

Valuation of Ijarah Sukuk Based on Equity Using Stochastic Mathematics Method

Hasan Kiaee*
Mostafa Soltani**

Received: 20/10/2021

Accepted: 26/01/2022


Abstract


The issuance of *ijarah* sukuk based on equity is one of the achievements of the capital market and is in fact the second generation of *ijarah* sukuk based on financial assets. These securities are important because their underlying assets are transparent and tradable in the market, and their price can be measured continuously. Therefore, sukukholders should be able to enjoy their most important property rights, namely the transfer of sukuk at the current price, and changes in stock prices should also be considered. But unfortunately, what can be seen in the design and use of these sukuk is that there is no difference between the pricing of these sukuk and ordinary *ijarah* sukuk and the interest rate of these bonds is considered to be fixed and proportional to the bank interest rate. Therefore, considering the importance and position of this type of *ijarah* sukuk, the article uses a library method and refers to similar studies as well as a random mathematics method and Monte Carlo simulation to provide a proposed valuation model that considers changes in the base asset price and interest rate proportional to the stock income, and its simulation using an experimental sample. Finally, this is compared to the market prices and it is observed that the simulation prices using the proposed model are different from them. It can eventually be noted that, in regard to the research assumptions and our proposed model, the issuance of *ijarah* sukuk based on equity is closer to the country's desirable model and will be more in line with the Islamic economy.

Keywords:

Ijarah Sukuk; Equity; Valuation Model; Stochastic Mathematics; Monte Carlo.

JEL Classification: C12, C15, G23, G32, Z12.

* Assistant Professor, Faculty of Islamic Studies and Economics, Imam Sadiq University, Tehran, Iran. kiaee@isu.ac.ir  0000-0002-1816-9205

** M.A. in Islamic Studies and Economics, Islamic Studies and Economics Faculty, Imam Sadiq University, Tehran, Iran (Corresponding Author)
mo.soltani@isu.ac.ir  0002-0002-2092-0571

ارزش گذاری صکوک اجاره مبتنی بر سهام با استفاده از روش ریاضیات تصادفی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۰۶

مقاله برای اصلاح به مدت ۱۰ روز نزد نویسندگان بوده است.

حسن کیایی*
مصطفی سلطانی**

چکیده

انتشار اوراق اجاره سهام یکی از دستاوردهای بازار سرمایه بوده و در واقع نسل دوم اوراق اجاره و مبتنی بر دارایی‌های مالی است. این اوراق از این جهت دارای اهمیت بوده که دارایی پایه آن شفاف و قابلیت مبادله در بازار دارد و قیمت آن به صورت مستمر قابل اندازه‌گیری است. بنابراین دارندگان اوراق باید بتوانند از مهم‌ترین حقوق مالکیتی خود، یعنی واگذاری اوراق به قیمت روز بهره‌مند شوند و تغییرات قیمت سهام نیز مدنظر قرار گیرد. اما متأسفانه آنچه در طراحی و به‌کارگیری این اوراق مشاهده می‌شود این است که تفاوتی در قیمت‌گذاری این اوراق با صکوک اجاره معمولی وجود ندارد و نرخ سود این اوراق نیز به صورت ثابت و متناسب با نرخ سود بانکی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین با توجه به اهمیت و جایگاه این نوع از اوراق اجاره، این مقاله با استفاده از روش کتابخانه‌ای و مراجعه به مطالعات مشابه و همچنین با استفاده از روش ریاضیات تصادفی و استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو به ارائه یک مدل پیشنهادی ارزش‌گذاری با در نظر گرفتن تغییرات قیمت دارایی پایه و نرخ سود متناسب با عایدی سهام و شبیه‌سازی آن با استفاده از یک نمونه تجربی می‌پردازد و در نهایت با قیمت‌های بازار مقایسه شده و مشاهده می‌شود که قیمت‌های شبیه‌سازی با استفاده از مدل پیشنهادی، با قیمت‌های بازار متفاوت است و در نهایت می‌توان اشاره کرد که انتشار اوراق اجاره مبتنی بر سهام با در نظر گرفتن مفروضات پژوهش و ارائه این مدل پیشنهادی، به الگوی ایده‌آل و مطلوب کشور نزدیک‌تر بوده و همچنین مطابقت بیشتری با اقتصاد اسلامی نیز خواهد داشت.

واژگان کلیدی

صکوک اجاره؛ سهام؛ مدل ارزش‌گذاری؛ ریاضیات تصادفی؛ مونت کارلو.

طبقه‌بندی JEL: G12, G15, G23, G32, Z12

* استادیار، دانشکده معارف اسلامی و اقتصاد، دانشگاه امام صادق علیه‌السلام، تهران ایران

kiaee@isu.ac.ir

0000-0002-1816-9205

** دانش‌آموخته کارشناسی ارشد معارف اسلامی و اقتصاد، دانشکده معارف اسلامی و اقتصاد، دانشگاه امام صادق علیه‌السلام،

mo.soltani@isu.ac.ir

0000-0002-2092-0571 (نویسنده مسئول) تهران ایران

مقدمه

بحث اوراق اجاره سهام از بحث‌های جدید اوراق تأمین مالی به‌شمار می‌رود و با توجه به ویژگی‌هایی که دارد پیش‌بینی می‌شود استفاده از آن به‌سرعت توسعه پیدا کند و مزیت‌های متعددی نسبت به اوراق معمولی دارد. این اوراق از این جهت دارای اهمیت است که دارایی پایه آن شفاف و قابل‌مبادله در بازار است و قیمت آن به‌صورت مستمر قابل‌اندازه‌گیری است. پس دارندگان اوراق باید بتوانند از مهم‌ترین حقوق مالکیتی خود یعنی واگذاری اوراق به قیمت روز بهره‌مند شوند. اما متأسفانه آنچه در طراحی و به‌کارگیری این اوراق مشاهده می‌شود این است که تفاوتی در قیمت‌گذاری و فرایند مبادله این اوراق با اوراق صکوک معمولی وجود ندارد.

همان‌طور که اشاره شد، اوراق اجاره مبتنی بر سهام، در واقع اوراقی است که دارایی پایه آن سهام است و از این جهت که دارایی پایه آن شفافیت دارد و قیمت آن به‌صورت روزانه در بازار مشخص است و نسبت به اوراق اجاره معمولی برتری دارد و لذا فرایند قیمت‌گذاری آن نیز شفافیت بیشتری نسبت به اوراق اجاره معمولی خواهد داشت. لذا با توجه به اینکه دارایی پایه این نوع از اوراق اجاره به‌صورت سهام است، سؤالی که به وجود می‌آید این است که آیا فرایند قیمت‌گذاری همانند قیمت‌گذاری اوراق اجاره معمولی است؟ در صورتی که پاسخ به این سؤال منفی باشد، چه فرایند جایگزینی را می‌توان برای ارزش‌گذاری این اوراق در نظر گرفت؟ در حال حاضر با توجه به شرایط فعلی انتشار این اوراق و علی‌رغم اهمیت و ماهیت و جایگاه این اوراق، می‌توان بیان کرد که فرایند و شیوه قیمت‌گذاری همانند قیمت‌گذاری اوراق اجاره معمولی است، در حالی که متفاوت هستند. در مدل پیشنهادی قصد داریم تا عملاً فرایند تصادفی تغییر قیمت اوراق را به تغییر قیمت سهام ارتباط دهیم که در واقعیت نیز باید به همین صورت باشد و افزایش یا کاهش قیمت سهم پایه نیز در افزایش یا کاهش قیمت اوراق تأثیرگذار باشد. نکته دیگری که وجود دارد، مربوط به نرخ اجاره‌بها یا نرخ سود اوراق

است و اینکه این نرخ برای انواع و اقسام سهام نباید ثابت باشد بلکه باید متناسب با عایدی سهام مورد اجاره در نظر گرفته شود. لذا جهت تعیین نرخ اجاره‌بها نیز می‌توان سازوکاری را در نظر گرفت تا نرخ اجاره متناسب با عایدی سهام مورد اجاره باشد. با توجه به ماهیت اوراق اجاره مبتنی بر سهام و اینکه دارایی پایه آن سهام است و تفاوت آن با اوراق اجاره معمولی در شرایط عملیاتی، این مقاله در نظر دارد تا در ابتدا به معرفی اجمالی از صکوک اجاره سهام و مفروضات پژوهش پرداخته و در ادامه به ارزیابی مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مرتبط با سهام و ارائه یک مدل پیشنهادی جهت ارزش‌گذاری و همچنین شبیه‌سازی این اوراق با استفاده از یک نمونه تجربی می‌پردازیم.

۱. پیشینه تحقیق

اوراق اجاره سهام از جمله بحث‌های جدید اوراق تأمین مالی به‌شمار می‌رود و با توجه به ویژگی‌هایی که دارد پیش‌بینی می‌شود استفاده از آن به سرعت توسعه یابد. مالیر و آلویدی^۱ (۲۰۰۲) در مقاله‌ای با عنوان «قیمت‌گذاری بدهی مبتنی بر سهام با استفاده از مدل واسیچک»، بدهی مبتنی بر سهامی را در نظر گرفته‌اند که دارنده آن، هم پرداختی سود و هم پرداختی مربوط به عملکرد شاخص سهام را دریافت می‌کند. در این مقاله، نویسنده از رویکرد تابع‌گراین برای محاسبه ارزش چنین ابزاری استفاده می‌کند البته با فرض اینکه شاخص سهام از یک گام تصادفی^۲ تبعیت می‌کند و نرخ بهره بدون ریسک نیز توسط مدل واسیچک داده می‌شود. در ادامه به شیوه استفاده از آن پرداخته می‌شود.

وجدی دوسوکی^۳ (۲۰۱۰) در مقاله با عنوان «آیا اهداف شریعت در ساختار اوراق مبتنی بر سهام ظاهر و بازنمود می‌شود یا خیر؟»، بیان می‌کند که بازار سرمایه اسلامی، جزئی مهم در کل سیستم مالی اسلامی بوده و نقش مؤثری دارد. به عقیده وی، بازارهای سرمایه اسلامی همانند همتای متعارف خود یعنی بازارهای اسلامی متعارف،

نقش سرمایه‌گذاری بخش بانکداری اسلامی را در جمع‌آوری سرمایه برای سرمایه‌گذاری بلندمدت دارد و این سرمایه‌گذاری‌های بلندمدت از طریق قراردادها و ابزارهای مختلف شرعی تضمین می‌شوند. هدف این مقاله بررسی ساختار صکوک مبتنی بر حقوق صاحبان سهام است که امروزه یکی از محبوب‌ترین ابزارهایی است که در بازار سرمایه اسلامی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مقاله صرفاً به اوراق مضاربه و اوراق مشارکت می‌پردازد. در این مقاله به اوراق اجاره و ارزش‌گذاری اوراق، پرداخته نشده و رویکرد متفاوتی دارد و صرفاً به اهمیتی که برای بازار سرمایه و سهام قائل شده می‌توان اشاره نمود.

صالح‌آبادی، میرطاهر، فدایی‌واحد و علی‌حسینی (۱۳۹۲) در مقاله‌ای با عنوان «مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مالی اسلامی اجاره»، علاوه بر تبیین تفاوت‌های میان اوراق قرضه و اوراق اجاره، ذکر می‌کنند که اعتبار اوراق اجاره برخلاف اوراق قرضه علاوه بر اعتبار ناشر به مؤلفه مهم دیگری به نام دارایی پایه نیز بستگی دارد و به همین دلیل با بالا رفتن ارزش دارایی پایه، ارزش ورقه نیز افزایش پیدا می‌کند و همچنین در صورت کاهش ارزش دارایی پایه، ارزش ورقه نیز کاهش پیدا می‌کند. البته می‌توان ریسک کاهش ارزش دارایی پایه را با دادن اختیار فروش به خریدار اوراق از بین برد. همچنین در این مقاله به اهداف انتشار اوراق اجاره یعنی تأمین دارایی و تأمین نقدینگی و اوراق اجاره رهنی می‌پردازد. سپس با بیان جریان‌های نقدی دوره‌ای، هزینه کارمزد و مبادله‌ها و نرخ تنزیل به‌عنوان ارکان ارزش‌گذاری اوراق اجاره، ۴ مدل برای ارزش‌گذاری انواع اوراق اجاره ارائه می‌کنند: **اول:** اوراق اجاره با قیمت ثابت از پیش تعیین شده؛ **دوم:** اوراق اجاره با قیمت شناور بر اساس حرکت براونی (فرایند وینر)؛ **سوم:** اوراق اجاره با اختیار فروش دارایی در سررسید برای سرمایه‌گذاران با قیمت ثابت؛ **چهارم:** اوراق اجاره با اختیار فروش دارایی در سررسید برای سرمایه‌گذاران با قیمت شناور بر اساس حرکت براونی (فرایند وینر). لازم به ذکر است که در این مقاله

به ارزش‌گذاری صرف اوراق اجاره با اجاره‌بهای ثابت پرداخته و در خصوص اوراق اجاره‌ای که دارایی پایه آن سهام بوده صحبتی نشده و به تبع آن، در خصوص ارزش‌گذاری اوراق اجاره سهام نیز پژوهشی صورت نگرفته است.

عیسی و شفیع^۴ (۲۰۱۷م) در مقاله‌ای با عنوان «رویکرد تصادفی جهت تعیین نرخ سود محصولات تأمین مالی اسلامی»، قیمت دارایی را یک حرکت براونی^۱ استاندارد فرض کرده و تغییرات قیمت را در قالب یک معادله دیفرانسیل تصادفی بیان می‌کنند. در ادامه با تبدیل مدل به حرکت براونی هندسی (نمایی)، مدل را تکمیل می‌کنند و در نهایت پارامترها را تخمین می‌زنند.

