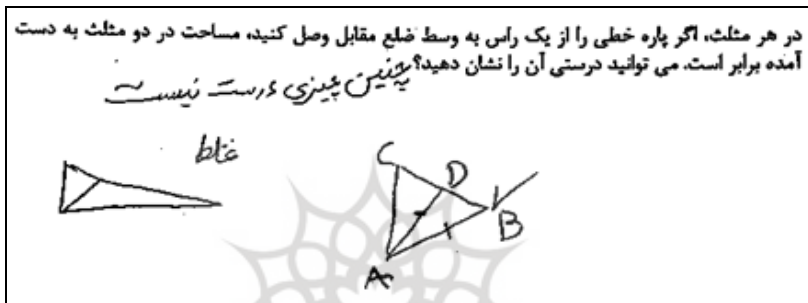
- مسیر صورت

در ابتدای مسیر صورت، افراد به دلیل فقدان درک کافی از گزاره‌ای که باید اثبات شود، گاهی حتی نمی‌توانند مثالی بیاورند که در گزاره صدق کند؛ اما استدلال‌هایی می‌آورند که به نظر خودشان درست هستند، چرا که صورت و ظاهر آنها مشابه استدلال‌هایی است که در کتاب درسی یا کلاس ریاضی دیده‌اند. در این مرحله پاسخ یک تقلیدِ صوری^۱ است و به ازای بازنمایی‌های نمادی به‌کار گرفته شده، در ذهن دانش‌آموز مفاهیم مرتبط وجود ندارد و استدلال‌هایش بر اساس یک درک معنایی پیش نرفته و اشتباه است. همان‌طور که دانش‌آموزی در طول مسیر صورت حرکت می‌کند، مهارت بیشتری در انجام عملیات حسابی و جبری نشان می‌دهد. در انتهای مسیر، قادر است درستی و صحتِ صوری هر مرحله از اثبات را تعیین کند و اثبات‌های نحوی معتبری تولید نماید، اما بازنمایی‌های نمادی هنوز هم توخالی هستند. در این حالت اثباتِ فرمولی^۲ حاصل می‌شود. عماد دانش‌آموز پایه هشتم است که در طول مصاحبه در مسیر صورت حرکت می‌کند.

^۱ Formal Mimicry

^۲ Formulaic Proof

وی در پاسخ به سوال پژوهش، در هنگامی که به صورت انفرادی به سوال فکر می‌کرد، درستی گزاره مطرح شده را با آوردن مثال نقض رد نمود (شکل ۱۳ را ببینید). مثال نقض، یک مثلث مختلف الاضلاع با یک زاویه راست است که میانه آن بدون دقت ترسیم شده است. در حالی که از نظر او مثلث متساوی‌الساقین در گزاره مطرح شده صدق می‌کند. استدلال اولیه عماد بر پایه شهود و با این پیش‌فرض است که در صورتی مساحت دو مثلث برابر است که آنها هم‌نهشت باشند. به این ترتیب در مثلث مختلف الاضلاع با رسم میانه دو مثلث با مساحت برابر به دست نمی‌آید.

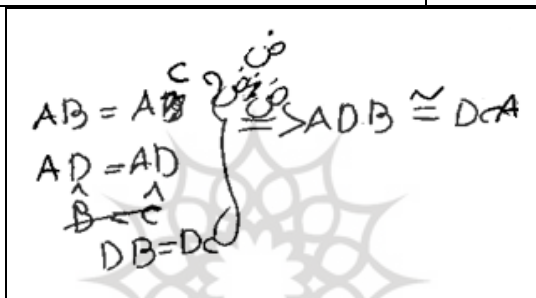


شکل ۱۲: پاسخ عماد دانش‌آموز پایه هشتم

در هنگام مصاحبه، مصاحبه‌کننده از عماد می‌خواهد دلیل درستی گزاره در مورد مثلث متساوی‌الساقین را بیان کند.

