رویکردی ریاضی به فرآیند تحلیل سلسه مراتبی

AHP

تالیف: دکتر جمشید صالحی صدقیانی
(استاد دانشگاه علامه طباطبایی)

"چکیده"

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی AHP یکی از تکنیک های معتبر و قوی تصمیم‌گیری چند معیاره می‌باشد. در این مقاله رویکرد ریاضی به AHP مورد بحث قرار می گیرد. در سال ۱۹۹۷ یک محقق بنام[1] جاناتان بارزیلای مدل AHP را فاقد چارچوب صحیح ریاضی برای تجزیه و تحلیل سلسله مراتبی در تصمیم‌گیری دانست. در این مقاله نقد بارزیلای نسبت به AHP به آن پرداخته است، تشریح شده که عمدتاً به شرح زیر می‌باشد.

۱) معمولاً توابع ارزشی غیر خطی می‌باشند، AHP توابع ارزشی چندگانه را بوسیله نرخ‌های جانشینی ثابتی بوجود می‌آورد که منجر به ایجاد توابع ارزشی چندگانه خطی می‌گردند.

۱ـ منبع شماره ۲

۲) در AHP برای جبران فقدان نرخهای جانشینی از برآوردهای نرخ‌های جانشینی استفاده می‌شود، که این برآوردها ممکن است سازگار نباشند. اما نرخهای اصلی جانشینی همیشه سازگار هستند در واقع ضرایب مدل بوسیله روش نرمال سازی ماتریس‌ها از نسبتهای وزنی ناسازگار برآورد شده، بدست می آیند.
۳) در AHP استفاده از روش نرمال سازی ماتریس و استانداردسازی بردارهای ضرایب منجر به مدلسازی نادرست می گردد و در واقع تجزیه درختی هم ارز ممکن است به دسته بندی غیر هم ارز توابع ارزشی منجر شود.

مقدمه

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی AHP[1] نوعی روش تصمیم‌گیری چند معیاره[2] است که برای نخستین بار توسط توماس ال ساعتی[3] در دهه ۱۹۷۰ ابداع گردید. این روش در موقعیت هایی که تصمیم‌گیری پیچیده با چند عامل چه کیفی و چه کمی مواجه است استفاده می‌گردد. تصمیم‌گیری با این روش بصورت فردی یا گروهی انجام می‌شود و به علت ساده بودن و کاربرد وسیع آن در رشته های مختلف موفقیت های بسیاری در مراکز تصمیم گیری، سازمانها و مراکز علمی و تحقیقی بدست آورده است. ساختار ریاضی AHP از گروه توابع ارزشی چندگانه[4] است و عمده کاری که روش AHP بر روی این توابع انجام می دهد، تجزیه توابع ارزشی به اجزایی با اندازه های قابل کنترل و ساختار مناسب می‌باشد که در عمل همان ایجاد درخت سلسله مراتبی است. علیرغم مطالعات علمی بسیاری که بر روی این روش وکاربردهای آن صورت گرفته است، توجه کمی به توجیه ساختار ریاضی و امر تجزیه موقعیت تصمیم‌گیری با رویکرد اثبات گرای ریاضی به عمل آمده است. بررسی این روش از دیدگاه ریاضی، نیاز به ایجاد چارچوب صحیح

1- Analytic Hierachy Process. 2- Multiple Criteria Decision Making

۳- منبع شماره ۷

4- Multi - Attribute value Functions.

برای تجزیه توابع ارزشی خطی و غیر خطی به ساختارهای درختی یا غیر درختی دارد که این مدل را با به خدمت گرفتن ابزارهای ریاضی و استانداردهای بنیادی قوی در تشریح مسائل مهم تجزیه وتحلیل تصمیم گیری، توانا سازد.

در سال ۱۹۹۷ محققی به نام ج. بارزیلای[1] در یک مقاله عنوان نمود که مدل AHP دارای چارچوب صحیح توابع ارزشی نیست و نشان داد که AHP از تجزیه توابع ارزشی هم ارز، طبقه بندی های غیر هم ارز ایجاد می‌کند. در این مقاله سعی بر تبیین و تشریح مفاهیم مورد تأکید ج. بارزیلای مبنی بر اینکه AHP تجزیه کننده خوبی برای توابع ارزشی نمی‌باشد، شده است.

در بخش ۱ آشنایی مختصری با AHP صورت می گیرد. در بخش ۲ توابع ارزشی و مفاهیم هم ارزی و نرخ های نهایی جانشینی در بخش ۴ تابع ارزشی خطی AHP و کاربردهای آن در بخش ۳ تفاوت میان معیارها گزینه‌ها می‌شود. در بخش ۵ قوانین ترکیب عمومی و در بخش ۶ کاربرد این قانون در یک سلسله برنامه ریزی خطی مورد بررسی قرار می گیرد و نتیجه که قانون ترکیب به اندازه AHP ناکارآمد عمل می‌کند.

۱ـ فرآیند تحلیل سلسله مراتبی AHP چیست؟

AHP در آغاز بر اساس تحلیل مغزی انسان برای مسائل پیچیده و نادقیق پیشنهاد گردید و بر اساس منطق دوگروه مفهوم فازی که توسط آقای توماس[2] ال ساعتی بیان گردید، توسعه داده شد که این دو مفهوم عبارتند از: ۱) مفهوم فازی در درک، که بعلت پیچیدگی پدیده‌هایی که بلافاصله قابل درک نیستند بوجود می‌آید. ۲) مفهوم فازی در معنی، که بعلت نسبیت معانی می‌باشد.

بطورکلی مدل AHP جزء مدلهای چند معیاره تصمیم‌گیری است. این مدلها به دو گروه عمده تقسیم می گردند:

1- Jonothan Barzilai

۲- منبع شماره ۸

۱ـ مدلهای چند منظوره (چند هدفه)[1]
۲ـ مدلهای چند شاخصه MADM[2]

مدلهای MODM مانند مدلهای برنامه ریزی آرمانی در طراحی بکار می روند. مدلهای MODM به منظور انتخاب گزینه برتر در جایی کـه مـعیارها مـعلوم و دست نیافتنی و گزینه‌ها نیز مشخص باشند و هدف ارزیابی اولویت بندی راهکارها و انتخاب بهترین راه باشد استفاده می گردند. AHP نیز از گروه MODM است.

خصوصیات AHP:

۱ـ تحلیلی بودن: استفاده از اعداد و ارقام در تحلیلهای استنباطی

۲ـ سلسله مراتبی بودن: تجزیه وضعیت های پیچیده بـر اسـاس اولویت هـا، اهـداف، معیارها و گزینه‌ها.

۳ـ فرآیندی بودن: اتخاذ تصمیم نیازمند بررسی همه جانبه توسط افـراد مـختلف طـی جلسات گوناگون و اعمال نظرات آنها تا اخذ نتیجه می‌باشد.

