*Publisher: Shahid Beheshti University*
*Journal of Financial Management Perspective*
**2022, Vol. 12, No.38**
PP: 35-49
DOI: https://doi.org/ 10.52547/JFMP.12.38.35


P-ISSN: 2645-4637
E-ISSN: 2645-4645

# Spread Option Pricing Based on Two Jump-diffusion Libor Interest Rate Models

**Reyhane Mohamadinejad***, **Abdolsadeh Neisy****

Research Paper

## Abstract

Nowadays, financial derivatives play an important role in the development of financial markets and risk management. Financial derivatives markets are not only a tool for risk management but also a secondary market to attract small capital for implementing large projects. Countries with extremely volatile financial markets need some novel financial risk management tools. In this paper, the spread option is used as a tool for investment and risk management. First, we obtain a model by using stochastic differential equations and partial differential equations. Then the model derived from a stochastic differential equation with a jump term is transformed into a risk-free integral partial differential equation which represents the spread option price on the Libor interest rates since the model does not have a closed-form solution or analytical solution, the solution is estimated at discrete points by using the alternating direction implicit (ADI) method. The stability of the method is also proved. In the next step, the pricing model is implemented in MATLAB software and the results are illustrated. Finally, it is concluded that the ADI method is an efficient and appropriate method that solves the problems in pricing models caused by jumps.

**Keywords: Stock Market; Financial Modeling; Option Pricing.**

---

Received: 2022. March. 8, Accepted: 2022. July. 20.
*Lecturer, Department of Mathematics, University of Guilan, Rasht, Iran (Corresponding Author).
E-Mail: r.m.math81@gmail.com
**Prof., Department of Mathematics, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran.
E-Mail: a_neisy@atu.ac.ir

**ناشر: دانشگاه شهیدبهشتی**
**نشریه چشم‌انداز مدیریت مالی**
۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۳۸
ص‌ص. ۳۵- ۴۹

شاپای چاپی: ۴۶۳۷- ۲۶۴۵
شاپای الکترونیکی: ۴۶۴۵- ۲۶۴۵

# قیمت‌گذاری اختیار گستره بر پایه مدل‌های نرخ بهره لایبور پرش- انتشار

**ریحانه محمدی‌نژاد*، عبدالساده نیسی****

مقاله پژوهشی

## چکیده

امروزه، مشتقات مالی نقش بسزایی در توسعه بازارهای مالی و کنترل ریسک دارند. بازارهای حاصل از مشتقات مالی، نه تنها ابزاری برای کنترل ریسک می‌باشند بلکه خود به عنوان یک بازار دوم، برای جذب سرمایه‌های کوچک جهت اجرای پروژه‌های بزرگ می‌باشد. کشورهایی که بازارهای مالی آن‌ها دچار نوسانات شدید قیمت می‌باشند، نیازمند ابزار مالی نوین کنترل ریسک هستند. در این مقاله، از اختیارات گستره به عنوان یک ابزار سرمایه‌گذاری و کنترل ریسک استفاده شده است که در ابتدا با بیان مفاهیم این ابزار نوین مدلی با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی و جزئی ساخته شده است. مدل حاصل از یک معادله دیفرانسیل تصادفی با جمله پرش به یک معادله دیفرانسیل جزئی انتگرالی بدون ریسک تبدیل شده است، که بیانگر قیمت اختیار گستره روی نرخ‌های بهره لایبور می‌باشد. از آنجایی‌که مدل حاصل دارای جواب بسته یا جواب تحلیلی نبوده، در این مقاله، با استفاده از روش جهت متناوب ضمنی (ADI)، جواب در نقاط گسسته تخمین زده شده است که علاوه بر مطالعه روش، به بررسی و اثبات پایداری روش نیز پرداخته شده است. در مرحله بعد، مدل قیمت‌گذاری با استفاده از نرم‌افزار متلب پیاده‌سازی و نتایج حاصل از آن به تصویر کشیده می‌شود. در نهایت نتیجه‌گیری می‌شود که روش ضمنی جهت متناوب یک روش کارا و مناسب است که مشکلات موجود در مدل‌های قیمت‌گذاری که توسط پرش‌ها ایجاد می‌شود را برطرف می‌کند.

**کلیدواژه‌ها: بازار سهام؛ مدل‌سازی مالی؛ قیمت‌گذاری اختیار.**

---

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۷، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۲۹.

* دکتری تخصصی ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران (نویسنده مسئول).
E-Mail: R.m.math81@gmail.com

** استاد، گروه ریاضی، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران.
E-Mail: a_neisy@atu.ac.ir

### ۱. مقدمه

اوراق اختیار معامله به عنوان گونه‌ای از اوراق مشتقه در کنار اوراق مالکیت (مانند سهام) و اوراق بدهی، از ابزارهای اصلی مورد معامله در بازارهای مالی محسوب می‌گردد. اوراق اختیار معامله خود دارای انواع مختلفی مانند اوراق اختیار معامله اروپایی، امریکایی و ... است. اوراق اختیار معامله گستره یکی از انواع اوراق اختیار معامله است که عایدات آن به اختلاف دو قیمت وابسته است. بدین ترتیب، اختیار گستره، نوعی اختیار است که ارزش آن از اختلاف قیمت دو یا چند دارایی پایه به دست می‌آید. حال این دارایی‌های پایه می‌توانند کالاهای کاملاً متفاوتی بوده و یا کالاهای یکسانی در دو مکان متفاوت[۱]، کیفیت متفاوت[۲] یا دو افق زمانی[۳] متفاوت باشند.

این نوع از اختیارات در سهام، ارز و اوراق قرضه استفاده شده و برخی از آن‌ها نیز در بورس‌های بزرگ دنیا، معامله می‌شوند. برای نمونه از مهم‌ترین انواع اختیارات گستره می‌توان به گستره‌هایی اشاره کرد که وابسته به نرخ‌های سود مانند لایبور، بازارهای نفت، سویا و یا برق هستند.