۱	عماد	$AB=AC$ چون مثلث ABC متساوی‌الساقینه. $AD=AD$ مشترک. زاویه B و زاویه C برابرند چون مثلث متساوی‌الساقینه. دو ضلع و زاویه بین برابر می‌شوند.
۲	مصاحبه‌کننده	دو ضلع و زاویه بین. [مصاحبه‌کننده با اشاره به اجزا مثلث در شکل ۱۲ ادامه می‌دهد:] ضلع‌هایی که شما گفتی، یکی این ضلع مشترک و این دو تا، اون وقت زاویه‌های بینشون کدومه؟
۳	عماد	[اشاره به زوایای B و C]

۴	مصاحبه‌کننده	باید زاویه‌های بینشون رو در نظر بگیری. خود شما هم بین نوشتی، دو ضلع و زاویه بین [ضض] (شکل ۱۳ را ببینید).
۵	عماد	خب یک روش دیگه بگم. [سکوت]
۶	مصاحبه‌کننده	یک بار دیگه از روی سوال بخون.
۷	عماد	اگر پاره‌خطی را از یک رأس به وسط ضلع مقابل وصل کنید، آهان $DB=DC$. [شروع به اصلاح پاسخ خود در شکل ۱۳ نمود].



شکل ۱۳: ادامه پاسخ عماد دانش‌آموز پایه هشتم (قسمت دوم)

عماد در پاسخ خود مثلث ABC را متساوی‌الساقین در نظر گرفته و برای اثبات هم‌نهشتی دو مثلث ABD و BCD ، دو ضلع و یک زاویه برابر در مثلث را مشخص نمود. ولی به اشتباه، زاویه در نظر گرفته شده بین دو ضلع نیست. اشتباه از آنجا ناشی می‌شود که او دلیل برابری دو مثلث را در حالت‌های مختلف هم‌نهشتی (ضضض، ضضض، ضضز) نمی‌داند. بنابراین در چنین موقعیتی که ارتباط اجزاء مثلث برای وی به خوبی شکل نگرفته، صورت و ظاهر آنچه از قبل دیده است را تقلید می‌کند. در ادامه وقتی دوباره سوال را می‌خواند، به فرض دیگری در مسئله می‌رسد که به راحتی حالت هم‌نهشتی سه ضلع را نتیجه می‌گیرد. اثبات هم‌نهشتی دو مثلث ABD و BCD ، یک اثبات نحوی معتبر است. اما در ادامه مصاحبه مشخص می‌شود استدلال‌ها بر اساس یک

درک معنایی پیش نرفته و بازنمایی‌های نمادی هنوز هم برای عماد معنادار نیستند و بنابراین پاسخ شکل ۱۳ یک اثبات فرمولی است.

۸	مصاحبه‌کننده	پس وقتی دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت‌هاشون هم با هم برابرند. حالا بیا یک مثلث مختلف‌الاضلاع بکش، وسط یکی از ضلع‌هاش رو دقیق پیدا کن و از رأس روبروش بهش وصل کن.
۹	عماد	
۱۰	مصاحبه‌کننده	خب حالا دو مثلث به دست اومد، [با اشاره به شکل سطر ۹] می‌خوایم ببینیم مساحت این مثلث با مساحت این مثلث برابر هست یا نه.
۱۱	عماد	می‌تونیم بگیریم $DA=DC$ ، BD هم مشترکه. AB با AC هم که برابر نیست، اگه BD نیمساز باشه، شاید بتونیم بگیریم برابره.

عماد از یک طرف دوباره زوایایی را انتخاب می‌کند که بین اضلاع متناظر دو مثلث نیست، از طرف دیگر با علم به این که ضلع سوم دو مثلث برابر نیستند به دنبال اثبات هم‌نهشتی آنهاست.

- مسیر رویه

دو مرحله ابتدایی از مسیر رویه با مسیر ساختار مشترک است. دانش‌آموز با آغاز از مثال به یک رویه کلی می‌رسد، ولی در ادامه به جای تجرید رویه کلی، با صوری کردن آن، کار به انجام می‌رساند و دیگر ادامه نمی‌دهد. اینجاست که حاصل کار وی، یک اثبات رویه‌ای خواهد بود.