اعتصامی و سعدی (۱۳۹۹) در مقاله‌ای با عنوان «امکان‌سنجی فقهی - حقوقی اجاره سهام و کاربردهای مالی آن»، به امکان‌سنجی فقهی - حقوقی اجاره سهام می‌پردازند. در همین راستا پس از بررسی ماهیت فقهی و حقوقی سهام، شروط عقد اجاره با ماهیت و ویژگی‌های سهام مورد تطبیق قرار گرفت. در این مقاله پس از بررسی فقهی - حقوقی به این نتیجه رسیده‌اند که تنها منافع منفصل سهام مانند سود تقسیمی با اجاره قابل انتقال است و سایر منافع مالکیتی، متصل به سهام و برای موجد است، درحالی‌که در مصوبه شورای فقهی بورس همه منافع به مستأجر منتقل می‌شود. در این مطالعه در خصوص مسائل ارزش‌گذاری اوراق اجاره سهام، پژوهشی صورت نگرفته است.

در نهایت باید اشاره کرد با وجود اینکه انتشار اوراق اجاره مبتنی بر سهام در حال افزایش است و ماهیت این اوراق با توجه به داشتن دارایی پایه مالی و نه فیزیکی با اوراق صکوک معمولی متفاوت است، تاکنون پژوهشی پیرامون ارزش‌گذاری صکوک اجاره مبتنی بر سهام و همچنین استفاده از روش ریاضیات تصادفی صورت نگرفته و مقاله اعتصامی و سعدی (۱۳۹۹) تنها پژوهشی است که به این موضوع پرداخته که البته به امکان‌سنجی فقهی و اقتصادی آن اشاره می‌کند. از دیگر مقاله‌های مرتبط می‌توان به

¹ Brownian motion

مقاله شلدون لین و تان^۵ (۲۰۰۳) اشاره نمود که در مقاله خود به ارزش گذاری سنوات^۶ مبتنی بر سهام با در نظر گرفتن نرخ بهره تصادفی می پردازند که این مقاله نیز با موضوع مورد بحث مرتبط است. اما با توجه به اینکه خواسته های ما از مقاله، شیوه ورود و استخراج معادله دیفرانسیل تصادفی است، لذا چندان استفاده ریاضیاتی نمی توان از آن داشته باشیم. برنان و زیبا^۷ (۲۰۰۰) نیز در مقاله خود به بحث ترکیب سهام و اوراق قرضه می پردازد که تا حدودی با موضوع پژوهش مرتبط است. در خصوص این مقاله باید اضافه کنیم که آن چیزی که مدنظر است، به خوبی تبیین نشده و در خصوص معادله دیفرانسیل تصادفی و شیوه ورود متغیرها صحبتی نشده است.

۲. صکوک اجاره مبتنی بر سهام

این ابزار جدید مالی یعنی اوراق اجاره سهام در واقع نسل دوم اوراق اجاره و مبتنی بر دارایی های مالی است. همان طور که در مقدمه بیان شد، اهمیت این اوراق از این جهت بوده که دارایی پایه آن شفاف و قابل مبادله در بازار است و قیمت آن به صورت مستمر قابل اندازه گیری است. پس صاحبان اوراق باید بتوانند از مهم ترین حقوق مالکیتی خود یعنی واگذاری اوراق به قیمت روز بهره مند شوند.

با توجه به ساختاری که در درون این اوراق وجود دارد، این اوراق کاربردهای متعددی جهت تأمین مالی دارد. در صورتی که نهادهای دولتی و غیردولتی یا شرکت ها و هلدینگ های مالی که سهام عمده شرکت ها را در اختیار دارند، قصد داشته باشند تا از طریق انتشار اوراق اجاره نسبت به تأمین مالی خود اقدام کنند. همچنین اگر دارایی های فیزیکی قابل اجاره آن ها نیاز مالی آن ها را تأمین نکند، می توانند سهام خود را دارایی پایه موضوع اجاره قرار دهند. با توجه به تبصره های ۳۶ و ۳۷ اصلاح قانون بودجه سال ۱۳۹۵ جمهوری اسلامی ایران که دولت جهت تأمین مالی خود می تواند اوراق بهادار اسلامی منتشر کند و نیز با توجه به محدودیت های دولت در انتقال دارایی های خود جهت انتشار اوراق اجاره، در خصوص استفاده دولت از صکوک معمولی با موانعی

روبرو است. بر اساس این کاربرد، دولت یا بخش خصوصی قادر است تا جهت تأمین مالی طرح‌ها، پروژه‌ها و بودجه‌های سنواتی خود از جمله پرداخت‌های بدهی، از این اوراق استفاده کند. دولت صاحب سهام عمده برخی از شرکت‌های بزرگ است و به همین علت توانایی این را دارد که از ابزارهای تأمین مالی اسلامی جهت تأمین مالی خود استفاده کند. دولت برای تأمین کسری بودجه و یا تسویه دیون خود می‌تواند با انتشار اوراق اجاره سهام و کسب نقدینگی، کسری بودجه خود را تأمین کند و بدهی‌های خود را تسویه نماید. بنابراین یکی از کاربردهای مهم این اوراق اجاره سهام، به جایگاه آن در نزد دولت برمی‌گردد که به‌طور معمول به دلیل نبود بازار متشکل برای تسویه بدهی‌های آن، اکثر بدهی‌هایش به‌صورت زنجیره‌ای به‌نظام بانکی و بانک مرکزی متصل می‌شود که آسیب‌هایی را به دنبال دارد که از جمله آسیب‌های آن، شامل قفل شدن منابع بانکی به دلیل انجام نشدن تعهدات دولت و رشد پایه پولی به دلیل استقراض از بانک مرکزی می‌شود. تشکیل بازار بدهی در ایران می‌تواند زمینه خروج غیرتورمی از رکود را فراهم کند. فلذا با توجه به محدودیت‌های دولت در انتقال دارایی‌های خود جهت انتشار اوراق اجاره، استفاده از این نوع تأمین مالی برای دولت با موانعی رو به خواهد بود، بنابراین می‌توان از اوراق اجاره مبتنی بر سهام استفاده نمود. پس همان‌طور که توضیح داده شد یکی دیگر از کاربردهای اصلی اوراق اجاره سهام، بحث تأمین مالی خصوصاً دولت و همچنین نهادهای مالی و شرکت‌های سرمایه‌گذاری و هلدینگ‌ها است.

مکانیسم و رویه انتشار صکوک اجاره سهام به این صورت است که بانی دارایی‌های خود یعنی سهام یا سبدي از مجموعه سهم‌هایی که تحت تملک خود دارد را به نهاد واسط می‌فروشد و در ادامه اجاره به‌شرط تملیک می‌کند، همچنین نهاد واسط با انتشار اوراق اجاره، وجوه سرمایه‌گذاران را جمع‌آوری کرده و قیمت سهام را به بانی پرداخته و آن‌ها را خریداری می‌کند. در ادامه، بانی با اجاره‌بهای مشخص دارایی‌های

مزبور را اجاره به شرط تملیک می‌کند. در نتیجه سهام بانی به مالکیت صاحبان اوراق در می‌آید و به نهاد واسط به‌عنوان وکیل صاحبان اوراق تحویل داده می‌شود و مبلغ اجاره‌بها از جانب بانی در اقساط معین به سرمایه‌گذاران پرداخت می‌شود و در نهایت دارایی به ملکیت بانی برمی‌گردد. به عبارت دیگر، در سررسید اوراق، نهاد واسط سهامی را که در تملک خود دارد به تملیک بانی در می‌آورد و وجوه حاصله را بابت پرداخت اصل اوراق اجاره به دارندگان اوراق پرداخت می‌کند (اعتصامی و سعدی، ۱۳۹۹، ص. ۱۲۵). در خصوص شیوه انتشار صکوک اجاره مبتنی بر سهام، چند نکته حائز اهمیت است. اولین نکته، مربوط به نرخ سود این اوراق است. در حال حاضر نرخ سود اوراق به صورت ثابت و متناسب با نرخ سود بانکی در نظر گرفته می‌شود. در حالی که با توجه به ماهیت این اوراق، لازم است تا این نرخ متناسب با عایدی سهام مورد اجاره باشد. نکته دوم مربوط به منافع سهام و تأثیرگذاری آن بر ارزش‌گذاری این اوراق است. هر سهم دارای یک‌سری منافع است که برخی از آن به مستأجر (بانی) منتقل می‌شود و برخی برای موجر (دارندگان اوراق) باقی می‌ماند. بنابراین لازم به ذکر است که در صکوک اجاره سهام، سود تقسیمی سهام به بانی منتقل شده و در نرخ سود اوراق نیز تأثیرگذار است و مابقی منافع از جمله سود ناشی از نوسان قیمت سهم و حق تقدم و حق رأی برای دارندگان اوراق باقی می‌ماند. در بخش مربوط به ارائه مدل پیشنهادی، در خصوص شیوه مدل‌سازی و استفاده از متغیرها و استفاده از تغییرات قیمت دارایی پایه به تفصیل بحث می‌شود.

انتشار این نوع از اوراق اجاره برای اولین دفعه بدین صورت بوده که دولت با استناد به رأی کمیته تخصصی فقهی و موافقت سازمان بورس و اوراق بهادار، مجوز انتشار اوراق اجاره تأمین نقدینگی تا سقف ۵۰ هزار میلیارد ریال توسط سازمان تأمین اجتماعی را صادر کرد که با تضمین و تسویه اصل و سود توسط دولت که در بودجه سنوات بعد نیز پیش‌بینی می‌شود بدهی دولت با سازمان تأمین اجتماعی تسویه شود.

این اوراق نخستین اوراق اجاره سهام بازار سرمایه بود که شرکت سرمایه‌گذاری تأمین اجتماعی (شستا) برای تأمین نقدینگی خود به پشتوانه سهام شرکت سرمایه‌گذاری نفت و گاز و پتروشیمی تأمین (تاپیکو) در اسفندماه ۱۳۹۶ باهدف تسویه مطالبات سازمان تأمین اجتماعی اقدام به انتشار آن کرد. سود این اوراق ۲۰ درصد و مدت پرداخت آن هر ۶ ماه یکبار بود. ضامن این اوراق بانک رفاه کارگران بوده و با توجه به صحبت‌هایی که صورت گرفته بوده، ضمانت اوراق قابل انتقال به دولت بود (کاوند، ۱۳۹۷، ص. ۱۷). لازم به ذکر است که تاکنون ۱۸ مورد انتشار اوراق اجاره مبتنی بر سهام با همین روش و وضعیت صورت گرفته است که دو مورد از آن‌ها سررسیده شده و مابقی در حال معامله هستند.

۳. ارزیابی مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مرتبط با سهام

در این بخش قصد داریم تا به توضیحاتی در خصوص مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مرتبط با سهام و ارزیابی آن‌ها بپردازیم. پیش از اینکه به این مسأله اشاره کنیم، جهت فهم و پردازش دقیق‌تر مطالب مربوط به مدل‌سازی و ارزش‌گذاری با استفاده از روش ریاضیات تصادفی، لازم است تا مفاهیم و مقدمات ریاضیات تصادفی متناسب با اقتضای مسائل موجود مطرح شود.

ریاضیات مالی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که با بازارهای مالی سروکار دارد. ریاضیات مالی و تصادفی کاربردهای متعددی دارد که امروزه جایگاه ویژه‌ای در بازارهای مالی پیدا کرده و گسترش زیادی داشته است. از جمله کاربردهای مهمی که در خصوص ریاضیات مالی می‌توان ذکر کرد، مدل‌های ارزش‌گذاری است که بسیار نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. مدل‌های قیمت‌گذاری شامل مواردی همچون قیمت‌گذاری سهام و قیمت‌گذاری اوراق قرضه و قیمت‌گذاری قراردادهای آتی و قیمت‌گذاری قراردادهای معاوضه و قیمت‌گذاری اختیارات است.

همان‌طور که توضیح داده شد، یکی از کاربردهای ریاضیات تصادفی، ارزش‌گذاری اوراق قرضه است که مدل‌های بسیار زیادی برای مدل‌سازی تصادفی قیمت اوراق قرضه وجود دارد و مرتبط با موضوع پژوهش است.

اهمیت بحث ارزش‌گذاری اوراق قرضه به این صورت است که در تدوین مدل ارزش‌گذاری برای صکوک اجاره سهام با توجه به اینکه مدل ارزش‌گذاری با استفاده از ریاضیات تصادفی در خصوص اوراق اجاره تعریف نشده و همچنین با توجه به اینکه مدل ارزش‌گذاری اوراق اجاره سهام نزدیک به مدل ارزش‌گذاری اوراق قرضه است، لذا از روش مدل‌سازی ارزش‌گذاری اوراق قرضه با نرخ سود متناسب با سهام می‌توان استفاده کرد و باید توجه داشت که نرخ سود صکوک اجاره سهام، ماهیت تصادفی خود را از عملکرد تصادفی عین مستأجره یعنی قیمت یک سهام مشخص به‌عنوان دارایی پایه می‌گیرد و بنابراین برای هر سهم لازم است تا شرایط و ویژگی‌های خاص آن در فرایند تصادفی در نظر گرفته شود.