ارزش اوراق اختیار معامله گستره به مانند دیگر اوراق مشتقه تابع رفتار قیمت دارایی (های) پایه است. لذا مفروضات در نظر گرفته شده در مورد این رفتار بر ارزش ورقه اختیار موثر خواهد بود. مدل‌های پرش از رایج‌ترین مدل‌های مورد استفاده جهت تشریح این رفتار هستند زیرا به نظر می‌رسد که عوامل بنیادی، اقتصادی، سیاسی و حتی طبیعی (مانند زلزله، سیل، طوفان و غیره) بر روی قیمت اختیارها یا دارایی‌های پایه تاثیر به‌سزایی داشته و باعث ایجاد گسستگی در قیمت دارایی‌ها می‌شوند. به عبارتی با توجه به تاثیر زیاد این عوامل، نمی‌توان خاصیت پرش-انتشار را در مدل‌سازی مالی نادیده گرفت زیرا منجر به نتایج نادرستی در قیمت‌گذاری‌ها می‌شود. بر همین اساس با مدنظر قرار دادن خاصیت پرش در دارایی پایه و درنظرگرفتن نرخ بهره لایبور به عنوان یکی از دارایی‌های پایه رایج مورد استفاده در این نوع از اوراق اختیار معامله، در این مقاله، یک استراتژی مناسب و کارآمد ارائه شده است تا نحوه ارزش‌گذاری اوراق اختیار گستره بر روی این نرخ استخراج گردد.

نرخ بهره لایبور، مبنایی برای تعیین نرخ بهره شرکت‌های مختلف است، بنابراین به همان اندازه که موسسات مالی از آن تأثیر می‌پذیرند، برای مصرف‌کنندگان نیز تعیین کننده و اثرگذار است زیرا نرخ بهره محصولات اعتباری مختلف از جمله کارت‌های اعتباری، وام خودرو و غیره، با نرخ بهره بین بانکی تغییر می‌کند. نرخ بهره لایبور به دلیل هزینه‌های کمتر وام برای مصرف‌کنندگان، جذاب ولی دارای معایبی نیز است و بازدهی برخی از اوراق بهادار را تحت تأثیر

[1] Location spread
[2] Quality spread
[3] Calendar spread

قرار می‌دهد. برخی از صندوق‌های سرمایه‌گذاری ممکن است بر اساس این نرخ عمل کنند، بنابراین ممکن است بازده آن‌ها با نوسان لایبور، کاهش یابد. نرخ بهره لایبور در سراسر جهان در طیف گسترده‌ای از محصولات مالی، مانند محصولات استاندارد بین بانکی همانند توافق‌نامه‌های نرخ بهره، مبادله نرخ بهره، معاملات آتی نرخ بهره، اختیارها و سواپ‌ها و یا محصولات تجاری مانند گواهی نرخ سپرده و اسکناس یا محصولات مرتبط با وام‌های مصرفی مانند وام‌های رهنی فردی و وام‌های دانشجویی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

لایبور همچنین به عنوان معیار سنجش انتظار بازار برای نرخ توافق شده توسط بانک‌های مرکزی استفاده می‌شود. منطقی است که یک بانک بزرگ در لندن با نرخ شناور مرتبط با لایبور وام بدهد، زیرا بیشتر وام‌های آن متعلق به سایر بانک‌های لندن خواهد بود، بنابراین ریسک دارایی‌ها (وام‌های داده‌شده) را با ریسک بدهی‌ها (وام‌های دریافتی از سایر بانک‌ها) مطابقت می‌دهد. در واقع، منبع اصلی سرمایه یک بانک، سپرده‌های دریافتی از مشتریان خود است نه وام‌های دریافتی از سایر بانک‌ها. به بیان ساده‌تر، بانک‌ها با پذیرش سپرده‌ها با یک نرخ و وام با نرخ بالاتر، درآمد کسب می‌کنند. اگر هزینه تأمین مالی بانک افزایش یابد، نرخ بهره لایبور نیز با ثابت ماندن نرخ بهره بازار و به دلیل ایجاد برخی تغییرات در مقررات دولت و نیاز به نقدینگی و غیره، افزایش می‌یابد. بنابراین سود دریافتی از وام‌ها نیز با نرخ شناور مرتبط با لایبور، افزایش خواهند یافت. لازم به ذکر است که قیمت‌هایی که از مدل ساخته شده در این مقاله استخراج می‌شوند با قیمت بازار قابل مقایسه هستند. به این صورت که، اگر قیمت به‌دست‌آمده از اختیار گستره بالاتر از قیمت بازار باشد، سرمایه‌گذار باید موقعیت فروش را در بازار اتخاذ کند اما اگر قیمت به‌دست‌آمده، پایین‌تر از قیمت بازار باشد، سرمایه‌گذار بهتر است موقعیت خرید را اخذ کند. از مزایای استفاده از گستره‌ها می‌توان گفت با استفاده از گستره، معامله‌گران می‌توانند اثر تغییرات منفی را به یک موقعیت خرید کاهش دهند، زیرا همچنان موقعیت اختیار فروش را دارند. اگر نوسانات ضمنی کاهش یابد، ضرر ناشی از اختیار خرید آن‌ها تا حدی با سود از اختیار فروش جبران می‌شود.

## ۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در این پژوهش با استفاده از دو نرخ بهره لایبور که شامل جمله پرش هستند، یک سبد مالی را تشکیل می‌دهیم. داده‌های تصادفی قیمت‌های اختیار گستره تحت دو نرخ بهره تصادفی لایبور را با استفاده از داده‌های پژوهشی استخراج می‌کنیم و سپس با تخمین پارامترهای موردنظر از این داده‌ها روش عددی حاصل از مدل به‌دست‌آمده را با استفاده از متلب پیاده‌سازی می‌کنیم [۹] . مدل‌های طراحی شده بسته به نوع بازار، متفاوت هستند. برای مثال، معمولا بازار اوراق قرضه با معادلات دیفرانسیل معمولی، بازار سهام با معادلات دیفرانسیل تصادفی و برنامه‌ریزی تصادفی و

بازار مشتقات با معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات دیفرانسیل جزئی تصادفی مدل‌سازی می‌شوند. قیمت‌گذاری اختیار گستره را می‌توان بر پایه دو نرخ بهره لایبور بررسی کرد. در مطالعات اخیر، یکی از دو نرخ بهره لایبور، دارای جمله پرش بوده که با استفاده از تغییرمتغیرهای مناسب و کارا، معادله انتگرال–دیفرانسیل جزئی (PIDE) به‌دست‌آمده به معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) تبدیل شده و با روش ضمنی جهت متناوب با طول گام $\frac{۱}{۶}$ حل می‌شود [۶]. همچنین همگرایی روش ضمنی جهت متناوب را با طول گام $\frac{۱}{۶}$ اثبات شده است. پایداری روش ضمنی جهت متناوب، وابسته به طول گام زمانی است، یعنی هر چه این طول گام، کوچک‌تر باشد، روش پایدارتر خواهد بود [۷]. در این مقاله، مدل به‌دست‌آمده بر پایه دو نرخ بهره و معادلات دیفرانسیل جزئی حاصل از آن، به روش ضمنی جهت متناوب با طول گام $\frac{۱}{۱۰}$ نیز حل شد. مزیت این پژوهش، این است که در روش حل از طول گام کوتاه تر استفاده شده است. همچنین با انتخاب دو قسمت پرش، وجه تمایز این مقاله را از مقالات مشابه بیشتر کردیم. در پژوهشی، با استفاده از نرخ‌های بهره لایبور و بدون در نظر گرفتن عوامل ایجاد کننده پرش، به بررسی قیمت‌گذاری اختیار گستره پرداخته شد که نادیده گرفتن بخش پرش، مشکلاتی را برای سرمایه‌گذاران ایجاد می‌کند [۹]. ایده اصلی مدل‌های نرخ بهره این مقاله، از مقاله مذکور است. در پژوهشی دیگر، روش ضمنی جهت متناوب با طول گام $\frac{۱}{۴}$ مطالعه شد که قیمت‌گذاری در این مقاله بر پایه مدل تلاطمی هستون صورت گرفت [۸].