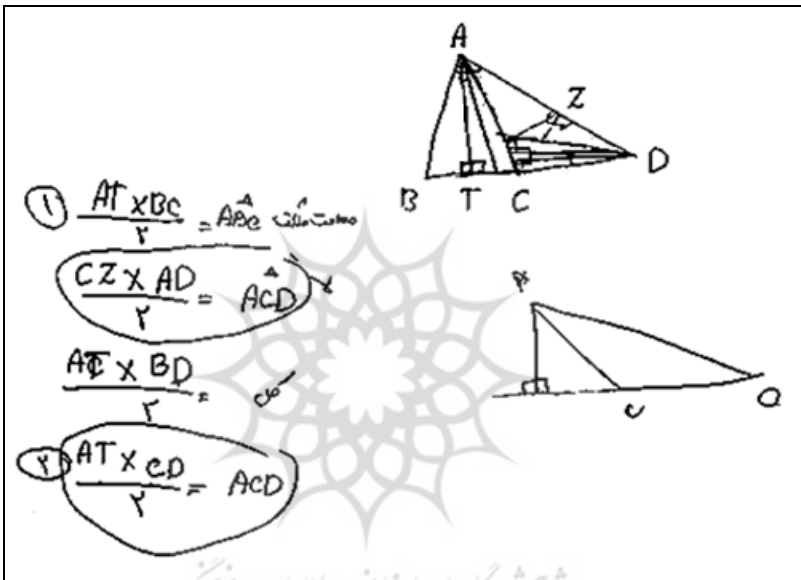
^۱ Procedural Proof

پیش از این در مورد خصوصیات مرحله «رویه کلی» گفته شد که بین اشیاء و اجزاء مسئله، ارتباط عملیاتی (حرکتی، محاسباتی) وجود دارد. در اثبات رویه‌ای، این عملیات، صوری می‌شود. فاطمه‌سادات دانش‌آموز پایه هشتمی است که فرایند فکری جالبی برای صوری کردن عملیات محاسبه مساحت مثلث طی می‌کند. مثلث در نظر گرفته شده مختلف‌الاضلاع است و فاطمه‌سادات قصد دارد برابری مساحت دو مثلث حاصل از رسم یکی از میانه‌ها را ثابت کند.

۱	فاطمه‌سادات	اگر من ارتفاع این [مثلث ABC در شکل ۱۴] رو رسم کنم. مثلاً AT . AT را ضرب در قاعده/ش می‌کنم که همون BC هست. بر ۲ تقسیمش می‌کنم. این مساحت مثلث ABC رو می‌ده.
۲	مصاحبه‌کننده	خب.
۳	فاطمه‌سادات	دوباره اگر من بیام ارتفاع این [مثلث ACD در شکل ۱۴] رو رسم کنم. بعد CZ رو ضرب در قاعده این کنم که AD هست، تقسیم بر ۲ کنم، همیشه مساحت مثلث ACD
۴	مصاحبه‌کننده	بله.
۵	فاطمه‌سادات	بعد مساحت کل مثلث همیشه AC ضرب در BD تقسیم بر ۲. مساحت کل. همیشه قاعده رو یکی دیگه بگیرم؟ این نمی‌شه؟
۶	مصاحبه‌کننده	چرا نمی‌شه؟
۷	فاطمه‌سادات	ارتفاعش $[AC]$ بر این $[BD]$ عمود نمی‌شه.
۸	مصاحبه‌کننده	اگر در مثلث بزرگتر بخوای ارتفاع وارد بر BD را بکشی، چه کار باید بکنی؟ [چند لحظه سکوت]

همان‌طور که در پانویس بخش «رویه کلی» گفته شد، غالب دانش‌آموزان مفهوم ارتفاع را کامل و درست درک نکرده بودند. حتی در موارد قابل توجهی مانند فاطمه‌سادات

نحوه ترسیم آن را فراموش کرده بودند. از اینجا به بعد مصاحبه با فاطمه‌سادات با صحبت درمورد یافتن ارتفاع مثلث ABD و ACD ادامه پیدا کرد. در شکل ۱۴ آزمون و خطاهای فاطمه‌سادات برای ترسیم پاره‌خط‌هایی عمود (ارتفاع) آشکار است. بعد از چند دقیقه گفت و شنود و تامل، وی متوجه شد AT ارتفاع مشترک بین هر سه مثلث مورد نظر است. بنابراین فرمول‌های مساحت را مانند تصویر شکل ۱۴ تصحیح و تکمیل کرد.