در ابتدای بحث ریاضیات تصادفی باید اشاره کنیم زمانی که به سراغ داده‌های مالی می‌رویم، با فرکانس‌های زیادتری مواجه هستیم و با نوسانات عجیب‌وغریبی سروکار داریم و ما را دچار مشکل خواهد کرد. بدین معنی که اصطلاحاً به زبان ریاضی، مشتق‌ناپذیر است و نمودار آن دارای نقاط تیز است. در این حالت مدل‌سازی ما دچار مشکل خواهد شد و برای این معضل دو راه وجود دارد. راه‌حل اول به این صورت است که نوک‌های تیز مانند را چشم‌پوشی کنیم و یک نمودار خطی برای آن نمودار سابق رسم کنیم و لذا در این حالت می‌توانیم روند^۱ را مدل‌سازی کنیم اما نکته‌ای که وجود دارد این است که در این حالت ما نمی‌توانیم نوسانات و نوک‌های تیز را مدل‌سازی کنیم. این حالت برای تحلیل‌های بلندمدت مناسب بوده و لازم به ذکر است که در این حالت بحث ریاضیات تصادفی مطرح نیست. در حالت دیگر اما اگر قصد

داریم که تحلیل‌هایمان به شکل کوتاه‌مدت و دقیق‌تر باشد، تمام نوسانات^۹ و بالا و پایین‌هایی که وجود دارد، از اهمیت زیادی برخوردار است.

در ذیل بحث نوسانات، لازم به ذکر است که چند نوع نوسانات تصادفی یا فرایند تصادفی وجود دارد که شامل فرایند تصادفی انتشار^{۱۰}، فرایند تصادفی پرش^{۱۱} و فرایند تصادفی پرش-انتشار^{۱۲} است. فرایند تصادفی پرش-انتشار بدین معنی است که در برخی مواقع یک داده مالی به‌طور مثال قیمت سهام یک شرکت نوسان خود را در هنگام معاملات دارد ولی در یک لحظه مشاهده می‌شود که قیمت به سمت بالا یا پایین پرش دارد.

در راستای بحث فرایند تصادفی باید اضافه کنیم زمانی که در خصوص فرایند تصادفی صحبت می‌کنیم لازم است تا در خصوص موارد مربوط به احتمال از جمله تابع توزیع احتمال و تابع چگالی احتمال آشنائیت داشته باشیم. در فضای مربوط به احتمال، چند مفهوم مهم مورد اشاره قرار می‌گیرد از جمله فضای نمونه (Ω) ، جبر سیگما (\mathcal{F}) و مفهوم احتمال (P) . اصطلاحاً این سه‌گانه (P, \mathcal{F}, Ω) را فضای احتمال گوئیم. مجموعه‌ای از همه رخدادها ممکن را فضای نمونه (Ω) گوئیم. به‌طور مثال اگر در خصوص آب‌وهوای روز فردا صحبت می‌کنیم، ممکن است که هوا بارانی یا ابری یا آفتابی یا ... باشد که مجموعه‌ای از همه حالت‌ها را فضای نمونه گوئیم. یا اینکه به‌طور مثال اگر در خصوص قیمت سهام صحبت می‌کنیم، فضای نمونه‌اش می‌تواند بی‌نهایت باشد. پس به‌طور خلاصه می‌توان اشاره کرد که فضای نمونه تعدادش می‌تواند محدود یا بی‌نهایت باشد. نکته‌ای که وجود دارد این است که اگر فضای نمونه محدود باشد، مشکلی نخواهیم داشت و از همان Ω استفاده می‌کنیم اما به دلیل اینکه ممکن است فضای نمونه بی‌نهایت باشد، از مفهوم دیگری استفاده می‌کنیم. به‌عبارت‌دیگر از یک زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه استفاده می‌کنیم که اصطلاحاً این زیرمجموعه را جبر سیگما (\mathcal{F}) گویند. به جبر سیگما اصطلاحاً ساختار اطلاعاتی^{۱۳} نیز گفته می‌شود.

اعضای \mathcal{F} یا ساختار اطلاعاتی را رخداد^{۱۴} گوئیم. خاصیت محدودکنندگی جبر سیگما به ما کمک می‌کند تا از این ساختار اطلاعاتی استفاده کنیم. در خصوص مفهوم احتمال باید اشاره کنیم که P یک تابع است. پس تابع احتمال، یک تابعی است که برای اعضای این ساختار اطلاعاتی یک عددی بین صفر و یک در نظر می‌گیرد. $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ به‌طور مثال اینکه می‌گوئیم برای آب‌وهوای فردا حالت‌های مختلفی وجود دارد و به احتمال ۲درصد هوای فردا ابری و به احتمال ۱۵درصد برفی خواهد بود. جهت توضیح بیشتر در خصوص این سه‌گانه در قالب مثال باید بگوئیم که اگر به‌طور مثال تمام رخدادها موجود (Ω) برابر نمره دانشجویان باشد. همچنین ما هیچ اطلاعاتی در این خصوص نداریم که نمرات به چه صورت است، بنابراین ما داده‌ها را محدود می‌کنیم و به این صورت می‌گوئیم که جبر سیگما، بازه $[0,20]$ است. حال می‌گوئیم که از اینجا می‌خواهیم یک احتمالی را در نظر بگیریم و آن احتمال یک بخش خاصی از این بازه است. به‌طور مثال احتمال قبولی دانشجویان مدنظر است و اینکه احتمال رخداد آن به چه صورت است (جلوداری، ۱۳۹۹، ص. ۱۱).

پس به‌طور خلاصه با توضیحاتی که داده شد، این سه‌گانه اهمیت زیادی دارد و هر موقع که می‌خواهیم در خصوص یک متغیر تصادفی یا رخداد تصادفی صحبت کنیم، لازم است تا Ω ، \mathcal{F} و P مشخص باشد.

با توجه به مقدماتی که در خصوص سه‌گانه ذکر شد، حال می‌توانیم متغیر تصادفی را تعریف کنیم. متغیر تصادفی در فضای احتمال (P, \mathcal{F}, Ω) تعریف می‌شود. متغیر تصادفی X تابعی است که اعضای Ω را با توجه به ساختار اطلاعاتی که محدودکننده است به یک عددی در \mathbb{R} نسبت می‌دهد ($P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$). نکته‌ای که وجود دارد این است که متغیر تصادفی X اصطلاحاً \mathcal{F} -measurable یا \mathcal{F} -predictable است. دلیل آن این است که اگر ما جبر سیگما را تعریف نکنیم متغیر تصادفی X شناخته شده نیست و لذا قابل اندازه‌گیری نخواهد بود. همان‌طور که در تعریف متغیر تصادفی ذکر کردیم، به

رخدادهای زیرمجموعه فضای نمونه‌ای ما یک عددی را نسبت می‌دهد. به‌طور مثال در خصوص اتفاقات آب و هوایی که ممکن است برای فردا رخ بدهد به این صورت بوده که به هر کدام از حالت‌های ابری یا ... عددی را نسبت می‌دهد. نکته مهمی که در خصوص متغیر تصادفی وجود دارد این است که دامنه متغیر تصادفی برابر است با حالت‌های فضای نمونه با در نظر گرفتن جبر سیگما و بُرد آن برابر است با یک عددی در R و هر عددی می‌تواند نسبت داده شود. به‌طور مثال در خصوص نمره دانشجویان باید ذکر کرد که نمره دانشجویان یک متغیر تصادفی است. این متغیر تصادفی می‌تواند خود نمره باشد یعنی از صفر تا ۲۰ و همچنین بعضی وقت‌ها می‌توانیم بگوییم که می‌خواهیم از ۱۰۰ نمره بدهیم. یا به‌طور مثال ممکن است بگوییم به افرادی که نمره قبولی را کسب کرده‌اند (رخدادهای ۱۰ تا ۲۰) عدد ۱ و به سایر افراد (رخدادهای صفر تا ۱۰) عدد صفر را نسبت می‌دهیم.

اکنون می‌آییم آن احتمالی که در موردش صحبت کرده بودیم را برای متغیر تصادفی تعریف می‌کنیم. پس هر موقع که اسمی از متغیر تصادفی ذکر می‌کنیم، اولین نکته‌ای که مطرح می‌شود، تابع توزیع احتمال است. تابع توزیع احتمال با F نشان داده می‌شود و اندیس آن، متغیر تصادفی است. به‌طور مثال $F_X: R \rightarrow [0,1]$ اینکه هر کدام از عددهایی که از R می‌گیرد چه احتمالی بین صفر و یک نسبت داده می‌شود را تابع توزیع احتمال گوییم.

متغیر تصادفی دو حالت دارد که شامل حالت گسسته (مثل اعدادی که برای حالت‌های آب و هوایی در نظر گرفتیم) و حالت پیوسته (مثل نمره دانشجویان) است. بحث تفکیک متغیرهای تصادفی به دو حالت گسسته و پیوسته اهمیت زیادی در بحث تابع توزیع آن‌ها دارد. به‌طور مثال اگر از ما سؤال شود که احتمال رخداد نمره دقیقاً ۱۹ چقدر است، در پاسخ به این سؤال باید بگوییم که احتمال آن صفر است و اصلاً چنین چیزی در متغیر تصادفی پیوسته معنی ندارد و قابل احصاء نیست و بلکه به‌جای آن

می‌توانیم بگوییم که احتمال رخ دادن نمرات زیر ۱۰ چقدر است. لازم به ذکر است که حالت گسسته، در یک نقطه یک عدد را به ما می‌دهد اما در حالت پیوسته یا همان تابع چگالی احتمال، هیچ موقع یک نقطه معنی و مفهوم ندارد. به‌طور مثال فرض کنید که متغیر تصادفی ما، قد دانشجویان است که توزیع آن نرمال است. قد دانشجویان یک متغیر تصادفی پیوسته است که تابع چگالی احتمال آن نرمال است. مثلاً احتمال اینکه قد دانشجویان بین ۱,۶۵ و ۱,۸۰ باشد چقدر است. بنابراین برای اینکار از انتگرال‌گیری تابع چگالی احتمال استفاده می‌کنیم و این احتمال را محاسبه می‌کنیم.

توزیع‌های احتمال متعددی وجود دارد ولی اگر بخواهیم به دو مورد از مهم‌ترین آن‌ها اشاره کنیم باید بگوییم که شامل اولاً؛ تابع چگالی نرمال است که می‌توانیم به‌عنوان توزیع احتمال برای یک متغیر تصادفی در نظر بگیریم که مشخصات آن به‌صورت زیر است:

$$F_x = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}} \quad E(X) = \mu \quad Var(X) = \sigma^2 \quad \text{رابطه (۱):}$$

ثانیاً؛ تابع پواسون است که تعداد رخداد در یک واحد مشخص را نشان می‌دهد و به‌عنوان مهم‌ترین توزیع گسسته به‌شمار می‌آید. به‌طور مثال تعداد غلط‌های املائی در هر صفحه یا به‌طور مثال تعداد مشتریانی که در هر یک ساعت به یک مغازه مراجعه می‌کنند. توزیع پواسون در واقع تعداد رخداد را می‌شمارد. لازم به ذکر است که این توزیع پواسون در خصوص فرایند تصادفی پرش که توضیح داده بودیم بسیار مفید و مؤثر است، زیرا در آنجا نیز تعداد برای ما اهمیت دارد. مشخصات تابع توزیع پواسون به‌صورت زیر است:

$$F(X = K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \quad K = 0.1.2.3 \dots \quad E(X) = Var(X) = \lambda \quad \text{رابطه (۲):}$$

بنابراین این دو موردی که توضیح داده شد، از جمله توزیع‌های بسیار معروف و مشهور است که کاربرد زیادی دارد.

در این راستا و در ادامه نکاتی که در خصوص فضای احتمال و متغیر تصادفی ذکر شد، حال به بحث فرایند تصادفی می‌پردازیم. در فرایند تصادفی، ما مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی در طول زمان را داریم. لذا زمان s و t را در نظر می‌گیریم و بیان می‌کنیم که $t > s > 0$ است. به عبارت دیگر زمان s قبل از زمان t است و اطلاعاتی که برای متغیر تصادفی X_s استفاده می‌کنیم مربوط به زمان s است در حالی که وقتی زمان می‌گذرد و به جلو حرکت می‌کند و ما X_t را مشاهده می‌کنیم، اطلاعات مربوط به زمان t را در اختیار داریم. در واقع X_s ، از ساختار اطلاعاتی زمان s یعنی F_s استفاده می‌کند و X_t از ساختار اطلاعاتی زمان t یعنی F_t استفاده می‌کند.

با توضیحات داده شده، فضای احتمال به صورت (P, F, F_t, Ω) خواهد بود. F_t در واقع ساختار اطلاعاتی فیلتر شده t است. معروف‌ترین مثالی که در این خصوص می‌توان ذکر کرد، قیمت سهام است. F_t در این مثال بدین معنی است که بیان می‌کند اگر X_t مثلاً تاریخ ۱۲ دی‌ماه باشد، این متغیر تصادفی یک وضعیت مخصوص به خود را دارد و اگر ۱۰ دی‌ماه باشد، مجدداً این متغیر تصادفی یک وضعیت مخصوص به خود را دارد و به همین صورت ادامه خواهد داشت. چون ما اطلاعات جدیدتری داریم و در واقع در حال استفاده از روز قبل هستیم، بنابراین قیمت سهام یک متغیر تصادفی است که در طول زمان معنی دارد، یعنی اینکه در هر روزی یک مقداری را می‌تواند به خود اختصاص دهد و در هر مقداری که به خود اختصاص می‌دهد، چهارگانه P, F, F_t, Ω بر آن ظاهر خواهد شد.