ساختار این مقاله به صورت زیر است:

در بخش ۲، به بررسی مدل‌سازی مسئله موردنظر به همراه شرایط مرزی، اولیه و معادله حاکم بر مدل می‌پردازیم که معادله انتگرال–دیفرانسیل جزئی به‌دست‌آمده، وابسته به دو مدل نرخ بهره لایبور و زمان می‌باشد. در بخش ۳، مسئله را با استفاده از روش ضمنی جهت متناوب با طول گام $\frac{۱}{۱۰}$ حل می‌کنیم. از مزایای استفاده از روش ضمنی جهت متناوب، دقت مطلوب، پایداری، حجم محاسبات پایین و نیاز اندک به حافظه کامپیوتری است. از این روش برای حل معادلات ماتریسی بزرگ، حل عددی معادلات دیفرانسیل پارابولیک و بیضوی و جلوگیری از حل یک سیستم خطی بزرگ استفاده می‌شود. در بخش ۳ به اثبات سازگاری و پایداری روش ضمنی جهت متناوب با طول گام $\frac{۱}{۱۰}$ می‌پردازیم. مدل حاصل را با استفاده از داده‌های تصادفی در نرم افزار متلب در بخش ۴ اجرا می‌کنیم و نمودار برخی از گام‌ها را به تصویر می‌کشیم. در نهایت، بخش‌های ۵ و ۶ نیز شامل نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای پژوهش‌های آتی است.

## ۳. روش‌شناسی پژوهش

در این بخش، به دنبال یافتن یک مدل اختیار گستره بر پایه نرخ بهره لایبور هستیم. بنابراین اختیار گستره را بر پایه دو نرخ بهره لایبور با تاریخ‌های سررسید $T_1$ و $T_2$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $L_1$ و $L_2$ نرخ‌های بهره لایبور باشند که از مدل‌های زیر پیروی می‌کنند [۹]:

رابطه (۱)

$$dL_1 = \sigma_1 L_1 dW_1 + d\sum_{i=1}^{M_t} P_i,$$
$$dL_2 = \alpha_2 dt + \sigma_2 L_2 dW_2 + d\sum_{i=1}^{N_t} J_i.$$

که در آن، $\alpha_2 = -\frac{\delta\rho\sigma_1\sigma_2 L_1 L_2}{1+\delta L_2}$، $\sigma_1$ و $\sigma_2$ تلاطم، δ طول گام و $W_1$ و $W_2$ متغیرهای تصادفی مربوط به حرکت‌های براونی استاندارد هستند و $Corr(W_1, W_2) = \rho$ در مدل (۱)، فرض کرده‌ایم که دو مدل نرخ بهره لایبور، با پرش‌هایی مواجه شده‌اند که می‌توانند به دلایل ناشناخته‌ای رخ داده باشند.

$M_t$ و $N_t$ دو فرایند پواسون مستقل از هم، به ترتیب با نرخ‌های $\lambda_1$ و $\lambda_2$ و دنباله‌های $P_I$ و $J_I$ هستند که توابع توزیع آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_P(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}, \quad f_J(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} & , y > 0 \\ 0 & , y \le 0 \end{cases}$$

معادله قیمت اختیار با فرض این‌که $\Omega$ قیمت اختیار گستره باشد و همچنین با توجه به رابطه (۱) و استفاده از لم ایتو، از رابطه زیر پیروی می‌کند [۶]:

$$d\Omega = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \alpha_2 L_2 \frac{\partial\Omega}{\partial L_2} + \sigma_2^2 L_2^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial L_2^2} + \sigma_1^2 L_1^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial L_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 L_1 L_2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial L_1 \partial L_2}\right)dt$$
$$+(\sigma_1 L_1 + \sigma_2 L_2)dW + \left(\Omega(t, L_1 + x, L_2) - \Omega(t, L_1, L_2)\right)dM_t +$$
$$\left(\Omega(t, L_1, L_2 + y) - \Omega(t, L_1, L_2)\right)dN_t.$$

رابطه (۲)

در معادله (۲)، $x$ و $y$، میزان پرشی‌هایی هستند که به دلیل یک فاجعه یا حادثه بد، می‌تواند رخ بدهد. حال یک سبد مالی متشکل از اختیارات گستره $\Omega_1$ و $\Omega_2$ می‌سازیم که $x_1$ و $x_2$ در آن حجم اختیارات گستره هستند [۱۰]:

$$\Pi = x_1\Omega_1 + x_2\Omega_2,$$

با جای‌گذاری تغییرات $\Pi$ در دیفرانسیل‌های $\Omega_1$ و $\Omega_2$، معادله دیفرانسیل-انتگرال زیر به دست می‌آید که در آن q قیمت ریسکی بازار و r نرخ بهره بدون ریسک است:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + (\alpha_2 - q\sigma_2)L_2\frac{\partial\Omega}{\partial L_2} - q\sigma_1 L_1 \frac{\partial\Omega}{\partial L_1} + \sigma_1^2 L_1^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial L_1^2} + \sigma_2^2 L_2^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial L_2^2}$$

$$+\rho\sigma_1\sigma_2 L_1 L_2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial L_1 \partial L_2} - (\lambda_1 + \lambda_2 + r)\Omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(t, L_1 + x, L_2) f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(t, L_1, L_2 + y) f(y) dy = 0.$$ رابطه (۳)

متغیر $\tau$ را به عنوان متغیر زمان پسرو یعنی $t = T - \tau$ انتخاب می‌کنیم که در آن $t \in [0, T]$ یک متغیر زمانی و $T$ زمان سررسید است.

