

ملاحظات تاریخی درباره نظام‌های منطقی معرفی شده توسط حاج حسینی

اسدالله فلاهی^۱

چکیده: مرتضی حاج حسینی در ویراست دوم کتابش، *طرحی نواز اصول و مبانی منطق*، ادعاهایی در مورد منطق‌های پیشین مطرح کرده است که به نظر می‌رسد برخی از آنها صحت ندارد. این مدعیات از این قرارند: (۱) منطق کلاسیک میان استلزام مادی و استنتاج خلط کرده و آنها را یکی گرفته است. (۲) منطق کلاسیک نظام‌های تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی را تفکیک نمی‌کند و تفکیک نظام‌های تابع‌ارزشی از غیرتابع‌ارزشی از ابداعات نویسنده کتاب است و در آثار منطق‌دانان سابقه نداشته است. (۳) فراقضیه استنتاج نادرست است، به دلیل اینکه رابطه مقدمات عطف مصداقی است. نشان می‌دهم که همه این مدعیات نادرست‌اند. همچنین برخی از نظام‌های غیر کلاسیک کم‌و بیش مشابه را با نظام‌های طرح‌شده در این کتاب مقایسه می‌کنم.

کلیدواژه: منطق کلاسیک، منطق ربط، منطق FDE، منطق نیو تانت

On Historical Aspects of Hajhosseini's Logical Systems

Asadollah Fallahi

Abstract: In the second edition of his book *Two Non-Classical Logic Systems, A New Outlook on Elements of Logic*, Mortaza Hajhosseini has made some claims about previous logics, which seem to be inaccurate. These claims are as follows: 1. Classical logic confuses inference and material implication and considers them as one. 2. Classical logic does not distinguish between truth-functional and non-truth-functional logical systems. This distinction between these two systems is his invention and has no historical background in the works of previous logicians. 3. The Deduction Theorem is incorrect because the relation of premises is the extentional conjunction. We show that all of these claims are incorrect. Furthermore, we attempt to compare some of the systems proposed in this book to some non-classical systems.

Keywords: Classical logic, relevance logic, FDE logic, Neil Tennant's logics

۱. مقدمه

مرتضی حاج حسینی در سال‌های ۱۳۹۶ و ۱۴۰۱ ویرایش نخست و دوم کتاب خود با عنوان طرحی نو از اصول و مبانی منطق را منتشر و نظام‌های منطقی غیرکلاسیک جدیدی را معرفی کرده است. به گمان او، منطق کلاسیک و منطق‌های نیمه کلاسیک و غیرکلاسیک طرح شده پیش از او هیچ‌کدام نتوانسته‌اند شهودهای طبیعی بشری در قبال ادات‌های منطقی و عمل طبیعی استنتاج را به درستی مدل‌سازی کنند. از این رو، وی دو نظام تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی طراحی کرده است تا بیشترین سازگاری را با شهودهای طبیعی بشری داشته باشد.

در مقاله‌های دیگری، نظام‌های منطقی حاج حسینی و سمانتیک آنها در ویرایش دوم کتاب و مبانی نظری نهفته در پس این نظام‌های منطقی و سمانتیکشان را بررسی کرده‌ام (فلاحی ۱۴۰۱ الف، ۱۴۰۲ ب، ۱۴۰۲ ج، ۱۴۰۲ د) و در این مقاله قصد دارم به مباحث تاریخی کتاب پردازم و برخی نقدهای خویش بر آنها را بیان کنم و امید دارم که در تحکیم و تکمیل برنامه پژوهشی نویسنده محترم کتاب به کار آیند. در این مقاله، همه ارجاع‌ها به ویرایش دوم کتاب است و، از این رو، صرفاً به نوشتن شماره صفحه بسنده خواهم کرد اما اگر از ویرایش نخست استفاده کنم متذکر می‌شوم.

۲. عدم مرز میان استلزام مادی و استنتاج در منطق کلاسیک

نویسنده کتاب در مواضع متعددی تأکید کرده است که منطق کلاسیک میان رابطه «استنتاج» و «استلزام مادی» مرزی قائل نیست:

نظام کلاسیک منطق گزاره‌ها، مفهوم تابع‌ارزشی گزاره شرطی «اگر P ، آنگاه Q » را بیانگر حداقل مفهوم استلزام (استلزام مادی) ... می‌داند، بی‌آنکه مرزی بین ادات شرطی ... تابع‌ارزشی ... با ... رابطه استلزام بین مقدمات و نتیجه ... قائل شود. (ص ۱۰۵)

در نظام کلاسیک منطق گزاره‌ها که از گزاره شرطی $P \supset Q$ به « P مستلزم Q است» تعبیر می‌شود و این تعبیر معادل « Q از P استنتاج می‌شود» است، رابطه مقدمه‌ها با نتیجه در هر استدلال درست با « \supset » که از آن به استلزام مادی تعبیر می‌شود، تفسیر و صورتبندی می‌شود. (ص ۱۲۲).

رابطه مقدمه‌ها با نتیجه استدلال درست در نظام کلاسیک منطق گزاره‌ها با مفهوم تابع‌ارزشی گزاره شرطی تفسیر و صورت‌بندی می‌شود. (ص ۱۲۳) (تأکیدها از من است)

فلاحي

در پاسخ باید گفت که در منطق کلاسیک هرگز «استنتاج» به «استلزام مادی» تفسیر نشده است زیرا برخی از پارادوکس‌های استلزام مادی برای «استنتاج» برقرار نیست. برای نمونه، پارادوکس انفصال را در نظر بگیرید:

$$(A \supset B) \vee (B \supset A)$$

این پارادوکس برای «استنتاج» برقرار نیست. برای نمونه، این حکم برای دو متغیر گزاره‌ای P و Q برقرار نیست و هر دو حکم زیر نادرست است:

$$(P \vdash Q), (Q \vdash P)$$

یا پارادوکس «نقیض شرطی» را در نظر بگیرید:

$$\sim (A \supset B) \vdash (A \wedge \sim B)$$

این پارادوکس برای «استنتاج» برقرار نیست چون از حکم صحیح $(P \vdash Q) \sim$ نمی‌توانیم حکم نادرست $(P \wedge \sim Q) \vdash$ را نتیجه بگیریم یا به $Q \vdash \sim P$ برسیم. یا پارادوکس «نقیض دوشروطی» را در نظر بگیرید:

$$\sim (A \equiv B) \vdash (A \equiv \sim B)$$

این پارادوکس نیز برای «استنتاج» برقرار نیست. برای نمونه، این حکم برای دو متغیر گزاره‌ای P و Q برقرار نیست و حکم شرطی زیر نادرست است:

$$\sim (P \vdash Q) \Rightarrow (P \vdash \sim Q)$$

زیرا مقدم آن صادق است اما تالی آن کاذب. *مطالعات فزینجی*

از سوی دیگر، «استنتاج» در منطق کلاسیک حکم‌هایی ایجابی دارد که استلزام مادی ندارد. برای نمونه، اگر یک متغیر قضیه باشد، آنگاه (بنابر قاعده جانشینی) همه فرمول‌ها قضیه خواهند بود:

$$\vdash P \Rightarrow \vdash Q$$

ولی استلزام مادی $(P \supset Q)$ لزوماً صادق نیست. و یا اگر یک متغیر یک متغیر را نتیجه دهد، آنگاه (بنابر قاعده جانشینی) همه فرمول‌ها همه فرمول‌ها را نتیجه خواهند داد:

$$(P \vdash Q) \Rightarrow (R \vdash S)$$

ولی استلزام مادی $(P \supset Q)$ مستلزم استلزام مادی $(R \supset S)$ نیست.

Fallabi

در منطق کلاسیک، پیشینه تمایز میان «استلزام مادی» و «استنتاج» دست‌کم به برتراند راسل می‌رسد که میان «استلزام مادی» و «استلزام صوری» تمایز گذاشته است (Russell 1903 pp. 14-41, 2010 pp. 14-42). «استلزام صوری» یا «استلزام منطقی» که همان مفهوم «استنتاج» است، نزد راسل، شامل «استلزام مادی» است ولی همان استلزام مادی نیست و افزون بر آن چیزی دارد. برای نمونه، معنای «استنتاج» از نظر سمانتیکی این است که «به‌ازای هر مدل که مقدمات در آن صادق است، نتیجه هم در آن صادق است» که معادل است با اینکه «به‌ازای هر مدل، اگر مقدمات در آن مدل صادق باشند، نتیجه هم در آن مدل صادق است». در عبارت اخیر، می‌بینیم که معنای «اگر، آنگاه» به‌همراه سور «هر مدل» آمده است. پس «استنتاج» یا «استلزام صوری» برابر است با «استلزام مادی» به‌همراه «سور کلی». بنابراین، معادله زیر را داریم:

استنتاج = سور کلی + استلزام مادی.

اما استنتاج، در معنای نحوی و نظریه‌برهانی آن، عبارت است از اینکه «به‌ازای هر نمونه‌جانشین متغیرها، اگر مقدمات، آنگاه نتیجه». در اینجا نیز می‌بینیم که «استنتاج» یا «استلزام صوری» برابر است با «استلزام مادی» به‌همراه «سور کلی». بنابراین، معادله زیر تأکید می‌شود:

استنتاج = سور کلی + استلزام مادی.

این تمایز را در زبان منطق مرتبه‌دوم بهتر می‌توان نشان داد. اگر P_1, \dots, P_n همه متغیرهای گزاره‌ای در فرمول‌های A و B باشد، استنتاج $A \vdash B$ را می‌توان به زبان مرتبه‌دوم و با استلزام مادی و چند سور کلی چنین صورت‌بندی کرد:

$\forall P_1, \dots, \forall P_n (A \supset B)$.

توجه کنیم که اگر استلزام صوری شامل استلزام مادی به‌همراه سور کلی است، به مفهوم «استنتاج» در منطق کلاسیک اختصاص ندارد، بلکه در تفسیر «هر الف ب است» هم استلزام مادی در کنار سور کلی مطرح است. همین مسئله در تفسیر «استلزام اکید» سی. آی. لویس و در تفسیر «استلزام ربطی» منطق ربط نیز برقرار است. استلزام اکید لویس به این معناست که «در هر جهان ممکن که مقدم صادق است، تالی نیز صادق است» که معادل است با اینکه «در هر جهان ممکن، اگر مقدم صادق باشد، آنگاه تالی نیز صادق است». به زبان صوری:

فلاحي

$$\models_x A \rightarrow B =_{df} \forall y (\models_y A \supset \models_y B).$$

یا در سمانتیک کریپکی با رابطه دسترسی و دو استلزام مادی:

$$\models_x A \rightarrow B =_{df} \forall y (Rxy \supset (\models_y A \supset \models_y B)).$$

استلزام ربطی $A \rightarrow B$ نیز به همین صورت، اما با دو سور کلی، تفسیر می‌شود: « $A \rightarrow B$ در وضعیت الف صادق است» یعنی «در هر دو وضعیت ب و ج، که در ارتباط با الف باشند، اگر A در ب صادق باشد، آنگاه B در ج صادق است». به زبان صوری:

$$\models_x A \rightarrow B =_{df} \forall y \forall z (Rxyz \supset (\models_y A \supset \models_z B)).$$

از همه اینها نتیجه می‌شود که این اتهام به منطق کلاسیک که دو مفهوم «استنتاج» و «استلزام مادی» را یکی گرفته است از پایه باطل است. افزودن سور کلی به مفهوم استلزام مادی ما را به اقسام استلزام صوری و استنتاج می‌رساند. اگر منطق کلاسیک دو مفهوم «استنتاج» و «استلزام مادی» را با هم خلط کرده است آنگاه باید بگوییم که منطق استلزام اکید لوئیس و منطق‌های ربط نیز «شرطی اکید» و «شرطی ربطی» را با «استلزام مادی» خلط کرده‌اند. از آنجاکه این تالی باطل است، معلوم می‌شود که آن مقدم هم باطل است. اتفاقاً باید توجه کرد که اگر استلزام علی، معنایی، صوری، اکید، شهودی، ربطی، خلاف واقع و مانند آنها با استلزام مادی تفاوت دارند، به این علت نیست که در معنای آنها «استلزام مادی» نهفته نیست، بلکه به این علت است که در آنها معنای «سور کلی» گنجانده شده است. این سور کلی که در معنای این استلزام‌ها نهفته است سبب شده است این استلزام‌های قوی‌تر احکام ویژه و جذابی داشته باشند که استلزام مادی فاقد آنها است. در آغاز این بخش، به برخی از این احکام اشاره کردم.

