

مقایسه کالیبراسیون مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی بر نوسانات تصادفی و تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته^۱

فروغ لطفی*، رضا آقاجان نشتائی**، مهدی مشکی میاوقی⁺

DOI: 10.30495/ECO.2023.1976840.2722

<p>چکیده</p> <p>هدف این مقاله، مقایسه کالیبراسیون مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی بر نوسانات تصادفی و تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته است. بدین منظور، از تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته مبتنی بر نوسانات ثابت و نیز مدل هستون مبتنی بر نوسانات متغیر برای قیمت‌گذاری استفاده شد. برای اجرای مدل مطرح‌شده، از داده‌های اختیار خرید عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده کرده است. نتایج نشان داد، در وضعیت بی‌تفاوتی و وضعیت سوددهی کالیبراسیون مدل هستون برای همه سررسیدها بهتر از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته عمل می‌کند. در وضعیت زیان‌دهی نیز اگرچه کالیبراسیون مدل هستون در دوره کوتاه‌مدت ضعیف عمل می‌کند؛ اما با افزایش زمان تا سررسید، کالیبراسیون مدل هستون بهتر از تکنیک تبدیل انتگرالی در میان‌مدت و بلندمدت پاسخ داده است. براساس نتایج پیشنهاد می‌شود، در راستای توسعه زیرساخت‌های آموزشی و فرهنگ‌سازی اوراق اختیار معامله، اداره ابزارهای نوین مالی شرکت بورس اوراق بهادار تهران، برای محاسبه پارامترهای کلیدی قراردادهای اختیار معامله در سناریوهای مختلف، مدل مطرح‌شده را مدنظر قرار دهد تا از این رهگذر، ارزش‌گذاری دقیق‌تری از قراردادهای اختیار معامله به دست آید.</p>	<p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲۲</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۲۵</p> <p>طبقه‌بندی JEL: G11, G13, G17</p> <p>واژگان کلیدی: تبدیل انتگرالی، روش دوزنقه‌ای، کالیبراسیون، اوراق اختیار خرید، نوسان تصادفی.</p>
--	--

^۱ این مقاله مستخرج از رساله دکتری فروغ لطفی به راهنمایی دکتر رضا آقاجان نشتائی و مشاوره دکتر مهدی مشکی میاوقی در دانشکده مدیریت و حسابداری دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت است.

* دانشجوی دکتری تخصصی مهندسی مالی، گروه مدیریت، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران، پست الکترونیکی:

lotfi.forough@gmail.com

** استادیار، گروه مدیریت بازرگانی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران (نویسنده مسئول)، پست الکترونیکی: nashtaiei@iaurasht.ac.ir

mhd.meshki@yahoo.com

⁺ دانشیار، گروه حسابداری و مالی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران، پست الکترونیکی:



۱. مقدمه

طی چندسال گذشته، رشد و توسعه بازار سرمایه کشور و ارائه سازوکارها و ابزارهای مختلف توسط دولت برای حمایت از آن، اهمیت بازار سرمایه را در اقتصاد کشور افزایش داده است. یکی از این ابزارها، «اوراق مشتقه»^۱ است. با توجه به افزایش چشم‌گیر مبادله ابزار مشتقه از جمله «اوراق اختیار معامله»^۲، مسئله ارزش‌گذاری این اوراق اهمیت شایانی یافته‌است (فخاری، ولی‌پور خطیر و موسوی، ۱۳۹۶).

از طرفی، مدل‌های ریاضی به‌ویژه، روش‌های حل دیفرانسیلی از پیشرفته‌ترین روش‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله هستند. یکی از این روش‌ها، تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته^۳ است (ایتکین، لیپتون و مورای، ۲۰۲۱). اگرچه، نظریه تبدیل انتگرال، جدید و بدیع نیست؛ اما گفته می‌شود که هنوز از نظر کاربردی، مانند پیچیدگی مدل‌های هوش مصنوعی نظیر شبکه‌های عصبی کانولوشن^۴ یا پردازش تصویر تشخیص پزشکی، ارزش تحقیقات بیشتر را دارد (رائیه، جنوم و کیم^۵، ۲۰۲۱). همچنین، تجزیه و تحلیل‌ها نشان می‌دهد این روش‌ها از نظر محاسباتی کارآمد هستند و از دقت و پایداری قابل قبولی بهره‌مندند (ایتکین و همکاران، ۲۰۲۱).

از آنجا که تغییر قیمت سهم به نوسان بازار منجر می‌شود و پیش‌بینی قیمت منصفانه^۶ اختیارها در این شرایط نیازمند حل معادلات پیچیده است؛ از این‌رو، در این مقاله برای دستیابی به توزیع نرمال لگاریتمی^۷ یا همان تابع توزیع احتمال شرطی با توجه به قیمت روز سهام، از تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته استفاده شده است که مبتنی بر مدل بلک - شولز^۸ است. گفتنی است مدل بلک - شولز برای ارزیابی اختیارات به نوسانات ثابت متکی است که گرچه نمایانگر پویایی در بازارهای مالی نیست؛ اما از مزایایی هم‌چون سادگی و فرم صریح برای قیمت اختیار معامله برخوردار است (شاکران، ۱۳۹۱).