شکل ۱۴: پاسخ فاطمه‌سادات دانش‌آموز پایه هشتم

<p>خب حالا آگه من این دو تا را با هم جمع کنم [روابط ۱ و ۲ در شکل ۱۴]، باید برابر با مساحت کل بشه. BC و CD با هم برابرند، می‌تونم به جای BC، CD هم قرار بدم [شروع نوشتن عبارات جبری زیر کرد]. خوب من می‌تونم منخرج‌هاشونو در نظر بگیرم.</p>	<p>۹ فاطمه‌سادات</p>
--	----------------------

$BC = CD = \frac{BD}{2}$ $\frac{AT \times BC}{x} + \frac{AT \times CD}{x} = \frac{AT \times BD}{x}$		
<p>آیا [با اشاره به عبارت جمعی بالا] جمع این دو تا برابره AT ضرب در BD هست؟</p>	مصاحبه‌کننده	۱۰
<p>خب به جای CD می‌تونم BC رو قرار بدم. خب این دو تا شبیه هم شدند. اون وقت می‌تونم بنویسم دو تا AT ضرب در BC برابره AT ضرب در BD.</p> $2(AT \times BC) = AT \times BD$	فاطمه‌سادات	۱۱
<p>BC برابر با چی هست؟ چی رو نصف کردی؟</p>	مصاحبه‌کننده	۱۲
<p>BD.</p>	فاطمه‌سادات	۱۳
<p>بنویس $BD/2$.</p>	مصاحبه‌کننده	۱۴
<p>آهان الان به جای BC می‌تونم $BD/2$ بذارم. میشه</p> $2(AT \times BC) = AT \times BD$ $2(AT \times \frac{BD}{2}) = AT \times BD$ $AT \times BD = AT \times BD$	فاطمه‌سادات	۱۵
<p>درست شد؟</p>	مصاحبه‌کننده	۱۶
<p>بله. نه! اینجا به ۲ اضافه هست!</p>	فاطمه‌سادات	۱۷
<p>می‌تونن بگی اشکال کارت چی بود؟</p>	مصاحبه‌کننده	۱۸
<p>[سکوت]</p>	فاطمه‌سادات	۱۹
<p>دو ضرب در ۱۰ به علاوه ۵ میشه چی؟ ۲؟ به بار در ۱۰ ضرب میشه، به بار در ۵. ولی اگه ۲ ضرب در ۱۰ ضرب</p>	مصاحبه‌کننده	۲۰

	در ۵ بشه چی؟ 	
۲۱	فاطمه‌سادات	یعنی اول ۱۰ ضرب در ۵ میشه.
۲۲	مصاحبه‌کننده	فروق نمی‌کنه می‌تونن بنویسن ۲ ضرب در ۱۰ ضرب در ۵. 
۲۳	فاطمه‌سادات	[با اشاره به آخرین عبارت جبری که خودش نوشته بود،] یعنی ۲ فقط ضرب در AT می‌شه.
۲۴	مصاحبه‌کننده	فوقی نمی‌کنه
۲۵	فاطمه‌سادات	[حرف مصاحبه‌کننده را قطع می‌کند و می‌گوید:] آهان یعنی این ۲ حذف می‌شه. 
۲۶	مصاحبه‌کننده	اصلا کاری نداریم که جمع مساحت مثلث اول و دوم برابر مساحت کل می‌شه. سوال اینه که آیا مساحتشون با هم برابر هست؟ ماه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
۲۷	فاطمه‌سادات	بله.
۲۸	مصاحبه‌کننده	چرا؟ سال جامع علوم انسانی
۲۹	فاطمه‌سادات	چون BC و CD با هم برابرند.

در ردیف‌های ۹ تا ۱۵ نیز همچنان فاطمه‌سادات به تفکر صوری خود ادامه می‌دهد. هدف اصلی مسئله یعنی اثبات برابری مثلث‌ها را فراموش می‌کند و با مهارت خوبی شروع به محاسبات جبری می‌کند. اشتباه او در استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری، به جای خاصیت شرکت‌پذیری محاسبات او را دچار اشکال کرد. فاطمه‌سادات در ردیف ۲۹ در

