ASPI | Afarand Scholarly Publishing Institute; Turkey
ISSN: 1973-2873; Philosophical Thought. 2023;3(2):141-159. 10.58209/jpt.3.2.141

Tarski's Truth Theory

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Authors
Ahmadzadeh S.
Department of Philosophy, Faculty of Humanities, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
Nabavi L.*
Department of Philosophy, Faculty of Humanities, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

How to cite this article
Ahmadzadeh S, Nabavi L. Tarski's Truth Theory. Philosophical Thought.2023;3(2):141-159.

***Correspondence**
Address: Department of Philosophy, Tarbiat Modares University, Jalal Al Ahmad, Tehran, Iran
Phone: +98 (21) 82884643
Fax: +98 (21) 82883617
nabavi_l@modares.ac.ir

Article History
Received: February 6, 2023
Accepted: April 25, 2023
ePublished: June 5, 2023

ABSTRACT

Tarski's theory of truth was first introduced in "The concept of truth in formalized languages." In this paper, we introduce Tarski's truth theory in detail, based on the mentioned article, and make its account clear about the main questions that he faced. Also, we argue that accepting Tarski's theory of truth entails Platonism in mathematics.

Keywords Tarski; Truth Theory; Metalanguage; Semantics

CITATION LINKS

[Coffa A; 1991] The semantic tradition from kant to carnap: To the Vienna station [Halbach V; 2014] Axiomatic theories of truth [Henkin L; 1949] The completeness of the first-order functional calculus [Hodges W; 2001] Tarski's truth definitions [Mendelson E; 2015] Introduction to mathematical logic [Patterson D; 2012] Alfred tarski: Philosophy of language and logic [Tarski A; 1944] The semantic conception of truth and the foundations of semantics [Tarski A; 1956] Logic, semantics, metamathematics [DeVidi D, Solomon G; 1999] Tarski on "essentially richer" metalanguages [Ray G; 2005] On the matter of essential richness

نوع مقاله: پژوهشی اصیل

نظریه صدق تارسکی

سیاوش احمدزاده

گروه فلسفه، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

لطف‌الله نبوی*

گروه فلسفه، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده

نظریه سمانتیکی صدق تارسکی برای اولین بار در مقاله "مفهوم صدق در زبان‌های صوری شده" معرفی شد. در این مقاله نظریه صدق تارسکی را با جزییات آن، براساس مقاله مذکور، معرفی خواهیم کرد و موضع تارسکی را در مقابل پرسش‌های اساسی‌ای که با آن روبه‌رو بود را روشن خواهیم ساخت. همچنین استدلال خواهیم کرد که پذیرش نظریه صدق تارسکی منتج به افلاطون‌گرایی در ریاضیات خواهد شد.

کلیدواژگان: تارسکی، نظریه صدق، فرازبان، سمانتیک

***نویسنده مسئول:** nabavi_l@modares.ac.ir

آدرس مکاتبه: تهران، جلال آل احمد، پل نصر، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم انسانی

تلفن محل کار: ۰۲۱۸۲۸۸۴۶۴۳؛ **فکس:** ۰۲۱۸۲۸۸۳۶۱۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۵

تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۱۵

مقدمه

تارسکی در مقاله "مفهوم صدق در زبان‌های صوری شده" مسأله خود را ارایه تعریفی از صدق می‌داند که از لحاظ مادی کافی باشد[۱] و نسبت به زبانی که در آن بیان می‌شود از لحاظ صوری صحیح باشد. منظور از شرط کفایت مادی تعریف صدق هم‌خوانی تعریف با شهود متعارف افراد از مفهوم صدق است. بخش زیادی از تلاش و نوآوری تارسکی معطوف به مشخص‌ساختن و صوری‌سازی این است که حداقل شرط لازم برای این که چیزی برای کاربران زبان روزمره تعریف صدق محسوب شود چیست. همچنین برای ارضأ شرط صحت صوری باید اولاً مفهوم‌هایی که قرار است صدق برحسب آنها تعریف شود و ثانیاً قواعد صوری‌ای که تعریف صدق باید از آنها تبعیت کند، به‌طور کلی‌تر قواعد صوری زبان، به دقت مشخص شوند[۲].

نظر به این که زبان‌های متفاوت ممکن است دارای قدرت بیان، ساختار و قواعد متفاوت باشند تعریف صدق برای آنها می‌تواند متفاوت باشد یا در بعضی از آنها اصلاً ممکن نباشد. پس جست‌وجو تارسکی شامل یافتن زبان‌هایی است که بتوان صدق را با رعایت شرایط کفایت مادی و صحت صوری برای آنها و در خود آنها و یا در زبانی دیگر[۳] تعریف کرد و در عین حال دچار پارادوکس و در نهایت تریویالیتی[۴] (triviality) نشوند. در بخش اول چگونگی حل چنین مساله‌ای توسط تارسکی را در قالب منطق امروزی و با نمادهای آشنای شرح خواهیم داد. در بخش دوم نشان خواهیم داد که چرا تارسکی نظریه صدق تارسکی نظریه‌ای مطابقتی است و شرایط صدق در فرازبان نمی‌توانند یک سری اصل موضوعه برای صدق باشند. در بخش سوم این را بررسی خواهیم کرد که آیا در نظریه تارسکی مفاهیم سمانتیکی به مفاهیم غیرسمانتیکی فروکاسته می‌شوند یا نه و با توجه به آن به این سوال پاسخ خواهیم داد فرازبان چه تفاوتی باید با زبان داشته باشد. در نهایت در بخش چهارم تلاش خواهیم کرد نشان دهم فرازبان نمی‌تواند مساله ارجاع به جهان (تعبیرشدگی) را در زبان حل کند.

تعریف سمانتیکی، کفایت مادی و صحت صوری

در جست‌وجو تعریفی از صدق که با مفهوم قدیمی و آشنای صدق در زبان روزمره (everyday language) نه تنها هم‌خوانی داشته باشد که بر پایه شهود به‌دست آمده از آن ساخته شود تارسکی تعریف سمانتیکی را انتخاب و آن را طبیعی‌ترین تعریف برای صدق، حتی در زبان طبیعی، می‌داند. منظور از تعریف صدق به‌عنوان یک مفهوم سمانتیکی این است که صدق رابطه‌ای بین عبارت‌های یک زبان را با اشیأ و وضع‌های اموری خاص بیان می‌کند [Tarski, 1956: 401]. درادامه ابتدا باید منظور از تعریف‌شدن را از نظر تارسکی روشن می‌کنیم و سپس به تعریف شدن براساس مفاهیم زبانی می‌پردازیم.

تارسکی با الهام از ریاضیات[۷] تعریف را بیان یک دو شرطی می‌نامد که در یک سمت آن مفهومی که بنا است تعریف شود قرار می‌گیرد و در سمت دیگر آن تابع گزاره‌ای قرار گرفته است. او میان دو نوع از تعریف تمایز قایل می‌شود [Coffa, 1991: 294]:

دسته اول شامل تعریف‌هایی می‌شوند که هدف از آنها این است با استفاده از اصول موضوعه و قواعد سیستم منطقی نشان دهند که می‌توان یک مفهوم اولیه موجود در زبان را برحسب مفاهیم ابتدایی (primitive) دیگر بیان کرد یا به عبارت دیگر می‌توان آن را از لیست عبارت‌های اولیه زبان حذف کرد. بنابراین شرط صحت صوری برای این نوع تعریف بدین شکل است:

۱- $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ اگر و تنها اگر $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ که متغیرهای آزاد R و φ دقیقاً یک چیز هستند و $t_1, \dots t_n$ مفاهیم ابتدایی سیستم منطقی مورد نظر هستند.

۲- در ضمن در این سیستم (مثلاً سیستم S) باید اثبات شود

$$\vdash_S R(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$$

دسته دوم شامل تعریف‌هایی می‌شود که با آنها می‌خواهیم یک مجموعه از اشیأ یا وضعیت‌های امور را به‌طور یکتا مشخص کنیم. یعنی مصداق‌های تابع گزاره‌ای $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ دقیقاً همان‌هایی باشند که قصد داریم بگوییم در رابطه R با هم قرار دارند. پس در اینجا می‌خواهیم مفهوم جدیدی را به زبان خود اضافه کنیم برای متمایزکردن دسته‌ای از اشیأ یا وضعیت‌های امور. شرط صحت صوری برای این تعریف تنها شامل قسمت شرط اول دسته قبل می‌شود زیرا این محمول جدید که در زبان قرار است اضافه شود جزو مفاهیم از قبل موجود داخل زبان نیست که اصول موضوعه و قواعد آن را برحسب مفاهیم ابتدایی دیگر توضیح دهند. به دسته اول تعاریف تعاریف نظریه اثباتی (proof theoretic definitions) و به دسته دوم تعاریف نظریه مدلی (model theoretic definitions) می‌گوییم. تارسکی در جست‌وجو یافتن پاسخ این سوال است که تعریف صدق به کدام دسته تعلق دارد؟

از نظر تارسکی تعریف صدق به دسته دوم تعلق دارد که هدف آن این است که مجموعه جملات صادق یک زبان را به صورت یکتا مشخص کند. هر چند این انتخاب تارسکی تنها موضعی فلسفی نیست و او دلایل و شواهد محکمی برای انتخاب تعریف نظریه مدلی صدق دارد اما ارایه آنها را به انتها موکول خواهیم کرد. با این انتخاب سوالی که بلافاصله پیش می‌آید این است که در نبود معیار نحوی چه چیزی قرار است مشخص کند چه تابع گزاره‌ای باید در طرف دیگر این دو شرطی قرار گیرد چون قاعدتاً هر تابع گزاره‌ای را متغیرهای آزاد با آن با مفهوم مورد نظر یکی باشد می‌توان آنجا قرار داد. تارسکی تلاش می‌کند جواب این سوال را با شرط کفایت مادی بدهد.