دو تغییر متغیر $L_1 = e^x, L_2 = e^y$ و مشتقات مورد نیاز آن‌ها را در معادله (۳) جای‌گذاری می‌کنیم. با استفاده از بسط تیلور مرتبه دوم در توابع انتگرالی، معادله دیفرانسیل جزئی زیر حاصل می‌شود:

$$\Omega_\tau = \left(-q\sigma_1 - {\sigma_1}^2 + \frac{1}{\lambda_1} e^{-x} - \frac{1}{{\lambda_1}^2} e^{-2x}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \left(\alpha_2 - q\sigma_2 - {\sigma_2}^2 + \frac{1}{\lambda_2} e^{-y} - \frac{1}{{\lambda_2}^2} e^{-2y}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \left({\sigma_1}^2 + \frac{1}{{\lambda_1}^2} e^{-2x}\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \left({\sigma_2}^2 + \frac{1}{{\lambda_2}^2} e^{-2y}\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial x \partial y} - (\lambda_1 + \lambda_2 + r - 2)\Omega$$

رابطه (۴)

شرایط اولیه در $\tau = 0$، برابر تابع عایدی می‌باشد، به عبارت دیگر

$\Omega(0, L_1, L_2) = max\{0, L_1 - K, L_2 - K\}.$

معادله (۴) در دامنه نیمه‌متناهی $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ تعریف شده است. به منظور فرمول‌بندی شرایط مرزی، دامنه نیمه‌متناهی را به اندازه کافی بزرگ‌تر از $L_1$ و $L_2$ و به صورت $[0, L_1] \times [0, L_2]$ در نظر می‌گیریم. بنابراین، اگر $K$، قیمت توافقی تابع بازده برای اختیار فروش اروپایی باشد، شرایط مرزی برای معادله (۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial L_1^2}(0, L_2, \tau) = \frac{\partial^2\pi}{\partial L_1^2}(L, L_2, \tau) = 0,$$
$$\frac{\partial^2\pi}{\partial L_2^2}(L_1, 0, \tau) = \frac{\partial^2\pi}{\partial L_2^2}(L_1, M, \tau) = 0.$$

روش ضمنی جهت متناوب با طول گام $\frac{۱}{۱۰}$ برای حل عددی مدل قیمت‌گذاری اختیار گسترده

در این بخش، ابتدا معادله دیفرانسیل جزئی به‌دست‌آمده در معادله (۴) را در نظر می‌گیریم. عملگر $I\Omega$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I\Omega = I^x\Omega + I^{x,xx}\Omega + I^{xx}\Omega + I^y\Omega + I^{yy}\Omega + I^{y,yy}\Omega + I^{xy}\Omega + I^{x,xy}\Omega + I^{y,xy}\Omega + \Phi.$$ رابطه (۵)

ضرایب عملگر $I\Omega$ با توجه به ضرایب معادله (۵) تعریف شده است که جمع این ضرایب باید با جمع ضرایب به‌دست‌آمده در معادله (۵) برابر باشد و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت [۵]:

$$I^x\Omega = \frac{1}{3}\left(-q\sigma_1 - {\sigma_1}^2 + \frac{1}{\lambda_1} e^{-x} - \frac{1}{{\lambda_1}^2} e^{-2x}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial x},$$

$$I^x\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}} = \frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}} - \Omega_{ij}^{n}}{\Delta\tau},$$
$$I^{x,xx} = \frac{1}{3}\left(-q\sigma_1 - {\sigma_1}^2 + \frac{1}{\lambda_1}e^{-x} - \frac{1}{{\lambda_1}^2}e^{-2x}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{1}{2}\left({\sigma_1}^2 + \frac{1}{{\lambda_1}^2}e^{-2x}\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2},$$
$$I^{x,xx}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}} = \frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}}{\Delta\tau},$$
$$I^{xx}\Omega = \frac{1}{2}\left({\sigma_1}^2 + \frac{1}{{\lambda_1}^2}e^{-2x}\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}, I^{xx}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}} = \frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}}{\Delta\tau},$$
$$I^{y}\Omega = \frac{1}{3}\left(\alpha_2 - q\sigma_2 - {\sigma_2}^2 + \frac{1}{\lambda_2}e^{-y} - \frac{1}{{\lambda_2}^2}e^{-2y}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial y}, I^{y}\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}} = \frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}}{\Delta\tau},$$
$$I^{yy}\Omega = \frac{1}{2}\left({\sigma_2}^2 + \frac{1}{{\lambda_2}^2}e^{-2y}\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}, I^{yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}}}{\Delta\tau},$$
$$I^{y,yy}\Omega = \frac{1}{3}\left(\alpha_2 - q\sigma_2 - {\sigma_2}^2 + \frac{1}{\lambda_2}e^{-y} - \frac{1}{{\lambda_2}^2}e^{-2y}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{1}{2}\left({\sigma_2}^2 + \frac{1}{{\lambda_2}^2}e^{-2y}\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}, I^{y,yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{5}} = \frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{5}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau},$$
$$I^{xy}\Omega = \frac{1}{3}\rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y}, I^{xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{7}{10}} = \frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{7}{10}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{3}{5}}}{\Delta\tau},$$
$$I^{x,xy}\Omega = \frac{1}{3}\left(-q\sigma_1 - {\sigma_1}^2 + \frac{1}{\lambda_1}e^{-x} - \frac{1}{{\lambda_1}^2}e^{-2x}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{1}{3}\rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y}, \quad I^{x,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{4}{5}} = \frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{4}{5}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{7}{10}}}{\Delta\tau},$$
$$I^{y,xy} = \frac{1}{3}\left(\alpha_2 - q\sigma_2 - {\sigma_2}^2 + \frac{1}{\lambda_2}e^{-y} - \frac{1}{{\lambda_2}^2}e^{-2y}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{1}{3}\rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y}, I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{9}{10}} = \frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{9}{10}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{4}{5}}}{\Delta\tau},$$
$$\Phi = -(\lambda_1 + \lambda_2 + r - 2)\Omega \;,\; \frac{\Omega_{ij}^{n+1} - \Omega_{ij}^{n+\frac{9}{10}}}{\Delta\tau} = \Phi,$$
رابطه (۶)