پاسخ به سوال دلیل برابری مساحت دو مثلث، به برابری قاعده آنها اکتفا می‌کند. واضح است که فاطمه‌سادات با داشتن فرمول مساحت دو مثلث در شکل ۱۴ (فرمول ۱ و ۲)، تنها تفاوت آنها را در قاعده‌های متفاوت می‌بیند. ارتباط بین اجزاء اثبات (ارتفاع، قاعده و مساحت دو مثلث) از ابتدا تا انتهای اثبات، مرحله به مرحله و همراه با جزئیات بود، در حالی که اگر ساختاری مجرد در ذهن فاطمه‌سادات نقش بسته بود، در پایان ادراکی آنی و یکپارچه ارائه می‌کرد.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله رفتار و عملکرد دانش‌آموزان در حین انجام یک اثبات هندسی با جزئیات دقیق به تصویر کشیده شد و همان طور که در یافته‌های تحقیق بیان شد، مدل مطرح شده در چارچوب نظری (احمدپور و همکاران، ۲۰۱۹) در یک موقعیت هندسی نیز معتبر است. این پژوهش از این نظر اهمیت دارد که فرایند ساخت و درک اثبات‌های هندسی با اثبات‌های جبری متفاوت است. چرا که در اثبات‌های هندسی دانش‌آموزان باید میان دیدن (یک شکل عینی) و نتایج استنتاجی (یک صورت مجرد) تفاوت قائل شوند. یافته‌های این پژوهش چالش‌های دانش‌آموزان را بخصوص در مرحله آزمایش مبتدیانه نشان داد. در مقایسه با نتایج حاصل از پژوهش احمدپور و همکاران (۲۰۱۹) تنوع برداشت‌ها و پاسخ‌های مبتدیانه دانش‌آموزان در مسائل هندسی بیشتر از مسائل نظریه اعداد است.

این در حالی است که میزان موفقیت شرکت‌کنندگان هر دو پژوهش در گذار از هر مرحله، وابسته به دقت دانسته‌های آنهاست. دانستن ویژگی‌های اشیاء حسابی، جبری و هندسی مسئله، دیدن ارتباط بین آنها و توانایی قرار دادن‌شان در زنجیره‌ای از استنتاج‌های منطقی در اثبات‌های هر دو پژوهش مشترک و مشابه است.

چالش دیگر دانش‌آموزان که در مسائل هندسی نمود بیشتری دارد، اسامی و اصطلاحات اشیاء و مفاهیم هندسی است. این لغات برای دانش‌آموزان دشوار است. مشکل زمانی دو چندان می‌شود که فرایند یادگیری این اصطلاحات با مسمای خود در ارتباط نباشند و به صورت طوطی‌وار حفظ شوند.

خوشبختانه در سال‌های اخیر با تغییر نگاه در تدوین مطالب هندسی در کتاب‌های درسی امکان تدریس مفهومی این مطالب بیشتر شده است. وقتی ریاضی صرفاً در سطح استنتاج صوری تدریس شود، دانش‌آموزانی که ادراک کافی از مفاهیم ریاضی پیشنهاد ندارند، صرفاً به تقلید صورت استنتاج‌ها می‌پردازند. مشکل زمانی دوچندان می‌شود که چنین تقلیدی از سوی معلمان مورد انتظار و کافی باشد. دیمل و هرست^۱ (۲۰۲۰) توصیف دقیقی از انتظار معلمان ریاضی در مورد نحوه ارائه اثبات‌های هندسی توسط دانش‌آموزان بر روی تخته کلاس گزارش نمودند. نتایج پژوهش آنها نشان داد که رونویسی اثبات‌های هندسی توسط دانش‌آموزان برای معلمان ریاضی شرکت‌کننده در تحقیق مورد انتظار و معمول است.

نتایج حاصل از این پدیدارنگاری ما را به سوی این دیدگاه پیش خواهد برد که در هنگام برنامه‌ریزی‌های آموزشی با در نظر داشتن طیف یادگیری، چه در سطح کلان و چه در سطح خرد، به نیازهای همه دانش‌آموزان، توجه شود و امکان تحقق برابری آموزشی بیشتر گردد. هم‌چنین مطالعه بیشتری لازم است تا در یک برنامه درسی ریاضی جامع، سمت و سو و تمرکز فعالیت‌های اثباتی نسبت به مسیرهای سه‌گانه (ساختار، صورت و رویه) مشخص شود. از یک طرف، هر سه مسیر، در نهایت می‌توانند به اثبات‌های صوری قابل پذیرش ختم شوند، اما عمق ادراک حاصل از سه مسیر متفاوت است. از طرف دیگر اثر متقابلی که مسیرها می‌توانند بر هم داشته باشند، گویای سودمندی بالقوه مسیرهای صورت و رویه، در افزایش فهم و درک دانش‌آموزان است.