ادامه کار تارسکی تلاشی است برای حل و فصل‌کردن مشکلات پیش روی برآورده‌کردن همزمان این دو معیار. با این توضیحات اگر «x صادق است» را با $T(x)$ نشان دهیم تعریف مطلوب به این شکل خواهد بود:

I. $T(x)$ اگر و تنها اگر $\varphi(x)$

استراتژی تارسکی برای یافتن $\varphi(x)$ چنین است که از مصداق‌های کاربرد مفهوم صدق سعی می‌کند به تعریف آن برسد. ابتدا نمونه‌هایی از عبارات حاوی محمول صدق مثال می‌زند که به نظر او درستی آنها واضح است و هر نظریه صدقی باید جملات شبیه آن را به‌عنوان نتیجه بدهد. جمله‌ای که او مثال می‌زند چنین است:

II. "برف سفید است" صادق است اگر و تنها اگر برف سفید است.

که در آن "برف سفید است " نامی است برای اشاره به جمله «برف سفید است». یک برداشت از چنین عبارتی این است که به‌طور ضمنی می‌گوید جملاتی در یک زبان صادق شمرده می‌شوند که در آن زبان اظهار (assert) شوند، یعنی آن جمله‌ای از نظر کاربران و یا قواعد یک زبان برقرار باشد. برداشت دیگر این است که جمله سمت چپ واقعاً برقرار باشد، یعنی در جهان چنین باشد که آن جمله بیان کرده است. برداشت اول به نوعی متناظر است با رویکرد نظریه اثباتی و برداشت دوم با رویکرد نظریه مدلی[vi]. فارغ از این که کدام برداشت با دیدگاه تارسکی سازگار است فعلاً به این پرسش می‌پردازیم که آیا راهی وجود دارد که با تعمیم (generalization) (II) به تعریفی به شکل (I) برسیم[vii]؟ اگر چنین کاری انجام شود تعریف به‌دست آمده شرط کفایت مادی تعریف را به سادگی برآورده می‌کند. اولین پیشنهاد برای چنین تعمیمی چنین چیزی خواهد بود:

x صادق است اگر و تنها اگر x

البته باید دقت کرد این عبارت جمله نیست و برای تبدیل‌شدن به جمله باید به جای x جمله‌ای از زبان قرار داده شود. اما اولین مشکلی که پیش می‌آید این است که هر جمله‌ای را نمی‌توان به جای x جانشین کرد زیرا بعضی از آنها به پارادوکس دروغگو (liar paradox) منجر می‌شوند. جمله s را در نظر بگیرید که می‌گوید کاذب است، یعنی:

s: s صادق نیست

با جانشانی s به جای x بالا داریم:

s صادق است اگر و تنها اگر s.

از آنجایی که s این‌همان است با «s صادق نیست» پس به جای s آن را قرار می‌دهیم (درست‌بودن جانشانی این‌همانها را فرض گرفته‌ایم). بنابراین خواهیم داشت:

s صادق است اگر و تنها اگر s صادق نیست.

چالش دیگر پیش رو در به‌دست‌آوردن فرمول کلی از روی این نمونه، به‌ویژه در مورد زبان‌های صوری که ملاک دقت باید کامل رعایت شود، مسأله متغیرهای آزاد دو طرف دو شرطی است که دقیقاً باید یک چیز باشند چون در غیر این صورت نمی‌توان تنها یک سور کلی بر این جمله اعمال کرد. در سمت چپ دو شرطی شاکله صدق جمله‌ای از زبان قرار می‌گیرد و درسمت راست باید یک نام، یا هر عبارتی که توسط آن بتوان به این جمله ارجاع داد، قرار می‌گیرد پس باید روشی برای نام‌گذاری جملات به صورت یکتا پیدا شود. روش خود تارسکی برای نام‌گذاری جملات در زبان طبیعی استفاده از علامت نقل قول (quotation mark) یا توصیف ساختاری (structural description) است اما در نظریاتی که شامل حساب هستند عدد گودلی جمله نیز می‌تواند

برای اشاره به آن جمله به کار رود[viii]. با این توصیف ممکن است پیشنهاد شود که چنین تعریفی برای صدق مناسب است:

برای هر x، x صادق است اگر و تنها اگر x

اما واضح است که x به سادگی نمی‌تواند همزمان با x تغییر کند زیرا سور بر روی x عمل می‌کند نه x. تارسکی نشان می‌دهد حل مشکل چه با دست‌کاری مفهوم نقل قول و چه با استفاده از نام‌های توصیف ساختاری به جای نقل قول در زبان طبیعی به نتیجه‌ای نمی‌رسد[ix]. به این دلایل تارسکی ارایه تعریف صدق با ملاک‌های مورد نظرش برای دسته‌ای از زبان‌ها، که زبان طبیعی نیز جزو آنها است، را ناممکن می‌بیند و در ادامه به دنبال تعریف صدق برای نظریه‌های علمی، از جمله علوم قیاسی، در زبان‌های صوری خاصی می‌رود که بتوان این مشکلات را در آنها رفع کرد. برای حل مشکل اول باید به این سوال جواب داد که چه ویژگی‌هایی همزمان در این زبان‌ها (نظریه‌ها) وجود دارد که پارادوکس دروغگو را ایجاد می‌کنند؟ آنها عبارت‌اند از:

a) قوانین منطق کلاسیک در آن زبان برقرار است.

b) در زبان مفاهیم سمانتیکی مربوط به خود همان زبان قابل بیان است (از قبیل صدق و اعتبار (validity) و ارضاپذیری (satisfiability) و سایر مفهوم‌هایی که می‌توان صدق را برحسب آنها درباره‌ی جملات همان زبان تعریف کرد)

c) شامل نام برای جملات است یا می‌توان جملات را در آنها نام‌گذاری کرد.

تارسکی از بین ویژگی‌های بالا تصمیم به حذف مورد (b) در زبانی که قرار است ساخته شود، می‌گیرد. در مورد (a) تارسکی تصمیم به پذیرش منطق کلاسیک به‌عنوان منطق نظریه‌های علمی می‌گیرد و همچنین مورد (c) هم برای او قابل تجدید نظر به نظر نمی‌رسید زیرا برای نسبت‌دادن صدق به جملات نیازمند نام‌گذاری جملات هستیم. بنابراین تارسکی نتیجه می‌گیرد مجموعه جملات صادق یک زبان در خود آن زبان قابل تعریف نیست و باید در زبانی دیگر که لزوماً غنی‌تر از آن زبان است تعریف شود. زبانی که بنا است مجموعه جملات صادق آن را تعریف کنیم زبان اشیأ (object language) و زبانی که صدق را در آن تعریف می‌کنیم فرازبان (metalanguage) نامیده می‌شوند.

چالش دوم، متغیرهای متفاوت در دو سمت اگر و تنها اگر در شاکله صدق، از نظر تارسکی تنها در زبان‌هایی حل می‌شود که ساختار و قواعد آنها به‌گونه‌ای است که معنای هر عبارت به صورت یکتا به وسیله فرم (form) آن مشخص شود [Tarski, 1955: 166]. همچنین زبان‌های مورد نظر تارسکی زبان‌های مصداقی هستند، به گونه‌ای که دو عبارت این‌همان هستند اگر و تنها اگر مصداق‌های یکسان داشته باشند و از سوی دیگر عبارت‌های هم‌معنی ضرورتاً هم‌شکل هستند یا به بیان بهتر معادل‌بودن آنها در زبان اثبات می‌شود. هیچ کدام از این ویژگی‌ها در زبان طبیعی برقرار نیست و در نتیجه غلبه بر چالش دوم را ناممکن می‌گردانیدند.

با دقیق‌ترشدن زبان‌ها تارسکی این بار شرط کفایت مادی را به صورت دقیق در قالب قرارد معروف T خود چنین بیان می‌کند:

قرارداد T: تعریفی صحیح از نماد Tr که در فرازبان فرمول‌بندی شده تعریفی کافی از صدق نامیده خواهد شد اگر اینها را اثبات کند:

(α) تمام جملاتی که از عبارت ' $x \in Tr$ اگر و تنها اگر p ' با جانشینی یک نام توصیفی- ساختاری از هر جمله زبان مورد نظر به جای x و عبارتی که ترجمه‌ای از این جمله در فرازبان است به جای p بدست آیند.

(β) جمله به ازای هر x اگر $x \in Tr$ آنگاه $x \in S$ (به عبارت دیگر $Tr \subseteq S$)[x] [Tarski, 1955: 187]

با توجه به شکل تعریف (I) و قرارداد T به نظر می‌رسد که $\varphi(x)$ مناسب در I باید تابعی باشد از نام توصیفی- ساختاری عبارت‌های زبان اشیأ به عبارت‌هایی هم معنی آنها در فرازبان (یا اگر فرازبان شامل زبان اشیأ باشد به خود آن عبارت‌ها). اکنون با روشن‌ترشدن شرط کفایت مادی می‌توان فهمید تعمیمی از این شرط که به تعریف صدق منجر شود چیزی به صورت زیر خواهد بود:

$D)\ \forall x[T(x) \leftrightarrow (sent(x)\ and\ x = \ulcorner P \urcorner\ and\ P)]$

از آن جایی که (D) در فرازبان است تارسکی به یک ترجمه از زبان به فرازبان نیاز خواهد داشت. به این شکل که ترجمه عملگری است که یک جمله را می‌گیرد و آن را به دو چیز می‌برد: اولی نام آن جمله در فرازبان است، یعنی $\ulcorner P \urcorner$ ، و دومی جمله‌ای هم معنا با آن، یعنی P. از این که هر دو آنها به یک جمله در زبان اشاره دارند و زبان مصداقی است می‌توان نتیجه گرفت که جمله هم معنا در فرازبان و نام جمله هر دو به یک چیز اشاره دارند. به‌دست آوردن چنین تعریفی برای زبان‌هایی که تعداد جمله‌های آنها متناهی است بسیار ساده خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$\forall x\left[Tx \leftrightarrow \left(sent(x)\ \wedge ((\ x = P_1\ \wedge P_1) \vee \ldots \vee (x = P_n \wedge P_n)\right)\right]$$

اما از آنجا که تمامی زبان‌های کاربردی دارای جملات نامتناهی هستند چنین تعریفی برای آنها ممکن نیست و باید به تعریف‌های استقرایی روی آورد. برای این کار تارسکی در اولین گام به معرفی مفهوم ارضاکردن (satisfy) می‌پردازد تا صدق را بعداً به وسیله آن تعریف کند. مزیت استفاده از مفهوم ارضاکردن بر صدق این است که می‌توان آن را به صورت بازگشتی برای تمامی جملات زبان تعریف کرد[xi]. یعنی ارضأشدن را برای عبارات بسیط یا اتمی شروع کرد و برای جملات پیچیده‌تر با استفاده از ارزش صدق جملات ساده‌تری که جمله مورد نظر از ترکیب آنها درست شده است صدق آنها را تعریف کرد. بدین ترتیب می‌توان برای تمامی جملات زبان ارضا پذیری را تعریف کرد. مثالی که تارسکی برای مفهوم ارضاشدن می‌زند چنین است[xii]:

a تابع گزاره‌ای "x سفید است" را ارضا می‌کند اگر و تنها اگر a سفید باشد.