فرایند تصادفی براونی یا وینر (B_t) و فرایند تصادفی پواسون (N_t)، از جمله مهم‌ترین فرایندهای تصادفی است که می‌توان به آن اشاره نمود. فرایند تصادفی براونی یا وینر، یک سری ویژگی‌هایی دارد که به این صورت است که اولاً: از مبدأ شروع می‌شود

$(B_0=0)$. **ثانیاً:** زمان پیوسته است اما مشتق پذیر نیست. **ثالثاً:** اگر زمان $t > s$ باشد، ما به اصطلاحاً «گام» گوئیم. ویژگی این گام و این عبارت به این صورت است که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t-s$ است $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$. **رابعاً:** گام‌ها به صورت مانا و مستقل هستند. بدین معنی که احتمال وقوع این گام‌ها ارتباطی به زمان آن ندارد و به خود فاصله مرتبط است. در خصوص فرایند تصادفی وینر باید اضافه کنیم که در برخی مواقع با W_t نیز نشان داده می‌شود. فرایند تصادفی دیگری که نام برده شد، فرایند تصادفی پواسون است که اهمیت زیادی دارد. این فرایند تصادفی در واقع همان متغیر تصادفی پواسون در طول زمان است. همان‌طور که قبلاً ذکر کردیم، متغیر تصادفی پواسون تعداد رخدادها را شمارش می‌کند (N) اما در اینجا در طول زمان در نظر گرفته می‌شود. به‌طور مثال می‌توان به تعداد غلط‌ها در یک صفحه در روز گذشته یا امروز یا فردا یا مثلاً تعداد دانشجویانی که در سال گذشته نمرات پایینی را کسب کرده‌اند اشاره کنیم. بنابراین در این نوع از فرایند تصادفی به دلیل اینکه بحث تعداد مورد اشاره قرار می‌گیرد، فلذا ما شاهد پرش‌های خواهیم بود. این فرایند نیز همانند فرایند وینر یک‌سری ویژگی‌هایی دارد. **اولاً:** از مبدأ شروع می‌شود ($N_0=0$). **ثانیاً:** از سمت راست پیوسته است. **ثالثاً:** گام‌ها $(N_t - N_s)$ مانا و مستقل هستند. **رابعاً:** گام‌ها از توزیع پواسون نشأت می‌گیرند:

$$E(N_t - N_s) = \text{Var}(N_t - N_s) = \lambda(t - s) \quad \text{رابطه (۳)}$$

اکنون پس از بیان مطالبی در خصوص فضای احتمال و متغیر تصادفی و فرایند تصادفی، به سراغ حساب دیفرانسیل تصادفی و معادله دیفرانسیل تصادفی می‌رویم. جهت توضیح در خصوص حساب دیفرانسیل تصادفی باید ذکر کنیم که ما در حالت حساب دیفرانسیل معمولی و غیرتصادفی مثلاً ناحیه a تا b از نمودار که تابع آن $f(t)$ است را افراز می‌کنیم و مساحت زیر آن نمودار را به دست آوریم. اما در حالت

تصادفی، علی‌رغم در نظر گرفتن موارد مربوط به حساب دیفرانسیل معمولی، بالا و پایین‌هایی که در نمودار مشاهده می‌شود، لازم است تا قسمت‌های نوسانی که در نمودار وجود دارد نیز وارد مدل شود. اگر معادله دیفرانسیل تصادفی را به صورت $dz = f(t).dt + g(t).dw_t$ تعریف کنیم، بخش اول معادله $(f(t).dt)$ مربوط به بالا و پایین‌های معمولی و عادی بوده که رخ می‌دهد و در حالت حساب دیفرانسیل معمولی مورد محاسبه قرار می‌گیرد؛ بخش دوم معادله $(g(t).dw_t)$ در واقع همان قسمت‌های نوسانی است که w_t اشاره به فرایند وینر دارد. نکته مهمی که در اینجا وجود دارد این است که اگر ما بخواهیم نسبت به رابطه dz انتگرال‌گیری را انجام بدهیم، انتگرال قسمت اول یعنی $f(t).dt$ را می‌دانیم که به چه صورت است اما سؤالی که به وجود می‌آید این است که انتگرال‌گیری قسمت دوم معادله چگونه انجام خواهد شد. در این راستا باید ذکر کنیم که بحث دیفرانسیل تصادفی عملاً به این مسأله می‌پردازد. همان‌طور که گفته بودیم، dz یک معادله دیفرانسیل تصادفی است که باید حل شود و جهت حل کردن این معادله باید یک انتگرال‌گیری تصادفی را انجام دهیم. به عبارت دیگر پاسخ dz ، $Z(t)$ خواهد بود. لازم به ذکر است که به دست آوردن $Z(t)$ چه از طریق راه حل ریاضی و چه از طریق شبیه‌سازی یکسان خواهد بود.

۳ نوع انتگرال در اینجا قابل طرح است که در ادامه اشاره خواهد شد:

۱. انتگرال غیرتصادفی (ریمان): اگر انتگرال ما به این صورت باشد رابطه آن به

شکل زیر است:

$$\int f(t)dt = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\Delta t_i \quad \text{رابطه (۴)}$$

Δt در واقع افراز یا فاصله a تا b از نمودار است که توضیح داده

بودیم و گفتیم که مساحت زیر نمودار را باید محاسبه کنیم. اگر ما n حالت

را در نظر بگیریم، رابطه (۴) به دست خواهد آمد.

۲. انتگرال ریمان پیچیده:

$$\int f(t)dg(t) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)[g_{ti} - g_{ti-1}] \quad \text{رابطه (۵):}$$

حال با استفاده از مفهوم انتگرال ریمان پیچیده، به سراغ نوع سوم یعنی انتگرال تصادفی (انتگرال ایتو) می‌رویم که اهمیت دارد.

۳. انتگرال تصادفی (انتگرال ایتو): حالت کلی انتگرال تصادفی به شکل زیر است که در ادامه از آن استفاده خواهد شد.

$$\int_a^b f(t)dw_t = - \int_a^b w_t f_t dt + f(b)w_b - f(a)w_a \quad \text{رابطه (۶):}$$

همان‌طور که ذکر شد، هدف از ارائه انتگرال تصادفی، حل معادله دیفرانسیل تصادفی است. بنابراین با توجه به انتگرال تصادفی معرفی شده و معادله دیفرانسیل تصادفی $dz = f(t).dt + g(t).dw_t$ داریم:

$$x = \int f(t)dt + \underbrace{\int g(t)dw_t}_{-\int_0^T w_t \dot{g}_t dt + w_T g(T)} \quad \text{رابطه (۷):}$$

در اینجا چند حالت وجود دارد که ممکن است مشکلاتی به وجود آید. حالت اول این است که ممکن است در برخی موارد ضریب dw_t تصادفی باشد. این نوع از انتگرال‌ها رابطه خاصی ندارند و با توجه به تعریفی که گفته بودیم حل خواهند شد. به‌طور مثال در انتگرال $\int_a^b w_t dw_t$ مشتق‌پذیر نیست و از رابطه نهایی نمی‌توان استفاده نمود. حالت دومی که ممکن است دچار مشکل شویم در جایی است که ضریب dw_t خود متغیر تصادفی هدف باشد. به این صورت که با در نظر گرفتن رابطه $dx = \alpha x dt + \beta x dw_t$ داریم که $x = \int \alpha x dt + \int \beta x dw_t$ است. جهت حل کردن چنین مسائلی باید به سراغ رابطه ایتو (لم ایتو) برویم. لازم به ذکر است که رابطه ایتو به ما کمک می‌کند تا معادله دیفرانسیل تصادفی را به گونه‌ای تغییر بدهیم که در سمت راست معادله x وجود نداشته باشد.

در کنار بحث انتگرال تصادفی ایتو، یک انتگرال دیگری نیز وجود دارد که برای فرایند تصادفی پواسون تعریف شده است و به انتگرال پواسون معروف است:

$$(M_t = N_t - \lambda t) \quad \text{رابطه (۸)}$$

$$\int_a^b M_t dM_t = \frac{1}{2}(M_b^2 - M_a^2) - \frac{1}{2}(N_b - N_a) \quad \text{رابطه (۹)}$$

همان طور که گفته شد، یکی از مهم ترین مسائل، رابطه انتگرال تصادفی است که کاربردهای مؤثری دارد و گفته شد که این انتگرال در دو مورد نمی تواند به ما کمک کند. اول اینکه ضریب $w_t dw_t$ داشته باشیم و دوم اینکه x_t در رابطه وجود داشته باشد. فلذا گفته می شود که در این موارد نمی توانیم انتگرال تصادفی را مورد استفاده قرار بدهیم. بنابراین لازم است تا از رابطه ایتو (لم ایتو) استفاده کنیم.

همان طور که گفتیم، به طور مثال اگر معادله تصادفی یا فرایند انتشار برابر $dx = \alpha x dt + \beta x dw_t$ را در نظر بگیریم که حالت ساده ای است و البته متأسفانه این رابطه را با انتگرال گیری تصادفی نمی توانیم حل کنیم. زیرا در سمت راست x_t وجود دارد. بنابراین جهت حل معادله، از x فاکتور می گیریم و به سمت چپ معادله منتقل می کنیم و داریم:

$$\frac{dx_t}{x_t} = \alpha dt + \beta dw_t \quad \text{یا} \quad d(\ln x_t) = \alpha dt + \beta dw_t \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

حال سمت راست این رابطه را می توان با انتگرال گیری ساده کنیم، اما در سمت چپ، $d(\ln x_t)$ وجود دارد. جهت حل مشکل از رابطه ایتو استفاده می شود و این مشکل حل خواهد شد.

فرض می کنیم که X_t متغیر تصادفی باشد و $F_t = f(x_t)$ یک تابع مشتق پذیر است. اکنون با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$dF_t = f'(x_t) dx_t + \frac{1}{2} f''(x_t) (dx_t)^2 \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

حال اگر dx_t در ساده‌ترین حالت قرار داشته باشد یعنی $dx_t = \alpha dt + \beta dw_t$ باشد، رابطه بسط تیلور به صورت زیر خواهد بود:

$$dF_t = f'(\alpha dt + \beta dw_t) + \frac{1}{2} f'' (\alpha dt + \beta dw_t)^2 \quad \text{رابطه (۱۲):}$$

با انجام محاسبات مربوط به رابطه فوق و در نظر گرفتن روابط بنیادین در دیفرانسیل تصادفی ($dt dt = 0$ و $dt dw = 0$ و $dwdw = dt$)، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$dF_t = \left[f' \alpha + \frac{1}{2} f'' \beta^2 \right] dt + f' \beta dw_t \quad \text{رابطه (۱۳):}$$

حال سؤال مطرح می‌شود که کاربرد رابطه ایتو در این مثال ساده‌ای که مطرح کردیم به چه صورت است.

$$\frac{dx_t}{x_t} = d(\ln x_t) = \alpha dt + \beta dw_t \quad \text{رابطه (۱۴):}$$

$$F(x) = \ln x \quad \text{و} \quad f' = \frac{1}{x} \quad \text{و} \quad f'' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{رابطه (۱۵):}$$

با در نظر گرفتن موارد فوق و محاسبات مربوط به آن، به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$d(\ln x_t) = \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) dt + \beta dw_t \quad \text{رابطه (۱۶):}$$

اکنون به سراغ انتگرال‌گیری می‌رویم:

$$\ln x_t = \int \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) dt + \int \beta dw_t \quad \text{رابطه (۱۷):}$$

$$\ln \frac{x_t}{x_0} = \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta w_t \quad \text{رابطه (۱۸):}$$

$$x_t = x_0 e^{\left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta w_t} \quad \text{رابطه (۱۹):}$$

این در واقع حرکت براونی هندسی (نمایی) را نشان می‌دهد و به عبارت دیگر، پاسخ محاسبات مدنظر است که می‌توان با حالت شبیه‌سازی مقایسه کرد و مشاهده می‌شود که پاسخ‌ها یکسان و برابر است.

تا الآن بیان می‌کردیم که F تابعی از x_t باشد. درحالی‌که F می‌تواند تابعی از x_t و خود t هم باشد. فلذا رابطه جدید ایتو در این حالت برابر است با:

$$dF_t = \left[f_t' + f_x' \alpha + \frac{1}{2} f_x'' \beta^2 \right] dt + f_x' \beta dw_t \quad \text{رابطه (۲۰):}$$

بنابراین با این توضیحاتی که تا اینجا ارائه شد، می‌توان گفت که رابطه ایتو به ما کمک می‌کند تا آن دسته از معادلات تصادفی را که نمی‌توانیم انتگرال تصادفی بگیریم از آن استفاده کنیم.

اکنون قصد داریم به بررسی و ارزیابی مقاله‌هایی که به کاربرد ریاضیات تصادفی در اوراق قرضه مرتبط با سهام یا شاخص سهام اشاره دارد بپردازیم.

مالیر و آلویدی (۲۰۰۲م) در مقاله خود به ارزش‌گذاری اوراق بدهی مبتنی بر سهام اشاره دارد. این مقاله در واقع اوراقی را در نظر می‌گیرد که مرتبط با سهام است و قصد دارد تا ایده خود را با تمسک به رابطه اوراق قرضه قابل تبدیل به سهام^{۱۵} بیان کند. به عبارت دیگر جهت به دست آوردن رابطه نهایی محاسبه ارزش اوراق مبتنی بر سهام، از رابطه ارزش‌گذاری اوراق قرضه قابل تبدیل به سهام استفاده می‌کند. ایشان از رابطه واسیچک جهت تعیین نرخ بهره استفاده می‌کند و در ادامه با استفاده از تابع گرین به رابطه نهایی ارزش این نوع از اوراق قرضه دست پیدا می‌کند.