در پایان اشاره می‌کنم که نویسنده کتاب از تفاوت استلزام مادی و استلزام صوری نتایجی گرفته است که صرفاً از آن تفاوت نمی‌شود نتیجه گرفت:

۳. پیش از این گفتیم اگر استدلال $A_1 \vdash A_2 \supset B$ درست باشد، نمی‌توان به درستی استدلال $A_1, A_2 \vdash B$ حکم کرد؛ برای نمونه، استدلال $P \vdash \sim P \supset Q$ استدلالی است درست اما استدلال $P, \sim P \vdash Q$ درست نیست. این مطلب را تنها بر پایه تفاوت استلزام صوری و استلزام مادی می‌توان توضیح داد. (ص ۵۶) (تأکید از من است)

به نظر می‌رسد که در اینجا صرف تفاوت استلزام مادی و صوری برای توضیح تفاوت دو استدلال $P \vdash \sim P \supset Q$ و $P, \sim P \vdash Q$ کفایت نمی‌کند زیرا این دو استدلال در

Fallabi

منطق‌های کلاسیک و شهودگرا تفاوت ندارند (هر دو معتبرند) و در منطق مینیمال هم تفاوت ندارند (هر دو نامعتبرند) اما در منطق ربط و نیز در نظام تابع‌ارزشی حاج‌حسینی تفاوت دارند (اما به دو دلیل متفاوت). با این تفصیل، در همه این منطق‌ها میان استلزام مادی و استلزام صوری تفاوت برقرار است و این نشان می‌دهد که صرف تفاوت میان استلزام مادی و صوری برای توضیح تفاوت این دو استدلال کفایت نمی‌کند و توضیحات بیشتری نیاز است، مانند شرط «ربط» در منطق ربط و شرط «ناسازگار نبودن مقدمه‌ها» در نظام تابع‌ارزشی حاج‌حسینی.

۳. تفکیک نظام‌های تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی

نویسنده کتاب در چندین موضع ادعا کرده است که منطق دانان غیرکلاسیک تمایزی میان بخش تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی نگذاشته‌اند:

نظریه بدیع تفکیک نظام تابع‌ارزشی منطق پایه گزاره‌ها از نظام غیرتابع‌ارزشی منطق پایه گزاره‌ها و تأسیس دو نظام تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی منطق پایه گزاره‌ها که جلد اول آن در این کتاب تقدیم می‌گردد، حاصل بیش از دو دهه مطالعه و تحقیق مستمر در حوزه منطق تطبیقی است که تنها با الهام از دیدگاه ابن‌سینا در تقسیم‌گزاره شرطی به انقاعی و لزومی تدوین و به رشته تحریر درآمده است... اشاره به این نکته نیز خالی از فایده نیست که دغدغه اولی نگارنده که منجر به تفکیک نظام‌های پایه تابع‌ارزشی از نظام‌های پایه غیرتابع‌ارزشی شد، پاسخ‌گویی به انتقاداتی بود که... (پیش‌گفتار، صفحه ص) (تأکیدها از من است)

نظام غیرتابع‌ارزشی منطق گزاره‌ها بر پایه شناسایی گزاره‌های مرکب غیرتابع‌ارزشی و تفکیک آن‌ها از گزاره‌های مرکب تابع‌ارزشی و نیز شناسایی انواع گزاره‌های غیرتابع‌ارزشی بر پایه شناخت ارتباط پدیده‌ها با یکدیگر در عالم خارج، شکل گرفته [است]. (ص ۲۶۰) (تأکید از من است)

نویسنده کتاب، براساس همین تفکیک بدیع، مدعی است که بسیاری از مشکلات منطق کلاسیک را حل کرده است (ص ۱۰۴-۱۳۸).

ولی قابل‌ذکر است که، در منطق ربط و بسیاری از منطق‌های دیگر، مبحث پاره‌های تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی با وضوح و تمایز بسیار بالا مطرح شده‌اند. مقصود از «پاره» یک نظام منطقی (fragment of a logic) عبارت است از مجموعه قضایا (و استنتاج‌های درست) آن منطق که صرفاً از یک یا برخی (و نه همه) ادات‌های زبان ساخته شده است.

فلاچی

برای مثال، اگر منطق ربط R را در نظر بگیریم، پاره استلزامی آن را با \rightarrow نشان می‌دهند که عبارت است از همه و تنها همه قضایا (و استدلال‌های درست) منطق R که فقط شامل ادات شرطی ربطی است. این پاره را با قاعده وضع مقدم و اصول موضوعه زیر به صورت کامل می‌توان استخراج کرد:

$A \rightarrow A$	همانی
$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	خودبخشی
$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	جایگشت
$((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$	تعدی (پسوند)

پاره استلزامی-نقضی R را با \sim, \rightarrow نشان می‌دهند که در واقع پاره غیرتابع ارزشی منطق R است (چون تلفیق و تفریق با شرطی ربطی و ادات ناقض قابل تعریف است). این پاره را با افزودن اصول زیر به پاره استلزامی R به طور کامل می‌توانیم استخراج کنیم:

$A \rightarrow \sim \sim A$	معرفی نقض مضاعف
$\sim \sim A \rightarrow A$	حذف نقض مضاعف
$(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$	عکس نقیض

همچنین، پاره مثبت منطق ربط R را با $\rightarrow, \wedge, \vee$ یا R^+ نشان می‌دهند که عبارت است از همه قضایای منطق ربط (و استدلال‌های درست آن) که فاقد ادات ناقض است. این پاره را با افزودن اصول زیر به پاره استلزامی R به طور کامل می‌توانیم استخراج کنیم:

$(A \& B) \rightarrow A$	حذف عاطف
$(A \& B) \rightarrow B$	حذف عاطف
$[(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \& C)]$	معرفی عاطف
$A \rightarrow (A \vee B)$	معرفی فاصل
$B \rightarrow (A \vee B)$	معرفی فاصل
$[(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow C]$	حذف فاصل
$(A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$	بخش پذیری

همچنین، پاره تابع ارزشی R را با $\rightarrow, \wedge, \vee, \sim$ یا R_0 نشان می‌دهند که عبارت است از همه

Fallabi

قضایای منطق ربط که فاقد ادات‌های غیرتابع‌ارزشی شرطی ربطی (و ترفیق و تفریق) است. این پاره همان قضایای منطق کلاسیک است.