سپس وی ارضاشدن را برای زبان نظریه کلاس‌ها[xiii] تعریف می‌کند که چنین چیزی است[xiv] [Tarski, 1956: 193]:

دنباله f تابع جمله‌ای[xv] xرا ارضا می‌کند اگر و تنها اگر f دنباله‌ای نامتناهی از کلاس‌ها باشد، x تابعی جمله‌ای باشد و x و f چنین باشند یا (α) که اعداد طبیعی k و l وجود داشته باشند که $x = i_{k,l}$و $f_k \subseteq f_l$ یا (β) تابع جمله‌ایy وجود دارد به گونه ای که $\mathrm{x} = \bar{y}$ و f چنین نیست که y را ارضا کند یا (γ) تابع‌های جمله‌های y و z وجود دارند که $x = y + z$ و f یا y را ارضا می‌کند یا z را، یا سرانجام (δ) عدد طبیعی k و تابع جمله‌ای y وجود دارد به‌گونه‌ای که $x = \bigcap x_k y$ و هر دنباله‌ی نامتناهی از کلاس‌ها که با f حداکثر در k امین عضو دنباله تفاوت دارد تابع y را راضا می‌کند[xvi].

سپس او تعریف صدق را براساس اراضاشدن این‌گونه بیان می‌کند [Tarski, 1956: 195]:

x یک جمله صادق است اگر و تنها اگر $x \in S$ و هر دنباله‌ی نامتناهی از کلاس‌ها x را ارضا کند.

(در تعریف فوق $i_{k,l}$ ، $\bar{\psi}$ ، $\psi + \theta$ و$\cap x_k \psi$ به ترتیب معادل $v_k \subseteq v_l$ ، $\sim \psi$، $\psi \vee \theta$ و $\forall x_k \psi$ در فرازبان هستند. همچنین f_k، k امین عضو دنباله ترم‌های فرازبان است[xvii]) این تعریف از صدق در حساب کلاس‌ها برای تارسکی کاملا راضی‌کننده به نظر می‌رسد.

صدق امری است زبانی یا متافیزیکی؟

در این قسمت سعی خواهیم کرد به این پرسش پاسخ دهیم که رویکرد تارسکی به صدق رویکردی زبانی است یا متافیزیکی؟ یعنی آیا امکان خوانشی از نظریه تارسکی هست که بر طبق آن جمله‌ای صادق باشد اگر و تنها اگر در فرازبان گویندگان آن زبان اظهار (اثبات) شود یا ناچار خواهیم بود به چیزی ورای زبان مراجعه کنیم؟ برای پاسخ داد به این سوال باید ابتدا نگاهی دقیق‌تر به مفهوم سمانتیک در اندیشه تارسکی بیندازیم. او می‌گوید منظورش از تعریف سمانتیکی صدق در زبان طبیعی چنین چیزی است [Tarski, 1956: 155]:

> "جمله صادق جمله‌ای است که می‌گوید (says) اوضاع اموری (state of affairs) چنین و چنان (so and so) است، و براستی (indeed) نیز این اوضاع امور چنین و چنان است".

برنامه تارسکی به چنگ‌آوردن این مفهوم شهودی است که در آن انگار نوعی ارجاع به جهان و مطابقت با آن است. او پس از ناکامی در زبان طبیعی به سراغ زبان‌های صوری می‌رود اما در ابتدای بررسی این زبان‌ها تذکر می‌دهد [Tarski, 1956: 166]:

> "لازم است در انتها این را اضافه کنیم که در اینجا به زبان‌ها و علوم "صوری" به یک معنای خاص از "صوری" علاقه‌مند نیستیم، یعنی علوم نشانه‌ها و عباراتی که هیچ معنی‌ای به آنها الصاق نشده است زیرا مسأله‌ای که در اینجا بحث شده است هیچ ارتباطی با چنین علومی ندارد و حتی می‌توان گفت برای آنها بی‌معنا خواهد بود".

با این توضیح می‌فهمیم تارسکی تنها به بررسی زبان‌های تعبیر شده (Interpretated languages) می‌پردازد اما او در ادامه توضیح بیشتری نمی‌دهد که "الصاق معنی به عبارت‌ها" یعنی چه و در کجا و چگونه این زبان‌ها تعبیر شده‌اند. اما به نظر می‌رسد که همین "الصاق معنی" نقشی کلیدی، هر چند پنهان، در نظریه او دارد. معنا به حوزه سمانتیک تعلق دارد و برای درک تلقی تارسکی از سمانتیک تعریف او از آن را می‌آوریم [Tarski, 1956: 252]:

> "یک ویژگی متمایز (characteristic feature) مفاهیم سمانتیکی این است که آنها به روابط خاصی بین عبارات زبان و اشیایی که این عبارات راجع به آنها صحبت می‌کنند تجلی می‌دهند (give expression) یا به وسیله چنین روابطی دسته‌هایی خاص از عبارات یا اشیأ دیگر را متمایز می‌کنند. می‌توانیم بگوییم این مفاهیم برای بنیان‌گذاشتن یک رابطه دوسویه (correlation) بین نام عبارت‌ها و خود عبارت‌ها به کار گرفته می‌شود".

با این توضیحات بار دیگر به تعریف صدق نگاهی بیندازیم. تارسکی می‌گوید چون زبان‌های مورد استفاده ما نامتناهی هستند پس نمی‌توان مجموعه جملات صادق را به صورت مصداقی مشخص کرد و تنها راه باقی‌مانده تعریف بازگشتی این مجموعه است. در تعریف بازگشتی صدق ابتدا تمام اعمالی که جملات ساده با هم ترکیب می‌شوند و جملات مرکب را می‌سازند را می‌دهیم و سپس مشخص می‌کنیم که صدق جملات مرکب چگونه از روی صدق جملات ساده‌تری که از آنها به وسیله اعمال یاده شده ساخته شده‌اند به دست می‌آیند. اما این روش

وابسته به این است که در مرحله‌ای صدق یک‌سری جملات ابتدایی مشخص شود که خود مرکب نیستند و صدق آنها را نمی‌توان از چیز دیگری بدست آورد اما صدق بقیه جملات را می‌توان از روی آنها به دست آورد: جملات اتمی[xviii]. تارسکی در مورد وضعیت صدق آنها می‌گوید [Tarski, 1956: 189]:

> "جمله‌های ابتدایی خاصی می‌توانند انتخاب شوند، که از آنها، به کمک عمل‌هایی که گفته شد تمام جملات زبان می‌توانند ساخته شوند؛ این جملات انتخاب شده می‌توانند به صورت واضح (explicitly) به صادق و کاذب تقسیم شوند، به وسیله، مثلاً تعریف‌های جزیی از نوعی که بالاتر بیان شد".

پس در حقیقت ما لیستی از جملات اتمی داریم که صادق هستند و لیستی از جملات اتمی‌ای که کاذب هستند. این که چگونه مشخص می‌شود یک جمله به کدام لیست تعلق دارد در نتیجه امر برای تارسکی تفاوت چندانی نمی‌کند اما چیزی که در پس ذهن وی است همان‌گونه که اشاره کرد این است که از روی "تعریف‌های جزیی از نوعی که بالاتر بیان شد" این امر مشخص می‌شود. اجازه دهید مقداری بحث را روشن‌تر سازیم. جمله زیر را در نظر بگیرید:

(P): "برف سیاه است" $\in Tr$ اگر و تنها اگر برف سیاه است.

در اینکه (P) صادق است مشکلی نیست اما صدق خود (P) چیزی در مورد این که "برف سیاه است" صادق است یا نه نمی‌گوید. در حقیقت زمانی که تارسکی می‌گوید مثلاً با استفاده از تعریف جزیی صدق این لیست را به‌دست آوردیم منظورش این است که می‌دانیم سمت چپ دوشرطی (یعنی برف سیاه است) نادرست است و از آن به نادرستی سمت راست (یعنی "برف سیاه است" $\in Tr$) می‌رسیم و از این نتیجه می‌گیریم که "برف سیاه است" به لیست جملات ابتدایی کاذب تعلق دارد.

در اینجا به نظر می‌رسد تارسکی در مورد صدق دو نظریه ارایه می‌دهد که باید آنها را از هم تفکیک کرد: اولی نظریه‌ای کاملاً صوری و زبانی در باب صدق جملات است که گویی برخلاف گفته خودش می‌تواند بر زبان‌های غیرتعبیر شده هم اعمال گردد و تنها بر این اساس کار می‌کند که تعدادی از جملات (از جمله جملات ابتدایی) را به‌عنوان صادق و تعدادی را به‌عنوان کاذب در نظر می‌گیریم (فارغ از معنی و درستی این تقسیم‌بندی) و از روی آنها صدق یا کذب بقیه جملات پیچیده‌تر را بدست می‌آوریم. این نظریه را نظریه سمانتیکی- زبانی صدق تارسکی می‌نامم زیرا هنوز هنگامی که از این حرف می‌زنیم که آیا محمول صدق‌بر نام یک جمله حمل می‌شود یا خیر به این نگاه می‌کنیم که مدلول این نام، یعنی خود جمله، در لیست صادق‌ها قرار دارد یا نه و تعبیر عبارت‌ها نه اشیأ یا فکت‌ها در جهان بلکه عبارات فرازبان هستند. در مقابل نظریه دوم تارسکی تنها راجع به زبان‌های تعبیر شده است و من آن را نظریه سمانتیکی- متافیزیکی صدق تارسکی می‌خوانم که در آن برای تصمیم‌گیری در مورد این که آیا بر اسم جمله‌ای محمول صدق حمل می‌شود یا نه به مدلول آن، اما این بار نه در لیست‌های دل‌بخواه بلکه در جهان- ساختارهای ریاضیاتی مانند ساختار اعداد طبیعی در این معنی در جهان وجود دارند- نگاه می‌شود. (این همان پیشنهادی است که تارسکی بعد از "مثلاً" می‌دهد).