مراحل اجرای تکنیک AHP:

۱ـ ایجاد درخت سلسله مراتب تصمیم:

درخت سـلسله مـراتب تـصمیم بیانگر استراتژی تـصمیم بـصورت گـرافـیکی است. ابتدایی‌ترین سطح این درخت، هدف تصمیم‌گیری است. سطوح میانی معیارهای مؤثر بر تصمیم‌گیری و سطح آخر گزینه‌های تـصمیم‌گیری هستند. مـهمترین بـخش در ایـن مرحله انتخاب معیارها و عوامل مؤثر بر هدف تصمیم می‌باشد.

1- Multiple obfect Decision Making (MODM)
2- Multiple attribute Decision Making

۲ـ مقایسات زوجی:[1]

در این مرحله با توجه به عوامل مؤثر، بر اساس هر یک از معیارها ماتریس های زوجی تشکیل می گردند. در هر یک از ماتریس ها با استفاده از یک مقیاس خاص که از ترجیح یکسان تا بی نهایت مرجح طراحی شده است، مقایسه ها صورت می پذیرند. تجربه نشان داده است که استفاده از مقیاس $\frac{1}{9}$ تا ۹ تصمیم گیرنده را جهت انجام مقایسه به گونه مطلوب‌تری توانا می سازد.

۳ـ نرمال سازی[2] و تعیین اولویت ها

برای بدست آوردن اولویت ها از مفهوم نرمال سازی و میانگین موزون استفاده می‌شود. یعنی گزینه‌های مختلف را بر اساس نتایج بدست آمده از نظر هر معیار با یکدیگر مقایسه کرده و سپس آنها را توسط میانگین وزنی نرمال می کنیم، سپس اطلاعات بدست آمده از این طریق را در ماتریسی که سطر و ستونهای آن را گزینه‌ها و معیارهای تصمیم‌گیری تشکیل می‌دهند مرتب کرده و با استفاده از مفهوم میانگین وزنی، وزنهای بدست آمده برای هر کدام از معیارها را در ماتریس های ستونی نرمال شده قبلی ضرب کرده و نتایج حاصله را بصورت سطری با هم جمع و در نهایت این جمع را با بقیه گزینه‌ها مقایسه نموده و اولویت هر گزینه را مشخص می‌نماییم.

۴ـ نرخ سازگاری[3]

نرخ سازگاری مکانیزمی است که بیان می دارد تا چه اندازه می توان به اولویت های حاصل شده از جدول ترکیبی اعتماد کرد.

۲ـ توابع ارزشی:

1- Pairwise Comprison. 2- Normalizing

3- Consistency rate

۱-۲) تعریف:

تابع U یک تابع ارزشی خوانده می‌شود اگر

$U:D \rightarrow R$ و $D \subset R^n$ و $x \in D$

$\text{if } x_1 \geq x_2 \iff U(x_1) \geq U(x_2)$

و $x_1 \sim x_2 \iff U(x_1) = U(x_2)$

D: فضای ارزیابی یعنی مجموع گزینه هایی که بر طبق ملاحظات موجود عملی هستند.

$\geq$: یعنی ترجیح دارد و یا تفاوت ندارد با

$\sim$: یعنی یکسان است با

به این ترتیب توابع ارزشی ساختار ترجیحی تصمیم‌گیری را لحاظ می کنند.

۲-۲) هم ارزی و منحصر به فرد بودن توابع ارزشی:

شرط هم ارزی دو تابع ارزشی:

توابع ارزشی $U_1(x)$ و $U_2(x)$ هم ارز هستند اگر: $\forall\, x$ و $y \in D$

$U_1(x) > U_1(y) \iff U_2(x) > U_2(y)$

و $U_1(x) = U_1(y) \iff U_2(x) = U_2(y)$

حال فرض کنید $f: R \rightarrow R$ تابعی مطلقاً صعودی باشد یعنی:

$\text{if: } x_1 > x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)$

حال اگر $U(x)$ و $f(x)$ به ترتیب یک تابع ارزشی و یک تابع مطلقاً صعودی باشند، $f(U(D))$ یک تابع ارزشی است و $U(x_1) \geq U(x_2) \iff f(U(x_1)) \geq f(U(x_2))$

در اینجا $f(U(x))$ هم ارز تابع $U(x)$ است.

این مطلب نتیجه می دهد که توابع ارزشی منحصر به توابع مطلقاً صعودی هستند و طبق فرضیات مشخص وقتی ساخت تابع $\geq$ باشد روشن می‌شود که تابع ارززشی مورد نظر منحصراً تابعی مطلقاً صعودی است.

۲-۳) تقریب درجه اول:

معمولاً توابع ارزشی غیر خطی هستند ولی تقریبهای درجه اول U(x) که به وسیله بسط ناقص Taylor معرفی شده‌اند مشابه رابطه زیر می‌باشند. $C + \sum_{j=1}^{n} wjxj$

باید توجه داشت که تابع (۱) هم ارز تابع ارزشی $K \sum_{j=1}^{n} wjxj$ با $K > 0$ است همانطور که بعداً خواهیم دید تمام توابع ارزشی در AHP به شکل زیر نشان داده می‌شوند.

$$U(x) = \sum_{j=1}^{n} wjxj \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{n} wj = ۱ \qquad (۲)$$

که $K = ۱$ فرض شده است و U(x) تابعی خطی با ضریب وزنی نرمال شده است.

۲-۴) نرخ های نهایی جانشینی:

فرض کنید $U(x_۱ \text{ و } x_۲ \text{ و} .. xn) = C$ تابعی در سطح بی تفاوتی در نقطه P باشد، نرخ نهایی جانشینی (xi در ارتباط با xj) در نقطه P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda ij \mid p = - \frac{dxi}{dxj} \mid p = \frac{\delta U}{\delta xj} \mid p \Big/ \frac{\delta U}{\delta xi} \mid p \qquad (۳)$$

در برهان ۲ ما به این اصول نیازمندیم تا تابع ارزشی را به وسیله نرخهای جانشینی ثابت آن بشناسیم ولی نتایجی که از برهان ۱ بدست می‌آید برای تعریف بعدی مورد نیاز است. نرخهای نهایی جانشینی U(x) به این شرط در سطح p سازگار هستند که در شرط زیر صدق کنند:

$$\lambda iK \mid p = \lambda ij \mid p x \lambda jK \mid p \qquad (۴)$$

برهان I:

اگر نرخهای نهایی جانشینی تابع ارزشی U(x) در نقطه P موجود باشند، آنها سازگار هستند.

اثبات:

با در نظر گرفتن U(x) و مشتقات جزئی آن معادله ۳ به معاله ۴ دلالت خواهد کرد و بنا به تعریف ۳ با فرض وجود نرخهای نهایی جانشینی و با وجود U(x) و مشتقات جزئی آن درخواهیم یافت که معادله ۴ به دست خواهد آمد.