قدم بعدی برای رسیدن به حل عددی، برقراری رابطه بین تفاضلات متناهی با معادلات آمده در روابط (۶) است که آن‌ها را گام به گام و به صورت بازگشتی حل می‌کنیم. با استفاده از فرمول آدامز– مولتون و معادلات رابطه (۶)، داریم [۴]:

$$\frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}} - \Omega_{ij}^{n}}{\Delta\tau} = I^x\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}},$$
$$\frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}}{\Delta\tau} = \frac{1}{2}\left(I^{x,xx}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}} + I^{x,xx}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}\right),$$
$$\frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}}{\Delta\tau} = \frac{1}{12}\left(-I^{xx}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}} + 8\,I^{xx}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}} + 5\,I^{xx}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}\right),$$
$$\frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}}{\Delta\tau} = \frac{1}{24}\left(I^{y}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}} - 5\,I^{y}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}} + 19\,I^{y}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}} + 9\,I^{y}\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}}\right),$$
$$\frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}}}{\Delta\tau} = \frac{1}{720}\left(-19I^{yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}} + 106I^{yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}} - 264I^{yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}} + 464I^{yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}} + 251I^{yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}\right),$$

$$\frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{5}}-\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau}=\frac{1}{4320}\Big(27I^{y,yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}-173I^{y,yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}+482I^{y,yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}-798I^{y,yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}}+1427I^{y,yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+475I^{y,yy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{5}}\Big),$$

$$\frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{7}{10}}-\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{5}}}{\Delta\tau}=\frac{1}{60480}\Big(-863I^{xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}+6312I^{xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}-20211I^{xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}+37504I^{xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}}-46461I^{xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+65112I^{xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{5}}+19087I^{xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{7}{10}}\Big),$$

$$\frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{4}{5}}-\Omega_{ij}^{n+\frac{7}{10}}}{\Delta\tau}=\frac{1}{120960}\Big(1375I^{x,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}-11351I^{x,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}+41499I^{x,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}-88547I^{x,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}}+123133I^{x,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}-121797I^{x,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{5}}+139849I^{x,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{7}{10}}+36799I^{x,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{4}{5}}\Big)$$

$$\frac{\Omega_{ij}^{n+\frac{9}{10}}-\Omega_{ij}^{n+\frac{4}{5}}}{\Delta\tau}=\frac{1}{3628800}\big(-33953I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}+312874I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}-1291214I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}+3146338I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}}-5033120I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}+5595358I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{5}}-4604594I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{7}{10}}+4467094I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{4}{5}}+1070017I^{y,xy}\Omega_{ij}^{n+\frac{9}{10}}\big),$$

$$\frac{\Omega_{ij}^{n+1}-\Omega_{ij}^{n+\frac{9}{10}}}{\Delta\tau}=-(\lambda_1+\lambda_2+r-2)\Omega_{ij}^{n}.$$

رابطه (۷)

برای حل معادلات رابطه (۷)، از تفاضلات متناهی زیر استفاده می‌کنیم:

$$I^{x}\Omega_{ij}^{n}=\frac{\Omega_{i+1j}^{n}-\Omega_{ij}^{n}}{h},\ I^{y}\Omega_{ij}^{n}=\frac{\Omega_{ij+1}^{n}-\Omega_{ij}^{n}}{k},$$

$$I^{xx}\Omega_{ij}^{n}=\frac{\Omega_{i+1j}^{n}-2\Omega_{ij}^{n}+\Omega_{i-1j}^{n}}{h^2},\ I^{yy}\Omega_{ij}^{n}=\frac{\Omega_{ij+1}^{n}-2\Omega_{ij}^{n}+\Omega_{ij-1}^{n}}{k^2},$$

$$I^{xy}\Omega_{ij}^{n}=\frac{\Omega_{i+1j+1}^{n}-\Omega_{i+1j}^{n}-\Omega_{ij+1}^{n}+2\Omega_{ij}^{n}-\Omega_{i-1j}^{n}-\Omega_{ij-1}^{n}+\Omega_{i-1j-1}^{n}}{hk}.$$

رابطه (۸)

حال کافیست که تفاضلات متناهی در (۸) را در معادلات (۷) جایگذاری کنیم و جواب معادلات را به ازای $i=0,1,\dots,n$ و $j=0,1,\dots,m$ بدست آوریم. با توجه به طولانی بودن محاسبات، خلاصه‌ای از آن‌ها را در این مقاله آورده‌ایم. به عنوان مثال، در اولین معادله رابطه (۷)، بعد از محاسبات ساده، متغیرهای مجهول را به سمت چپ تساوی و متغیرهای معلوم را به سمت راست تساوی انتقال می‌دهیم و داریم [۲]:

$$(1+A)\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}-A\Omega_{i+1j}^{n+\frac{1}{10}}=\Omega_{ij}^{n},$$

که در آن $A=\frac{\Delta\tau}{3h}\Big(-q\sigma_1-{\sigma_1}^2+\frac{1}{\lambda_1}e^{-x_i}-\frac{1}{{\lambda_1}^2}e^{-2x_i}\Big)$. حال کافیست معادلات را به ازای $i=0,1,\dots,n$ به دست آوریم. به همین ترتیب، معادله دوم از سری معادلات (۷)، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$(1+2AhH+6BH)\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}-(2hA+3B)H\Omega_{i+1j}^{n+\frac{1}{5}}-3BH\Omega_{i-1j}^{n+\frac{1}{5}}=(2hA+3B)H\Omega_{i+1j}^{n+\frac{1}{10}}+(1-2AhH+6BH)\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}+3BH\Omega_{i-1j}^{n+\frac{1}{10}}.$$

که $H=\frac{\Delta\tau}{12h^2}$ و $B=\sigma_1{}^2+\frac{1}{\lambda_1{}^2}e^{-2x_i}$. برای به دست آوردن دستگاه معادلات بالا، کافیست $i=0,1,\dots,n$ را جای‌گذاری کنیم. در سومین معادله از معادلات (۷) نیز تفاضلات متناهی را جای‌گذاری می‌کنیم و به تساوی زیر می‌رسیم که در آن $C=\frac{\Delta\tau B}{24h^2}$ است:

$$(1+10C)\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}-5C\Omega_{i+1j}^{n+\frac{3}{10}}-5C\Omega_{i-1j}^{n+\frac{3}{10}}=2C\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}-C\Omega_{i+1j}^{n+\frac{1}{10}}-C\Omega_{i-1j}^{n+\frac{1}{10}}+8C\Omega_{i+1j}^{n+\frac{1}{5}}+(1-16C)\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}+8C\Omega_{i-1j}^{n+\frac{1}{5}}.$$

با فرض $E=\frac{\Delta\tau D}{24k}$ و $D=\left(\alpha_2-q\sigma_2-\sigma_2{}^2+\frac{1}{\lambda_2}e^{-y_j}-\frac{1}{\lambda_2{}^2}e^{-2y_j}\right)$، چهارمین معادله رابطه (۷)، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(1+9E)\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}}-9E\Omega_{ij+1}^{n+\frac{2}{5}}=E\Omega_{ij+1}^{n+\frac{1}{10}}-E\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}-5E\Omega_{ij+1}^{n+\frac{1}{5}}+5E\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}+19E\Omega_{ij+1}^{n+\frac{3}{10}}+(1-19E)\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}.$$