با این اوصاف، مدل بلک - شولز ایرادهایی هم دارد؛ برای مثال، داده‌های واقعی نشان می‌دهد هرچند این مدل در روند بازار، پیوستگی آشکاری به‌نمایش می‌گذارد؛ در دنیای واقعی، قیمت‌ها پرش‌دار هستند؛ افزون‌بر آن، حافظه بلندمدت^۹ در بازده دارایی‌ها بیانگر وجود خودهم‌بستگی میان مشاهده‌ها با فاصله زمانی زیاد است (جنابی، ۱۳۹۸). به‌همین دلیل، در این مقاله برای رفع ایرادهای مدل بلک - شولز، از مدل‌های مبتنی بر نوسانات تصادفی نیز استفاده شده است که برخلاف مدل بلک - شولز، نوسان قیمت دارایی پایه را یک متغیر تصادفی با «نوسان متغیر»^{۱۰} در نظر می‌گیرد.

در این حالت، پویایی این روند تصادفی می‌تواند توسط برخی فرایندهای دیگر مانند حرکت براونی اجرا شود (تائو و تائو^{۱۱}، ۲۰۱۲). تلاطم تصادفی و پرش‌ها، از ویژگی‌های فرایند جهان واقعی است و آثار آن، قیمت‌های اختیار

¹ Derivatives

² Option Contracts

³ Generalized Integral Transformation Technique (GITT)

⁴ Itkin, Lipton & Muravey

⁵ Convolutional Neural Networks (CNN)

⁶ Rathie, Geum & Kim

⁷ Fair Value

⁸ Log Normal

⁹ Black-Scholes

¹⁰ Long-Term Memory (LTM)

¹¹ Stochastic Volatility vs. Constant Volatility

¹² Thao & Thao

معامله را متأثر می‌سازد (آلبانز و کوزنتسوف^۱، ۲۰۰۵). از این رو، در این پژوهش برای گرفتن اثر ناپیوستگی نوسان‌ها از مدل هستون به‌عنوان مدل پایه دیگری برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار استفاده شده‌است. مدل هستون یکی از محبوب‌ترین مدل‌های نوسانات تصادفی برای قیمت‌گذاری «اوراق اختیار معامله (آپشن)» است و می‌توان از آن برای قیمت‌گذاری مشتقاتی که هیچ فرمول ارزیابی فرم بسته‌ای وجود ندارد، استفاده کرد (میلان و پوسپیژیل^۳، ۲۰۱۷).

انگیزه اصلی توسعه مدل‌های پیشرفته قیمت‌گذاری نوسان تصادفی، نیاز به اطلاعات بهتر در بازار است و همه مدل‌های قیمت‌گذاری به یک مجموعه پارامتر نیاز دارند تا پویایی هر مدل را به‌طور کامل مشخص کنند. برای اینکه یک مدل در بازارهای واقعی کارا باشد و برای قیمت‌گذاری و مدیریت ریسک قابل استفاده باشد، باید «کالیبراسیون»^۴ انجام شود. این تکنیک مستلزم استفاده از تکنیک‌های بهینه‌سازی با هدف شناسایی مجموعه پارامترهای مدل است که قیمت مدل برای آنها با قیمت بازار مطابقت داشته باشد (هیرسا و نفسی^۵، ۲۰۱۴).

این مقاله با کمک از الگوریتم‌های بهینه‌سازی جهانی مانند «الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر»^۶ که سعی می‌کند دید کلی از فضای جستجو را حفظ کند و این امر را با استفاده از جمعیتی از افراد که به‌طور هم‌زمان در فضای جستجو کاوش می‌کنند، سعی در تطبیق بهینه پارامترهای مدل با قیمت‌های بازار داشته‌است. الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر در کاوش فضای جستجو و شناسایی مناطقی که بهینه‌سازی بالقوه در آن واقع شده‌اند، بسیار کارآمد دانسته شده‌است (سو، چن، اوتامی، لین و وی^۷، ۲۰۲۲).

تحلیل مطالعات مرتبط داخل کشور نشان می‌دهد حتی تکنیک کالیبراسیون بدرستی معرفی نشده است و عمدتاً از روش‌های یادشده به‌تنهایی استفاده می‌شود که از دقت مدل می‌کاهد (صاحبی‌فرد، دسترنج و عطاآبادی، ۱۳۹۹؛ موسوی و سهیلی، ۱۳۹۵). بنابراین، سوال اصلی پژوهش این است که کدام‌یک از این دو مدل می‌تواند تحلیل دقیق‌تری از تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران ارائه نماید. در پاسخ‌گویی به سوال اصلی، دو فرضیه مطرح می‌شود که عبارتند از: ۱) کالیبراسیون مدل تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته مبتنی بر روش ذوزنقه‌ای، توانایی تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد و ۲) کالیبراسیون مدل تصادفی هستون مبتنی بر نوسان‌های دارایی پایه توانایی تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد.