اکنون به بررسی نظریه سمانتیکی-زبانی صدق تارسکی خواهیم پرداخت که در ابتدا به نظر می‌رسد نظریه سمانتیکی-متافیزیکی صدق نیز می‌تواند به یک معنی حالت خاصی از آن باشد، یعنی حالتی که جملات ابتدایی صادق دقیقاً مطابق با فکت‌های موجود در جهان انتخاب شده باشند (شاید به صورت تصادفی هم چنین انتخاب شده باشند). اولین سوالی که پیش می‌آید این است که لیست جملات صادق در نظریه سمانتیکی-زبانی چطور به دست می‌آید؟ برای مثال تارسکی در بررسی صدق جمله $\cap_1 \cup_2 i_{1,2}$ به عبارت زیر می‌رسد:

(E) $\bigcap_1 \bigcup_2 i_{1,2}$ صادق است اگر و تنها اگر به ازای هر کلاس a کلاس b وجود داشته باشد که $a \subseteq b$

و سپس می‌نویسد [Tarski, 1956: 196]:

> «از این به سادگی نتیجه می‌گیریم، با استفاده از قضایای شناخته شده حساب کلاس‌ها، که $\bigcap_1 \bigcup_2 i_{1,2}$ یک جمله صادق است»

یا کمی بعدتر می‌نویسند [Tarski, 1956: 196]:

> «در بسیاری از موارد با همین شیوه با کمک تنها ساده‌ترین قواعد منطق (از دامنه منطق جمله‌ها و حساب کلاس‌ها) می‌توانیم درباره صدق یا کذب جمله‌های مورد سوال نتایج قطعی بگیریم».

در اینجا چیزی که تارسکی به آن استناد کرده است این است که "به ازای هر کلاس a کلاس b وجود دارد که $a \subseteq b$ " در فرازبان اثبات‌پذیر است. از تعریف صدق تمام نمونه جانشین‌های طرح T نتیجه گرفته می‌شود و از اثبات‌شدن جمله سمت چپ آن صادق بودن آن جمله به دست می‌آید.

اما اگر بخواهیم این ایده را پی بگیریم که چیزی صادق است که در فرازبان اثبات‌پذیر باشد اولین مشکل این خواهد بود که مثلاً در منطق گزاره‌ها و مرتبه اول این‌گونه نیست هر جمله‌ای که خودش یا نقیضش قضیه‌ای از فرازبان زبان باشد. مثلاً جملاتی مانند Fa، $\exists xFx$ و ... . کاری که می‌توان کرد این است که فرازبان را با یک سری اصول موضوعه جدید غنی‌تر کرد که راجع به همه این جملات بتوان تصمیم گرفت[xix] مثلاً اگر ترجمه Fa به‌عنوان یک اصل موضوعه به فرازبان اضافه شود می‌توان گفت Fa صادق است زیرا در فرازبان اثبات پذیر است. خود تارسکی این کار را برای زبان نظریه کلاس‌ها با متغیرهای تنها از یک تایپ انجام می‌دهد[xx] و برای منطق گزاره‌ها صرفاً به انجام‌پذیربودن آن اشاره می‌کند [Tarski, 1965: 222].

این ایده را برای منطق گزاره‌ها می‌توان به روشی بسیار شبیه روش هنکین (Leon Henkin) برای اثبات تامیت پی گرفت[xxi]. باید محمول صدق را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که در مورد تمام جملات زبان تصمیم گرفته باشد یعنی هر جمله زبان یا کاذب باشد یا صادق. شرط دوم این است که اصل ترکیب (principle of compositionality) را رعایت کند، یعنی به ادات منطقی احترام بگذارد و چنین نباشد که $P \wedge Q$ صادق باشد اما P کاذب باشد. پس تک تک جمله‌های زبان را به یک مجموعه سازگار از جمله‌های زبان اشیأ در فرازبان اضافه می‌کنیم تا به یک مجموعه سازگار ماکسیمال از جمله‌ها برسیم. چنین مجموعه‌ای یکتا نخواهد بود پس می‌توان به‌جای صادق در فلان مدل از اثبات‌پذیر در فلان فرازبان استفاده کرد و فرمول معتبر (valid) فرمولی خواهد بود که در تمام فرازبان‌ها (که حاوی ترجمه اصول موضوعه زبان اشیأ باشند) اثبات‌پذیر باشد.

وجود چنین مجموعه ماکسیمالی از جمله‌ها وابسته است به لم زورن (Zorn Lemma) و این یعنی چنین نظریه‌ای ساختی نخواهد بود و این باعث فاصله‌گرفتن از مفهوم اثبات که مفهومی ساختی است می‌شود. اشکال دیگر این است که اگر تنها شرط ساخت چنین فرازبان‌هایی سازگاری باشد در فرازبان منطق مرتبه اول به مشکل خواهیم خورد. اولین چالش این است که مطابق شهود ما یک جمله حاوی سور کلی زمانی می‌تواند صادق باشد که همه نمونه جانشین‌های فرمول مسور، در اینجا یعنی ترم‌های بسته زبان، نیز صادق باشند و برعکس. حال فرض کنید همچون منطق گزاره‌ها برای فرازبان منطق محمولات نیز تلاش کنیم با اضافه‌کردن اصول موضوعه جدید یک مجموعه سازگار ماکسیمال بسازیم. در این مسیر ممکن است به حالتی روبه‌رو شویم که تمام نمونه جانشین‌های یک فرمول مانند $\varphi(t)$ را به ازای ترم‌های بسته OL به‌عنوان اصول موضوعه

جدید به ML اضافه کنیم اما در عین حال $\exists x \neg \varphi x$ نیز به‌عنوان یک اصل موضوعه اضافه شود[xxii]یا در سیستم از قبل وجود داشته باشد. این نظریه کماکان سازگار خواهد ماند زیرا از داشتن نمونه جانشین‌های $\varphi(t)$ را به ازای ترم‌های بسته OL نمی‌توان به $\forall x \varphi(x)$ رسید چون اگر چنین اثباتی انجام دهیم از نامتناهی مقدمه این نتیجه را گرفته‌ایم که به معنای ارایه اثباتی با طول نامتناهی است[xxiii]. پس مجموعه سازگار ماکسیمالی که می‌سازیم درست است که تمام (complete) هم است اما ویژگی‌های شهودی صدق را که انتظار داریم به ما نمی‌دهد.

مساله بالا چالشی غیرقابل حل برای هر گونه رویکرد نظریه برهانی برای تعریف صدق محسوب می‌شود زیرا درک شهودی ما از صدق این‌گونه است که اگر تمام اشیأ یک ویژگی را داشته باشند جمله هر شی‌ای این ویژگی را دارد نیز صادق باشد و یا این که هر جمله وجودی صادق باید شاهدی داشته باشد. به نظر تارسکی این قاعده درست می‌رسد، بدین معنی که از مقدمات درست به نتیجه کاذب نمی‌رسد، اما اضافه‌شدن آن به سیستم را مستلزم پذیرش ضعف‌هایی می‌داند. اول اینکه در زبان‌های با ترم‌های بسته نامتناهی مشخص نیست چگونه می‌توان درستی تک تک موارد را بررسی کرد و دوم و مهم‌تر این که اضافه‌شدن این اصل به سیستم موجب می‌شود که اثبات سازگاری درونی ترجمه زبان در فرازبانی بسیار ضعیف (یا به عبارتی پایستاری زبان تقویت شده که با اضافه‌کردن تمام نمونه جانشین‌های شاکله صدق به‌عنوان اصل موضوعه به‌دست آمده است) هم دیگر کار نکند[xxiv].

خوانش دیگری که در تطابق با دیدگاه سمانتیکی- زبانی ممکن است به نظر برسد این است که تارسکی در تعریف صدق و ارااضاپذیری در حقیقت اصول موضوعه مربوط به T را بیان می‌کند؛ یعنی با اضافه‌کردن محمول صدق (T) به فرازبان ویژگی‌های مورد انتظار از صدق را به صورت اصل موضوعه به فرازبان اضافه کنیم و بگوییم چیزهایی که محمول صدق (T) را ارضا می‌کنند جملات صادق زبان اشیأ هستند. این خوانش را خوانش اصل موضوعی از صدق می‌نامیم. می‌توان چنین کاری را با مفهوم عضویت در نظریه مجموعه مقایسه کرد. در آنجا نیز هیچ تعریفی برای عضویت داده نمی‌شود بلکه تنها با معرفی یک سری اصل موضوعه درباره آن رفتار عضویت آشکار می‌شود و می‌توان گفت عضویت چیزی که است که این رفتارها را داشته باشد. با این خوانش انتظارهای ما از محمول T کمتر خواهد شد و امیدی برای خوانش سمانتیکی- زبانی صدق زنده خواهد ماند. اولین پیشنهاد این است که عبارت‌های به شکل زیر را به‌عنوان اصل موضوعه به زبان اضافه کنیم:

$$TA)\ T(\ulcorner A \urcorner) \leftrightarrow A$$

تارسکی در پاسخ به این سوال که آیا محمول صدقی که به کمک شمای اصل موضوعه (TA) معادل تعریف صدق به‌وسیله ارضاشدن است می‌گوید که چنین محمولی بدیهی‌ترین ویژگی‌هایی که از مفهوم صدق انتظار داریم را نیز برآورده نمی‌کند یعنی در ML ای که با اضافه‌کردن آنها به زبان اشیأ به‌دست آمده این که هر جمله‌ای خودش یا نقیضش صادق است (اصل دو ارزشی) و یا چنین نیست که جمله‌ای همزمان خودش و نقیضش هر دو صادق باشند (اصل امتناع تناقض) اثبات نمی‌شود [Tarski, 1956: 257-8]. پس تارسکی به هیچ‌وجه موافق پایین‌آوردن انتظارات از محمول صدق نبوده است و رویکرد اصل موضوعی را به صراحت رد می‌کند و با این کار نشان می‌دهد علاوه‌بر معیارهای کفایت مادی و صحت صوری شرط‌های دیگری همچون اثبات قضیه‌های بدیهی در مورد صدق، همچون اصل دو ارزشی‌بودن و امتناع تناقض، جزو شرط‌های اصلی او برای هر تعریف قابل قبولی از صدق هستند.

ممکن است پیشنهاد شود که برای تعریف نحوی صدق باید تعریف ارضاشدن را به صورت اصل موضوعی فهمید و اصول موضوعه بیشتری به لیست اصول موضوعه فرازبان اضافه شود، مانند اصول امتناع تناقض و دورازشی بودن، و حتی برای این که به لیست آکسیوم‌های مربوط به صدق دلبخواه نشود نظریه ماکسیمال سازگار به‌دست آمده از این طریق را در نظر بگیریم: یعنی نظریه‌ای که نتوان هیچ اصل موضوعه دیگری راجع به صدق و جملات زبان به آن اضافه کرد و در عین حال سازگار بماند. ممکن است ادعا شود محمول صدق در چنین نظریه‌ای همان تعریف صدق، یا معادل با تعریف صدق سمانتیکی- متافیزیکی تارسکی است اما از قضیه تعریف‌پذیری بث (Beth definability theorem) می‌دانیم که چنین چیزی ممکن نیست. برای معرفی این قضیه لازم است ابتدا چند تعریف را بیان کنیم[xxv]:

تعریف: فرض کنید α و $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots\beta_n$ ثابت‌های غیرمنطقی زبان نظریه $\mathcal{T}$ باشند. می‌گوییم α برحسب β_i ها در $\mathcal{T}$ به صورت صریح (explicitly) تعریف‌پذیر است اگر و تنها اگر تعریف α برحسب β_i ها یک نتیجه نظریه $\mathcal{T}$ (عضو نظریه $\mathcal{T}$) باشد. به صورت دقیق‌تر یعنی اگر α محمولی n موضعی باشد[xxvi] جمله زیر در $\mathcal{T}$ اثبات‌پذیر باشد:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \big(\alpha(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow B(x_1 \dots x_n)\big)$$

که $B(x_1 \dots x_n)$ فرمولی است که در آن تنها از ثوابت غیر منطقی $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots\beta_n$ استفاده شده است.