همچنین، پاره استلزامی درجه اول R را با R_1 یا FDE (مخفف First Degree Entailment) نشان می‌دهند که عبارت است از همه استدلال‌های درست منطق ربط که مقدمه‌ها و نتایج آن تابع‌ارزشی هستند. اصول و قواعد این پاره را در بخش ۶ گزارش خواهم کرد.

اتفاقاً منطق‌دان معاصر، آرنون آرون (Arnon Avron)، در چندین مقاله اصرار دارد که ایراد منطق ربط این است که هرچند پاره‌های تابع‌ارزشی و غیرتابع‌ارزشی منطق ربط را جداگانه بحث کرده است، اما (متأسفانه به‌زعم آرون) اجازه داده است که این دو بخش با هم ترکیب شوند. به باور او، تمام اشکال‌ها به منطق ربط از درآمیختن این دو بخش حاصل می‌شود:

ربط‌گرایان تلاش کرده‌اند تا ملاحظات راجع به ربط را با ادات‌های صرفاً مصداقی بیامیزند. ما بر این باوریم که این نشدنی است. ادات‌های مصداقی به دلیل تعریفشان به هیچ ملاحظه مفهومی حساس نیستند، خواه به ماهیت «ربط» مربوط باشد یا مربوط نباشد. ازاین‌رو، هر تلاش برای تحمیل قیده‌های مفهومی بر آنها ناگزیر پیامدهای خلاف شهودی (مانند انکار قیاس انفصالی) خواهد داشت. همچنین به بی‌انسجامی گریزناپذیری در نظام‌های حاصل خواهد انجامید (چنان‌که می‌خواهیم در ادامه نشان دهیم) (Avron, 1992: 245)

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که تفکیک نظام‌های تابع‌ارزشی از غیرتابع‌ارزشی از ابداعات نویسنده کتاب نیست.

۴. فراقضیه استنتاج

«فراقضیه استنتاج» که معمولاً به‌سادگی «قضیه استنتاج» نامیده می‌شود این است که اگر یک استدلال درست به صورت زیر داشته باشیم:

$$A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B$$

می‌توانیم هریک از مقدمه‌های آن را به سمت نتیجه ببریم و با یک ادات شرطی به صورت زیر با آن نتیجه ترکیب کنیم:

فلاحي
 $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$

در این صورت، استدلال جدید هم برهان خواهد داشت.
 این فراقضیه اصلاً بدیهی نیست و حتی برای برخی نظام‌های منطقی برقرار هم نیست و برای نظام‌هایی هم که برقرار است اثبات این فراقضیه چندان آسان نیست.
 اگر فراقضیه استنتاج برای یک منطق اثبات شود، آنگاه با به‌کاربردن متوالی آن بر استدلال درست n مقدمه‌ای

$A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B$

اثبات می‌شود که فرمول شرطی تودرتوی زیر در نظام مورد نظر قضیه است (به این معنی که برهان دارد):

$\vdash A_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B))\dots)$

قضیه بودن این فرمول شرطی تودرتو با به‌کاربردن چندین و چندین باره «فراقضیه استنتاج» به دست می‌آید.

۴-۱. خلط قضیه و فراقضیه استنتاج

نویسنده کتاب در مواضع متعدد فرمول شرطی تودرتوی اخیر را، که یک فرمول در زبان موضوعی است و نه در فرازبان، «قضیه استنتاج» می‌نامد و از کاربرد متعارف آن در کتاب‌های منطقی دور می‌شود:

[در نظام تابع‌ارزشی،] قضیه حاصل را نباید قضیه استنتاج بنامیم. (ص ۵۶)
 ۴. در نظام تابع‌ارزشی گفتیم قضیه وابسته به هر استدلال درست را، ... نباید قضیه استنتاج بنامیم. در این نظام اما قضیه وابسته به استدلال‌های تک مقدمه‌ای را، ... می‌توانیم قضیه استنتاج بنامیم؛ هر چند امکانات این نظام، ... اجازه نمی‌دهد از همه استدلال‌های درست، قضیه استنتاج بسازیم. (ص ۱۷۳-۱۷۴) (تأکیدها از من است)

اگر خواننده به این نکته توجه نکند باعث سردرگمی اش می‌شود، چنان‌که برای نگارنده این مقاله تا مدت‌ها چنین بود. شایسته است که نویسنده کتاب در ویرایش‌های بعدی این اصطلاح جاافتاده را به همان معنایی به کار برد که در کتاب‌ها رایج است.

Fallabi

۴-۲. قضیه استنتاج و رابطه عطفی میان مقدمات

نویسنده کتاب بارها تأکید کرده است که رابطه میان مقدمات را «عطف مصداقی» می‌گیرد (از جمله ص ۱۷۲-۱۷۳ و ۲۵۳) و، از این رو، (فرا)قضیه استنتاج در بسیاری از موارد (به‌طور کلی در همه استدلال‌هایی که بیش از یک مقدمه دارند) از دست می‌رود (ص ۵۴، ۷۱، ۱۹۵، ۱۹۸، ۲۶۳، ۲۶۵، ۲۶۷-۲۶۸، ۲۷۹، ۲۹۱-۲۹۲) و، از این رو، «استلزام صوری» با بیش از یک مقدمه در نظام غیرتابع‌ارزشی بیان‌ناپذیر و غیرقابل‌صورت‌بندی است (ص ۲۵۳).