در AHP برای جبران فقدان نرخهای جانشینی اصلی نرخهای جانشینی را برآورد می‌نمایند. از برهان I برمی‌آید که برآوردها ممکن است سازگار نباشند ولی خود نرخهای جانشینی همواره سازگار هستند. مشابه این حالت در رگرسیونهای خطی وجود دارد که اگر چه ممکن است داده‌ها، غیرخطی باشند ولی مدل اصلی خطی خواهد بود. در بخش بعد نشان خواهیم داد که وجود نرخهای نهایی جانشینی ثابت دلالت می‌کنند که U(x) ضرورتاً خطی است.

۵ـ۲) نرخ‌های جانشینی ثابت و تابع ارزشی خطی:

برهان زیر تابع ارزشی خطی را توسط نرخهای نهایی جانشینی آن معرفی می‌کند.

برهان II $U(x) \in c'(D) \iff ۱ \leq i,j \leq n$

$$U(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} wjxj\right) \qquad \forall\, p \in D : \lambda ij\ lp = \lambda ij$$

اگر در جانشینی xj به جای xi نرخهای نهایی جانشینی وجود داشته باشند و ثابت باشند تابع ارزشی به فرم بالا است اگر و تنها اگر برای هر جفت $۱ \leq i,j \leq n$ نرخهای نهایی جانشینی در جایگزینی xj به جای xi وجود داشته و ثابت باشند.

$$\lambda ij \mid p = \lambda ij \qquad p \in D$$

اثبات:

دیفرانسیل‌گیری از نرخهای نهایی جانشینی xi به جای xj در تابع $U(x) = f(\sum_{j=1}^{n} wjxj)$

مقدار ثابت $\frac{wi}{wj}$ را به دست می‌دهد.

فرض می‌کنیم نرخهایی نهایی جانشینی $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ وجود دارند و همگی ثابت هستند تابع U(x) باید در تمام معادلات زیر صدق کند.

$$\lambda ij = (\frac{\delta u}{\delta xj}) / (\frac{\delta u}{\delta xi}) \quad 1 < i,j < n$$

با بازنویسی این معادلات به صورت زیر داریم: (۵) $\frac{\delta U}{\delta xj} - \lambda ij \frac{\delta U}{\delta xi} = 0$

این معادلات مشتقات جزئی خطی U(x) با ضریب ثابت هستند.

با توجه به معادله ۵ برای مجموعه‌ای از معادلات خطی برای n نامعلوم $\frac{\delta U}{\delta xi}$ به راحتی مشخص می‌شود که تعداد معالات مستقل این سری ۱ − n معادله است. ۱ − n معادله برای ۱+j = i ۱ − n و ... و ۲ و ۱ = i مستقل هستند. سیستم ۵ یک راه حل است همانطورکه در بخش ۴ − ۲ دیدیم وجود نرخهای نهایی جانشینی دلالت می‌کنند که $\lambda ij \cdot \lambda jK = \lambda iK$ بدین گونه U(x) تعیین می‌شود. پس ما باید ۱ − n معادله خطی را حل کنیم.

$$(۶) \sum aij \frac{\delta v}{\delta xj} = 0 \qquad i = ۱ \text{ و ... و } n-۱$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -\lambda ۲۱ & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\lambda ۳۲ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\lambda ۴۳ & \dots & ۰ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -\lambda n \text{ و } n-۱ & \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۱ \end{bmatrix}$$

جایی که A= aij و ماتریس است.

در ماتریس A تمام درایه‌های زیر قطر اصلی صفر است و قطر اصلی آن هم ۱ می‌باشد پس ماتریس A ماتریس یکه نیست. باتغییر دادن $y=(A^{-1})^T x$ ، U را می توان تابعی از متغیرهای زنجیره‌ای ...و (y_1 و ... و y_n) خواند.

$$\frac{\delta U}{\delta yi} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta U}{xj} \frac{\delta xj}{\delta yi} \qquad (۷)$$

با توجه به اینکه $y=(A^{-1})^T x$ و $x=A^T y$ یا $xj = \sum_{j=1}^{n} aij\ yi$ در نتیجه $\frac{\delta xj}{\delta yi} = aij$ (۸)

با جاگذاری معادله ۸ در معادله ۷ و با توجه به معادله ۶ خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{\delta yi} = ۰ \quad \forall\ i=۱ \text{ و ... و } n-۱$$

پس U فقط به y_n وابسته است یا به عبارت دیگر $U = f(y_n)$

سرانجام باتوجه به ردیف آخر $(A^{-1})^T$ و همچنین (w_1 و ... و w_n) خواهیم دید:

$$y = (A^{-1})^T x \quad \rightarrow \quad y_n = \sum_{j=1}^{n} wjxj$$

پس $U = f(\sum_{j=1}^{n} wjxj)$ و یعنی برهان ثابت شد.

AHP تابع ارزش چندگانه را به وسیله نرخهای جانشینی سازگاری می‌سازد که این نرخهای نهایی جانشینی رابا برآوردهایی غیرسازگار به دست آورده است. با توجه به این که هر نسبت معیار به وزن فقط یکبار تعیین می‌شود این نرخهای جانشینی تمام Pها را در

D قرار داده و سپس سازگار می‌کند. از برهان ۱ چنین برمی‌آید که نرخهای توابع ارزشی AHP به شکل $U=f(\sum_{j=1}^{n} w_jx_j)$ هستند و روشن است که در روال کار AHP $f:R \rightarrow R\ ,\ f(x)=x$ بلتون Belten توضیح داد که تابع ارزشی AHP مسائل یک سطحی خطی هستند[1] ولی ما نشان دادیم که آن‌ها همیشه خطی هستند توجه کنید اگرچه x_j , w_j در داده‌های ورودی خطی نیستند ولی $U(x)$ در متغیرهای خود همیشه خطی است یعنی به شکل $U(x)=\sum_{j=1}^{n} w_jx_j$ است.

برهان III

توابع ارزشی ایجاد شده به وسیله AHP همیشه خطی هستند (یا AHP، توابع ارزشی را همیشه خطی در نظر می‌گیرد).

۳ـ معیار و گزینه‌ها

در توابع ارزشی، معیارها محورهای هم رتبه‌ای از فضای دامنه D تابع $U(x)$ هستند که عبارتند از (x_n و ... و x_1)=x (x نماینده i امین ملاک است).

هر گزینه نقطه‌ای (سطحی) در دامنه D نظیر (p_n و ... و p_1)=p اولین مرحله در فرآیند انتخاب فضای موجه می‌باشد و با توجه به این که نقاط هم رتبه به تعریف محورها بستگی دارند مباحث مطرح در ادبیات AHP در مورد وابستگی یا استقلال گزینه‌های هر معیار معنی نمی‌دهند و این در صورتی است که تبدیلات هم‌رتبه‌ای یکی از عملهای کلیدی در تحلیل سلسله مرتبه‌ای است.