تعریف: نظریه $\mathcal{T}'$ در زبان $\mathcal{L}'$ از نظریه $\mathcal{T}$ در زبان $\mathcal{L}$ این‌گونه بدست می‌آید که تمامی نمادهای غیرمنطقی زبان $\mathcal{L}$ (همانند γ) به جز $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots\beta_n$ را با نمادهای جدیدی (همانند γ') در زبان $\mathcal{L}'$ عوض می‌کنیم. می‌گوییم α برحسب β_i ها در $\mathcal{T}$ به صورت ضمنی (implicitly) تعریف‌پذیر است اگر و تنها اگر

$$\mathcal{T}' \cup \mathcal{T} \vdash \alpha'(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \alpha(x_1,\dots,x_n)$$

که α' از جایگزین‌کردن نمادهای غیرمنطقی α با نمادهای متناظر زبان $\mathcal{L}'$ در زبان $\mathcal{L}' \cup \mathcal{L}$ به‌دست آمده است.

تعریف ضمنی بیان می‌کند که نظریه با استفاده از $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots\beta_n$ می‌تواند به صورت یکتا مصداق‌های α را مشخص کند بدین معنی که هر دو مدل $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ از نظریه $\mathcal{T}$ که دامنه یکسان داشته باشند و در این که چه چیزی به $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots\beta_n$ نسبت دهند توافق داشته باشند در این نیز توافق خواهند داشت که چه چیزی به α نسبت دهند.

قضیه تعریف‌پذیری بث: اگر چیزی به صورت ضمنی تعریف‌پذیر باشد به صورت صریح نیز تعریف‌پذیر است.

نتیجه: صدق به صورت اصل موضوعی در فرازبان تعریف‌پذیر نیست.

اثبات: فرض کنید فرازبان توسیعی از زبان اشیأ باشد، که آن را ML_1 می‌نامیم، به این‌گونه که محمول T به زبان اشیأ و تعدادی اصل موضوعه (هر تعداد که لازم باشد) نیز راجع به آن به مجموعه اصول زبان اشیأ اضافه شده است به‌گونه‌ای که نظریه سازگار بماند. اگر ادعا شود که این T صدق مورد نظر تارسکی (تعریف سمانتیکی- متافیزیکی) را تعریف کرده است باید مصداق‌های آن یکتا باشد. اما زبان

ML_2 را در نظر بگیرید که از زبان اشیأ با اضافه‌کردن محمول T' و همان اصول موضوعه ML_1 به‌دست آمده است تنها با این تفاوت که در آنها به جای T از T' استفاده شده است. آنگاه $ML_1 \cup ML_2 \vdash$ $T(x) \leftrightarrow T'(x)$ شرط لازم قبول تعریف صدق مورد نظر تارسکی خواهد بود، مجموعه جملات صادق هر زبان یکتا باشد، اما می‌دانیم که $ML_1 \cup ML_2 \vdash T(x) \leftrightarrow T'(x)$ اثبات‌پذیر نیست زیرا اگر چنین باشد بر طبق قضیه تعریف‌پذیری بث صدق در زبان به صورت صریح قابل تعریف خواهد بود که این به نوبه خود با قضیه تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی در تناقض است.

پس در نهایت به این نتیجه رسیدیم که صدق را در حالت کلی نمی‌توان تنها بر پایه گرامر زبان حتی در زبان‌های قوی‌تر نیز (زبان‌های مرتبه اول) تعریف کرد و تنها این کار برای نظریه‌هایی امکان‌پذیر است که تصمیم‌پذیر باشند زیرا در این نظریه‌ها با داشتن لیستی از جملات اتمی صادق و کاذب می‌توان تمام نتایج منطقی آنها را استخراج کرد و لیست جملات صادق یا کاذب را تکمیل کرد.

بنابراین باید به دنبال خوانش دیگری از تعریف صدق توسط تارسکی رفت که خوانش استاندارد از نظریه وی است. در این خوانش زبان تعبیرشده تلقی می‌شود، بدین معنی که عبارت‌های زبان به اشیایی و نه صرفاً ترم‌های زبانی دیگر، ارجاع می‌دهند. در اینجا منظور ما از شیء اعضا یک مجموعه، مثلاً اعداد یا مجموعه‌ها و یا ترم‌های زبانی در خود متن زبان، انسان‌ها و...، است و اشیأ مجموعه‌های انتزاعی می‌توانند موجودات غیرزبانی نیز باشند، زیرا اگر همانند نظریه راسل در نظریه تایپ‌ها مجموعه‌ها چیزی جز خلاصه شده فرمولی نباشند[xxvii] آنگاه در زبان‌های شمارا تعداد مجموعه‌ها هیچ‌گاه بیش از شماراتا نخواهد شد و این با تعبیرشده بودن زبان‌هایی که در مورد مجموعه‌هایی از اشیأ با اندازه ناشمارا، همانند اعداد حقیقی، صحبت می‌کنند در تضاد است[xxviii]. پس می‌توان گفت نظریه تارسکی نسبت به ماهیت و طبیعت اشیایی که به آنها ارجاع می‌دهد خنثی است اما نسبت به وجود آنها نه.

پس خوانش دوم با نظریه سمانتیکی- متافیزیکی صدق تارسکی سازگار است و در آن در حقیقت سمت چپ جملات شاکله صدق (ترجمه جمله زبان اشیأ در فرازبان) تعبیر می‌شود و از طریق مطابقت آن با یک ساختار یا یک واقعیت که آن نظریه سعی در توصیف آن دارد درستی و نادرستی‌اش تعیین می‌شود. با این نگاه اگر بار دیگر به تعریف تارسکی از ارضاشدن نگاه کنیم دنباله‌های ارضا کننده فرمول‌ها نه دنباله‌هایی از ترم‌های بسته فرازبان بلکه از خود اشیأ خواهند بود[xxix]. اما با توجه به این که نظریه صدق تارسکی در مورد ماهیت اشیایی که عبارت‌های زبان اشیأ به آنها تعبیر می‌شود ساکت است باید هنگام تعریف صدق توجه کرد که صدق برای زبان خاصی در مدل خاصی (مجموعه‌ای از اشیأ که روابط مشخصی با همدیگر دارند) تعریف می‌شود نه به صورت مطلق. در حقیقت از قضایای لونهایم- اسکولم نتیجه گرفته می‌شود که هر زبان (نظریه) مرتبه اول مدل‌هایی به هر اندازه دل‌خواه دارد و حتی بر طبق قضیه ناتمامیت گودل بعضی نظریه‌های مهم، همانند حساب، مدل‌هایی غیر یک‌ریخت از یک اندازه دارند.

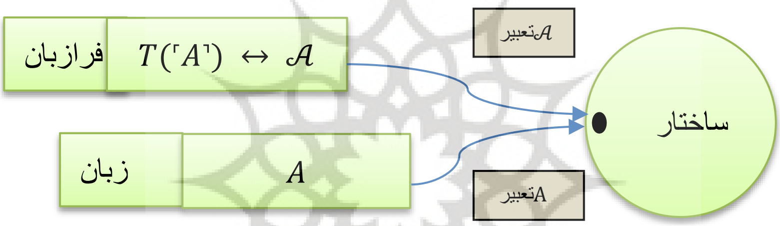
فرازبان چه چیزی بیشتر دارد؟

در رویکرد تارسکی در هیچ کدام از زبان اشیأ و فرازبان مفاهیم سمانتیکی مانند صدق، دلالت‌کردن و ... به‌عنوان مفاهیم اولیه موجود ندارند، بلکه تنها قرار است در فرازبان برحسب مفاهیم اولیه صدقِ زبان اشیأ به‌عنوان یک محمول تک‌موضعی برحسب یک تابع گزاره‌ای تعریف شود [Tarski, 1944: 351][xxx]. اما چنین تعریفی آیا فروکاهش سمانتیک است به چیز دیگری؟ برای پاسخ‌دادن به این سوال باید ابتدا عناصر سازنده فرازبان در

نظریه تارسکی را بررسی کنیم. عبارت‌های فرازبان[xxxi] به دو دسته تقسیم می‌شوند: دسته اول عبارات عام منطق هستند که در هر سیستم منطقی به اندازه قوی وجود دارند و به ما این امکان را می‌دهند که عبارت‌های زبان اشیأ را در فرازبان ترجمه کنیم [Tarski, 1955: 187]، هر چند می‌توان به جای این بخش خود زبان اشیأ را نیز قرار داد. دسته دوم عبارت‌هایی هستند که ما را قادر می‌سازند نام‌های ساختاری توصیفی برای عبارت‌های زبان اشیأ بسازیم [Tarski, 1955: 172][xxxii]. همچنین دستگاه استنتاجی فرازبان شامل سه بخش است: قواعد عام منطق (که قواعد زبان اشیأ نیز هستند)، ترجمه اصول موضوعه زبان اشیأ و اصولی که راجع به درست‌کردن اسم‌های توصیفی ساختاری هستند.