این مقاله جهت بهره‌گیری از تابع ارزش‌گذاری اوراق قرضه قابل تبدیل به سهام، از کتاب ویلموت^{۱۶} (۲۰۰۰م) استفاده کرده و به آن ارجاع داده است. لازم به ذکر است که بخشی از این کتاب به اوراق قرضه قابل تبدیل به سهام و با استفاده از نرخ بهره تصادفی می‌پردازد و در واقع جهت تعیین کردن ارزش اوراق قرضه قابل تبدیل به سهام از یک سری مقدمات دیگر نیز استفاده می‌کند که در بخش‌های دیگر این کتاب موجود است. بنابراین در این قسمت قصد داریم تا به روابط و مراحل رسیدن به تابع تغییرات ارزش این نوع از اوراق قرضه اشاره کنیم و در بخش بعد با تمسک به قالب کلی این محاسبات و همچنین افزودن مفروضات پژوهش و در نظر گرفتن ملاحظات، به معادله

دیفرانسیل تصادفی مدنظر دست پیدا کرده و سپس در بخش نهایی، شبیه‌سازی را بر روی یکی از اوراق اجاره سهام مدنظر انجام دهیم.

مفروضات این کتاب بدین شکل است که یک مدل دو عاملی را در نظر می‌گیرد و بیان می‌کند که r و s متغیرهای مدل هستند. تابعی که بیانگر ارزش و قیمت اوراق قرضه قابل تبدیل به سهام است به صورت $V=V(s,r,t)$ است. مطابق کتاب فرض شده است که قیمت دارایی توسط مدل منطقی^{۱۷} کنترل می‌شود و رابطه آن به صورت زیر است:

$$ds = \mu s dt + \sigma s dx_1 \quad \text{رابطه (۲۱):}$$

و رابطه نرخ بهره نیز در چارچوب معادله دیفرانسیل تصادفی به صورت زیر است:

$$dr = u(r,t)dt + w(r,t)dx_2 \quad \text{رابطه (۲۲):}$$

که u و w می‌توانند هر تابعی از r و t باشند. u و w در واقع نوع رفتار r را تعیین می‌کند. لازم به ذکر است که dx_1 و dx_2 هر دو نمایانگر فرایند وینر هستند که در خصوص آن‌ها در مقدمات بحث ذکر شد. هر دو از توزیع‌های نرمال با میانگین صفر و واریانس dt گرفته شده‌اند. اما این‌ها یک متغیر تصادفی یکسان نیستند. با این حال ممکن است که با یکدیگر مرتبط باشند.

$$E[dx_i] = 0 \quad E[dx_i^2] = dt \quad E[dx_1 dx_2] = \rho dt \quad \text{رابطه (۲۳):}$$

و $\rho(r,s,t)$ در فاصله -1 و $+1$ قرار دارد. ویلموت (۲۰۰۰م) در یک بخش دیگری از کتاب به شیوه به دست آمدن رابطه dv (معادله دیفرانسیل تصادفی ارزش اوراق) و فرم کلی معادله دیفرانسیل تصادفی اشاره می‌کند. وی در بخشی از کتاب خود اشاره می‌کند که یک فرم و حالت کلی برای معادله دیفرانسیل تصادفی وجود دارد که به صورت زیر است و بر طبق این فرم معادله دیفرانسیل تصادفی هر متغیر و دارایی پایه ساخته خواهد شد. در این رابطه، μ_i به عنوان

میانگین و σ_i به‌عنوان واریانس و نوسانات آن متغیر و دارایی پایه در نظر گرفته شده است:

$$ds_i = \mu_i s_i dt + \sigma_i s_i dx_i \quad \text{رابطه (۲۴):}$$

لذا طبق این رابطه، معادله‌های دیفرانسیل تصادفی مربوط به dr و ds مطابق روابط ۲۱ و ۲۲ بیان خواهد شد که در ادامه از آن‌ها می‌شود. اکنون در اینجا با توجه به توضیحاتی که در ابتدای بحث و در مقدمات ریاضیات تصادفی اشاره شد، کاربرد لم‌ایتو اهمیت پیدا می‌کند و با استفاده از بسط تیلور، رابطه زیر به دست خواهد آمد که فرم کلی رابطه dv است:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} s_i s_j \frac{\partial^2 v}{\partial s_i \partial s_j} \right) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial v}{\partial s_i} ds_i \quad \text{رابطه (۲۵):}$$

در مرحله بعد، از رابطه (۲۵) استفاده کرده و با توجه به اینکه تنها متغیرهای s و r را مدنظر قرار داده است و با انجام محاسبات ریاضی آن، به رابطه ۳-۵ می‌رسیم. از آنجایی که طبق تعریف در رابطه dr ، u و w را داریم و با توجه به اینکه در تعریف فرم کلی معادله دیفرانسیل تصادفی از $\sigma_i s_i$ استفاده کرده است، لذا در رابطه زیر به جای $\sigma_i s_i$ برای $i=r$ از w استفاده کرده است و لذا داریم:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho \sigma s w \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} \right) dt + \frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial r} dr \quad \text{رابطه (۲۶):}$$

اکنون ویلموت (۲۰۰۰م) به سراغ قیمت‌گذاری اوراق قرضه قابل تبدیل به سهام رفته و در این راستا یک پرتفولیویی از اوراق قرضه قابل تبدیل به سهام با سررسید T_1 و همچنین به اندازه Δ_2 از اوراق با کوپن صفر با سررسید T_2 و به اندازه Δ_1 از دارایی پایه می‌سازد و طبق رابطه زیر داریم:

$$\pi = V - \Delta_2 Z - \Delta_1 S \quad \text{رابطه (۲۷):}$$

که در این رابطه، مقادیر Δ_1 و Δ_2 است با:

$$\Delta_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial r}}{\frac{\partial z}{\partial r}} \quad \Delta_1 = \frac{\partial v}{\partial s} \quad \text{رابطه (۲۸):}$$

سپس با تبدیل رابطه فوق به فرم تغییرات یعنی $d\pi = dv - \Delta_2 dz - \Delta_1 ds$ و همچنین با در نظر گرفتن رابطه $d\pi = r\pi dt$ رابطه ارزش اوراق را به صورت زیر به دست آورده است:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho\sigma sw \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + rs \frac{\partial v}{\partial s} + (u - w) \frac{\partial v}{\partial r} - rv = 0 \quad \text{رابطه (۲۹):}$$

این رابطه با در نظر گرفتن سود تقسیمی ثابت برابر است با:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho\sigma sw \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + (r - D_s) s \frac{\partial v}{\partial s} + (u - w) \frac{\partial v}{\partial r} - rv = 0 \quad \text{رابطه (۳۰):}$$

همان‌طور که ذکر کردیم، مقاله مالیر و آلوبیدی (۲۰۰۲م) از این رابطه استفاده کرده و با استفاده از تابع گرین و تبدیل‌هایی که در مقاله خود ذکر کرده است به رابطه V می‌رسد که البته این قسمت محل بحث و مورد کاربرد ما نیست و ما در واقع با رابطه (۲۶) در ارتباط بوده و از شکل و قالب آن با ضمن در نظر گرفتن مفروضات پژوهش در بخش بعد استفاده می‌کنیم.

در راستای ادامه بحث ارزیابی مدل‌های ارزش‌گذاری، لازم به ذکر است که علاوه بر مقاله‌ای که در مورد آن صحبت شد، مقاله‌های دیگری نیز وجود دارد که مرتبط به این موضوع است و در ادامه به برخی از آن‌ها به صورت مختصر اشاره می‌شود. ولی با توجه به اینکه مقاله فوق به موضوع پژوهش نزدیک‌تر است، بنابراین از ایده مقاله مالیر و آلوبیدی (۲۰۰۲م) و همچنین کتاب ویلموت (۲۰۰۰م) استفاده کرده‌ایم در خصوص مقاله شلدون‌لین و تان (۲۰۰۳) و برنان و زیا (۲۰۰۰) نیز باید اشاره کرد که توضیحات مربوطه در بخش پیشنهاد تحقیق ارائه گردید.

۴. مدل پیشنهادی ارزش‌گذاری صکوک اجاره مبتنی بر سهام

در این بخش قصد داریم تا با توجه به توضیحاتی که در بخش قبل در خصوص ریاضیات تصادفی و کاربرد آن در ارزش‌گذاری اوراق قرضه داده شد، به ارائه یک مدل پیشنهادی جهت ارزش‌گذاری اوراق اجاره مبتنی بر سهام بپردازیم.

در بخش قبل اشاره کردیم که مالیر و آلوبیدی (۲۰۰۲م) با استفاده از رابطه «ارزش‌گذاری اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام» به ارائه رابطه ارزش‌گذاری اوراق بدهی مبتنی بر سهام از جمله اوراق قرضه مبتنی بر سهام می‌پردازد. در این بخش قصد داریم تا مدل پیشنهادی جهت ارزش‌گذاری اوراق اجاره مبتنی بر سهام را ارائه دهیم که بر اساس معادله دیفرانسیل تصادفی است. لذا رابطه‌ای که مقاله مالیر و آلوبیدی (۲۰۰۲م) در خصوص ارزش‌گذاری اوراق بدهی مبتنی بر سهام با استفاده از رابطه ارزش اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام از کتاب ویلموت (۲۰۰۰م) استفاده کرده است، برای ما مناسب نخواهد بود. زیرا ما قصد نداریم به رابطه نهایی دست پیدا کنیم بلکه قصد داریم تا به معادله دیفرانسیل تصادفی که مرتبط با موضوع بحث است را با استفاده از مفروضات مدنظر دست‌یافته و سپس با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی، به شبیه‌سازی آن بپردازیم و همان‌طور که در بخش قبل در ذیل بحث کاربرد ریاضیات تصادفی اشاره کردیم، قیمتی که از طریق شبیه‌سازی به دست می‌آید دقیقاً برابر با قیمتی است که از طریق رابطه محاسبه شده مربوط به اوراق به دست خواهد آمد.

لذا تنها از معادله دیفرانسیل تصادفی استفاده خواهیم کرد و قصد نداریم تا معادله را با انجام محاسبات ریاضی حل کنیم و در واقع سعی داریم تا با استفاده از فرم کلی معادله دیفرانسیل تصادفی که در کتاب ویلموت (۲۰۰۰م) موجود است و مراحل استخراج آن توضیح داده شده است را با در نظر گرفتن و استفاده از مفروضات پژوهش، به معادله دیفرانسیل تصادفی مدنظر دست پیدا کنیم.

پیش از اینکه به سراغ انجام محاسبات و ارائه روابط برویم، لازم است تا مفروضات و مقدمات مدل پیشنهادی را بیان کنیم.

همان‌طور که در ابتدای پژوهش اشاره شد، اوراق اجاره مبتنی بر سهام، در واقع اوراقی است که دارایی پایه آن سهام است و از این جهت که دارایی پایه آن شفافیت دارد و قیمت آن به صورت روزانه در بازار مشخص است و نسبت به اوراق اجاره معمولی برتری دارد و لذا فرایند قیمت‌گذاری آن نیز شفافیت بیشتری نسبت به اوراق اجاره معمولی خواهد داشت. لذا با توجه به اینکه دارایی پایه این نوع از اوراق اجاره به صورت سهام است، در مدل پیشنهادی قصد داریم تا عملاً فرایند تصادفی تغییر قیمت اوراق را به تغییر قیمت سهام ارتباط دهیم که در واقعیت نیز باید به همین صورت باشد و افزایش یا کاهش قیمت سهم پایه نیز در افزایش یا کاهش قیمت اوراق تأثیرگذار باشد. نکته دیگری که وجود دارد، مربوط به نرخ اجاره‌بها یا نرخ سود اوراق است و اینکه این نرخ برای انواع و اقسام سهام نباید ثابت باشد بلکه باید متناسب با عایدی سهام مورد اجاره در نظر گرفته شود. لذا جهت تعیین نرخ اجاره‌بها نیز می‌توان سازوکاری را در نظر گرفت تا نرخ اجاره متناسب با عایدی سهام مورد اجاره باشد.

در این بخش قصد داریم تا دو حالت را مورد بررسی قرار دهیم. در حالت اول، جهت سادگی، نرخ اجاره‌بها را همان نرخ در نظر می‌گیریم که در بیانیه ثبت مربوط به هر اوراق ذکر شده است. هرچند که آن نرخ ذکر شده در بیانیه ثبت اوراق، وابسته به سود بانکی است اما ذکر کردیم که مبنای نرخ‌گذاری باید متناسب با عایدی سهام باشد و لذا در این حالت مبنای اجاره‌بها یا نرخ سود اوراق، نرخ است که در بیانیه ثبت ذکر شده است. در حالت دوم، نرخ اجاره‌بها را متناسب با عایدی سهام مورد اجاره در نظر می‌گیریم که توضیحات آن در ادامه ارائه می‌شود.