۴ـ توابع ارزشی خطی AHP

۱- منبع شماره ۵

۱-۴) کاربرد AHP در مسأله مکان یابی یک کارخانه:

در بررسی اقتصادی یک طرح صنعتی جهت انتخاب مکان مناسب برای استقرار یک کارخانه تولیدی مواد شیمیایی، عوامل زیر به عنوان معیارهای اصلی گزینش محل ساختن کارخانه توسط یک کمیته کارشناسی تعیین شده‌اند.

y_1- عوامل طبیعی:
- c_1- زمین
- c_2- مجاورت با رودخانه
- c_3- وضعیت هوا از نظر دما و رطوبت

y_2- عوامل فنی:
- c_4- تسهیلات آب و هوا و مخابرات
- c_5- شبکه حمل و نقل مناسب
- c_6- دسترسی به نیروی انسانی ماهر

y_3- عوامل اقتصادی:
- c_7- دسترسی به منابع مواد اولیه
- c_8- دسترسی به بازار مصرف
- c_9- تأمین مالی از طریق وام

y_4- قوانین دولتی:
- c_{10}- مسائل زیست محیطی

با توجه به معیارهای انتخاب مکان، پس از بررسی‌های کارشناسی سه مکان مناسب در شهرکهای صنعتی سه استان در کشور، بعنوان گزینه‌های نهایی معرفی شده‌اند که عبارتند از مکان C و B و A. کمیته کارشناسی قصد دارد که یکی از این سه شهر را بعنوان انتخاب نهایی مکان اجرایی طرح معرفی نماید. لذا از روش AHP برای این امر استفاده می‌کند. جهت اولویت بندی هر کدام از گزینه‌ها از نظر معیارهای مطرح شده (c_1 و ... و c_{10}) مقایسات زوجی صورت گرفته است و ارزش نهایی هر گزینه با توجه به وزن معیار مورد نظر در ردیف آخر جدول شماره ۱ دیده می‌شود.

۲ـ۴) قانون جامع AHP- هم ارزی با یک تابع ارزشی خطی

جنبه‌های زیرین در وزن‌گذاری توسط AHP به بحث ما مربوط می‌شود.

● گزینه‌هایا بر اساس ارزش عددی به دست آمده مرتب می‌شوند یا بر اساس ساختار تابع ارزشی خود. حتی وقتی که داده‌های اولیه تابع ارزشی AHP خطی نباشند خود تابع همیشه در استدلال خود خطی عمل می‌کند.

● برای تمام معیارها، وزن گزینه‌ها با روش نرمال کردن بردارها به دست می‌آید و ستاندهٔ این فرآیند مجموعه‌ای از رتبه‌هایی است که برای هر گزینه به دست آمده‌اند و در جدول شماره ۲ به آنها تأکید شده است.

در این جدول گزینه‌ها $p_1 - p_{10}$ مکان شهر صنعتی A و B و C می‌باشند و محورهای هم رتبه $x_1 - x_{10}$ نمایانگر ملاکهای $c_1 - c_{10}$ هستند و مقدار U(x) برای هر گزینه pi به دست آمده است.

جدول شماره (۱) مسئله مکان یابی

معیار / گزینه	وزن هرمعیار	محل C	محل B	محل A
استحکام زمین c_1	0.031	0.6	0.2	0.2
مجاورت با رودخانه c_2	0.123	0.143	0.429	0.429
وضعیت هوا (دما و رطوبت) c_3	0.123	0.081	0.731	0.188
شبکه حمل و نقل مناسب c_4	0.055	0.333	0.333	0.333
تعمیرات آب و برق و مخابرات c_5	0.366	0.6	0.2	0.2
دسترسی به نیروی انسانی ماهر c_6	0.116	0.243	0.088	0.669
دسترسی به منابع مواد اولیه c_7	0.037	0.333	0.333	0.333
دسترسی به بازار مصرف c_8	0.087	0.063	0.265	0.672
تأمین مالی از طریق وام c_9	0.023	0.075	0.333	0.592
مسائل زیست محیطی c_{10}	0.042	0.649	0.072	0.279
	نرخهای نهایی	0.358	.296	0.346

جدول شماره (۲) مقایسه گزینه‌های هم‌ارز

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	UP
P1	.6	.143	.081	.333	.6	.243	.333	.063	.075	.649	.Q358
P2	.2	.429	.731	.333	.2	.088	.333	.265	.333	.072	.296
P3	.2	.429	.188	.333	.2	.669	.333	.672	.592	.279	.346

● در مسائل تک سطحی همه معیارها توسط روش ماتریسی AHP تعیین می‌شوند در این موارد داده‌های ورودی برآوردهایی از نرخ نهایی جانشینی معیارها هستند (که این موارد در بخش ۵ بررسی شده‌اند).

● رتبه‌بندی نهایی وزنی هر یک از گزینه‌ها بر اساس میانگین وزنی هر یک از گزینه‌ها نسبت به همه معیارها انجام می‌شود.

باید توجه داشت پیش فرض ثابت بودن نرخهای نهایی جانشینی معیارها در تعیین وزن هر یک از معیارها وجود دارد. (بر طبق برهان ۳) وزن نهایی هر گزینه بوسیله تابع خطی $U(pi) = \Sigma\ wjpij$ بدست می‌آید و pij ‌j‌امین رتبه iامین گزینه ااست و wj وزن معیار jام.

۴ـ۳) کاربردها:

در اصل، تصمیم گیرنده‌ای که از AHP برای رتبه‌بندی گزینه‌هایش استفاده می‌کند، این کار را بر طبق یک تابع ارزشی خطی انجام می‌دهد. این امر در رابطه با سلسله مراتب چند سطحی تا جایی که حاصل ترکیب خطی توابع خطی، خطی می‌باشد، صدق می‌کند. به بخش ۳ـ۵ مراجعه کنید. باید تأکید کرد که این امر علیرغم آگاه بودن تصمیم گیرنده یا تحلیل‌گر از وجود این توابع ارزشی یا خطی بودن آنها، وجود دارد.

ارتباط بین AHP و تابع ارزش افزایش توسط کامنتزکی [1] (Kamenetzky) مورد توجه

۱- منبع شماره ۶

قرارگرفت. بلتون (Belton) (بخش ۵۲) خطی بودن $U(pi) = \sum_{j=1}^{n} wjpij$ را در مسائل تک سطحی مشاهده کرده است ولی حتی در آن نوشته، هم تأکید به مسائلی متفاوت با این مطلب بوده است. با توجه به این که AHP همیشه یک تابع ارزشی خطی را ایجاد می‌کند کاربرد آن در تئوری مطلوبیت همانطور که طرفدارانش ادعا می‌نمایند، یک راه جذاب شهودی (ولی ناصحیح) برای ساختن تابع ارزشی خطی تصمیم گیرنده به وجود می‌آورد علاوه بر این، نمی‌توان فرض کرد توابع ارزشی تمام تصمیم گیرندگان در تمام تصمیمات آنها خطی باشد.