ممکن است تصور شود که با این اوصاف فرازبان چیزی بیشتر از زبان اشیأ ندارد و تنها چارچوبی برای صحبت کردن در مورد صدق جملات آن زبان بدون تولید پارادوکس ایجاد می‌کند. اما از سوی دیگر آشکار است که فرازبان نسبت به زبان حداقل تعریف صدق را بیشتر دارد و بنابراین این احتمال وجود دارد که این زبان قدرت بیشتری داشته باشد. در این صورت این قدرت بیشتر مربوط به چه چیزی می‌شود که به سیستم اضافه شده؟

ابتدا نگاهی به شکل زیر که بر طبق تفسیر سمنتیکی- متافیزیکی از نظریه تارسکی ترسیم شده است، بیندازیم:



همان‌گونه که شکل نشان می‌دهد با خوانش سمانتیکی-متافیزیکی از نظریه تارسکی تکلیف صادق‌بودن یا کاذب‌بودن هر جمله زبان و فرازبان بر مبنای مطابقت با ساختار از ابتدا مشخص است چون هر دو زبان تعبیر شده هستند اما متناظر چنین تعبیر شدنی چیزی صریح در زبان یا در فرازبان نداریم. در پاسخ به سوال این که فرازبان چه چیزی اضافه بر زبان دارد باید تعریف ارضاشدن را به صورت دقیق‌تر مورد بررسی قرار دهیم:

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall f \{ sat(f,x) \leftrightarrow seq(f) \wedge sf(x) \wedge \\
&[\exists k \exists l \big(nn(k) \wedge nn(l) \wedge x = i_{k,l} \wedge f_k \subseteq f_l\big) \\
&\vee \exists y \big(sf(y) \wedge x = \neg y \wedge \neg sat(f,y)\big) \\
&\vee \exists y \exists z \Big(sf(y) \wedge sf(z) \wedge x = y + z \wedge \big(sat(f,y) \vee sat(f,z)\big)\Big) \vee \\
&\exists k \exists y (x = \cap_k y \wedge \forall g \Big(seq(g) \to \big(g =_k f \to sat(g,y)\big)\Big))]]\}
\end{aligned}
$$

اگر زبان مورد نظر ما چیزی شبیه به زبان نظریه تایپ باشد، یعنی متغیرهای از تایپ‌های متفاوت داشته باشد، از تعریف بالاتر می‌توان دید که محمول $sat(,)$ از تایپی بالاتر از تایپ x است زیرا بر آن حمل می‌شود. پس فرازبان حداقل متغیری از تایپ بالاتر دارد. اما همه زبان‌ها متغیرهای از تایپ‌های بالاتر ندارند و تارسکی می‌خواهد تعریفش از صدق در آنها هم انجام شود. یک نمونه از این زبان‌های نظریه ZF است. در این نظریه به جای تایپ‌بندی زبان اشیأ جهان تایپ‌بندی می‌شوند[xxxiii] و متغیرهای زبان تنها از یک تایپ هستند. تارسکی

این که تعریف صدق در چنین زبان‌هایی نیز قابل انجام باشد منظورش از ضرورتاً غنی‌تر را این‌گونه اصلاح می‌کند [Tarski, 1944: 372 f.n]:

> برای تعریف مفهوم ارضاشدن، مجبور هستیم نوعی از تعریف بازگشتی را اعمال کنیم که در زبان- اشیأ پذیرفته شده نیست. از این نتیجه می‌شود "غنی‌بودن ضروری" فرا- زبان ممکن است به سادگی مشمول در پذیرش چنین تعریف‌هایی باشد. از سوی دیگر، روشی کلی شناخته شده است که این را ممکن می‌گرداند که تمام تعریف‌های بازگشتی را حذف کرد و آنها را با تعریف‌های نرمال و صریح جایگزین کرد. اگر تلاش کنیم چنین روشی را برای تعریف ارضاشدن به کار گیریم، خواهیم دید که مجبوریم یا به فرازبان متغیرهایی از تایپ منطقی بالاتر از همه آنهایی که در زبان اشیأ رخ می‌دهند اضافه کنیم؛ یا در غیر این صورت در فرازبان به صورت اصل موضوعه‌ای وجود کلاس‌هایی را فرض کنیم که شمول بیشتری (are more comprehensive) از تمام آنهایی داشته باشند که در زبان- اشیأ می‌توانند ساخته شوند (can be established).

اگر زبان حساب را بار دیگر در نظر بگیریم و به جملات زبان اعدادی متناظر کنیم (اعداد گودلی مثلاً) مجموعه جملات صادق زبان حساب در حقیقت زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی خواهند شد که از قضیه تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی می‌دانیم که این زیرمجموعه از اعداد طبیعی در زبان حساب قابل تعریف‌کردن (کاراکتریزه‌کردن) نیست و غنی‌تر بودن فرازبان در اینجا طبق معیاری که تارسکی می‌دهد یعنی آن اندازه که بتوان آن زیرمجموعه خاص از اعداد طبیعی، یعنی مجموعه اعداد گودلی جملات صادق، را در آن تعریف کرد.

چون تارسکی نظریه خود را تنها قابل اعمال برای زبان‌های صوری می‌دانست و هرگونه تلاش برای تعریف صدق برای زبان طبیعی یا هر زبانی که دقت صوری لازم را نداشته باشد منجر به شکست می‌دانست در انتها تنها به نحوه جلوگیری از تشکیل پارادوکس در زبان‌های صوری خواهیم پرداخت.

امر پارادوکسیکال سمانتیکی در نظریه‌های صوری محصول تعارض دو چیز در زبان‌های به اندازه کافی غنی است: تعریف صدق و لم قطری سازی گودل. بر طبق لم قطری سازی گودل برای هر محمول تک موضعی زبان از جمله T ، (یعنی صدق)، اثبات می‌شود که جمله همچون λ وجود دارد که برای آن داریم $\lambda \leftrightarrow \neg T(\ulcorner\lambda\urcorner)$. از سوی دیگر در نتیجه تعریف صدق تارسکی برای هر جمله‌ای از زبان (از جمله λ) اثبات می‌شود که $T(\ulcorner A\urcorner) \leftrightarrow A$. مجموع این دو در نظریه واضح است به تناقض منجر می‌شود و نظریه را ناسازگار می‌گرداند. راه حل تارسکی بدین شیوه است که تعریف صدق را به‌گونه‌ای تغییر می‌دهد که جمله λ مشترکی پیدا نشود که هم موضوع لم قطری‌سازی باشد هم موضوع تعریف صدق؛ با سلسله‌مراتبی‌کردن زبان اشیأ اصلاً محمول صدق شفافی (transparent) (یعنی شالکه صدق را ارضا کند) در زبان اشیأ وجود ندارد که با لم قطری‌سازی برای آن تداخل داشته باشد. نشان‌دادن این که اضافه‌کردن محمول T_1 و اصول موضوعه بیشتر به فرازبان موجب ناسازگاری آن نمی‌شود مقداری پیچیده‌تر است و شاید غیرممکن. فرض کنید محمول یک موضعی T_1 (محمول صدق برای OL) در ML وجود دارد. از طرفی برای هر جمله عضو OL داریم

$$T_1(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi \qquad (A)$$

از طرف دیگر با استفاده از قطری‌سازی می دانیم برای حداقل یک φ در فرازبان برای محمول تک موضعی T_1 داریم

$$\varphi \leftrightarrow \neg T_1(\varphi) \qquad (B)$$

همچنین می‌دانیم $OL \cap ML = OL$[xxxiv]. از کجا می‌دانیم φ در (B) عضوی از قسمت مشترک زبان و فرازبان نیست؟ اگر φ در قسمت مشترک باشد آنگاه با (A) تناقض ایجاد می‌شود.

ابتدا نگاهی به این بیندازیم که چگونه لم قطری‌سازی جمله λ را تولید می‌کند و محتوای آن چیست: فرض کنید m عدد گودلی فرمولی مانند $\varphi(x)$ باشد که تنها یک متغیر آزاد دارد. فرمول $D(m,n)$ بیان می‌کند که n عدد گودلی فرمولی است که از جانشینی m به جای x به‌دست آمده است، یعنی $\ulcorner\varphi(m)\urcorner$. اکنون جمله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \forall x_2(D(x_1,x_2) \to \varphi(x_2))$$
$$B \stackrel{\text{def}}{=} \forall x_2(D(m,x_2) \to \varphi(x_2))$$

آنگاه برای φ خواهیم داشت $PA \vdash B \leftrightarrow \varphi(\ulcorner B\urcorner)$ (دقت شود تنها به اصل‌های حساب برای اثبات این قضیه احتیاج داریم [Mendelson, 2015: 202-3]). برای محمول $\neg T$ خواهیم داشت: $B = \lambda = \forall x_2(D(m,x_2) \to \neg T(x_2))$. پس ممکن است تصور شود چون در ساخت نقطه ثابت محمول $\neg T(x)$ از خود محمول T استفاده می‌شود قطعاً نقطه ثابت $\neg T(x)$ عضو OL نخواهد بود اما می‌دانیم که نقطه ثابت برای محمول‌های تک موضعی قطعاً یکتا نیست و حتی اگر مشکل روش ساخت گودل را هم حل کنیم باز ممکن است عضوی از زبان وجود داشته باشد که عدد گودلی آن نقطه ثابت $\neg T(x)$ باشد. تارسکی با توجه به این مساله شرط دیگری نیز برای صدق تعیین و می‌کند و آن تعریف‌شدن در فرازبانی ضرورتاً غنی‌تر از زبان است. او می‌نویسد [Tarski, 1944: 351-2]:

> "معلوم می‌شود که راه حل [دفع پارادوکس‌ها] گاهی کار می‌کند گاهی نه. این وابسته خواهد بود به برخی رابطه‌های صوری بین زبان- اشیأ و فرا- زبان آن؛ یا، به صورت مشخص‌تر، به این واقعیت که آیا فرا- زبان در بخش منطقی‌اش "ضرورتاً غنی‌تر" از بخش زبان- اشیأ خواهد بود یا نه. ارایه تعریفی دقیق و عمومی از مفهوم "غنای ضروری (essential richness)" ساده نیست. اگر خودمان را به زبان‌های بر پایه نظریه منطقی تایپ‌ها (the logical theory of types) محدود کنیم، این شرط برای این که فرا- زبان از زبان- اشیأ "ضرورتاً غنی‌تر" باشد این خواهد بود که شامل متغیرهایی از تایپ منطقی بالاتر از آنهای زبان اشیأ باشد ... اگر شرط "غنای ضروری" ارضا نشود، می‌تواند نشان داده شود که تعبیری (interpretation) از فرا- زبان به زبان- اشیأ ممکن است؛ بدین معنی که، با هر ترم فرا- زبان یک ترم خوش مشخص شده (well-determined term) از زبان- اشیأ می‌تواند همبسته (correlate) شود به شیوه‌ای که هر جمله اظهارپذیر (assertible) [اثبات‌پذیر] یکی از این زبان‌ها با جمله‌ای اظهارپذیر [اثبات‌پذیر] در زبان دیگر همبسته شود. در نتیجه این تعبیر، این فرض که یک تعریف رضایت‌بخش از صدق در فرا- زبان فرمول‌بندی شده است امکان بازسازی پارادوکس دروغگو را در آن زبان نتیجه خواهد داد؛ و این به نوبه خود ما را وادار خواهد کرد که فرض مورد نظر را رد کنیم".