همانند بخش قبل که توضیح داده شد، در اینجا نیز شاهد متغیرهای S و I هستیم که به مدل اضافه خواهند شد. نکته‌ای که در اینجا حائز اهمیت بوده و متمایز از

مفروضات بخش قبل بوده این است که در اینجا ما تنها یک دارایی را شاهد هستیم که اوراق اجاره سهام است و در ذیل آن شاهد دو بازدهی نیز هستیم. به عبارت دیگر دو بازدهی برای یک دارایی را در نظر می‌گیریم و سپس بر اساس معادله‌های دیفرانسیل تصادفی بخش قبل که توضیح داده شد، همانند زیر تعریف می‌کنیم:

$$ds = \mu s dt + \sigma s dx_1 \quad \text{رابطه (۳۱):}$$

$$dr = u(r, t) dt + w(r, t) dx_2 \quad \text{رابطه (۳۲):}$$

که در واقع از فرم رابطه دیفرانسیل تصادفی ۲۴ برگرفته شده است.

با توجه به اینکه یک دارایی با دو بازدهی را در نظر گرفته‌ایم، لذا با توجه به رابطه ۲۴، برای μ_i دو مقدار خواهیم داشت که μ_r بیانگر میانگین بازدهی ناشی از خود اوراق اجاره و بازدهی نرخ سود اوراق است و μ_s بیانگر میانگین بازدهی ناشی از تغییرات قیمت سهام است. همچنین باید اشاره کرد که برای σ_i نیز دو مقدار خواهیم داشت که σ_r بیانگر انحراف معیار بازدهی اول یعنی انحراف معیار بازدهی نرخ اجاره بوده و σ_s بیانگر انحراف معیار تغییرات قیمت دارایی پایه است. در حالت اول حل مسأله، σ_r را برابر با صفر در نظر می‌گیریم، بدین معنی که انحراف معیار بازدهی اوراق اجاره یا همان انحراف معیار نرخ اجاره برابر صفر است و در حالت دوم برابر صفر نباشد. بنابراین در حالت اول، از میان σ_r و σ_s ، تنها شاهد حضور متغیر σ_s خواهیم بود و در حالت دوم هر دو متغیر را به مدل پیشنهادی وارد می‌کنیم. در راستای توضیحات مربوط به معادلات ذکر شده، باید اضافه کرد که همان‌طور که ذکر کردیم دو بازدهی برای یک دارایی داریم که یکی مربوط به ds و دیگری مربوط به dr است. لازم به ذکر است که رابطه مربوط به بازدهی نرخ سود اجاره‌بها و ds رابطه مربوط به بازدهی منافی است که به مستأجر منتقل نشده است و در اختیار موجر باقی‌مانده است. هر یک از ds و dr دارای یک جزء تصادفی و یک جزء ثابت و قطعی است که توضیحات آن در بخش مقدمات و کاربردهای ریاضیات تصادفی داده شده است. بدین صورت که به‌طور

مثال در داخل معادله دیفرانسیل تصادفی ds ، جزء اول، ثابت و قطعی بوده و جزء دوم، تصادفی است که نمایانگر فرایند تصادفی وینر است. به عبارت دیگر در واقع dx_1 و dx_2 نشان‌دهنده فرایند وینر بوده که هر دو دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس dt در نظر گرفته خواهند شد و در محاسبات شبیه‌سازی نیز در بخش بعد از آن‌ها استفاده خواهد شد.

از جمله موارد دیگر که در این قسمت از توضیحات ارائه مدل لازم به ذکر است، تعیین کردن تابع V جهت مدل‌سازی است. این تابع در واقع شامل سه متغیر یعنی r و s و t است که بیانگر رابطه ارزش اوراق است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V = V(s, r, t) \quad \text{رابطه (۳۳):}$$

از جمله مهم‌ترین موارد مربوط به این تابع، تعیین نمودن شکل و فرم تابع است. توابع متعددی وجود دارد که مورد استفاده قرار می‌گیرد که معمولاً جهت مدل‌سازی از تابع‌نمایی^{۱۸} استفاده می‌شود که به طور مثال مقاله برنان و زیا (۲۰۰۰م)، ارزش و قیمت اوراق را با استفاده از تابع‌نمایی محاسبه کرده است. حالت ساده تابع ارزش اوراق به صورت زیر است:

$$V = S_0 e^{rt} \quad \text{رابطه (۳۴):}$$

لکن در اینجا با توجه به مفروضاتی که ذکر کردیم، دو بازدهی داریم و این دو وارد مدل خواهند شد، لذا با نظر گرفتن مفروضات مربوط به مدل مدنظر، تابع V به صورت زیر خواهد بود:

$$V = V_0 e^{(r+s)t} \quad \text{رابطه (۳۵):}$$

که در این تابع، V تابع ارزش اوراق اجاره مبتنی بر سهام است و همان‌طور که اشاره کرده بودیم، s و r بازدهی هستند. به عبارت دیگر s بازدهی قیمت سهام پایه و r بازدهی نرخ اوراق است که در محاسبات، همان نرخ اجاره در نظر گرفته خواهد شد.

V_0 به معنای نرخ و ارزش اسمی اوراق است که این نرخ در ایران برابر ۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال است که جهت تشکیل معادله دیفرانسیل تصادفی از آن استفاده خواهد شد و تشکیل این تابع، از موارد ضروری و مهم است. زیرا در صورت عدم تعیین شکل تابع ارزش اوراق، امکان تشکیل معادله دیفرانسیل تصادفی نهایی وجود نخواهد داشت و در ادامه شبیه سازی میسر نخواهد بود.

اکنون با در نظر گرفتن مفروضات ذکر شده به سراغ تشکیل معادله دیفرانسیل تصادفی می رویم:

همان طور که در بخش قبل بیان کردیم، فرم کلی معادله دیفرانسیل تصادفی dv به صورت زیر است که در واقع با استفاده از بسط تیلور به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 v}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial v}{\partial S_i} dS_i \quad \text{رابطه (۳۶)}$$

اکنون مفروضات و متغیرهایی که در نظر گرفته بودیم را در رابطه فوق وارد کرده و طی انجام محاسبات ریاضیاتی، رابطه زیر به دست می آید:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \frac{1}{2} W^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho \sigma S W \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial S} \right) dt + \frac{\partial v}{\partial S} dS + \frac{\partial v}{\partial r} dr \quad \text{رابطه (۳۷)}$$

که با جایگذاری ds و dr در رابطه فوق داریم:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \frac{1}{2} W^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho \sigma S W \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial S} \right) dt + \frac{\partial v}{\partial S} [\mu s dt + \sigma S dx_1] + \frac{\partial v}{\partial r} [u(r, t) dt + w(r, t) dx_2] \quad \text{رابطه (۳۸)}$$

حال بر اساس رابطه فوق، معادله دیفرانسیل تصادفی را برای دو حالت مذکور بررسی می کنیم:

- حالت اول: نرخ سود ثابت

با توجه به مفروضاتی که در ابتدای بحث ذکر شد، در رابطه فوق، w برابر صفر است. زیرا در نظر گرفته ایم که $\sigma_r = 0$ است. بنابراین رابطه ۳۸ به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \mu s \frac{\partial v}{\partial s} \right) dt + \left(\sigma s \frac{\partial v}{\partial s} \right) dx \quad \text{رابطه (۳۹):}$$

اکنون پس از استخراج معادله دیفرانسیل تصادفی مدنظر، به سراغ انجام محاسبات رفته و با استفاده از رابطه ۳۷ که در مورد آن صحبت کردیم، به معادله دیفرانسیل تصادفی نهایی دست پیدا خواهیم کرد تا در بخش بعد بتوانیم با استفاده از داده‌های موجود شبیه‌سازی را انجام دهیم. با انجام مشتقات مربوط به رابطه زار را داریم:

رابطه (۴۰):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= V_0 (r+s) e^{(r+s)t} & \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} &= V_0 t^2 e^{(r+s)t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= V_0 t e^{(r+s)t} & \frac{\partial v}{\partial s} &= V_0 t e^{(r+s)t} \end{aligned}$$

بنابراین با جای‌گذاری محاسبات فوق در رابطه ۴۰، رابطه نهایی به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$dv = \left[V_0 e^{(r+s)t} \left(r + s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 t^2 + rt + \mu st \right) \right] dt + (\sigma s V_0 t e^{(r+s)t}) dx \quad \text{رابطه (۴۱):}$$

اکنون توانستیم معادله دیفرانسیل تصادفی را در حالتی که نرخ سود اوراق ثابت است را استخراج کرده و مدل پیشنهادی خود را جهت ارزش‌گذاری اوراق اجاره مبتنی بر سهام را ارائه کنیم و در بخش بعد نیز با استفاده از این مدل پیشنهادی، به شبیه‌سازی یک نمونه تجربی از اوراق منتشر شده خواهیم پرداخت.

- حالت دوم: نرخ سود متغیر و متناسب با عایدی سهام مورد اجاره

در این حالت نرخ سود ثابت نیست بلکه طبق مفروضات پژوهش، متناسب با عایدی سهام مورد اجاره است. جهت تشکیل معادله دیفرانسیل تصادفی در این حالت نیز مجدداً رابطه زیر را در نظر گرفته و سپس بر اساس آن، مفروضات خود را وارد می‌کنیم:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho \sigma s w \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} \right) dt + \frac{\partial v}{\partial s} [\mu s dt + \sigma s dx_1] + \frac{\partial v}{\partial r} [u(r, t) dt + w(r, t) dx_2] \quad \text{رابطه (۴۲)}$$

وجه تمایز این قسمت نسبت به حالت قبل، نرخ سودی است که متناسب با عایدی سهام در نظر گرفته می‌شود و ثابت نخواهد بود. بنابراین، در رابطه بالا تمامی متغیرها وارد خواهد شد. محاسبات مربوط به $\frac{\partial v}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$ و $\frac{\partial v}{\partial s}$ و $\frac{\partial v}{\partial r}$ در حالت اول انجام شد. لکن در این حالت لازم است تا محاسبات مربوط به $\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}$ و $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ نیز انجام شود که به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} = V_0 t^2 e^{(r+s)t} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = V_0 t^2 e^{(r+s)t} \quad \text{رابطه (۴۳)}$$

لازم به ذکر است تابع u و w که بیانگر رفتار نرخ بهره است، همان‌طور که قبلاً بیان شد، با فرم ساده در نظر گرفته می‌شود و طبق فرم کلی رابطه ۲۳، u برابر با μr و w برابر با $\sigma_r r$ است. بنابراین با نظر گرفتن این موارد و انجام محاسبات مربوط فوق، معادله دیفرانسیل تصادفی مدنظر به دست خواهد آمد که به صورت زیر است:

$$dv = \left[V_0 e^{(r+s)t} \left(r + s + \frac{1}{2} \sigma_s^2 s^2 t^2 + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r^2 t^2 + \rho \sigma_s \sigma_r r t^2 + \mu_r r t + \mu_s s t \right) \right] dt + (\sigma_s s V_0 t e^{(r+s)t}) dx_1 + (\sigma_r r V_0 t e^{(r+s)t}) dx_2 \quad \text{رابطه (۴۴)}$$

اکنون توانستیم معادله دیفرانسیل تصادفی را در حالتی که نرخ سود متغیر است را استخراج کرده و مدل پیشنهادی خود را جهت ارزش‌گذاری اوراق اجاره مبتنی بر سهام را ارائه کنیم و در بخش بعد با استفاده از این مدل پیشنهادی، به شبیه‌سازی یک نمونه تجربی از اوراق منتشر شده می‌پردازیم.

۵. شبیه‌سازی صکوک اجاره مبتنی بر سهام در یک نمونه تجربی

در این بخش قصد داریم تا با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی که در بخش قبل استخراج کردیم، شبیه‌سازی مونت‌کارلو^{۱۹} را بر روی آن با استفاده از داده‌های یک

نمونه تجربی از اوراق اجاره سهام منتشر شده انجام دهیم و قیمت شبیه‌سازی شده را به دست آوریم.

مقصود از شبیه‌سازی، یافتن مقادیری است که یک رفتاری مشابه و همانند با داده‌های اولیه دارند. شبیه‌سازی، روش‌های مختلفی دارد که شبیه‌سازی مونت‌کارلو و بوت‌استرپینگ^{۲۰} از جمله مهم‌ترین و پرکاربردترین آن‌ها در مسائل مالی است. هرکدام از این دو، کاربردهای متعددی دارد که به‌طور مثال، در خصوص بوت‌استرپینگ باید اشاره کنیم که تعیین کردن احتمال موفقیت و برتری یک گزینه نسبت به گزینه‌های دیگر، پیش‌بینی قیمت سهام، تحلیل داده‌های شبیه‌سازی شده و همچنین پیش‌بینی اوزان بهینه سبد سرمایه‌گذاری در یک سطح بازده مشخص را می‌توانیم از جمله کاربردهای آن نام ببریم. شبیه‌سازی مونت‌کارلو یک دسته‌ای از الگوریتم‌های محاسباتی هستند که در واقع بر اساس تکرار تصادفی نمونه‌برداری برای محاسبه نتایج مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به اتکای این روش شبیه‌سازی به تکرار محاسبات و اعداد تصادفی، برای محاسبه توسط کامپیوتر مناسب هستند. این روش نیز کاربردهای متعددی دارد که شامل محاسبه ارزش شرکت‌ها، ارزیابی سرمایه پروژه‌ها، تحلیل اقتصادی دقیق‌تر پروژه‌ها و بهینه‌ترین مقدار تولید و غیره است (صادقی، ۱۳۹۷، ص. ۴۰۲-۴۲۶). شایان ذکر است که از جمله مهم‌ترین کاربردهای شبیه‌سازی مونت‌کارلو، مربوط به محاسبه ارزش اوراق است.

شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای حل کردن مسائل مالی از توزیع تصادفی متغیر مربوطه استفاده می‌کند. لذا جهت انجام شبیه‌سازی مونت‌کارلو لازم است تا در خصوص توزیع متغیری که قرار است شبیه‌سازی شود را به همراه پارامترهای آن اطلاعاتی داشته باشیم. یک‌سری از توزیع‌های تصادفی در اکسل وجود دارد که تابع مربوط به توزیع تجمعی آن‌ها در اکسل وجود دارد و قادر هستیم تا از مفهوم تابع توزیع تجمعی، شبیه‌سازی را انجام دهیم. این توزیع‌ها شامل مواردی همچون توزیع تصادفی نرمال، نرمال استاندارد، دو جمله‌ای، گاما و بتا است. با مراجعه به نرم‌افزار اکسل، در همه توزیع‌ها اگر پسوند

dist را مشاهده کردیم، به معنای به‌دست‌آوردن احتمال یا احتمال تجمعی آن در یک نقطه مشخص مثلاً x است. همچنین باید اضافه کرد که اگر در توزیع‌ها پسوند inv مشاهده شد، بدین معنی است که این تابع نقطه‌ای را می‌دهد که احتمال سمت چپ آن، احتمال است. برای شبیه‌سازی لازم است تا از توابع توزیع تصادفی با پسوند inv استفاده کنیم. زیرا درواقع نقاط توزیع تصادفی یا همان نقاط شبیه‌سازی‌شده را با توجه به احتمال طرف چپ آن یعنی تجمعی آن می‌دهد (صادقی، ۱۳۹۷، ص. ۴۳۷-۴۳۸).

در این راستا و با توجه به توضیحات داده شده، لازم است تا ذکر کنیم که در اینجا همان‌طور که در بخش قبل نیز اشاره کردیم، توزیع نرمال را شاهد خواهیم بود.

اکنون قصد داریم تا با توجه به نکات ذکر شده و استفاده از داده‌های یک نمونه تجربی از اوراق منتشرشده به سراغ فرایند شبیه‌سازی رفته و درنهایت نتایج آن را مشاهده کنیم. در این پژوهش، جهت شبیه‌سازی از نرم‌افزار اکسل استفاده شده است.

طبق اطلاعات برگرفته‌شده از وبگاه sukuk.ir، تاکنون ۱۸ مورد اوراق اجاره مبتنی بر سهام منتشر شده که دو مورد از آن‌ها سررسیدشده و مابقی در حال معامله هستند.

در این بخش، اوراق اجاره سهام «صخابر ۱۰۲» انتخاب شده که بانی، شرکت مخابرات ایران (سهامی عام) است و در تاریخ ۱۳۹۷/۰۲/۳۰ در بازار بورس ایران منتشر شده است. لازم به ذکر است که دارایی پایه این اوراق، سهم «شرکت ارتباطات سیار ایران» است. همچنین باید اضافه کرد که نرخ این اوراق طبق بیانیه ثبت برابر ۱۶ درصد در نظر گرفته شده است. عمر این اوراق، ۴ سال و مقاطع پرداخت کوپن‌ها، ۳ ماهه است و ارزش اسمی این اوراق ۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال است که البته در اینجا جهت فروش بیشتر اوراق، این نرخ را به ۹۱۰,۰۰۰ ریال کاهش داده‌اند.

شایان ذکر است که در این بخش، داده‌ها به‌صورت ماهانه در نظر گرفته شده است. بدین‌صورت که به‌طور مثال قیمت دارایی پایه و قیمت اوراق از حالت روزانه به حالت ماهانه تبدیل شده است. بنابراین تاکنون طبق اطلاعات استخراج شده از وبگاه بورس،

امکان بهره‌برداری از ۳۸ داده وجود دارد. هم‌چنین باید اضافه کرد که این اوراق در حال معامله است و داده‌های استخراج شده، از ابتدای زمان انتشار اوراق تا پایان تیرماه ۱۴۰۰ است.

اکنون به سراغ مرحله شبیه‌سازی با استفاده از مدل پیشنهادی می‌رویم. لذا در وهله اول لازم است تا متغیرها را در نرم‌افزار اکسل وارد نماییم. ابتدا حالت اول یعنی نرخ سود ثابت را بررسی نموده و سپس به سراغ حالت دوم می‌رویم:

- حالت اول: نرخ سود ثابت

همان‌طور که ذکر کردیم، عمر این اوراق ۴ ساله است که داده‌ها را به‌صورت ماهانه در نظر گرفته‌ایم. پس در قدم اول داده‌های قیمت سهام شرکت ارتباطات سیار ایران را متناسب با بازه زمانی مدنظر که ذکر شد، از وبگاه بورس گرفته و سپس داده‌ها را از حالت روزانه به ماهانه تغییر داده و در ادامه بازدهی قیمت‌های ماهانه را محاسبه می‌کنیم و این داده‌ها را در یک ستون مشخص از اکسل قرار می‌دهیم. علاوه‌بر داده‌های سهم مدنظر، لازم است تا داده‌های مربوط به قیمت این اوراق را از وبگاه بورس گرفته و در یک ستون دیگر از اکسل وارد نماییم. محاسبه پارامترهای μ و σ نیز اهمیت زیادی دارد. همان‌طور که در بخش قبل ذکر کردیم، μ بیانگر میانگین بازدهی‌های قیمت سهام ماهانه است که طبق داده‌های وارد شده، برابر ۰,۱۷ است. σ بیانگر انحراف معیار بازدهی‌های قیمت سهام ماهانه بوده که طبق داده‌های وارد شده، برابر ۰,۰۱ است. نکته حائز اهمیت این است که این مقادیر محاسبه شده نیز متناسب با دوره زمانی در نظر گرفته شود و لازم است تا تبدیل موردنیاز انجام شود. از جمله متغیرهای مهم، r است که این نرخ در بیانیه ثبت ۱۶ درصد سالیانه هست و لازم است تا به‌صورت ماهیانه در نظر گرفته شود. یکی دیگر از پارامترها، V_0 است که برابر یک میلیون ریال است.

از جمله مهم‌ترین موارد دیگری که لازم است تعیین شود، dx و dt است. با توجه به اینکه داده‌های ما به‌صورت ماهانه است، لذا لازم است تا فاصله زمانی یا همان dt نیز

به صورت ماهانه در نظر گرفته شود. بنابراین مقدار dt برابر با $0,083$ است. جهت تعیین کردن dx ، همان طور که در مقدمه بحث ذکر کردیم، از تابع $NORM.INV$ در نرم افزار اکسل استفاده می کنیم. ورودی این تابع، Probability و Mean و Standard Deviation است. جهت وارد نمودن مقدار Probability، لازم است تا یک ستون دیگری به نام Rand ایجاد کرده و با استفاده از تابع Rand، مقادیری بین صفر و یک ایجاد می شود. مقدار Mean برابر صفر خواهد بود و مقدار Standard Deviation نیز برابر \sqrt{dt} است. بنابراین تاکنون طبق توضیحات داده شده، ۵ ستون را باید تشکیل دهیم که شامل قیمت اوراق، بازده قیمت سهام پایه، اعداد تصادفی، زمان و dx است. لازم به ذکر است که تعداد اعداد و ارقام در هر ستون بستگی به تعداد داده ها دارد. در خصوص ستون زمان لازم به توضیح است که مقدار اول برابر صفر و مقدار دوم برابر مقدار اول به اضافه مقدار dt است و به همین صورت تا آنجایی که داده در اختیار داریم، این محاسبه را ادامه می دهیم.

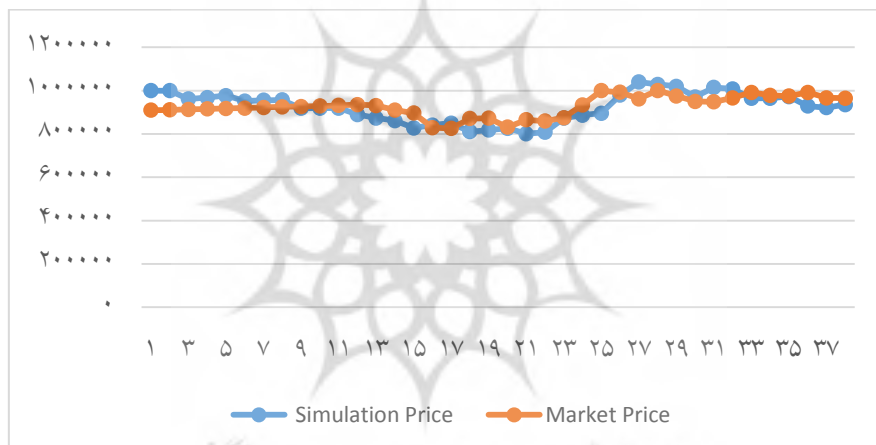
در نهایت به سراغ اصلی ترین و مهم ترین بخش از شبیه سازی می رویم که لازم است مدل پیشنهادی که بخش قبل ذکر شد را در نرم افزار اکسل وارد نماییم و مقداری که به دست می آید، در واقع قیمت شبیه سازی شده اوراق است که با در نظر گرفتن مفروضات توضیح داده شده صورت گرفته است.

همان طور که در بخش قبل ذکر شد، مدل پیشنهادی این پژوهش در حالت اول (نرخ سود ثابت) به صورت زیر است:

$$dv = \left[V_0 e^{(r+s)t} \left(r + s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 t^2 + rt + \mu st \right) \right] dt + (\sigma s V_0 t e^{(r+s)t}) dx \quad \text{رابطه (۴۵)}$$

از این رابطه، مواردی مانند r و σ و V_0 و μ و dt مقادیری معین دارند که توضیح داده شد و مواردی مانند dx و s و t در طول زمان تغییر پیدا می کند. رابطه V_1 برابر است با $V_0 + dv$ و V_2 برابر است با $V_1 + dv$ و به همین صورت تا V_{37} ادامه خواهد داشت.

در راستای انجام محاسبات فوق، یک نکته حائز اهمیت نیز وجود دارد و این نکته، تعدیل‌سازی قیمت شبیه‌سازی است. از جمله مواردی که در خصوص تعدیل قیمت شبیه‌سازی شده لازم است مورد بررسی قرار گیرد، در نظر گرفتن کوپن‌های این اوراق است که البته همان‌طور که ذکر شد، کوپن‌های این اوراق به صورت سه‌ماهه است. بدین معنی که هر سه‌ماه لازم است تا مقدار کوپن محاسبه شده از قیمت شبیه‌سازی کسر شود. لذا با انجام این عملیات و محاسبات مربوطه، به قیمت‌های شبیه‌سازی تعدیل شده دست پیدا خواهیم کرد. با مقایسه قیمت اوراق در بازار و قیمت شبیه‌سازی اوراق، نمودار آن به صورت زیر است:



نمودار (۱): مقایسه قیمت بازار و قیمت شبیه‌سازی اوراق اجاره مبتنی بر سهام - نرخ سود ثابت
منبع: یافته‌های تحقیق

با توجه به نمودار (۱) می‌توان نتیجه‌گیری نمود که قیمت‌های شبیه‌سازی شده با قیمت‌های بازار مطابقت ندارد. این در حالی است که مدل پیشنهادی این پژوهش به واقعیت اقتصاد کشور نزدیک‌تر است و واقعیت‌های این اوراق را در نظر می‌گیرد که از جمله مهم‌ترین آن می‌توان به دارایی پایه این نوع از اوراق اجاره اشاره کرد که کاملاً متفاوت از دارایی پایه اوراق اجاره معمولی است. بدین معنی که در اوراق اجاره مبتنی بر

سهام، دارایی پایه شفافیت دارد و می‌توان قیمت را به صورت روزانه و مستمر تعیین نمود در حالی که در اوراق اجاره معمولی به این صورت نیست. در واقع مدل قیمت‌گذاری فعلی اوراق اجاره مبتنی بر سهام با مدل قیمت‌گذاری اوراق اجاره معمولی به یک شکل است در حالی که در واقع نباید به این صورت باشد.

- حالت دوم: نرخ سود متغیر و متناسب با عایدی سهام مورد اجاره

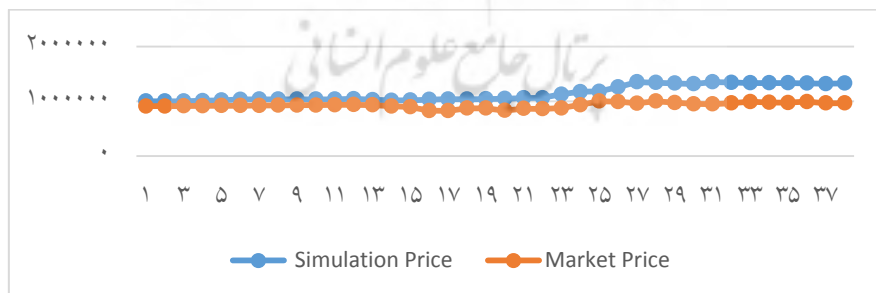
روند شبیه‌سازی در حالت دوم (نرخ سود متغیر) نسبت به حالت اول طولانی‌تر و بالتبع دقیق‌تر بوده و مطابقت بیشتری با ماهیت این نوع از اوراق اجاره دارد. همان‌طور که در بخش قبل ذکر کردیم، در این حالت، نرخ سود متناسب با عایدی سهام بوده و لازم است تا این نرخ به عایدی سهام مرتبط شود. برای انجام اینکار، ما نیازمند ساخت رابطه $\frac{e}{p}$ هستیم. این رابطه نشان‌گر نرخ سود اوراق مبتنی بر عایدی سهام مورد اجاره (r) است. بدین صورت که ابتدا لازم است تا سود خالص هر سهم (eps) را از گزارش‌های مالی استخراج کرده و سپس بر قیمت تقسیم کنیم. لازم به ذکر است که گزارش‌های مالی منتشر شده به صورت سه‌ماهه هستند و با توجه به اینکه داده‌های ما به صورت ماهانه است، لذا داده‌های سود خالص هر سهم را به صورت ماهانه تبدیل کرده و سپس بر قیمت محاسبه شده هر ماه تقسیم می‌کنیم و جهت انجام محاسبات و استفاده از این نسبت، یک ستونی را در اکسل به آن اختصاص می‌دهیم.