در ادامه، برای آزمون این دو فرضیه، ضمن معرفی تکنیک کالیبراسیون، دو مدل مختلف معرفی شده کالیبره می‌شود و از این رهگذر سعی می‌شود، دو هدف ۱. قیمت‌گذاری عادلانه اوراق اختیار معامله و ۲. نزدیک شدن آن‌ها به واقعیات بازار تحصیل شود.

برای دستیابی به این اهداف، مقاله بدین شکل سازمان‌دهی می‌شود: پس از مقدمه، در بخش دوم، ادبیات پژوهش مرور می‌شود؛ در بخش سوم، روش پژوهش عرضه می‌شود؛ بخش چهارم به یافته‌ها و بخش پنجم، به نتیجه‌گیری و پیشنهادها تخصیص می‌یابد.

¹ Albanese, Kuznetsov

^۲ گفتنی است در زبان گفتاری/محواره‌ای فنی، واژه «آپشن» کاربرد فراوان‌تری از اصطلاح «اختیار معامله» دارد.

³ Milan & Pospíšil

⁴ Calibration

⁵ Hirsá & Neftci

⁶ Dove Swarm Optimization (DSO)

⁷ Su, Chen, Utami, Lin & Wei



۲. مروری بر ادبیات پژوهش

- مبانی نظری

«قراردادهای اختیار معامله» که یکی از انواع اوراق مشتقه است، به دو نوع اختیار خرید و اختیار فروش تقسیم می‌شود. دارنده اختیار خرید با پرداخت مبلغی (پرمیوم) این حق (نه الزام و تعهد) را برای خود می‌خرد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمتی معین (قیمت اعمال) و در تاریخی مشخص یا قبل از آن، بخرد. با همین روال، دارنده اختیار فروش با پرداخت مبلغی این حق را برای خود می‌خرد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمتی معین و در تاریخی مشخص یا قبل از آن بفروشد (فرخی و فرخی، ۱۳۹۵).

به دلیل اهمیت اوراق اختیار معامله در پوشش ریسک و کسب بازدهی آربیتراژی^۱، طی چند دهه گذشته، تلاش‌های زیادی برای ارزش‌گذاری این اوراق صورت گرفته است. در سال ۱۹۷۳، بلک، شولز و مرتون، معادله دیفرانسیل تصادفی را معرفی کردند که رفتار تصادفی ارزش دارایی‌های مالی مانند سهام را مدل‌سازی می‌کند. اگرچه، از این مدل هنوز هم در بازار مالی استفاده می‌شود؛ به آن انتقادهای زیادی وارد شده است. در واقع، این انتقادهای به فرض‌هایی است که مهم‌ترین آن‌ها ثابت در نظر گرفتن نوسان دارایی پایه است. برای حل این معضل، از سال ۱۹۸۷ به بعد، مدل‌های ارزش‌گذاری مختلفی معرفی شده‌اند. از جمله این مدل‌ها می‌توان به مدل‌های نوسان‌پذیری تصادفی مانند هستون اشاره کرد (میلان و همکاران، ۲۰۱۷).

در همان زمان که استفاده از مدل‌های تلاطم تصادفی رواج یافت، پژوهشگران به این نتیجه رسیدند که «پیوسته‌بودن مسیر فرایند قیمت‌ها» در تطبیق نتایج مدل با داده‌های واقعی اشکال‌هایی ایجاد می‌کند. لزوم توجه به حرکت‌های بزرگ بازار و اطلاعاتی که به‌طور ناگهانی، بازار را متاثر می‌ساخت، موجب شد توجه پژوهشگران به ارائه مدل‌هایی همراه با فرایندهای تصادفی جلب شود (فلورسکو، ماریانی و سون، ۲۰۱۴).

این ابزار مدل‌سازی که کالیبراسیون نامیده می‌شود، فرایند تعیین یک پارامتر است؛ به گونه‌ای که قیمت مدل و قیمت بازار برای مجموعه معینی از ابزارهای قابل معامله با یکدیگر بسیار مطابقت داشته باشند. نهایتاً، این مدل می‌تواند فرصت‌های آربیتراژ را در میان مشتقات قابل معامله، کشف نماید و این برتری روش کالیبراسیون نسبت به سایر روش‌هاست (هیرسا و همکاران، ۲۰۱۴). در ادامه، مهم‌ترین پژوهش‌های داخلی و خارجی در خصوص موضوع بررسی می‌شود.

- پیشینه پژوهش

راجی‌زاده (۱۴۰۱) در پژوهشی با هدف تبیین مدل جدید نوسان در قیمت‌گذاری برگ اختیار معامله با استفاده از «شاخص نوسان VIX»^۳، معروف به «مدل گارو»^۴ همراه با لحاظ مؤلفه‌های نوسان چندگانه، شامل واریانس شرطی مبتنی بر بازده (مؤلفه‌های پنهان) و پویایی واریانس تحقق‌یافته (مؤلفه پرش)، به ارائه مدل پرداختند. نتایج تجزیه و تحلیل

¹ Arbitrageur

² Florescu, Mariani & Sewell

³ VIX Fluctuation Index

⁴ GARV Model

فرضیه‌ها نشان داد محاسبه نوسان بر مبنای مدل گارو با مؤلفه‌های پنهان و مؤلفه پرش در پیش‌بینی نوسان VIX، در مقایسه با مدل گارچ و آرچ دارای خطای اندازه‌گیری کم‌تری است.