بنابراین با توجه به این که یافتن این که فرازبان چه چیزی بیشتر از زبان دارد به سادگی میسر نیست و احتمالاً به خود زبان بستگی دارد. اثبات سازگاری فرازبان نیز به زبان‌های مختلف بستگی دارد. مثلاً برای حساب یک سری از فرازبان‌هایی که اصول موضوعه قدرتمندی، همانند قاعده ω یا استقرا برای جملات حاوی T، به آنها اضافه نشده باشد[xxxv] می‌توان با استفاده از اثبات پایستاری فرازبان نسبت به زبان نشان داد که اگر زبان سازگار

باشد فرازبان نیز سازگار است و بنابراین پارادوکس‌ها در آن رخ نداده‌اند. هر چند مشکل پیش‌رو این خواهد بود که چنین نظریاتی به اندازه‌ای قوی نخواهند بود که در مورد صدق راضی‌کننده باشند، و بنابراین گفته شود شرط داشتن متغیر مرتبه بالاتر تارسکی راجع به آنها نیست، اما فرازبان‌هایی هستند که متغیر از مرتبه بالاتر نیز ندارند و با این وجود می‌توانند در مورد صدق جملات زبان اشیأ صحبت کنند بدون این که دچار پارادوکس شوند[xxxvi].

مساله ارجاع به خارج از زبان و فرازبان

نظریه صدق سمانتیکی تارسکی همان‌گونه که دیدیم تنها در صورتی می‌تواند به صورت مطلوب موفق باشد که وجود ساختارهایی در خارج از حیطه زبان را مفروض گرفته باشد یا به عبارت دیگر زبان لزوماً در جهان تعبیر شده باشد نه در یک زبان دیگر. در مورد نظریه‌های علوم طبیعی این فرضیه تا حد زیادی بدون اشکال است اما در مورد نظریه‌های صوری همانند نظریه‌های ریاضیاتی مربوط به اعداد طبیعی یا حقیقی و یا انواع دیگر اشیأ انتزاعی این نظریه ملزم به پذیرش افلاطون‌گرایی خواهد بود. منظور ما از افلاطون‌گرایی این است که مستقل از زبان (و به تبع آن ذهن) اشیأ انتزاعی (مانند اعداد) وجود دارند و روابطی واقعی بین آنها حکم‌فرماست.

خود تارسکی نیز می‌خواست نظریه مطابقتی صدق را به‌گونه‌ای که معیار صوری را برآورده کند بازسازی کند اما این که چقدر صورت‌بندی او مطلوب است جای پرسش دارد. به‌عنوان مثال این جمله را در فرازبان در نظر بگیرید:

$$E)\ T(\ulcorner a = b \urcorner) \leftrightarrow a = b$$

به زبان ساده‌تر E می‌گوید a این‌همان است با b اگر و تنها اگر a و b هر دو به یک شیء اشاره کنند یا هر دو اسمی برای یک شیء باشند (چون دو شیء مجزای این‌همان نمی‌توانند وجود داشته باشند). اما اشاره‌کردن a و b به یک شیء چگونه ممکن است؟ اگر تعبیر a و b در جهان باشد (جهان افلاطونی ریاضیات) آنگاه این تعبیر تابعی خواهد بود از مجموعه جملات زبان به مجموعه اشیأ جهان. اگر تابع تعبیر را با μ نشان دهیم خواهیم داشت: $\mu: \mathcal{L} \to world$ و

$$E')\ T(\ulcorner a = b \urcorner) \leftrightarrow \mu(a) = \mu(B)$$

با این صورت‌بندی اولین مشکل پیش رو این خواهد بود که آیا می‌توان μ را در نظریه مجموعه‌ها (مثلاً ZF) که برای تعریف تابع به کار برده می‌شود صورت‌بندی کرد؟ $\mu(a)$ یک شیء در جهان است پس دو راه برای اشاره به آن وجود خواهد داشت: راه اول این که گفته شود شیء متناظر a در جهان نظریه مجموعه‌ها وجود دارد و لازم نیست جهان را با چیزهای غیرمجموعه‌ای (مثلاً اعداد) گسترش دهیم بلکه کافی است در زبان نظریه مجموعه‌ها اسمی برای آن انتخاب شود که به‌طور مشخص به شی‌ای که a به آن اشاره می‌کند، اشاره کند (مثلاً نامی همانند 3 که به شی‌ای که $\overline{1+1+1}$ و $\overline{2+1}$ به آن اشاره می‌کنند اشاره دارد). ایراد به وجود آمده این خواهد بود که اضافه‌کردن چنین نام‌هایی باعث گسترش زبان ZF خواهند شد و دیگر معلوم نیست بتوانیم همزمان راجع به صدق تعدادی از نظریات ریاضی به صورت سازگار صحبت کنیم و یا در مواردی همچون اعداد حقیقی به ناشمارا اسم نیاز خواهیم داشت. راه دوم این است که گفته شود لازم نیست برای هر شیء یک اسم در نظریه مجموعه‌ها انتخاب شود زیرا می‌توان با همان منابع زبانی مجموعه برد تابع تعبیر را تعریف کرد که در آن صورت برد μ نه به صورت مصداقی بلکه با یک فرمول تعریف‌پذیر خواهد بود. اما از قضایای لونهایم اسکولم می‌دانیم که هرگونه تلاش در منطق مرتبه اول برای تعریف مجموعه‌هایی همچون مجموعه اعداد طبیعی

محتوم به شکست است. یعنی اشیایی در جهان وجود دارند که در عین حال که آن فرمول در مورد آنها درست است با اشیأ دیگری در جهان که مد نظر ما هستند متفاوت هستند و هیچ راهی برای متمایزکردن آنها و مشخص‌کردن برد تابع μ و بنابراین تعریف آن وجود ندارد.

راه بعدی این است که فرازبان را چیزی قوی‌تر از تمامی نظریه‌های مرتبه اول بگیریم مانند نظریه مجموعه‌های مرتبه دوم. چنین نظریه‌ای به دلیل از کارافتادن قضایای لونهایم اسکولم این توانایی را خواهد داشت که مجموعه‌هایی مانند مجموعه‌ای اعداد طبیعی را به صورت یکتا مشخص کند و از این طریق برد μ را در همان زبان متناهی به صورت یکتا مشخص کرد. اما خود این نظریه‌ها نیز مشکلاتی دارند از جمله مهمترین آنها این است که به دلیل تواناییشان در بازسازی حساب و لم قطری‌سازی در درون خود به صورت متناهی اصل‌پذیر نیستند، یعنی هیچ مجموعه متناهی‌ای اصل در زبان آنها نمی‌تواند جهان آنها را مشخص کند.

ایراد دیگری که به نظریه صدق تارسکی می‌توان گرفت این است که تارسکی اثبات نکرده است که فرازبان، به شرط سازگاری زبان اشیأ کماکان سازگار خواهد بود بلکه تنها وی گفته است باید فرازبان به‌گونه‌ای غنی‌تر از زبان باشد که نتوان آن را در زبان اشیأ ترجمه کرد. با این توضیح نشان‌دادن این که چه زمان نمی‌توان زبانی را به زبان دیگر ترجمه کرد، پیشنهاد تارسکی وجود متغیرهای از مرتبه‌ی بالاتر است، و این که آیا همواره چنین فرازبانی یافت می‌شود و این که چنین شرطی، شرطی لازم یا کافی است مورد سوال است.

گویا تنها راه باقی‌مانده این است که فرازبان را چیزی همانند زبانی که ریاضی‌دان‌ها در کارهای روزمره‌ی خود از آن استفاده می‌کنند در نظر بگیریم. در این صورت می‌توانیم ادعا کنیم که استدلال‌های ما در فرازبان از لحاظ ریاضیاتی موجه هستند زیرا اگر این‌گونه نباشد بیشتر استدلال‌های ریاضیاتی ناموجه خواهند بود. اما نکته‌ای که در اینجا باید یادآوری شود این است که تارسکی قرار بود مفهوم صدق را برای زبان‌های صوری تنها در زبان‌های صوری تعریف کند و زبان صوری زبانی است اصل موضوعی شده و دارای دستگاه استنتاجی دقیق نه زبان روزمره.

نتیجه‌گیری

در این مقاله تلاش کردیم نظریه صدق تارسکی را همراه با جوانب مختلف آن معرفی کنیم و نشان دهیم چرا نظریه صدق وی منتج به افلاطون‌گرایی در ریاضیات خواهد شد. همچنین نشان دادیم تارسکی علاوه‌بر شرط‌های کفایت مادی و صحت صوری شرط‌های دیگری همچون برآورده‌کردن ویژگی‌های شهودی محمول صدق همچون اصل دو ارزشی و امتناع تناقض و غنی‌تر بودن فرازبان را نیز دارد که به خاطر آنها شیوه‌های دیگر تعریف صدق را نمی‌پذیرد. در حقیقت نظریه صدق تارسکی تنها روشی به ما می‌دهد که با آن بتوانیم بدون این که دچار تناقض شویم در مورد صادق‌بودن یا کاذب‌بودن جمله‌های زبان اظهار نظر کنیم اما اینکه چه چیزی صادق است در بیرون از زبان تعیین می‌شود.

تشکر و قدردانی: موردی برای گزارش وجود ندارد.
تأییدیهٔ اخلاقی: موردی برای گزارش وجود ندارد.
تعارض منافع: موردی برای گزارش وجود ندارد.
سهم نویسندگان: سیاوش احمدزاده (نویسنده اول): پژوهشگر اصلی (۷۵%)؛ لطف‌الله نبوی (نویسنده دوم)، پژوهشگر کمکی (۲۵%)
منابع مالی: موردی برای گزارش وجود ندارد.

منابع

- Coffa A (1991). The semantic tradition from kant to carnap: To the Vienna station. Cambridge: Cambridge University Press.
- Halbach V (2014). Axiomatic theories of truth. Cambridge: Cambridge University Press.
- Henkin L (1949). The completeness of the first-order functional calculus. Journal of Symbolic Logic. 14(3):159-166.
- Hodges W (2001). Tarski's truth definitions. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2022 Edition). Available from: https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/tarski-truth/
- Mendelson E (2015). Introduction to mathematical logic. Princeton: Van Nostrand.
- Patterson D (2012). Alfred tarski: Philosophy of language and logic. London: Palgrave-Macmillan.
- Tarski A (1944). The semantic conception of truth and the foundations of semantics. Journal of Symbolic Logic. 4(3):341-376.
- Tarski A (1956). Logic, semantics, metamathematics. Oxford: Clarendon Press.
- DeVidi D, Solomon G (1999). Tarski on "essentially richer" metalanguages. Journal of Philosophical Logic. 28(1):1-28.
- Ray G (2005). On the matter of essential richness. Journal of Philosophical Logic. 34(4):433-457.