البته این سخن در تعارض است با قاعده «دلیل شرطی» که مقید به سطرهای تک مقدمه‌ای نیست. توضیح اینکه، قاعده دلیل شرطی به ما می‌گوید که اگر فرمول B را از فرمول A (با یا بدون فرمول‌های دیگر) به دست آوریم، می‌توانیم فرمول $A \rightarrow B$ را (به‌عنوان قضیه یا مبتنی بر آن فرمول‌های دیگر) به دست آوریم. اکنون اگر فراقضیه استنتاج برای استدلال‌هایی که بیش از یک مقدمه دارند غلط است، بنابراین، استنتاج فرمول $A \rightarrow B$ که بر فرمول‌های دیگر مبتنی است هم غلط خواهد بود. نادرستی فراقضیه استنتاج تنها با این فرض برقرار می‌شود که در قاعده «دلیل شرطی» تأکید کنیم که اگر فرمول B را تنها از فرمول A (بدون فرمول‌های دیگر) به دست آوریم، می‌توانیم فرمول $A \rightarrow B$ را (به‌عنوان قضیه) به دست آوریم. نویسنده کتاب چنین شرطی را برای «دلیل شرطی» بیان نکرده است.

همچنین اگر رابطه مقدمات را عطف مصداقی در نظر بگیریم با شرط «نرمال بودن» که حاج حسینی به شرایط برهان افزوده است در تعارض است. شرط نرمال بودن برای این است که یک فرمول که در یک سطر از برهان بر مجموعه‌ای از فرض‌ها استوار است در یک سطر متأخر بر فرض‌های بیشتری استوار نشود. اما اگر قرار است مجموعه فرض‌ها با هم رابطه عطفی داشته باشند، چه ایراد دارد که بر تعداد فرض‌ها افزوده شود؟ شاید از این اشکال بتوان چنین جواب داد که شرط «نرمال بودن» شرط برهان نیست بلکه شرط قاعده‌های دلیل شرطی و برهان خلف است. اما حاج حسینی چنین شرطی را در بیان این قاعده‌ها طرح نکرده است. شاید اگر شرط «نرمال بودن» صراحتاً به قاعده‌های دلیل شرطی و برهان خلف منحصر می‌شد، مقصود نویسنده کتاب بهتر فهمیده می‌شد.

۴-۳. دو گونه رابطه عطفی میان مقدمات

به نظر می‌رسد اگر نویسنده کتاب، مانند منطق ربط، رابطه مقدمه‌ها را «عطف مفهومی»

فلاحي

و «تلفیق» در نظر می‌گرفت، هم دشواره بطلان فراقضیه استنتاج پیش نمی‌آمد و هم قاعده دلیل شرطی درست از آب در می‌آمد و بی‌نیاز از مقیدشدن به سطرهای های تک مقدمه‌ای می‌شد.

در برخی از کتاب‌های منطق ربط، برای استفاده از مزیت‌های هر دو عطف مصداقی و مفهومی در میان مقدمات، دو نماد برای ترکیب مقدمات در استدلال به کار برده‌اند: کاما (،) برای عطف مصداقی و نقطه‌کاما (؛) برای عطف مفهومی^۱.

به گمان من، اگر نویسنده کتاب، در نظام تابع‌ارزشی، رابطه مقدمات را به معنای عطف مصداقی و، در نظام غیرتابع‌ارزشی، به معنای عطف مفهومی می‌گرفت و سپس، در گسترش آنها، هر دو نوع رابطه را باهم به کار می‌برد، یکدستی نظام‌ها بیشتر مراعات می‌شد.

۵. مقایسه نظام تابع‌ارزشی حاج‌حسینی با منطق ربط FDE

اندرسون و بلنپ در سال ۱۹۷۵ نظامی استنتاجی برای فرمول‌های تابع‌ارزشی طراحی کرده‌اند که روابط استنتاجی ربطی میان این فرمول‌ها را به نمایش می‌گذارد (Anderson and Belnap, 1975, 158-159). این نظام از آنجاکه در مورد استنتاج‌های غیرتودرتو است، آن را «استنتاج درجه‌اول» می‌نامند (FDE: First Degree Entailment). اصول و قواعد این نظام اینها هستند:

۱. اصول موضوعه FDE:

$\&E$	$(A \& B) \vdash A$, $(A \& B) \vdash B$	حذف عطف
$\vee I$	$A \vdash (A \vee B)$, $B \vdash (A \vee B)$	معرفی فاصل
Dis	$(A \& (B \vee C)) \vdash ((A \& B) \vee (A \& C))$	پخش‌پذیری
DNI	$A \vdash \sim \sim A$	معرفی نقض مضاعف
DNE	$\sim \sim A \vdash A$	حذف نقض مضاعف

۲. قواعد FDE:

B'	$A \vdash B, B \vdash C \Rightarrow A \vdash C$	قیاس شرطی
&I	$A \vdash B, A \vdash C \Rightarrow A \vdash (B \& C)$	معرفی عاطف
$\vee E$	$A \vdash C, B \vdash C \Rightarrow (A \vee B) \vdash C$	حذف فاصل
Cont	$A \vdash B \Rightarrow \sim B \vdash \sim A$	عکس نقیض

چنان که دیده می‌شود، قاعده وضع مقدم و اصل موضوع همانی و اصل موضوع‌های شرطی تودرتو در میان قواعد و اصول این نظام جایی ندارند (هرچند اصل موضوع همانی به‌عنوان قضیه قابل اثبات است).

ژوزپ ماریا فونت (Font, 1997: 423-424) این منطق را به‌صورت قواعد «اصل موضوعی» زیر ارائه کرده است (Font, 1997: 423-424) که در اینجا خطوط افقی نماد «استنتاج» هستند:

(R1) $\frac{p \wedge q}{p}$	(R2) $\frac{p \wedge q}{q}$	(R3) $\frac{p}{p \wedge q}$
(R4) $\frac{p}{p \vee q}$	(R5) $\frac{p \vee q}{q \vee p}$	(R6) $\frac{p \vee p}{p}$
(R7) $\frac{p \vee (q \vee r)}{(p \vee q) \vee r}$	(R8) $\frac{p \vee (q \wedge r)}{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}$	(R9) $\frac{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}{p \vee (q \wedge r)}$
(R10) $\frac{p \vee r}{\neg \neg p \vee r}$	(R12) $\frac{\neg(p \vee q) \vee r}{(\neg p \wedge \neg q) \vee r}$	(R14) $\frac{\neg(p \wedge q) \vee r}{(\neg p \vee \neg q) \vee r}$
(R11) $\frac{\neg \neg p \vee r}{p \vee r}$	(R13) $\frac{(\neg p \wedge \neg q) \vee r}{\neg(p \vee q) \vee r}$	(R15) $\frac{(\neg p \vee \neg q) \vee r}{\neg(p \wedge q) \vee r}$