علاوه بر این در سال ۱۹۹۷ در مقاله‌ای که توسط بارزیلای نوشته شد، اعلام گردید که روش شناسی AHP جهت اینکه در برنامهٔ جامعه مدیریت مهندسی آمریکا قرار گیرد، فاقد اعتبار می‌باشد.[۱]

۵ـ تجزیه معیار ـ قانون ترکیب تابعی:

۱ـ۵) تبدیلات رتبه‌ای (هماهنگ):

تابع ارزشی $U(x)$ را می‌توان غیر مستقیم با استفاده از تبدیلات رتبه‌ای به دست آورد. $y=g(x)$ $y:R^n \rightarrow R^m$ که در این جا تعداد n ملاک به m ملاک کوچکتر تجزیه شده‌اند. پس $U(x)=f(y)=f(g(x))$ و U در اینجا با ترکیب توابع عناصر خود یعنی g,f به دست می‌آید. به همین ترتیب $f(g(x))$ تجزیه شده $U(x)$ به عناصر خودش است. تبدیلات مدل هم رتبه‌ای که در AHP برای تجزیه ملاکها استفاده می‌شود در زیر نشان داده شده است.

تبدیلات کلی در معادلات هم رتبه به وسیله تبدیل زیر انجام می‌شود.

$$U(x)= f_1 (f_2 (... (f_m(x)))) \quad (۹)$$

توجه کنید که عموماً تابع fk ممکن است غیر خطی باشد و یا متغیرهای وابسته داشته

۱- منبع شماره ۴

باشد. همچنین توجه کنید که تا وقتی fk یک تبدیل هم رتبه‌ای است نیازی نیست یک تابع ارزشی باشد. برای مثال fk می‌تواند تبدیل غیر خطی در یک فضای دو بعدی باشد و یا تبدیل به مبنای فارنهایت باشد (که این تبدیل نمی‌تواند خطی شود) از طرف دیگر اگر (برای راحت‌تر کردن تجزیهٔ U(x)، می توان f_k را یک تابع ارزشی فرض کنیم، اما عموماً شکل آن برای ما نامعلوم خواهد بود و شکل آن باید بوسیلهٔ ارزیابی ترجیحات تصمیم‌گیرنده تعیین شود.

اصول عمومی تجزیه و جانشین سازی در تمام شعب ریاضیات و علوم استفاده می‌شوند مثالهای روشن این مطلب تجزیه های ماتریس استاندارد برای سهولت مدل سازی جبری و تخمین و استفاده از جانشین سازی متغیرها مثل جایگزینی y= -x وقتی x خسارت y سود است در مدل سازی برنامه‌ریزی خطی هستند که همه اینها را می‌توان روش شناسی تصمیمات تک معیاره دانست البته راههای متعددی برای تجزیه و یا مدل‌سازی یک مسئله وجود دارد ولی مدلهای هم ارز باید نتایج مشابهی بدهند.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

$$, y_i = f_i(x_i) , f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

و با جانشین کردن توابع یعنی ترکیب توابع $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$

سرانجام توجه داشته باشد که تابع ارزشی ترکیبی ممکن است معکوس شده، به تابع ارزشی خطی نرمال شده همان طوری که در معادله ۲ داشتیم این مسئله ما را اغوا می‌کند تا فرض کنیم عناصر fk از U(x) با تقریب درجه اول خود جایگزین می‌شوند. این عناصر ممکن است همانگونه معکوس شده و به تابع ارزشی خطی نرمال شده تبدیل شوند. در بخش ۴ـ۵ نشان داده شده است که این فرض ضمنی که در تجزیه AHP به کار می‌رود غلط است.

۲ـ۵) تجزیه درختی خطی:

برای این که تجزیه سلسله مراتبه‌ای یک تابع ارزشی را به یک درخت مثل شکل شماره

۱ شرح دهیم مسأله مکان یابی AHP را مجدداً در نظر آورید. متغیرهای معیار $y_1 - y_4$ نماینده ۱ـعوامل طبیعی، ۲ـعوامل فنی، ۳ـعوامل اقتصادی، ۴ـقوانین دولتی هستند و به معیارهای فرعی $x_1 - x_{10}$ مربوطند همان هایی که در جدول شماره ۱ تعریف شدند با معادلات تجزیه سلسله مراتبی زیر داریم: $y_1 = ۰/۱۱۱x_1 + ۰/۴۴۴x_2 + ۰/۴۴۴x_3$

$y_2 = ۰/۱۰۳x_4 + ۰/۶۸۲x_5 + ۰/۲۱۶x_6$

$y_3 = ۰/۲۴۹x_7 + ۰/۶۸۲x_8 + ۰/۱۵۷x_9$

$y_4 = x_{10}$

$f(y) = ۰/۲۷۶y_1 + ۰/۵۳۶y_2 + ۰/۱۴۶y_3 + ۰/۶۴۲y_4 = ۰/۹۲۲۲$

بنابراین معیار عوامل طبیعی (y_1) به معیارهای کوچکتر. استحکام زمین (x_1) مجاورت با رودخانه (x_2) وضعیت هوا (x_3) تقسیم می‌شود و معیار عوامل فنی (y_2) به معیارهای کوچکتری از قبیل شبکه حمل و نقل مناسب (x_4)، تسهیلات آب و برق و مخابرات (x_5) و دسترسی به نیروی انسانی ماهر (x_6) تقسیم شده است. ملاک عوامل اقتصادی هم به دسترسی به منابع و مواد اولیه (x_7) دسترسی به بازار مصرف (x_8) و تأمین مالی از طریق وام تقسیم شده است و در آخر هم معیار قوانین دولتی (y_4) که به مفهوم مسایل زیست محیطی (x_{10})بوده است پس y_4 با x_{10} یکسان هستند.

که ضرایب تجزیه شده این معادلات در این نقطه جزیی در نظر گرفته شده‌اند (در (AHP) این ضرایب به وسیله روش نرمال سازی ماتریسهابا برآوردهای ناسازگار نسبتهای وزنی به دست می‌آیند). نتایج تبدیلات در

$U(x)= f(g(x) = ۰/۲۷۶(۰/۱۱۱x_1 + ...) + ... + ۰/۵۳۶ (۰/۱۰۳x_4 + ...) + ...$

که به صورت ساده‌تر زیر به این شکل درمی‌آیند:

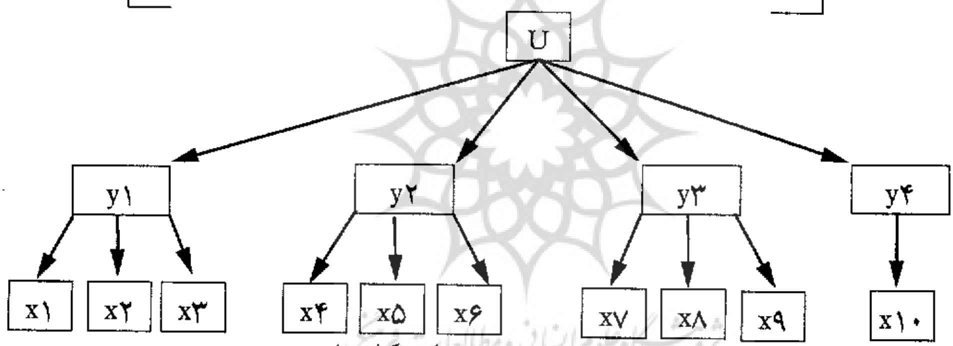
$U(x)= ۰/۰۳۱x_1 + ... + ۰/۰۵۵x_4 = \Sigma\ wixj$ نشان داده می‌شوند. وزنهای wj وزنهای معیارها در جدول ۱ هستند.