صاحبی‌فرد و همکاران (۱۳۹۹) در پژوهش خود به قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی تحت مدل هستون بر مبنای اطلاعات روزانه شاخص بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. در این پژوهش، قیمت‌گذاری در دو بخش با بازه‌های زمانی متفاوت انجام شد و برای حل مدل اصلی از روش تبدیل فوریه سریع استفاده شد. نتایج قیمت‌گذاری فرضی نشان داد قیمت‌گذاری اختیار معاملات مدل توانی نمی‌تواند از مدل هستون تبعیت کند و باعث ایجاد شرایط آربیتراژ در بازار بورس می‌شود.

باوندپوری گیلان، مظاهری و فتوحی فیروزآبادی (۱۳۹۶) در پژوهش خود معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی در رودخانه را با ضرایب وابسته به مکان و بهره‌گیری از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته در دامنه‌ای با طول محدود حل کرده‌اند. مقایسه نتایج (GITT) و حل‌های تحلیلی استفاده‌شده در صحت‌سنجی و حل عددی به همراه شاخص‌های آماری نشان از دقت بسیار بالای راه‌حل پیشنهادی دارد. همچنین، برای نشان دادن اهمیت به‌کارگیری ضرایب متغیر در معادله انتقال آلاینده در رودخانه، نتایج حل معادله با ضرایب ثابت و حل معادله با ضرایب متغیر مقایسه شد. محاسبه شاخص‌های آماری در این حالت بیانگر عدم دقت کافی نتایج معادله انتقال آلودگی با ضرایب ثابت است.

موسوی و همکاران (۱۳۹۵) در پژوهش خود بدون توجه به اینکه از چه مدلی برای تخمین قیمت استفاده می‌کنند، نظریه تطبیق پارامترها را بیان کرده‌اند و پارامترهای مدل هستون را با داده‌های بازار S&P500 مطابقت داده‌اند. سپس با استفاده از پارامترهای به‌دست‌آمده از تطبیق به‌عنوان نقطه شروع، اوراق اختیار معامله اروپایی و آسیایی را با شبیه‌سازی مونت‌کارلو قیمت‌گذاری کرده‌اند. نتایج نشان داد برای اختیار نامتعارف آسیایی قیمت‌های به‌دست‌آمده هم‌گرایی خوبی دارند. اما، نتایج نه‌چندان خوب در قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی با مونت‌کارلو، موجب تردید در استفاده از این روش برای اختیار آسیایی می‌شود.

فلفل، کینیتز و مک‌والتر^۱ (۲۰۲۲) در پژوهشی اظهار کرده‌اند اگر درجه بالایی از دقت و ثبات بازار برای قیمت‌گذاری آپشن مورد نیاز باشد، مدل‌های نوسان محلی تصادفی اغلب رویکرد مناسبی هستند. این مدل اغلب به روش‌های عددی فشرده محاسباتی، مانند شبیه‌سازی مونت‌کارلو یا قیمت‌گذاری تبدیل فوریه، در هر تکرار یک روش بهینه‌سازی نیاز دارد. آن‌ها یک رویکرد جایگزین با استفاده از تکنیک‌های نوسانات تصادفی مؤثر ارائه کردند که امکان کالیبراسیون مستقیم کارآمد تابع اهرم را برای کلاس بزرگی از مدل‌های نوسانات محلی تصادفی فراهم می‌کند. نتایج ایشان بیانگر عملکرد خوب هر سه مدل بوده است.

رامیرز، مارتینز، ترزا و پالاسیوس^۲ (۲۰۲۲) در پژوهشی پارامترهای مدل نوسانات تصادفی هستون را با استفاده از دو روش مختلف کالیبره می‌کنند، این دو روش عبارتند از: (۱) به‌حداقل رساندن یک تابع هدف غیرخطی (یک تابع ضرر) با محدودیت‌هایی در مقادیر پارامتر (۲) استفاده از یک الگوریتم تکامل تفاضلی. نتایج نشان داد روش اول با خطا و زمان کمتر عملکرد بهتری دارد. با این حال، برای هر دو روش، تعدیل نوسانات ضمنی برای گزینه‌های با سررسید بلندمدت بهتر از سررسیدهای کوتاه‌مدت است.

¹ Felpel, Kienitz & McWalter

² Ramírez, Martínez, Teresa & Palacios



اچنیم، گوبت و موریس^۱ (۲۰۲۲) در پژوهشی یک روش کالیبراسیون جدید طراحی کردند که برای رسیدگی به ویژگی‌های خاص آپشن‌ها در بازار ارزهای دیجیتال، یعنی اسپردهای پیشنهادی خرید-فروش^۲ بزرگ و احتمال گم‌شدن یا نامنجم بودن قیمت‌ها در مجموعه داده‌های لحاظ‌شده، طراحی شده‌است و نشان دادند این روش کالیبراسیون به‌طور قابل توجهی قوی‌تر و دقیق‌تر از روش استاندارد براساس قیمت‌های منطبق با بازار است.