کافیست، $j=0,1,\dots,m$ را در معادله بالا، جای‌گذاری کنیم. با بازنویسی معادله پنجم رابطه (۷) توسط تفاضلات متناهی تعریف شده در روابط (۸) و همچنین با فرض $F=\frac{\Delta\tau}{1440k^2}\left(\sigma_2{}^2+\frac{1}{\lambda_2{}^2}e^{-2y_j}\right)$ داریم:

$$(1+502F)\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}-251F\Omega_{ij+1}^{n+\frac{1}{2}}-251F\Omega_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}}=-19F\Omega_{ij+1}^{n+\frac{1}{10}}+38F\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{10}}-19F\Omega_{ij-1}^{n+\frac{1}{10}}+106F\Omega_{ij+1}^{n+\frac{1}{5}}-212F\Omega_{ij}^{n+\frac{1}{5}}+106F\Omega_{ij-1}^{n+\frac{1}{5}}-264F\Omega_{ij+1}^{n+\frac{3}{10}}+528F\Omega_{ij}^{n+\frac{3}{10}}-264F\Omega_{ij-1}^{n+\frac{3}{10}}+646F\Omega_{ij+1}^{n+\frac{2}{5}}+(1-1292F)\Omega_{ij}^{n+\frac{2}{5}}+646F\Omega_{ij-1}^{n+\frac{2}{5}}.$$

در نهایت، به آخرین معادله از رابطه (۷) می‌رسیم که با حل آن و جای‌گذاری $i=0,1,\dots,n$، حل معادلات به روش ضمنی جهت متناوب به پایان می‌رسد.

$$\Omega_{ij}^{n+1}=\Omega_{ij}^{n+\frac{9}{10}}-(\lambda_1+\lambda_2+r-2)\Delta\tau\Omega_{ij}^{n}.$$

## اثبات سازگاری روش ضمنی

فرض می‌کنیم که $\Phi$ جواب دقیق معادله (۴) و $L(\Phi)=0$ باشد و $\varphi$ نیز جواب معادله تفاضلات متناهی باشد. به عبارت دیگر $F(\varphi)=0$. همچنین فرض می‌کنیم که $u$ یک تابع پیوسته دلخواه وابسته به متغیرهای $r,x$ و $t$ باشد که به تعداد کافی مشتق‌پذیر است به‌طوری‌که $L(v)$ می‌تواند در $(i\eta,j\varepsilon,kh)$ ارزیابی شود، پس خطای تابع در نقطه $v_{i,j,k}=v(i\eta,j\varepsilon,kh)$ به صورت $T_{i,j,k}(v)=F(v_{i,j,k})-L(v_{i,j,k})$ تعریف می‌شود. اگر به ازای $\eta,\varepsilon$ و $h$ نتیجه شود که $T_{i,j,k}(v)\to 0$، آن‌گاه معادله تفاضلات متناهی با معادله دیفرانسیل جزئی، سازگار است [۱].

$$\frac{\varphi_{i,j,k+1}-\varphi_{i,j,k}}{h} = (a - bX_i - qs)\frac{\varphi_{i+1,j,k}-\varphi_{i,j,k}}{\eta} + (\alpha - \beta r_j - q\sigma + \frac{1}{\lambda})\frac{\varphi_{i,j+1,k}-\varphi_{i,j,k}}{\varepsilon}$$
$$+\rho\sigma s\frac{\varphi_{i+1,j+1,k} - \varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i,j+1,k} + 2\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i-1,j,k} - \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i-1,j-1,k}}{\eta\varepsilon}$$
$$+\frac{1}{2}s^2\frac{\varphi_{i+1,j,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k}}{\eta^2} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{\varphi_{i,j+1,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k}}{\varepsilon^2}$$
$$-\left(r_j + \lambda - 1\right)\varphi_{i,j,k}$$
رابطه (۹)

تغییرات زیر را برای معادله (۹) در نظر می‌گیریم [۷]:

$$X_i = X_0 + i\eta, r_j = r_0 + j\varepsilon, A = -q\sigma_1 - \sigma_1^{\,2} + \frac{1}{\lambda_1}e^{-x} - \frac{1}{\lambda_1^{\,2}}e^{-2x},$$
$$F = r_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2B = \alpha_2 - q\sigma_2 - \sigma_2^{\,2} + \frac{1}{\lambda_2}e^{-y} - \frac{1}{\lambda_2^{\,2}}e^{-2y}, C = \rho\sigma_1\sigma_2,$$
$$D = \sigma_1^{\,2} + \frac{1}{\lambda_1^{\,2}}e^{-2x}, E = \sigma_2^{\,2} + \frac{1}{\lambda_2^{\,2}}e^{-2y}$$
رابطه (۱۰)

با استفاده از بسط تیلور و با به کار بردن متغیرهای به‌دست‌آمده در (۱۰)، رابطه (۹) را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3} + \cdots = (A - b\,\eta\,i)\frac{\eta}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} + (B - \beta\varepsilon\,j)\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \cdots + (A - b\,\eta\,i)\frac{\eta^2}{6}\frac{\partial^3\varphi}{\partial X^3} +$$
$$(B - \beta\varepsilon\,j)\frac{\varepsilon^2}{6}\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3} + \cdots.$$

با در نظر گرفتن کوچک‌ترین توان در معادله بالا و با فرض $\eta = \varsigma = kh$ ( $k$ یک عدد ثابت است)، زمانی که $h$ به سمت صفر میل می‌کند. $\tau$ نیز به سمت صفر میل خواهد کرد و بنابراین سازگاری روش، اثبات می‌شود.