تا وقتی که معادلات تجزیه شده این مثال خطی هستند آنها در شکل ماتریسی روبرو می‌توانند قرار گیرند.

$$U = Ay \quad , \quad Ay = Bx \qquad (۱۰)$$
$$\Rightarrow \; U = ABX$$

جایی که بردارهای y و x عبارتند از: $x= [x_1 , \dots , x_{10}]^T$ و $y = [y_1, \dots , y_4]^T$, A یک ماتریس ۱×۴ خواهد بود $A= [۰/۲۷۶ \; ۰/۵۳۶ \; ۰/۱۴۶ \; ۰/۴۲]$, B ماتریس ۴×۱۰ زیر بدست می‌آید.

$$B=\begin{bmatrix} ۰/۱۱۱ & ۰/۴۴۴ & ۰/۴۴۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱۰۳ & ۰/۶۸۲ & ۰/۲۱۶ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۲۴۷ & ۰/۵۹۴ & ۰/۱۵۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$



شکل (۱) درخت تجزیه مسئله مکان یابی

۳-۵) تجزیه خطی عمودی:

معادله ۱۰ شکل عمومی تجزیه‌های خطی ۲ سطحه را نشان می‌دهد. معادلات m سطحی تجزیه، توسعه خطی ساده‌ای از معادله شماره ۹ هستند.

$$U = A_1 A_2 \dots Am\, X \qquad (۱۱)$$

تجزیه درختی در ساختار ماتریس Ai منعکس شده است. تجزیه خطی عمومی به وسیله جابجا کردن این محدودیتها بر روی Ai بدست می‌آید و این مسئله مدل سازی متغیرهای وابسته را ممکن می‌سازد. برای معادلات ضمنی و یا صریح موجود و وابستگی میان

گروههای متغیرها و آن چیزی که در ادبیات AHP به نام فرآیند تحلیل شبکه‌ای خوانده می‌شود همه را ممکن می‌کند. در AHP از مفهوم ابرماتریس برای این منظور استفاده می‌شود که مدل درستی برای تجزیه خطی عمومی نمی‌باشد. این مسئله هم مثل سایر مسائل در AHP از قبیل استفاده از روش نرمال سازی ماتریسی، استاندارد سازی بردارهای وزنی همان گونه که نشان داده شده منجر به مدل سازی نادرست می‌شوند.

۵-۴) نرخهای جانشینی زوجی و تجزیه خطی درختی:

AHP در تجزیه درختی با این فرض ضمنی کار می‌کند که عناصر درختی همگی تابع ارزشی هستند. ضرائب این توابع ارزشی به وسیله برآوردهای نرخهای جانشینی زوجی تعیین می‌شوند و همچنین به صورت ضمنی فرض می‌شود که تمام عناصر را مانند معادله ۲ می‌توان نرمال کرد. ما در این قسمت نشان خواهیم داد که عناصر توابع ارزشی را به این صورت نمی‌توان نرمال کرد. فرض کنید $U(x) = C + \sum_{j=1}^{n} w_i x_j$ ما برای این که تابع ارزشی منحصر به فرد خود را مشخص کنیم دو شرط به آن اضافه می‌کنیم که در AHP این دو شرط عبارتند از: $C = 0$ و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ مثال مکان یابی کارخانه بخش ۲-۵ را مجدداً به خاطر بیاورید در آنجا داشتیم:

$$U_1 = \sum_{j=1}^{4} a_i y_i \ , \quad y_i = \sum_{j=1}^{10} b_{ij} x_j \ \Rightarrow \ U_1(x) = \sum_{j=1}^{10} \left(\sum_{j=1}^{4} a_i b_{ij} \right) x_j$$

یا $U_1(x) = \sum_{j=1}^{10} w_j x_j \ , \quad w_j = \sum_{j=1}^{4} a_i b_{ij}$

حال با جاگذاری $y_i = L_i + m_i y_i$ تابع ارزشی ما به حالت زیر درخواهد آمد.

$$U_2(x)=k+\sum_{j=1}^{10} wjxj \quad , \quad wj=\sum_{i=1}^{4} m_i a_i b_i j$$

$k=\sum aili$ مقدار ثابت k

ما می بینیم که اگر ۴ ≥ i ≥۱ و ۱ = mi باشد پس در اینجا فقط li تغییر می‌کند (متغیر است و $U_1(x)$ هم ارز $U_2(x)$ می‌شود و بدین صورت لزوم خطی شدن همه توابع بیشتر از بیان نتایج هم ارزی توابع ارزشی، مورد توجه قرار می‌گیرد. دستکاری برای نرمال سازی عوامل mi بر نرخهای جانشینی اثر گذاشته و هم ارزی بین $U_2(x)$ و $U_1(x)$ را از بین می‌برد. ما معمولاً wi/wj ≠ wi/wj خواهیم دید. به عبارت دیگر توابع میانی را نمی‌توان نرمال کرد. با این تفاوت وزنهای نهایی ممکن است به وسیله نرخهای جانشینی بدست آمده از نرمال سازی اختیاری جداگانه به دست آیند ولی ما می‌دانیم که تنها یک نرمال سازی می‌تواند توسط درختها انجام شود.

۶ـ مثالها:

طبق روش نرمال سازی AHP که در هر شاخه از درخت انجام می‌شود هر ترکیبی در یک درخت با بیش از یک سطح شامل بیش از یک معادله نرمال‌سازی است. به عنوان نتیجه می‌توان گفت تعداد معادلات محدودیتها نادرست است و وزنهای نهایی بستگی به نحوهٔ گروه‌بندی معیارها دارد به عبارت دیگر تجزیه درختی هم‌ارز ممکن است منجر به دسته‌بندی غیر هم ارز توابع ارزشی و رتبه‌بندی‌ها شود. AHP برای تهیه وزنهای هر گزینه از وزنها و نرمال کردنهای میانی محدودیتها استفاده می‌کند. تعداد نرخهای مستقل و معادلات محدودیتها بستگی به تعداد ناشناخته‌ها دارد (که آن هم یکی کمتر از وزنهای نهایی گزینه‌ها است) و با توجه به این که تعداد محدودیتهای نرمال کننده باید به یک برسد و این هم بدون افزایش نرخهای وزنی مستقل توسط معادلات مربوطه ممکن نیست پس نمی‌توان توابع ارزشی را به وسیله AHP تعیین کرد.