الغلیث^۳ (۲۰۲۰) در پژوهش خود فرمولی به فرم‌بسته ارائه کرد که به هیچ روش عددی/محاسباتی نیاز ندارد. فرمولی ساده مانند فرمول کلاسیک قیمت‌گذاری بلک-شولز است. افزون‌براین، هم‌زمان جهش و نوسانات تصادفی را نیز بررسی کرد. رویکرد وی حاکی از معرفی کلاس جدیدی از فرایندهای تصادفی است که براساس جبرهای کلیفورد ساخته شده‌است.

به‌طورکلی، تحلیل مطالعات نشان می‌دهد، در کشور تعدادی پژوهش به روش هستون به بررسی قیمت‌گذاری اختیار معامله پرداخته‌اند؛ اما، مدل‌های ارائه‌شده از دقت کافی برخوردار نیستند. بدین ترتیب، جنبه نوآوری این مقاله آن است که چون بربنیاد یک مدل تصادفی قوی مبتنی بر نوسان‌های متغیر دارایی پایه و یک مدل ریاضی مبتنی بر نوسان‌های ثابت استوار است و این مدل‌ها را کالیبره می‌کند، نهایتاً میزان دقت و صحت هرمدل را بر مبنای بهینه‌سازی تابع هدف می‌سنجد.

۳. روش پژوهش

هدف این مقاله، مقایسه کالیبراسیون مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی بر نوسانات تصادفی و تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته است. بدین منظور، از تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته مبتنی بر نوسانات ثابت و نیز مدل نوسان تصادفی هستون مبتنی بر نوسانات متغیر برای قیمت‌گذاری استفاده شده است. برای اجرای مدل مطرح‌شده، از داده‌های اختیار خرید عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده‌است.

جامعه آماری آن، تمامی اوراق اختیار خرید عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار تهران است. از آنجا که قیمت اختیار معامله‌های پرنوسان، گران‌تر از قیمت قرارداد اختیار معامله‌های با نوسانات کم هستند و این موضوع اهمیت قیمت‌گذاری این قبیل اختیارها را دوچندان می‌کند؛ از این رو، برای اجرای تکنیک مطرح‌شده، برای نمونه، اطلاعات اختیار خرید سهام شرکت سایپا با نماد ضسپا به تاریخ‌های سررسید ۱۴۰۱/۰۸/۲۵ در بازه قیمتی (۳۰۰۰-۱۳۰۰)، به تاریخ سررسید ۱۴۰۱/۱۲/۱۰ در بازه قیمتی (۳۲۵۰-۱۵۰۰)، به تاریخ سررسید ۱۴۰۱/۰۳/۲۵ در بازه قیمتی (۳۰۰۰-۱۰۰۰) و به تاریخ سررسید ۱۴۰۰/۰۳/۲۶ در بازه قیمتی (۴۵۰۰-۱۴۰۰) مناسب دانسته و در ادامه بررسی شده‌است.

بدین منظور، برای محاسبه تغییرپذیری قیمت سهام و نوسانات آن، یک دوره زمانی یک‌ساله از داده‌های دسترس‌پذیر در بازه زمانی ۱۴۰۰-۱۴۰۱ مناسب تشخیص داده‌شد. برای جمع‌آوری داده‌های مربوط به اوراق اختیار خرید از وب‌سایت بورس اوراق بهادار تهران^۴ و برای جمع‌آوری داده‌های سهام پایه از سامانه تحلیل بنیادی بورس

^۱ Echenim, Gobet & Maurice

^۲ «اسپرد پیشنهاد خرید و درخواست فروش» که به‌طور اختصار، اسپرد خرید-فروش نامیده می‌شود؛ در واقع، تفاوت بین بالاترین قیمتی که یک خریدار حاضر است بابت خرید دارایی پرداخت کند و پایین‌ترین قیمتی که یک فروشنده برای فروش دارایی درخواست کرده است، می‌باشد.

^۳ Alghalith

^۴ www.tse.ir

ویو^۱ استفاده شده است.

برای آزمون فرضیه‌های مقاله، ابتدا اطلاعات با استفاده از نرم‌افزار صفحه گسترده اکسل محاسبه و تقسیم‌بندی شدند و در ادامه، در محیط پایتون و در مواردی نیز بهره‌گیری از نرم‌افزار متلب، آزمون فرضیه انجام شده است. برای تحلیل داده‌ها، از قیمت پایانی اختیار خرید بهره گرفته شد. جدول (۱) اختیارهای مختلف خرید مربوط به سهام حسپا در قیمت‌های متفاوت توافقی را نشان می‌دهد.