**اثبات پایداری روش ضمنی جهت متناوب**

برای اثبات پایداری روش ضمنی جهت متناوب، از روش فون–نویمن استفاده می‌کنیم. آنالیز فون–نویمن، بر پایه محاسبات عامل تقویت $G$است. هدف ما به دست آوردن شرایطی است که تحت آن، $|G| \leq 1$ باشد. عامل تقویت $G$را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که در آن $e_{mn}^{l}$ خطای مرحله $l-$ام و $e_{mn}^{0}$ خطای اولیه است [۱۱]:

$$G = \frac{e_{mn}^{l+1}}{e_{mn}^{l}}$$

رابطه میان این دو خطا برابر با $e_{mn}^{l} = G^{l}e_{mn}^{0}$ است که در آن $e_{mn}^{0} = e^{imx}e^{iny}$. یک روش ساده برای پیدا کردن $G$ جایگزین کردن $\psi_{mn}^{l}$ با $G^{l}e^{imx}e^{iny}$، به ازای هر $l$، $m$ و $n$ است.

$$\psi_{mn}^{l+1} = G^{l+1} e^{imx} e^{iny} = G\psi_{mn}^{l},$$
$$\psi_{m+1n}^{l} = G^{l} e^{im(x+\Delta x)} e^{iny} = G^{l} e^{imx} e^{im\Delta x} e^{iny} = e^{im\Delta x}\psi_{mn}^{l},$$
$$\psi_{mn+1}^{l} = G^{l} e^{imx} e^{in(y+\Delta y)} = G^{l} e^{imx} e^{iny} e^{in\Delta y} = e^{in\Delta y}\psi_{mn}^{l},$$

که در آن $\Delta x$ و $\Delta y$ مثبت هستند. بدون اینکه به کلیت مسئله، خللی وارد شود، ضرایب معادله (۹) را برابر با بیشترین مقدار ضریب معادله و $A$ قرار می‌دهیم. برای پیدا کردن شرایطی که در آن $|G|\leq 1$ باشد، کافیست شرط $|G|^2 \leq 1$ را برقرار کنیم. با انجام محاسبات، شرط پایداری مسئله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq min\{\frac{1}{2|A|},\frac{1}{A(2-\Delta x^2)}\},\frac{\Delta t}{\Delta y^2} \leq min\{\frac{1}{2|A|},\frac{1}{A(2-\Delta y^2)}\}$$

با توجه به قضیه هم‌ارزی لکس و هم‌چنین با توجه به پایدار و سازگار بودن روش حل، این روش همگرا می‌باشد.

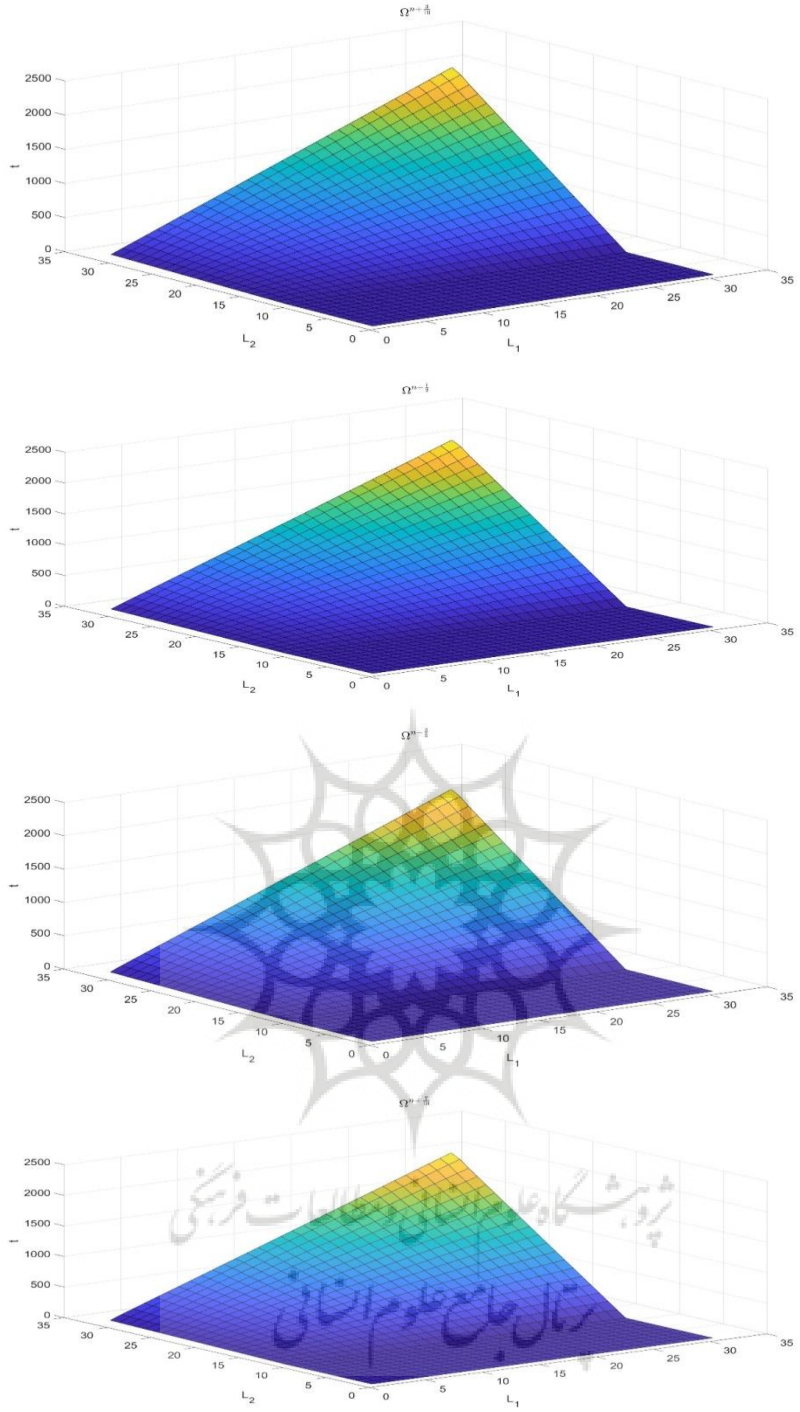
## ٤. تحلیل داده‌ها و یافته‌ها

در این بخش به بررسی نتایج عددی می‌پردازیم. پارامترها و مقادیر استفاده‌شده در برنامه‌نویسی متلب، در جدول ۱ آمده است که قیمت اختیار گستره را با توجه به آن‌ها به دست آورده‌ایم. آخرین مرحله از جواب در نمودار ۱ نشان داده شده است (با توجه به اینکه طول گام $\frac{۱}{۱۰}$ را استفاده کرده‌ایم، ده نمودار حاصل می‌شود که به اختصار، فقط ۴ نمودار را در این مقاله آورده‌ایم).