پی‌نوشت

[i] این مقاله برای اولین بار در ۱۹۳۳ به زبان لهستانی[i] معرفی شد. ترجمه‌ی آلمانی آن در ۱۹۳۵ و ترجمه انگلیسی در ۱۹۵۶ ارایه شد که هر کدام مقداری به‌وسطه پانویس‌های تارسکی در ترجمه‌ها یا عدم دقت در ترجمه با دیگری متفاوت هستند. نظریه صدق سمانتیکی در این مقاله با جزییات بالا ارایه شده است و آثار بعدی تارسکی یا ساده‌سازی این مقاله برای افراد ناآشنا با منطق هستند یا شامل اصلاحاتی برای حل برخی مسایل پیش آمده.

[ii] به نظر می‌رسد منظور تارسکی از زبان مجموعه‌ای از واژگان به اضافه قواعد استدلال در آن است.بدین ترتیب برای زبان‌های صوری منظور او چیزی شبیه به نظریه یا سیستم منطقی است [Halbach, 2014: 17].

[iii] مثلاً از نظر تارسکی صدق جملات منطق مرتبه اول را می‌توان نه در خود آن بلکه در زبان دیگری تعریف کرد اما صدق را برای جملات زبان طبیعی نه در خود آن زبان و نه در هیچ زبان دیگر نمی‌توان تعریف کرد.

[iv] یعنی هر جمله‌ای در آن‌ها اثبات شود.

[v] شاید بتوان گفت این شیوه از تعریف نه تنها مختص به ریاضیات بلکه همان شیوه استاندارد تعریف در فلسفه تحلیلی است و منظور از تحلیل فلسفی یک مفهوم نیز ارایه تعریفی در قالب بالا برای مفاهیم است.

[vi] چنین نیست که دقیقاً و همواره یک چیز باشند و نسبت آنها با هم به موضع فلسفی افراد بستگی دارد.

[vii] اگر چنین کاری ممکن باشد با جانشین‌کردن جملات به جای متغیر می‌توان تمام جملات مورد نظر تارسکی را اثبات کرد

[viii] عدد گودلی جمله‌ی A را با $\ulcorner A \urcorner$ نشان می‌دهیم [Mendelson: 2015].

[ix] در اینجا مجال تحلیل کارهای تارسکی برای نشان‌دادن مشکلات این رویکرد نیست [Tarski, 1955].

[x] این شرط که صدق تنها بر عبارت‌هایی که جمله هستند حمل شود را با شرایطی می‌توان حذف کرد

[xi] صدق چون تنها برجمله حمل می‌شود نمی‌توان آن را در منطق مرتبه اول و بالاتر به صورت بازگشتی تعریف کرد در حالی که ارضاپذیری بر توابع گزاره‌ای نیز حمل می‌شود. به‌عنوان مثال برای برسی صدق $\forall x \varphi x$ اگر به صورت بازگشتی عمل کنیم باید صدق آن را برحسب φx تعیین کنیم اما چون φx جمله نیست صدق برای آن تعریف نشده است.

[xii] برای نقد صورت‌بندی اولیه تارسکی، که فیلسوفان آشنایی بیشتری با آن دارند تا دیدگاه متاخر او، عین تعاریف و مثال‌های او در۱۹۳۳ آورده می‌شود.

[xiii] نگاه کنید به [Hilbert & Ackerman, 1950]

[xiv] سیستمی که تارسکی در ۱۹۳۳ با آن کار می‌کند شبیه به نظریه تایپ است اما تفاوت‌هایی نیز دارد. او در زبان‌ها را به چهار دسته تقسیم می‌کند و تعریف‌پذیری صدق را برای هر کدام از این زبان‌ها بررسی می‌کند. به دلیل پرهیز از طولانی‌شدن مقاله، کنار گذاشته شدن این نوع از صورت‌بندی زبان‌ها و ناآشنا بودن اکثر خوانندگان با آن و در نهایت کفایت نمونه زبان کلاس‌ها برای معرفی ایده تارسکی و نقد آن تنها به معرفی ارضاپذیری برای این زبان خواهم پرداخت.

[xv] چون در نظریه تارسکی صدق‌بر جمله حمل می‌شود نه گزاره وی عبارت‌های دارای متغیر آزاد را تابع جمله می‌نامد نه گزاره‌ای. اما می‌توان بدون مشکل منطقی و صوری خاصی آن را همان تابع گزاره‌ای در نظر گرفت.

[xvi] دقت شود که تعریف بالا به شکل $\forall x(Tx \leftrightarrow \varphi x)$ است. به متغیرهای آزاد دو طرف اگر و تنها اگر دقت کنید.

[xvii] چون تعریف ارضاشدن در فرازبان انجام می‌شود و فرازبان خود یک زبان است پس fعضوی از یک زبان است و بنابراین نمی‌تواند دنباله‌ای از اشیأ باشد. اما تارسکی به آن همچون دنباله‌ای از کلاس‌ها نگاه می‌کند و منظورش k امین عضو دنباله‌ای از اشیأ است.

[xviii] باید دقت کرد که بر طبق قضیه ناتمامیت گودل می‌دانیم اگر نظریه ما شامل حساب باشد و ارزش صدق تمام جملات اتمی را بدانیم، در مورد نظریه حساب چنین است، نمی‌توان از روی آنها ارزش تمام جملات را با استفاده از قواعد منطق به‌دست آورد. به عبارت دیگر تعریف ارضاشدن تارسکی هر چند ترکیبی (compositional) است اما ساختی نیست.

[xix] تفاوت زبان با نظریه را این‌گونه می‌توان بیان کرد که ممکن است دو زبان (سیستم استنتاجی) قضیه‌های یکسان (یعنی نظریه‌ی یکسان) داشته باشند اما در عین حال متفاوت باشند.

[xx] چنین زبانی بسیار فقیر خواهد بود. برای انطباق جملات صادق در مدلی با k عضو با جملات اثبات‌پذیر کافی‌است دو جمله را به‌عنوان اصل به آن اضافه کنیم: ۱) هر مجموعه‌ی غیرتهی حداقل یک عضو دارد و ۲) تعداد k تا شیء وجود دارد.

[xxi] حتی خود هنکین در یک پاورقی از مقاله‌ی «تمامیت حساب تابعی مرتبه اول» می‌نویسد: شرحی دقیق‌تر و نحوی‌تر از این ایده‌ها می‌تواند در راستای کار تارسکی فرمول بندی شود. اما این نسخه سمانتیکی برای مقصود ما کافی است [Henkin, 1949]. هر چند ممکن است کاری که در این قصد انجام‌دادن آن را داریم منظور هنکین نبوده باشد. روش اثبات تمامیت کالمار هم می‌تواند منبعی برای الهام چنین اثباتی باشد.

[xxii] هنکین برای غلبه‌بر این چالش از اضافه‌کردن ثابت‌های جدید به زبان استفاده می‌کند به‌گونه‌ای که برای هر جمله‌ی دارای سور وجودی در ابتدا یک شاهد وجود داشته باشد اما این روش در اینجا قابل استفاده نیست زیرا در این صورت فرازبان چیزهایی بیشتر از زبان خواهد داشت که مورد نظر تارسکی نیستند.

[xxiii] به چنین اثباتی "قاعده ω" ($\omega - rule$) می‌گویند.

[xxiv] اثبات او مبتنی‌بر این است که. چون هر اثبات در فرازبان متناهی است پس تعداد جمله‌هایی که محمول T در آنها به کار رفته نیز متناهی است و می‌توان آنها را با طرح-Tهایی که متناظراً به‌عنوان آکسیوم داریم به یک جمله در زبان اشیأ تبدیل کرد. پس هر اثباتی برای جمله‌ای بدون T در فرازبان قابل تبدیل به اثباتی در زبان است. در نتیجه فرازبان نسبت به زبان پایستار است. برای مشاهده تحلیل تارسکی از قاعده استقراء نامتناهی نگاه کنید به [Tarski, 1956: 259-62].

[xxv] با ابتدای این بخش (تعریف صدق تارسکی) برای بحث در مورد تعریف در منطق مقایسه کنید.

[xxvi] α می‌تواند یک فرمول با یک متغیر آزاد نیز باشد که در اینجا برای سادگی آن حالت فرمول‌بندی نمی‌کنیم.

[xxvii] به این نظریه‌ی راسل، نظریه هیچ-کلاسی (no-class theory) گفته می‌شود.

[xxviii] مگر این که اندازه زبان نیز ناشمارا شود که مشکلات خاص خود را پدید می‌آورد از جمله اینکه دیگر مجموعه واژگان زبان بازگشتی نخواهد بود [Mendelson, 2015].

[xxix] تارسکی در جاهای مختلف از دنباله‌هایی از ترم‌ها برای توصیف دنباله‌های ارضاکننده استفاده کرده است که گاهی موجب می‌شود بین این که آیا منظور وی دنباله‌ای از اشیاء است یا دنباله‌ای از ترم‌های بسته زبان ابهام ایجاد شود اما منظور او از ترم عضوی از دنباله است نه شیءای زبانی [Tarski, 1956: 171-3].

[xxx] نگاه کنید به کوفا [Coffa, 1991: 291] و هاجز [Hodges, 2022] و پاترسون [Patterson, 2018: 121].

[xxxi] قسمتی که امروزه آن را به‌عنوان زبان یک نظریه می‌شناسیم در مقابل دستگاه استنتاجی

[xxxii] در لیستی که تارسکی در اینجا از عبارت‌های مختص فرازبان می‌دهد هیچ عبارت اولیه‌ی سمانتیکی‌ای دیده نمی‌شود.

[xxxiii] دقت کنید که $\in$ در ZF یک ترتیب اکید رو مجموعه‌ها ایجاد می‌کند که دقیقاً حالتی شبیه به تایپ در نظریه راسل است. نگاه کنید به [Tarski,1956: 271 f.n].

[xxxiv] فرض شده است زبان اشیاء زیرمجموعه فرازبان است.

[xxxv] یعنی نظریه‌هایی ضعیف‌تر از CT (compositional truth) [Halbach, 2014].

[xxxvi] در نهایت این که فرازبان دقیقاً چه شرایطی باید داشته باشد که قابل ترجمه در زبان نباشد و در عین حال نشان داده شود که سازگار است و یا این که آیا برای هر زبانی چنین فرازبانی پیدا می‌شود در اینجا بیشتر از این مورد بحث قرار نخواهد [DeVidi and Solomon, 1999; Greg Ray, 2005].