گراهام پریست (Priest, 2002: 309) نیز نظام استنتاج طبیعی زیر را برای FDE ارائه داده است:

$\frac{A \quad B}{A \wedge B} (\wedge I)$	$\frac{A \wedge B}{A} (\wedge E)$	$\frac{A \wedge B}{B} (\wedge E)$
$\frac{A}{A \vee B} (\vee I)$	$\frac{B}{A \vee B} (\vee I)$	$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ [B] \end{array}}{C} (\vee E)$
$\frac{\sim \sim A}{A} (\sim \sim)$	$\frac{\sim(A \wedge B)}{\sim A \vee \sim B} (\sim \wedge)$	$\frac{\sim(A \vee B)}{\sim A \wedge \sim B} (\sim \vee)$

فلاحي

در این صورت‌بندی، دو خط افقی موازی به معنای استنتاج دوطرفه است. اوموری و وانسینگ نیز هر دو صورت‌بندی را گزارش کرده‌اند (Omori and Wansing, 2017: 1025-1026).

قیاس فصلی (= قیاس انفصالی) و قاعده «از تناقض» (EFQ) در هیچ‌کدام از این صورت‌بندی‌ها قابل اثبات نیست. از دیدگاه حاج‌حسینی، ایراد این منطق باید در اثبات‌ناپذیری قیاس فصلی (= قیاس انفصالی) باشد و حُسن آن در اثبات‌ناپذیری قاعده «از تناقض».

۶. مقایسه با منطق‌های نیو تَنت^۱

با افزودن قیاس فصلی (= قیاس انفصالی) به هر یک از صورت‌بندی‌های فونت و پریست از منطق FDE، بدون قاعده «از تناقض» (و بدون افزودن قاعده «تعدی استنتاج» یا «قیاس شرطی») به منطق کلاسیک ربطی نیو تَنت⁺، \mathbb{C}^+ می‌رسیم که در سال ۱۹۷۹ معرفی و در سال‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۸۴ تکمیل شد (Tennant, 1978; 1980; 1984). (صورت‌بندی خود اندرسون و بلنپ به دلیل داشتن قاعده «قیاس شرطی» مقبول تَنت نیست).

تَنت منطق ربط دیگری نیز دارد به نام منطق ربط شهودگرا، \mathbb{C} ، که نخستین بار در ۱۹۸۷ معرفی (Tennant, 1987) و بعدها کامل و کامل‌تر کرد، تا اینکه آن را، در سال ۲۰۱۴، «منطق هسته‌ای» (Core Logic) نامید (Tennant 2014a, 2014b) و مجموعه همه کارهایش را در این زمینه در سال ۲۰۱۷ به صورت یک کتاب منتشر نمود (Tennant, 2017).

حاج‌حسینی نظام تابع ارزشی خود را با منطق ربط شهودگرا، \mathbb{C} ، مقایسه کرده و «کمترین قرابتی» میان آن دو ندیده است (ص ۱۴۲)، در حالی که می‌بایست با منطق ربط کلاسیک، \mathbb{C}^+ ، مقایسه می‌کرد تا میان آن دو قرابت‌های بسیاری بیابد.

یک ایراد که حاج‌حسینی به تَنت گرفته این است که قضیه زیر در منطق هسته‌ای \mathbb{C} قابل اثبات است، در حالی که در نظام تابع ارزشی حاج‌حسینی قابل اثبات نیست:

$$\vdash (A \wedge \sim A) \equiv (B \wedge \sim B)$$

برهان این هم‌ارزی را ویدال-روسه در نظام استنتاج طبیعی منطق هسته‌ای آورده (Vidal-

۱. در سایت زیر نام Neil Tennant به صورت «نیو تَنت» تلفظ می‌شود:

<https://www.howtopronounce.com/neil-tennant>.

Fallabi

است (Tennant 2018 p. 558-560). (Rosset, 2017: 245) و ایراد دیگری بر تننت وارد ساخته و تننت نیز به او پاسخ داده

اما در پاسخ به ایراد حاج حسینی باید گفت که نماد \equiv در قضیه یادشده تابع ارزشی است و همین قضیه در نظام تابع ارزشی حاج حسینی نیز قابل اثبات است. اتفاقاً اگر هم ارزی را مفهومی در نظر بگیریم، می بینیم که هم ارزی زیر در منطق هسته ای تننت قابل اثبات نیست:

$$A \wedge \sim A \dashv\vdash B \wedge \sim B$$

بنابراین، از این جهت تفاوتی میان نظام های تننت و حاج حسینی برقرار نیست.

۶-۱. مقایسه منطق کلاسیک با منطق های FDE و نیو تننت

در پایان، افزودن هر یک از دو قاعده «از تناقض» یا «تعدی استنتاج» به هر یک از منطق های FDE و نیو تننت ما را به منطق کلاسیک می رساند. بنابراین، منطق \mathbb{C}^+ میان منطق FDE و منطق کلاسیک قرار دارد.

۶-۲. مقایسه منطق حاج حسینی با منطق های نیو تننت

اکنون سؤال این است که نظام تابع ارزشی حاج حسینی دقیقاً چه نسبتی با منطق های \mathbb{C}^+ و FDE دارد. انتظار این است که ایشان در ویراست سوم کتاب این نسبت ها را بیان کنند. تننت تصریح کرده است که قاعده «تعدی استنتاج» در نظام او فقط در دو مورد نقض می شود: وقتی که مقدمات ناسازگارند یا نتیجه صدق منطقی است. به نظر می رسد که این قاعده در نظام های حاج حسینی نیز فقط در دو حالت نقض می شود: وقتی که هم مقدمات ناسازگارند و هم نتیجه، یا هم مقدمات صدق منطقی هستند و هم نتیجه. به عبارت دیگر، اگر مقدمات و نتیجه معمولی (= ممکن الصدق) (یعنی نه ناسازگار و نه صدق منطقی) باشند، در این صورت، «تعدی استنتاج» برقرار است.