*جدول ۱. داده‌های ورودی مورد استفاده در پژوهش*

| پارامتر | تفسیر | مقدار |
|---|---|---|
| $(\sigma_1, \sigma_2, \alpha_2)$ | تلاطم | (۰/۳۸ ,۰/۳۴ ,۰/۱) |
| $r$ | نرخ بهره | ۰/۰۳۵ |
| $(\lambda_1, \lambda_2)$ | نرخ چگالی مدل پواسون | (۰/۵ ,۰/۱) |
| $\rho$ | همبستگی $W_1$ و $W_2$ | ۰/۳۵ |
| $q$ | قیمت ریسکی بازار | ۰ |
| $T$ | بیشترین مقدار زمان | ۰/۵ |

*منبع: داده‌های [۹] با کمی تغییر.*






*نمودار ۱: نمودارهای $\Omega_{ij}^{n}$ در گام‌های $\frac{۳}{۱۰}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۷}{۱۰}$ (از بالا به پایین)*

نمودارهای بالا، قیمت اختیار را به ما نشان می‌دهند (مقادیر به‌دست‌آمده در هر مرحله برای نقاط یکسان تقریبا با هم برابر است و که بنا به همگرا بودن این روش، امری طبیعی است). برای این کار، ورودی‌های $L_1$ و $L_2$ یعنی نرخ‌های بهره را به ترتیب ۲۰ و ۲۵ در نظر بگیریم. روی نمودار یا به طور دقیق تر در متلب، میزان ارتفاعی که از وصل کردن این دو عدد، روی نمودار دیده می‌شود قیمت اختیار گستره می‌باشد که در گام $\frac{3}{10}$ در حدود ۱۵۰۰ است.

خروجی استفاده از داده‌های ورودی جدول ۱، در مدل قیمت‌گذاری اختیار گستره ایـن مقالـه، قیمت‌هایی است که قابل مقایسه با قیمت بازار هستند. به عنوان مثال، اگر قیمت به‌دست‌آمـده از اختیار گستره ۲۰۰۰ تومان و قیمت بازار ۱۸۰۰ تومان بود، سرمایه‌گذار باید موقعیت فـروش را در بازار اتخاذ کند ولی اگر قیمت اختیار گستره همان ۲۰۰۰ تومان و قیمت بازار ۲۲۰۰ تومـان بـود، سرمایه‌گذار بهتر است به اتخاذ موقعیت خرید بپردازد.

## ۵. بحث و نتیجه‌گیری

از کاربردهای استفاده از اختیار گستره می‌توان به نقش پررنگ آن در بازارهای مالی که روی قیمت‌های دو کالای یکسان در دو موقعیت متفاوت است (به عنوان مثال، فولاد اهواز و فولاد اصفهان) اشاره کرد. در این مقاله، قیمت‌گذاری اختیار گستره خرید مبتنی بر دو مدل نرخ بهره لایبور و با استفاده از مدل‌های پرش- انتشار مورد بررسی و ارزش‌گذاری قرار گفت. در مدل استخراجی، هر دو معادله اساسی دارای واحد پرش هستند که این پرش‌ها می‌توانند به دلیل شرایط اقتصادی، سیاسی و یا عوامل طبیعی (از جمله سیل، زلزله، طوفان و ...) رخ دهند و گسستگی‌های احتمالی در رفتار دارایی پایه را مد نظر قرار می‌دهند. وجود عامل پرش در مدل‌سازی می‌تواند چالش‌های زیادی را در حل مدل ایجاد کند. برای رفع این مشکل، از روش ضمنی جهت متناوب با طول گام $\frac{۱}{۱۰}$ با ضرایب آدامز-مولتون استفاده کردیم.

## ٦. پیشنهادها و محدودیت‌ها

برای حل این مدل قیمت‌گذاری می‌توان از همین روش با طول گام‌های دیگر همراه با ضرایب آدامز بشفورث استفاده نمود. یادآور می‌شویم که مدل‌های دیگر از جمله هستون و کاکس-ایگرسول-راس نیز می‌توانند به جای مدل‌های نرخ بهره لایبور استفاده شوند. همچنین برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی، می‌توان از روش‌های دیگری مانند موجک‌ها، یادگیری ماشین و توابع پایه شعاعی (RBF) استفاده کرد [۳]. معادلات دیفرانسیل جزئی به‌دست‌آمده در این مقاله، جدید بوده و هنوز روش حل دیگری برای آن استفاده نشده است بنابراین پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی، مدل را با روش‌های مذکور حل نمود و آن‌ها را با روش این مقاله، مقایسه نمود تا در صورت امکان، روش بهتری برای حل این مدل، ارائه شود.

## منابع


1. Evans, G., Blackledge, J., & Yardley, P. (2012). Numerical methods for partial differential equations. *Springer Science & Business Media*.

2. Jeong, D., & Kim, J. (2013). A comparison study of ADI and operator splitting methods on option pricing models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (247), 162-171.

3. Karimnejad Esfahani, M., Neisy, A., & De Marchi, S. (2021). An RBF approach for oil futures pricing under the jump-diffusion model. *Journal of Mathematical Modeling*, 9(1), 81-92.

4. Leveque, R. J. (2007). Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*.

5. Marchuk, G. I. (1990). Splitting and alternating direction methods. *Handbook of numerical analysis*, 1, 197-462.

6. Mohamadinejad, R., Biazar, J., & Neisy, A. (2020). Spread option pricing using two jump-diffusion interest rates. *University Politehnica of Bucharest scientific Bulletin-series A-applied mathematics and phusics*, 82(1), 171-182.

7. Mohamadinejad, R., Neisy, A., & Biazar, J. (2021). ADI method of credit spread option pricing based on jump-diffusion model. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 11(1), 195-210.

8. Safaei, M., Neisy, A., & Nematollahi, N. (2018). New splitting scheme for pricing American options under the Heston model. *Computational Economics*, 52(2), 405-420.

9. Suárez-Taboada, M., & Vázquez, C. (2010). A numerical method for pricing spread options on LIBOR rates with a PDE model. *Mathematical and computer modelling*, 52(7-8), 1074-1080.

10. Unger, A. J. (2010). Pricing index-based catastrophe bonds: Part 1: Formulation and discretization issues using a numerical PDE approach. *Computers & geosciences*, 36(2), 139-149.

11. Wang, Q., & Zhang, Z. (2019). A stabilized immersed finite volume element method for elliptic interface problems. *Applied Numerical Mathematics*, 143, 75-87. Doi 10.1016/j.apnum.2019.03.010.


**استناد**


محمدی‌نژاد، ریحانه و عبدالساده، نیسی (۱۴۰۱). قیمت‌گذاری اختیار گستره بر پایه مدل‌های نرخ بهره لایبور پرش- انتشار. *چشم‌انداز مدیریت مالی*، ۱۲(۳۸)، ۳۵-۴۹.


**Citation**


Mohamadinejad, Reyhane & Neisy, Abdolsadeh (2022). Spread Option Pricing Based on Two Jump-diffusion Libor Interest Rate Models. *Journal of Financial Management Perspective*, 12(38), 35 - 49. (*in Persian*)