جدول ۱. اختیارهای مختلف خرید مربوط به سهام حسپا در قیمت‌های متفاوت توافقی

(اختیارخ حسپا- ۱۴۰۱/۰۸/۲۵)		(اختیارخ حسپا-۱۴۰۱/۱۲/۱۰)		(اختیارخ حسپا-۱۴۰۱/۰۳/۲۵)		(اختیارخ حسپا- ۱۴۰۰/۰۳/۲۶)	
قیمت توافقی	نماد	قیمت توافقی	نماد	قیمت توافقی	نماد	قیمت توافقی	نماد
۱۳۰۰	حسپا۸۰۵۸۱	۱۵۰۰	حسپا۱۲۰۰۱	۱۰۰۰	حسپا۳۰۱۰۱	۱۴۰۰	حسپا۳۰۰۰۱
۱۴۰۰	حسپا۸۰۵۹۱	۱۶۰۰	حسپا۱۲۰۱۱	۱۲۰۰	حسپا۳۰۱۱۱	۱۶۰۰	حسپا۳۰۰۱۱
۱۵۰۰	حسپا۸۰۴۷۱	۱۷۰۰	حسپا۱۲۰۲۱	۱۴۰۰	حسپا۳۰۱۲۱	۱۸۰۰	حسپا۳۰۰۲۱
۱۶۰۰	حسپا۸۰۴۸۱	۱۸۰۰	حسپا۱۲۰۳۱	۱۶۰۰	حسپا۳۰۱۳۱	۲۰۰۰	حسپا۳۰۰۳۱
۱۷۰۰	حسپا۸۰۴۹۱	۱۹۰۰	حسپا۱۲۰۴۱	۱۸۰۰	حسپا۳۰۱۴۱	۲۵۰۰	حسپا۳۰۰۴۱
۱۸۰۰	حسپا۸۰۵۰۱	۲۰۰۰	حسپا۱۲۰۵۱	۲۰۰۰	حسپا۳۰۱۵۱	۳۰۰۰	حسپا۳۰۰۵۱
۱۹۰۰	حسپا۸۰۵۱۱	۲۲۰۰	حسپا۱۲۰۶۱	۲۵۰۰	حسپا۳۰۱۶۱	۳۵۰۰	حسپا۳۰۰۶۱
۲۰۰۰	حسپا۸۰۵۲۱	۲۴۰۰	حسپا۱۲۰۷۱	۳۰۰۰	حسپا۳۰۱۷۱	۴۰۰۰	حسپا۳۰۰۷۱
۲۲۰۰	حسپا۸۰۵۳۱	۲۶۰۰	حسپا۱۲۰۸۱			۴۵۰۰	حسپا۳۰۰۸۱
۲۴۰۰	حسپا۸۰۵۴۱	۲۸۰۰	حسپا۱۲۰۹۱				
۲۶۰۰	حسپا۸۰۵۵۱	۳۰۰۰	حسپا۱۲۱۰۱				
۲۸۰۰	حسپا۸۰۵۶۱	۳۲۵۰	حسپا۱۲۱۱۱				
۳۰۰۰	حسپا۸۰۵۷۱						

منبع: شرکت مدیریت فناوری بورس تهران^۲

بخش اول: تکنیک تبدیل انتگرالی

تکنیک تبدیل انتگرالی به عنوان یک روش عددی همه‌منظوره جدید قدرتمند، مدل‌های معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به یک سیستم غیرخطی جفت‌شده از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند تا به صورت عددی با تکنیک‌های تثبیت‌شده حل شوند (ایتکین و همکاران، ۲۰۲۱). روش تبدیل انتگرال از بسط توابع ویژه کوتاه‌شده استفاده می‌کند (کوتا و میخایلوو^۳، ۱۹۹۳).

¹ www.bourseview.com

² www.tsetmc.ir

قابل دسترس در وبسایت بورس اوراق بهادار تهران به نشانی: www.tse.ir

³ Cotta & Mikhailov

متغیرهای مورد استفاده در تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم یافته این پژوهش به صورت زیر تعریف (= مفهوم سازی) می شوند:

- S_0 : قیمت روز سهام^۱ به ریال (که مقداری مشخص است)؛
- K : قیمت توافقی^۲ به ریال (که مقداری مشخص است)؛
- T : زمان تا سررسید^۳ بر حسب سال (که مقداری مشخص است)؛
- $v_0(K, T)$: بهای پرداختی آپشن‌ها بابت قیمت توافقی k و سررسید T به ریال؛
- S_T : قیمت سهام در روز T به ریال (که مقداری نامشخص است)؛
- r : نرخ بهره بدون ریسک به درصد (که مقداری مشخص است).