۱-۶) رتبه بندی معکوس منجر به تجزیه سلسله مراتبی نادرست می‌شود.

مسئله زیر را در نظر بگیرید. مدیرعامل و ۳ مدیر ارشد یک شرکت در حال تحلیل وضعیت مدیریت بازار خود هستند. این شرکت محصولی را با قیمت ثابت تولید کرده می فروشد. فروش این شرکت توسط ۶ فروشگاه انجام می‌شود. فروشگاههای ۱ و ۲ در غرب شهر فروشگاه ۳ در مرکز شهر و فروشگاههای ۴ و ۵ در شرق شهر قرار گرفته‌اند. همه این فروشگاهها به این عقیده هستند که تابع ارزشی این شرکت $U(x) = x_1, \dots, x_5)$ بر اساس مجموع درآمد سالانه آنها می‌باشد و xi فروش سالانه فروشگاهها بر حسب میلیون دلار است.

(۵ و ... و ۱)=i شرکت باید یکی از دو استراتژی B و A را برای بازاریابی خود انتخاب کند. نتایج هر یک از استراتژی‌های در فروش فروشگاههای آن شرکت بـه شـرح زیـر است:

$A : p =$ (۱ و ۱ و ۱ و ۳ و ۳)

$B : q =$ (۳ و ۳ و ۱ و ۱ و ۱)

بنابراین معیارهای این مسئله عبارتند از x_5 و ... و x_1 گزینه‌ها استراتژی بازاریابی B و A هستند و فضای موجه برای گزینه‌ها هم رتبه به وسیله نقاط P و Q مشخص شده است. تمام آن ۴ مدیر اجرایی شرکت توافق دارند که تـمام مـعیارها ارزش یکسـانی دارنـد و تفاوت xj و xi در منطقه قرارگرفتن هر یک از فروشگاههاست بنابراین مدیرعامل تابع U(x) را به شکل زیر تعریف کرد.

$$U(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad (۱۲)$$

و به این دلیل که $U(p) = U(a) = q$ است پس بین دو گزینه تفاوتی وجود ندارد و ترجیح هر دو استراتژی را یکسان بدست آورد.

یکی از مدیران ارشد از روش AHP برای تجزیه تابع به شرح زیر استفاده کرد و او ابتدا مناطق را تقسیم بندی کرد و ارجحیت را به فروشگاه مرکز شهر داد. پس درخت تجزیه AHP و به شکل شماره ۲ درمی‌آید و s_1 مجموع فروش سالانه x_1 و x_2 است. s_2 فروش سالانهٔ x_3 و s_3 مجموع فروش سالانه x_4 و x_5 است .همان گونه که قبلاً متذکر شدیم وزنهای یکسانی را باید به هر یک از شاخه‌های درخت تخصیص داد. بنابراین بر طبق روال کار AHP خواهیم داشت.

$$ws_1 = ws_2 = ws_3 = \frac{1}{3} \quad wx_1 = wx_2 = \frac{1}{2} \quad wx_3 = 1 \quad wx_4 + wx_5 = \frac{1}{2}$$

پس وزنهای نهایی ملاکها بصورت زیر می‌باشد ۶/(۱ و ۱ و ۲ و ۱ و ۱) و تابع ارزشی به شکل زیر درمی‌آید.

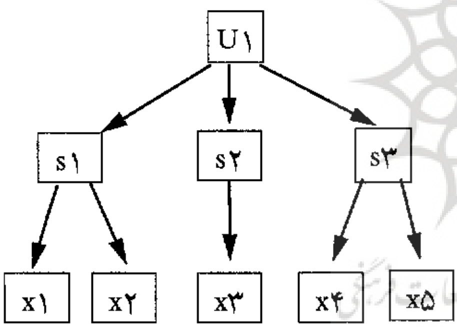
$$U_1(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \qquad (13)$$

(برای راحتی ما طرفین معادله را در ۶ ضرب کرده‌ایم)

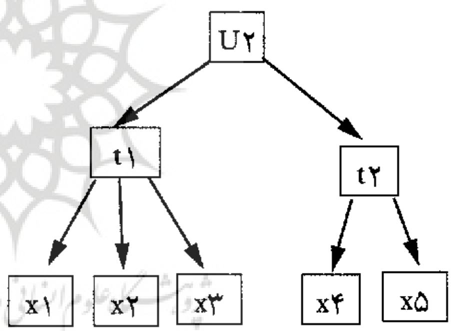
مدیر دوم که ارجحیت را به شرق می‌داد تجزیه را به روش نشان داده شده در شکل شماره ۳ انجام داد و به همین صورت سومین مدیر ارشد تجزیه خویش را به صورت شکل شماره ۴ انجام داد و معادلات توابع ارزشی هر یک به صورت زیر می‌باشد:

$$U_2(x) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \qquad (14)$$

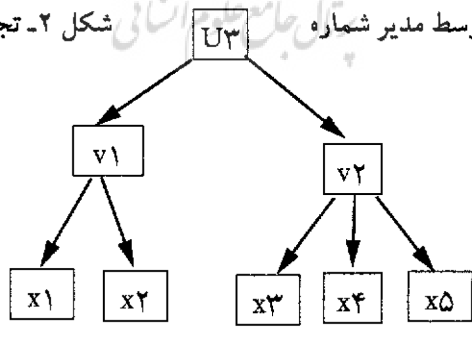
$$U_2(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \qquad (15)$$



شکل ۲ـ تجزیه توسط مدیر شماره ۱



شکل ۳ ـ تجزیه توسط مدیر شماره



شکل (۴) تجزیه توسط مدیر شماره ۳

شکلهای ۲ و ۳ و ۴ تصمیم‌گیری در مورد استراتژی بازاریابی

روشن است که توابع (۱۵ – ۱۲) از هم متفاوت هستند و داریم:

$U_1(p) = U_1(Q)$ و $U_2(p) < U_2(q)$ و $U_3(p) > U_3(Q)$

همانطور که ملاحظه می‌کنید با این طیف متفاوت از اولویتها که می‌بینیم روشن می‌شود که راهکار AHP در تجزیه سلسله مرتبه‌ای هم‌ارز (که یا مدلهای هم ارز هستند و یا توصیف مسئله) به صورت غیر هم‌ارزی (ناهمسانی) توابع را رتبه‌بندی کرده است. حال این ۴ مدل برنامه‌ریزی خطی را در نظر بگیرید.