منابع

- اسکمپ، ریچارد. (۱۹۷۳). فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری. ترجمه زهرا گویا. (۱۳۸۴).
 رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۸۱. صص. ۴-۱۵.
 فلیک، اووه. (۱۹۹۸). درامدی بر تحقیق کیفی. ترجمه‌ی هادی جلیلی. (۱۳۸۸).
 چاپ دوم. تهران: نشر نی.

^۱ Dimmel & Herbst

گال، مردیت؛ بورگ، والتر؛ گال، جویس. (۱۹۹۶). *روش‌های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روانشناسی*. ترجمه‌ی احمدرضا اصفهانی و همکاران. (۱۳۸۲). چاپ پنجم (۱۳۸۹). تهران: نشر دانشگاه شهید بهشتی و سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهی (سمت).

Ahmadpour, F., Reid, D., & Fadaee, M. R. (۲۰۱۹). Students' ways of understanding a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(۲), ۸۵-۱۰۴.

Balacheff, N. (۱۹۸۸). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, Hodder and Stoughton, London, pp. ۲۱۶-۲۳۵.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. and Movshovitz-Hadar, N. (۲۰۰۲). The teaching of proof. In L.I. Tatsien (ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. III, Higher Education Press, Beijing, pp. ۹۰۷-۹۲۰.

Bartolini, M. G., & Martignone, F. (۲۰۱۴). Manipulatives in mathematics education. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer Science and Business Media Dordrecht, pp. ۳۶۵-۳۷۲.

Clement, L. L. (۲۰۰۴). A model for understanding, using, and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*. ۱۱, ۹۷-۱۰۲.

Davis, P. J. & Hersh, R. (۱۹۸۱). *The mathematical experience*. Birkhäuser: Boston.

Dimmel, J. K.; Herbst, P. G. (۲۰۲۰). Proof transcription in high school geometry: a study of what teachers recognize as normative when students present proofs at the board. *Educational Studies in Mathematics*, ۱۰۵(۱), pp. ۷۱-۸۹.

Harel, G., & Tall, D. O. (۱۹۹۱). The General, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*. ۱۱(۱), ۳۸-۴۲.

Healy, L. and Hoyles, C. (۲۰۰۰). Proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*. ۳۱(۴): ۳۹۶-۴۲۸.

Herscovics, N., & Bergeron, J. C. (۱۹۸۸). An extended model of understanding. In M. J. Behr, & C. B. Lacampagne, (Eds.), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. ۱۵-۲۲). De Kalb, IL: Northern Illinois University.

- Knuth, E. (۲۰۰۲). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal of Research in Mathematics Education*, 33(۵), pp. ۳۷۹-۴۰۵.
- Leron, U. (۱۹۸۳). Structuring mathematical proofs. *The American Mathematical Monthly*, 90(۳), ۱۷۴-۱۸۵.
- Lesh, R. Post, T. & Behr, M. (۱۹۸۷). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. ۳۳-۴۰. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Martin, G., & Harel, G. (۱۹۸۹). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(۱), ۴۱-۵۱.
- Mason, J. (۱۹۸۹). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*. ۹(۲), ۲-۸.
- Marton, F. (۱۹۸۱). Phenomenography—describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, ۱۰, ۱۷۷-۲۰۰.
- Miyazaki M., Fujita T., & Jones K. (۲۰۱۷). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, 94(۲), ۲۲۳-۲۳۹.
- Pirie, S., & Kieren, T. (۱۹۸۹). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9(۳) ۷-۱۱.
- Sémadéni, Z. (۱۹۸۴). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics*. 4(۱), pp. ۳۲-۳۴.
- Sfard, A. (۱۹۹۱). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22(۱), ۱-۳۶.
- Stylianides, A.J. (۲۰۰۷). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. ۶۵: ۱-۲۰.
- van Hiele, P. M. (۱۹۹۹). Developing Geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, ۵(۶), ۳۱۰-۳۱۶. Doi: ۱۰.۲۳۰۷/۴۱۱۹۸۸۵۲.