مورد دیگری که در این قسمت حائز اهمیت است، محاسبه σ_r و μ_r است. همان‌طور که ذکر شد، رابطه $\frac{e}{p}$ بیانگر نرخ سود اوراق است که جهت محاسبه μ_r باید میانگین این اعداد محاسبه شده و در ادامه جهت محاسبه σ_r لازم است تا انحراف معیار این اعداد نیز محاسبه شود. با انجام این محاسبات، μ_r برابر با ۰,۰۱۲ و σ_r برابر با ۰,۰۶۵ است. لازم به ذکر است که این اعداد نیز با توجه به ماهانه بودن اعداد دیگر، باید متناسب با هر ماه در نظر گرفته شود. این دو پارامتر همانند σ_s و μ_s به صورت ثابت برای محاسبه قیمت هر ماه در نظر گرفته می‌شود.

از دیگر مواردی که در این حالت نسبت به حالت قبل افزوده می‌شود، اعداد تصادفی است که در حالت اول ما تنها dx_1 را شاهد بودیم. لکن در این حالت با توجه به رابطه زیر که در بخش قبل استخراج کردیم، یک ستون اعداد تصادفی دیگر نیز اضافه شده و همچنین یک ستون دیگری به نام dx_2 تشکیل می‌دهیم.

$$dv = [V_0 e^{(r+s)t} (r + s + \frac{1}{2} \sigma_s^2 s^2 t^2 + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r^2 t^2 + \rho \sigma_s \sigma_r r t^2 + \mu_r r t + \mu_s s t)] dt + (\sigma_s V_0 t e^{(r+s)t}) dx_1 + (\sigma_r r V_0 t e^{(r+s)t}) dx_2 \quad (46)$$

با توجه به رابطه فوق، محاسبه ρ از دیگر مواردی است که نیازمند توجه است. بدین صورت که با استفاده از تابع correlation در اکسل، محاسبه مربوط به آن را انجام می‌دهیم و مقدار آن برابر ۰,۱۰۹- است. بنابراین طبق مفروضات و متغیرها و پارامترهای ذکر شده، در رابطه فوق محاسبات مربوطه انجام می‌شود. رابطه V_1 برابر است با $V_0 + dv$ و V_2 برابر است با $V_1 + dv$ و به همین صورت تا V_{37} ادامه خواهد داشت. تعدیل‌سازی قیمت شبیه‌سازی شده در این بخش نیز باید مورد بررسی قرار گیرد. بدین صورت که لازم است تا کوپن‌های این اوراق که به صورت ۳ ماهه است در نظر گرفته شود. بدین معنی که هر سه ماه لازم است تا مقدار کوپن محاسبه شده از قیمت شبیه‌سازی کسر شود. لذا با انجام این عملیات و محاسبات مربوط به آن، به قیمت‌های شبیه‌سازی تعدیل شده دست پیدا خواهیم کرد. با مقایسه قیمت اوراق در بازار و قیمت شبیه‌سازی اوراق، نمودار آن به صورت زیر است:



نمودار (۲): مقایسه قیمت بازار و قیمت شبیه‌سازی اوراق اجاره مبتنی بر سهام-نرخ سود متغیر

منبع: یافته‌های تحقیق

با توجه به نمودار (۲) می‌توان نتیجه‌گیری نمود که قیمت‌های شبیه‌سازی شده با قیمت‌های بازار مطابقت ندارد. این در حالی است که مدل پیشنهادی به واقعیت اقتصاد کشور نزدیک‌تر بوده و به جهت اسلامی نیز واقعی‌تر است و واقعیت‌ها و ماهیت این اوراق را در نظر می‌گیرد که از جمله مهم‌ترین این‌ها می‌توان به دارایی پایه این نوع از اوراق اجاره اشاره کرد که کاملاً متفاوت از دارایی پایه اوراق اجاره معمولی است. بدین معنی که در اوراق اجاره مبتنی بر سهام، دارایی پایه شفافیت دارد و می‌توان قیمت را به صورت روزانه و مستمر تعیین نمود، در حالی که در اوراق اجاره معمولی به این صورت نیست. همچنین شایان ذکر است که این مدل پیشنهادی به جهت تغییرات قیمتی، برگ خرید بیشتری را مدنظر قرار می‌دهد. لازم به ذکر است که مدل قیمت‌گذاری فعلی اوراق اجاره مبتنی بر سهام با مدل قیمت‌گذاری اوراق اجاره معمولی به یک شکل است. در حالی که در این پژوهش بیان کردیم که نباید به این صورت باشد. همچنین باید اشاره کرد، تفاوتی که نسبت به قیمت‌های شبیه‌سازی شده در حالت اول دارد این است که مفروضات دقیق‌تر و کامل‌تر و متناسب با ماهیت این اوراق نیز در مدل پیشنهادی درج شده است. بدین صورت که نرخ اجاره‌بها متناسب با عایدی سهام مورد اجاره است.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

انتشار اوراق اجاره مبتنی بر سهام یکی از دستاوردهای بازار سرمایه در سال‌های اخیر بوده و در واقع نسل دوم اوراق اجاره و مبتنی بر دارایی‌های مالی است و از جمله بحث‌های جدید اوراق تأمین مالی به‌شمار می‌رود و با توجه به ویژگی‌هایی که دارد پیش‌بینی می‌شود استفاده از آن به سرعت توسعه یابد. این اوراق از این جهت دارای اهمیت بوده که دارایی پایه آن شفاف و قابل مبادله در بازار است و قیمت آن به صورت مستمر قابل اندازه‌گیری است. پس دارندگان اوراق باید بتوانند از مهم‌ترین حقوق مالکیتی خود یعنی واگذاری اوراق به قیمت روز بهره‌مند شوند. اما متأسفانه آنچه در

طراحی و به‌کارگیری این اوراق مشاهده می‌شود این است که تفاوتی در قیمت‌گذاری و فرایند مبادله این اوراق با اوراق صکوک معمولی وجود ندارد که باید مورد ارزیابی قرار گیرد و تاکنون پژوهشی به‌طور خاص جهت ارائه مدل ارزش‌گذاری این اوراق با توجه به ماهیت آن صورت نگرفته است. همچنین لازم به ذکر است که متأسفانه شرایط انتشار این اوراق دقیقاً مشابه با اوراق صکوک معمولی است یعنی دارای نرخ سود کاملاً ثابت بوده و در سررسید نیز با قیمت اسمی بازخرید می‌شوند و تغییرات قیمت دارایی پایه در ارزش اوراق هیچ تأثیری ندارد.

آرزوی خیلی از محققین و پژوهشگران، این بوده است که دارایی پایه ما یک دارایی باشد تا ما هر لحظه قادر باشیم نظاره‌گر قیمت آن باشیم. علت این امر این است که در اوراق اجاره معمولی، ما یک دستگاه یا تجهیزاتی را اجاره می‌دهیم که اصلاً قیمت آن مشخص و معلوم نیست، اما زمانی که سهام را به‌عنوان دارایی پایه قرار می‌دهیم، هر لحظه می‌توانیم قیمت آن را مشاهده کنیم و قیمت مشخص است. بنابراین لازم است تا در خصوص ارزش‌گذاری این نوع از اوراق اجاره نیز مدلی ارائه شود و قیمت‌گذاری فعلی این اوراق متناسب با ماهیت اوراق نیست و نیازمند اصلاح است. در این راستا باید اضافه کنیم که نرخ اجاره‌بها یا همان نرخ سود اوراق اجاره سهام به‌صورت نرخ ثابت و معین برای انواع و اقسام سهام نخواهد بود و بلکه لازم است تا نرخ متناسب با عایدی سهام مورد اجاره تعیین شود. همچنین باید اشاره کرد که منافی مانند سود تقسیمی ناشی از سهام به مستأجر منتقل خواهد شد و در تعیین نرخ اجاره‌بها نیز تأثیرگذار خواهد بود و منافی مانند سود ناشی از نوسان قیمت سهام و حق رأی و حق تقدم در اختیار مالک (موجر) خواهد بود و در تعیین قیمت اوراق نیز مؤثر است. بنابراین با در نظر گرفتن این مفروضات و ارائه مدل پیشنهادی مبتنی بر ریاضیات تصادفی و استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، با قیمت‌های بازار مقایسه شده و

مشاهده می‌شود که قیمت‌های شبیه‌سازی با استفاده از مدل پیشنهادی، با قیمت‌های بازار متفاوت است.

در پایان لازم به ذکر است که با توجه به فروضات مطرح شده، در صورتی که مدل پیشنهاد ارزش‌گذاری مدنظر قرار گیرد، اوراق اجاره مبتنی بر سهام ابزار مناسبی برای بازار سرمایه در داخل کشورهای اسلامی خواهد بود و نسبت به وضعیت فعلی انتشار آن، برتری و رشد چشم‌گیری خواهد داشت.

یادداشت‌ها

1. Mallier & Alobaidi
2. Random Walk
3. Wajdi Dusuki
4. Isa & Shafie
5. Sheldon Lin & Tan
6. Annuities
7. Brennan & Xia
8. Trend
9. Volatilities
10. Diffiusion
11. Jump
12. Jump-Diffiusion
13. Information Component
14. Event
15. Convertible Bond
16. Wilmott
17. Lognormal
18. Exponential Function
19. Monte Carlo
20. Bootstrapping

کتابنامه

اعتصامی، امیرحسین؛ و سعدی، حسینعلی (۱۳۹۹). امکان‌سنجی فقهی - حقوقی اجاره سهام و کاربردهای مالی آن. دو فصلنامه مطالعات اقتصاد اسلامی، ۱۲(۲۴)، ۹۵-۱۳۵.

جلوداری، محمد (۱۳۹۹). درآمدی بر ریاضیات مالی. فصلنامه فرهنگ و اندیشه ریاضی. ۳۹(۶۶)، ۷-۴۰.

صالح آبادی، علی؛ میرطاهر، سیدمحمدجواد؛ فدایی واحد، میثم؛ و علی حسینی، مهدی (۱۳۹۲). مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مالی اسلامی اجاره. فصلنامه اقتصاد اسلامی، ۱۳(۴۹)، ۱۱۵-۱۳۷.

صادقی، کوروش (۱۳۹۷). مدل‌سازی مالی و سرمایه‌گذاری در اکسل. تهران: چالش. کاوند، مجتبی (۱۳۹۷). بررسی فقهی اوراق اجاره مبتنی بر سهام. تهران: مرکز پژوهش و توسعه و مطالعات اسلامی سازمان بورس و اوراق بهادار.

Brennan, M. J., & Xia, Y. (2000). Stochastic Interest Rates and the Bond-Stock mix. *Review of Finance*, 4(2), 197-210.

Etesami, A. H., & Sadi, H. A., (2019). Jurisprudential Feasibility Study of Stock Leasing and its Financial Applications. *Bi-Quarterly Journal of Islamic Economic Studies*, Year 12, NO.2 (24 Consecutive), Spring and Summer, 95-135. (In Persian)

Isa, Z., & Shafie, N. A. (2017). A Stochastic Approach for Determining Profit Rate of Islamic Financing Products. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 7(1), 154-163.

Kavand, M., (2018). Jurisprudential Study of Ijarah Sukuk Based on Equity. *Center for Research and Development and Islamic Studies of the Stock Exchange and Securities Organization (Markets and Financial Instruments Group)*. (In Persian)

Jelodari, M., (2019). An Introduction to Financial Mathematics. *Mathematical Culture and Thought*. 36(66), 7-40. (In Persian)

Sadeghi, K., (2018). Financial Modeling and Investment in Excel. Tehran: Challenge Publishing. (In Persian)

Salehabadi, A.; Mirtaher, S, M, J; Fadaie Vahed, M; & Ali Hosseini, M., (2013). Models for Valuing Islamic Ijarah Sukuk. *Scientific-Research Quarterly of Islamic Economics*, 13(49), 115-137. (In Persian)

Sheldon Lin, X., & Tan, K. S. (2003). Valuation of Equity-Indexed Annuities Under Stochastic Interest Rates. *North American Actuarial Journal*, 7(4), 72-91.

Mallier .R, & Alobaidi .G (2002). Pricing Equity-Linked Debt Using The Vasicek Model; *Acta Math. Univ. Comeniana*. Vol. LXXI, 2, 211-220.

Dusuki, A. W. (2010). Do equity-based Sukuk structures in Islamic capital markets manifest the objectives of Shariah??. *Journal of Financial Services Marketing*, 15, 203-214.

Wilmott, P. (2013). *Paul Wilmott on quantitative finance*. John Wiley & Sons.