اگر این سخن نادرست است، مناسب است که ایشان اصلاح کنند و اگر درست است، بگویند که موارد نقض در حالات یادشده دقیقاً کدامها هستند. به این معنی که معیاری مکانیکی و ساده برای تعیین موارد نقض قاعده «تعدی استنتاج» (اگر وجود دارد) ارائه دهند.

اگر سخن بالا درست باشد، آنگاه انتقادی طرح می شود و آن اینکه چرا قاعده «تعدی استنتاج» میان گزاره های معمولی برقرار است اما میان صدق های منطقی، که بسیار

فلاحي

ارزشمندتر هستند، برقرار نیست؟ به عبارت دیگر، چرا تبعیض وجود دارد؟ و چرا قواعد منطقی برای اغیار معتبر است و برای احباب نقض می‌شود؟ با استعاره از زبان شعر، «چرا توبه‌فرمایان خود توبه کمتر می‌کنند؟» یا چرا «واعظان کاین جلوه در محراب و منبر می‌کنند، چون به خلوت می‌روند آن کار دیگر می‌کنند». اگر قواعد منطقی خوب است، چرا صدق‌های منطقی از آن سرپیچی می‌کنند؟ تمایز میان صدق‌های منطقی و گزاره‌های معمولی دلیلی قانع‌کننده می‌طلبد. به نظر می‌رسد که این انتقاد هم‌زمان به تننت و حاج حسینی هر دو وارد است.

۷. پاره استلزام اکید منطق موجّهات

اگر استلزام اکید را در منطق‌های موجّهات رایج مانند K, D, T, B, S1, S2, S3, S4, S5، به صورت زیر تعریف کنیم:

$$A \rightarrow B = df \quad (A \supset B)$$

در این صورت، در این منطق‌ها برخی قضایا ثابت خواهند شد که فقط نماد استلزام اکید دارند مانند قضیه

$$A \rightarrow A$$

در منطق K، قضیه‌های زیر نیز اثبات می‌شوند:

$$A \rightarrow (A \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow B)$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

ولی اصل زیر اثبات نمی‌شود:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

همچنین، قضیه‌های زیر در منطق K اثبات می‌شوند:

$$((A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C))$$

$$((A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))$$

$$((A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow C))$$

Fallabi

$$((A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow C))$$

در منطق T نیز قضیه‌های زیر اثبات می‌شوند:

$$((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B,$$

$$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

مجموعه همه قضایای منطق موجهاتی که تنها ادات‌های به‌کاررفته در آن استلزام اکید باشد «پاره استلزام اکید» آن منطق می‌نامند. یان هکینگ در سال ۱۹۶۳ پاره استلزامی برخی از منطق‌های موجهات را به‌صورت کامل، به‌کمک قاعده وضع مقدم و اصول موضوعه، به‌صورت زیر ارائه داده است:

برای منطق S3:

$$A \rightarrow A$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

برای منطق S4:

$$A \rightarrow A$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow B))$$

برای منطق S5:

$$A \rightarrow A$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$[((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow (A \rightarrow B)$$

اکنون پرسش این است که از میان این احکام (اگر به‌جای نماد استلزام اکید با نماد شرطی

فلاحي

غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی نوشته شوند)، کدام‌ها در نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی قابل‌اثبات و کدام‌ها غیرقابل‌اثبات است و چرا؟ و کدام‌ها در سمانتیک غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی معتبر و کدام‌ها نامعتبر است و چرا؟ درباره این در بخش بعدی سخن می‌گویم.

۷-۱. پاره استلزام اکید نظام غیرتابع‌ارزشی حاج‌حسینی

به نظر می‌رسد که می‌توانیم یکی از منطق‌های ربط، مانند R, E, T, B یا منطقی بسیار ضعیف‌تر از همه اینها که مورد قبول نویسنده کتاب، به‌عنوان منطق پایه برای نظام غیرتابع‌ارزشی او، باشد را با قاعده حاج‌حسینی تقویت کنیم و بدون اینکه شرایط «درستی» حاج‌حسینی را به آن بیفزاییم، نظام حاصل را «منطق پایه ربطی حاج‌حسینی» بنامیم. در این صورت، اگر نماد \rightarrow را برای شرطی ربطی و نماد \Rightarrow را برای استلزام درست حاج‌حسینی در نظر بگیریم، می‌توانیم شرطی حاج‌حسینی را در آن منطق پایه ربطی به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$A \Rightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \wedge (\sim \Diamond A \supset \sim \Diamond B) \wedge (\Box B \supset \Box A)$$

یا به‌صورت هم‌ارز و ساده‌تر زیر:

$$A \Rightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \wedge (\Diamond A \equiv \Diamond B) \wedge (\Box A \equiv \Box B)$$

در این صورت، به نظر می‌رسد که تعریف «درستی» در مفهوم «استلزام» و «استنتاج» حاج‌حسینی را به‌درستی به دست داده‌ایم. از آنجاکه در منطق‌های ربط لزوماً ادات‌هایی برای ضرورت یا امکان نداریم، ناگزیر آنها را با تلفیق و تفریق به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \Rightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \wedge (\sim (A \circ A) \supset \sim (B \circ B)) \wedge (B + B \supset A + A)$$

با این تعریف، برخی قضایا ثابت خواهند شد که فقط نماد استلزام حاج‌حسینی را دارند، مانند قضیه

$$A \Rightarrow A$$

چون این فرمول، بنابر تعریف، به‌صورت زیر بسط می‌یابد:

$$A \Rightarrow A =_{df} (A \rightarrow A) \wedge (\sim (A \circ A) \supset \sim (A \circ A)) \wedge (A + A \supset A + A)$$

که سمت راست تعریف قضیه هر منطق ربط است.