- گام اول: تعیین توابع

ابتدا مقدار S_T تعیین می شود و سپس قیمت گذاری اوراق یاد شده صورت می گیرد؛ زیرا تغییر قیمت سهم به نوسان بازار منجر می شود و اگر S_T مقداری مشخص باشد، دیگر اوراق اختیاری وجود نخواهد داشت و روند بازار مشخص خواهد بود. برای قیمت گذاری اوراق مشتقه مهم ترین گام، تعیین تابع پرداختی^۶ است که برای اختیار خرید به صورت رابطه (۱) است (فرخی و فرخی، ۱۳۹۵).

$$Call: (S_T - K)^+ = \text{Max}(S_T - K, 0) \quad (1)$$

در صورت استفاده از اختیار خرید یا فروش، تابع پرداختی هیچ گاه منفی نخواهد بود (یا برابر با صفر است یا مقداری مثبت). بنابراین، مقدار $S_T - k$ مثبت است؛ یعنی، اگر در تاریخ انقضا، قیمت سهم بیشتر از قیمت توافقی شود، اوراق اختیار خرید اعمال خواهد شد. تابع مورد نظر برای اختیار فروش نیز به صورت رابطه (۲) است.

$$Put: (K - S_T)^+ = \text{Max}(K - S_T, 0) \quad (2)$$

اگر در تاریخ انقضا، قیمت سهم، کمتر از قیمت توافقی شود، اوراق اختیار فروش اعمال خواهد شد. مطلب بعدی مورد نیاز، تابع توزیع احتمال شرطی^۷ قیمت سهام در زمان سررسید T است که نشانه گذاری آن به صورت $f(S_T|S_0)$ است و مقدار آن به قیمت روز سهام وابسته است و به همین دلیل، نام گذاری آن با واژه شرطی همراه است. به طور خلاصه، با این پرسش روبرو هستیم که اگر قیمت روز سهام S_0 باشد، توزیع قیمت آینده آن یعنی S_T به چه صورت است. بدین منظور، بعد از مشخص کردن موارد فوق، از مقدار پرداختی نسبت به تابع توزیع احتمال شرطی انتگرال گرفته می شود (یاووس و عبدالجواد^۸، ۲۰۲۰).

¹ Spot Price

² Strike Price

³ Time to Maturity

⁴ اگر به دنبال ارزش گذاری اختیار فروش باشیم، این مقدار به صورت P_0 و اگر در پی ارزش گذاری اختیار خرید باشیم، این مقدار به صورت V_0 نشان داده می شود.

⁵ Price at Time T

⁶ Payoff Function

⁷ Conditional Probability Distribution Function (PDF)

⁸ Yavuz & Abdeljawad

این مقدار در برخی منابع با نام لاتین X نیز عرضه شده است.

$$\int_0^{\infty} (S_T - K)^+ f(S_T|S_0) ds_T \quad (3)$$

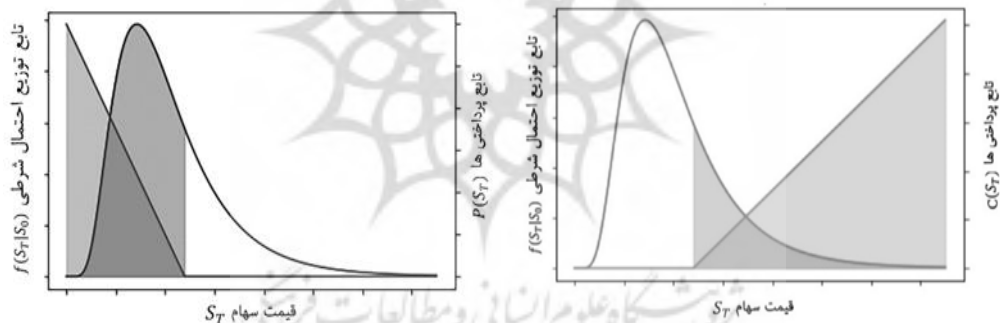
رابطه (۳) ارزش اختیار را در تاریخ انقضا مشخص می‌کند؛ درحالی‌که ارزش روز آن مدنظر است. بدین‌منظور، باید مقدار فوق را تنزیل کرده و از این‌رو، به فاکتور تنزیل^۱ نیاز است. بنابراین، خواهیم داشت:

$$C_0(K, T) = e^{-rT} \int_0^{\infty} (S_T - K)^+ f(S_T|S_0) ds_T = e^{-rT} \int_K^{\infty} (S_T - K) f(S_T|S_0) ds_T \quad (4)$$

در رابطه (۴) برای آسان‌کردن محاسبات، بازه انتگرال از K تا بی‌نهایت لحاظ‌شده تا مستقیماً به مقدار مثبت آن دست یافت. درخصوص اختیار فروش تنها چیزی که تغییر می‌کند، تابع پرداختی است و تابع توزیع احتمال شرطی تغییری نخواهد کرد؛ بنابراین:

$$P_0(K, T) = e^{-rT} \int_0^K (K - S_T)^+ f(S_T|S_0) ds_T = e^{-rT} \int_0^K (K - S_T) f(S_T|S_0) ds_T \quad (5)$$

در رابطه (۵) نحوه قیمت‌گذاری اختیار فروش با استفاده از روابط ریاضی توضیح داده‌شد. در ادامه، نمودار (۱) قیمت‌گذاری اختیار خرید را با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی نشان می‌دهد. سطح زیرمنحنی تابع توزیع احتمال شرطی و تابع پرداختی‌ها مدنظر است و قسمت خالی زیرمنحنی اهمیتی ندارد؛ زیرا حاصل ضرب هر مقدار در صفر برابر با صفر خواهد بود.