$0 \leq xi \leq 5$

۱) $\text{Max}\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

۲) $\text{Max}\ s_1 + s_2 + s_3 \ \text{S.T}\ s_1 = x_1 + x_2 \ \ s_2 = x_3 \ \ s_3 = x_4 + x_5$

۳) $\text{Max}\ t_1 + t_2 \ \text{S.T}\ t_1 = x_1 + x_2 + x_3 \ \ t = x_4 + x_5$

۴) $\text{Max}\ v_1 + v_2 \ \text{S.T}\ v_1 = x_1 + x_2 \ \ v_2 = x_3 + x_4 + x_5$

گزینه‌های Q,P برای تمام این فرمولها که از قانون جانشینی تهیه شده‌اند صدق می‌کنند و همه ۴ مدل هم ارز هستند.

به وسیله روش مشابه به سادگی می‌توان برنامه‌هایی خطی (و یا غیرخطی) مشابهی را با تجزیه‌های غیردرختی (یعنی به صورت شبکه‌ای و یا بازخوردی) ساخت که آن مدلها از طریق معادلات محدودیتهای ضمنی به متغیرها مرتبط شوند.

سرانجام توجه کنید که وقتی تصمیم گیرنده به درستی ارزش ۱ خود را به نسبتها و نرخهای وزنی تمام گزینه‌ها تخصیص بدهد. این متدلوژی نمی‌تواند به ارزیابی غیرمنطقی و نگرشی تبدیل شود. بدون توجه به این که اولویت‌بندی توسط چه رویه‌ای انجام می‌گیرد این روش باعث ارزیابی‌های غیرمنطقی (یا حتی ارزیابی‌های منطقی) برای وزن‌گذاری می‌شود. بر طبق AHP این اولویت‌بندی‌ها منجر به تجزیه غلط می‌شوند حتی اگر تمام نرخها و نسبتها کاملاً منطقی و صحیح ارزیابی شده باشند.

۲-۶) ناکافی بودن اطلاعات در تجزیه به روش AHP:

ما می‌توانیم معادلات مسئله مکان یابی را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$U = a_1y_1 + \dots + a_4y_4$$

$$y_1 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \quad y_2 = b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 \qquad (۱۷ \text{ و } ۱۶)$$

$$y_3 = b_7x_7 + b_8x_8 + b_9x_9 \quad y_4 = b_{10}x_{10}$$

ضرایب متغیرهای میانی b , a با استفاده از نرخهای زیر در قالب AHP محاسبه می‌شوند.

$$a_1 / a_2 / a_3 / a_4 \quad b_1 / b_2 / b_3 \quad b_4 / b_5 / b_6 \quad b_7 / b_8 / b_9 \qquad (۱۸)$$

و با نرمال کردن

$$a_1 + a_2 + \dots + a_4 = 1 \quad b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

$$b_4 + b_5 + b_6 = 1 \quad b_7 + b_8 + b_9 = 1 \quad b_{10} = 1 \qquad (۱۹)$$

و با جایگذاری معادله (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$U = \Sigma\, wjxj = a_1b_1x_1 + a_1b_2x_2 + a_1b_3x_3 + a_2b_4x_4 + \dots \qquad (۲۰)$$

ضریب w نهایی هم به وسیله ضرایب متغیرهای میانی به دست می‌آید.

هر خواننده‌ای به راحتی می‌تواند به صورت عددی این روابط را اثبات کند - مثلاً $a_1b_1 = ۰/۱۱۱ \times ۰/۲۷۶ = ۰/۳۱ = w_1$ یعنی با ضرب کردن ریشه درخت در برگ آن x_1 بدست می‌آید توابع میانی $y_1 \dots y_4$ هنوز نرمال شده هستند.

$$\sum_{i=1}^{4} ai = ۰/۲۷۶ + ۰/۵۳۶ + ۰/۱۴۶ + ۰/۰۴۲ = ۱$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = ۰/۱۱۱ + ۰/۴۴۴ + ۰/۴۴۴ = ۱ \text{ ، } \dots$$

نرمال شدن در معادله ۱۹ که وزنهای واسطه را نرمال کرد منجر به نرمال شدن wهای نهایی می‌شود.

$$\sum_{i=1}^{10} wj = 1 \qquad (21)$$

و این رابطه صحیح است زیرا تابع ارزشی $U(x) = \sum_{i=1}^{10} wj\ xj$ فقط با تبدیلات مطلقاً صعودی تعیین شده است اگر چه همانطور که در مثال بازاریابی نشان داده شد کاربرد معکوس سازی درست نیست. نرمال سازی نهایی به نرمال سازی میانی دلالت نمی‌کند. (به استثناء $b_{10} = 1$ که به علت $y_4 = x_{10}$ یعنی عدم تجزیهٔ y_4 درست است) بیشتر اینکه، مثال بازاریابی نشان می‌دهد که معادله ۱۹ نمی‌تواند قسمتی از یک مدل سازی تجزیه‌ای درست باشد.

این موضوع به ما می‌رساند که اطلاعات باقیمانده - معادلات (۱۸-۱۶) برای تهیه نرخهای سازنده wهای w_{10} / ... / w_2 / w_1 کافی نیستند. برای مثال محاسبه $\frac{w_1}{w_4} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_4}$ هر دو نسبت $\frac{a_1}{a_2}$ را که در AHP به دست می آید و $\frac{b_1}{b_2}$ را که در AHP محاسبه نمی‌شود را نیاز داریم. بنابراین تابع ارزشی (۲۰) را نمی‌توان به وسیله اطلاعات موجود بدست آورد: تا زمانی که وزنهای هر شاخه مثلاً (x_1 , x_2 , x_3) محاسبه می‌شوند نمی‌توان وزنه‌های شاخه دیگر را بدست آورد.

منابع

1- Jonathan Barzilai, on the decomposition of value functions, operation research letters, 22, 1988 p, 159-170.

2- J,Barilai, Deriving weights from pair wise comparison Matrices, Operation Research Society 48 (12) 1997.

3- J. Barzilai, on the use of eigen vector in the AHP, proc. 1.th Int. conf. on Multiple Criteria Decision making, Taipei. vol 1, 1992.

4- J, Barzilai, A new methodology for dealing with conflicting engineering design Criteria, proc. 18th Annual Meeting of the American society for Engineering Management 1977.

5- V. Belton, A.E. Gear, on shortcoming of saaty's method of analytic hierarchies, omega 11 (3) (1983).

6- R. D. Kamenenetzky, the relationship between the analytic hierarchy process and the additive value functions, decision science, 13 (4) 1982.

7- Saaty, Thomas, A Scaling Method for priorities in Hierarchial Structures, Journal of Mathematical psychology Vol 15 No 3, 1977.

8- Saaty, Thomas, The Analytic Hierachy process, NewYork. Mc Graw Hill, 1980.

۹ ـ مؤمنی، منصور، پژوهش عملیاتی (مدلهای احتمالی)، انتشارات سمت، ۱۳۷۶

۱۰ـ دکتر اصغرپور، تصمیم گیریهای چند معیاره، انتشارات دانشگاه تهران.