اکنون مانند کاری که هکینگ برای منطق‌های موجهات انجام داد را می‌توان برای منطق

.....
Fallabi

ربط پایه حاج حسینی تکرار کرد، یعنی پاره «استلزام حاج حسینی» آن منطق را می‌توان استخراج نمود. البته از آنجاکه من نمی‌دانم حاج حسینی کدام منطق ربط (هرچند ضعیف) را پایه و مبنای نظام غیرتابع‌ارزشی خود می‌داند، راهی برای استخراج پاره «استلزام حاج حسینی» آن ندارم. بنابراین، اگر ایشان ابتدا منطق ربط موردقبولش را بدون تعریف «درستی» به دست دهد و سپس تعریف «درستی» را به آن بیفزاید، احتمالاً بتوان دید که پاره استنتاجی منطق او پاره «استلزام حاج حسینی» آن منطق ربط پایه خواهد بود.

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله موارد زیر را نشان دادم:

۱. برخلاف ادعای حاج حسینی، در منطق کلاسیک، میان استلزام مادی و استنتاج مرز و تمایز بسیار مهمی وجود دارد و آن وجود «سور کلی» در مفهوم «استنتاج» است که در معنای استلزام مادی نیست. در واقع، «استنتاج» در منطق کلاسیک برابر است با استلزام مادی به‌همراه مفهوم «همه مدله‌ها» یا «همه نمونه‌جانشین‌ها».
۲. برخلاف نظر حاج حسینی، تفکیک نظام‌های تابع‌ارزشی از غیرتابع‌ارزشی از ابداعات ایشان نیست و در ادبیات منطق ربط امری بسیار رایج و متعارف است. در واقع، پاره‌های درجه‌صفر و درجه‌یک منطق‌های ربط نظام‌های تابع‌ارزشی در معنای موردنظر حاج حسینی هستند و پاره‌های استلزامی-تقضی منطق‌های ربط نظام‌های غیر تابع‌ارزشی در معنای موردنظر حاج حسینی‌اند.
۳. در پایان نظام‌های حاج حسینی را با منطق FDE و نیز منطق ربط کلاسیک نیوتننت و نیز پاره‌های استلزام اکیدی برخی منطق‌های موجهات مقایسه کردم ولی به دلیل ابهام‌های بسیار در حدودمرزهای نظام‌های حاج حسینی از این کار پرهیز کردم و امیدوارم نویسنده کتاب این مقایسه‌ها را در آثار بعدی خویش جامه عمل بپوشاند.

فلاحی

منابع

- حاج حسینی، مرتضی (۱۳۹۶)، طرحی نواز اصول و مبانی منطق و دو نظام منطقی پایه غیرکلاسیک، جلد اول: منطق پایه گزاره‌ها، اصفهان، انتشارات دانشگاه اصفهان.
- حاج حسینی، مرتضی (۱۴۰۱)، طرحی نواز اصول و مبانی منطق با معرفی دو نظام منطقی پایه غیرکلاسیک، جلد اول: منطق پایه گزاره‌ها، اصفهان، انتشارات دانشگاه اصفهان.
- رید، استیون (۱۳۸۵)، فلسفه منطق ربط، ترجمه اسدالله فلاحی، قم، دانشگاه مفید.
- فلاحی، اسدالله، (۱۴۰۲ الف)، «نظام تابع‌ارزشی حاج حسینی»، آینه معرفت ۲۳، ش. ۱، صص ۱۲-۴۳.
- فلاحی، اسدالله، (۱۴۰۲ ب)، «نظام غیرتابع‌ارزشی حاج حسینی»، منطق‌پژوهی ۱۴، ش. ۱، پذیرفته شده.
- فلاحی، اسدالله، (۱۴۰۲ ج)، «سمانتیک تابع‌ارزشی حاج حسینی»، فلسفه و کلام اسلامی ۵۶، ش. ۱، پذیرفته شده.
- فلاحی، اسدالله، (۱۴۰۲ د)، «سمانتیک غیرتابع‌ارزشی حاج حسینی»، فلسفه ۲۱، ش. ۱، پذیرفته شده.

Anderson, A. R., and N. Belnap, 1962 'The Pure Calculus of Entailment', *The Journal of Symbolic Logic*, 27, pp. 19-52.

Anderson, A. R., and N. Belnap, 1975, *Entailment: the Logic of Relevance and Necessity*, vol. I, Princeton, NJ.

Avron, A. (1992), "Whither relevance logic?", *Journal of Philosophical Logic*, 21, pp. 243-281.

Font, J. M. (1997), "Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices", *Logic Journal of IGPL*, vol. 5, issue 3, pp. 413-440.

Omori, H., and H Wansing (2017), "40 years of FDE: An Introductory Overview", *Studia Logica*, vol. 105, issue 6, pp. 1021-1049.

Priest, G. (2002), "Paraconsistent Logic", in D. Gabbay, and F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 6, 2 edn., Kluwer Academic Publishers, pp. 287-393.

Read, Stephen (1988), *Relevant Logic*. Oxford, Basil Blackwell.

Russell, B. (1903), *The Principles of Mathematics*, W. W. Norton Company, Inc. Publishers, New York.

- Russell, B. (2010), *The Principles of Mathematics*, Routledge, London and New York.
- Smiley, T. J. (1958), "Entailment and deducibility", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 59: 233-254.
- Tennant, N. (1979), "Entailment and Proofs", *Proceedings of the Aristotelian Society*, LXXIX: 167-189.
- Tennant, N. (1980), "A Proof-theoretic Approach to Entailment", *Journal of Philosophical Logic*, 9: 185-209.
- Tennant, N. (1984), "Perfect Validity, Entailment and Paraconsistency", *Studia Logica*, XLIII: 179-198.
- Tennant, N. (1987), "Natural Deduction and Sequent Calculus for Intuitionistic Relevant Logic", *Journal of Symbolic Logic*, 52: 665-680.
- Tennant, N. (2014a), "Logic, mathematics, and the a priori, Part I: A Problem for Realism," *Philosophia Mathematica*, 22: pp. 308-320.
- Tennant, N. (2014b), "Logic, mathematics, and the a priori, II: Core logic as analytic, and as the basis for natural logicism," *Philosophia Mathematica* (3), vol. 22 (2014), pp. 321-44.
- Tennant, N. (2017), *Core Logic*, Oxford, Oxford University Press.
- Tennant, N. (2018), "On some mistaken beliefs about Core Logic and some mistaken core beliefs about logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 59, pp. 559-558.
- Vidal-Rosset, J. (2017), "Why intuitionistic relevant logic cannot be a core logic," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 58, pp. 241-248.