نمودار ۱. نحوه قیمت‌گذاری اختیار خرید با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی

منبع: یافته‌های پژوهش

نمودار ۲. نحوه قیمت‌گذاری اختیار فروش با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی

منبع: یافته‌های پژوهش

گام دوم: ارزیابی عددی انتگرال

پس از تبیین انتگرال برای اوراق اختیار، برای محاسبه‌پذیر بودن انتگرال و کوتاه‌کردن هزینه محاسبات، لازم است محدوده محاسبات مشخص شود. بدین‌ترتیب، به‌جای ∞ با قراردادن عددی به اندازه کافی بزرگ (B) و تعیین زیرفاصله‌های مساوی^۲، به‌طول η هرزیر فاصله را ارزیابی کرده و با یکدیگر جمع می‌کنیم. بدین‌ترتیب، در هرزیر

¹ Discount Factor

² Equal Sub-Intervals

فاصله به تعداد n زیرانتگرال^۱ خواهیم داشت. بدین ترتیب، هرکدام از این زیرانتگرال‌ها را ارزیابی عددی کرده و با هم جمع می‌کنیم. گفتنی است علامت مساوی در روابط (۴ و ۵) تبدیل به تقریب خواهد شد (یاووس و همکاران، ۲۰۲۰).

$$C_0(K, T) = e^{-rT} \int_K^{\infty} (S_T - K) f(S_T) ds_T \approx e^{-rT} \int_K^B (S - K) f(S) ds \quad (6)$$

انتخاب η (طول هرزیر فاصله) و N به‌طور مستقل صورت می‌پذیرد و بدین ترتیب، مقدار B (کران بالا) مشخص خواهد شد. بدین ترتیب، حلقه‌ای خواهیم داشت که به‌صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود.

$$S_j = K + (j - 1)\eta \quad \text{for } j = 1, \dots, N + 1 \quad (7)$$

و مقدار B برابر خواهد بود با:

$$B = S_{N+1} = K + N\eta \quad (8)$$

درخصوص اوراق اختیار فروش، کران بالا از قبل مشخص و برابر k است. با انتخاب N و مجموعه $\frac{K}{N} = \eta$. بدین ترتیب، حلقه‌ای خواهیم داشت که به‌صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود.

$$S_j = (j - 1)\eta \quad \text{for } j = 1, \dots, N + 1 \quad (9)$$

با بازنویسی مجدد رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$C_0(K, T) \approx e^{-rT} \sum_{j=1}^N \int_{S_j}^{S_{j+1}} (S - K) f(S) ds \quad (10)$$

بدین ترتیب، N زیر انتگرال (یعنی، بخش $\int_{S_j}^{S_{j+1}} (S - K) f(S) ds$) خواهیم داشت، که در ادامه یکی از این بخش‌ها را با کمک روش دوزنقه‌ای^۲ به کمک کدنویسی پایتون ارزیابی عددی کرده و با استفاده از آن به‌طور تقریبی هرزیرانتگرال تقریب زده می‌شود. شکل (۳) تمامی این روابط را نشان می‌دهد. ناحیه‌ای که با رنگ قرمز مشخص شده است، بخشی است که در ازای محاسبات تقریبی از دست می‌رود. هراندازه η کوچکتر باشد، تقریب به اندازه واقعی نزدیک‌تر خواهد شد. بدین ترتیب، خواهیم داشت:

$$\int_{S_j}^{S_{j+1}} (S - K) f(S) ds \approx \frac{\eta}{2} \left(\underbrace{(S_j - K)f(S_j)}_y + \underbrace{(S_{j+1} - K)f(S_{j+1})}_{y+u} \right) \quad (11)$$

با جایگزین کردن رابطه (۱۰) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$C_0(K, T) \approx e^{-rT} \sum_{j=1}^N \frac{\eta}{2} \left((S_j - K)f(S_j) + (S_{j+1} - K)f(S_{j+1}) \right) \approx e^{-rT} \sum_{j=1}^N \frac{\eta}{2} (S_j - K)f(S_j|S_0)W_j, \quad W_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta & j = 1 \\ \eta & \text{غیره} \end{cases} \quad (12)$$

برای اختیار فروش نیز خواهیم داشت:

$$P_0(K, T) \approx e^{-rT} \sum_{j=1}^N \frac{\eta}{2} (K - S_j)f(S_j|S_0)W_j, \quad W_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta & j = 1 \\ \eta & \text{غیره} \end{cases} \quad (13)$$

¹ Sub-Integrals

² Trapezoidal Rule

با توجه به اینکه رابطه (۱۳) برای تعداد N زیرانتگرال محاسبه می‌شود؛ بنابراین، هزینه محاسبات آن برابر است با $O(N)$. برای دستیابی به توزیع نرمال لگاریتمی^۱ یا همان تابع توزیع احتمال شرطی با توجه به قیمت روز سهام، با تکیه بر مدل بلک-شولز به صورت زیر عمل خواهیم کرد:

$$f(S_T|S_0) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S_T - \ln S_0 - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}}{\sigma S_T \sqrt{2\pi T}} \quad (14)$$

- بخش دوم مدل هستون و پارامترها

مدل هستون یک راه‌حل بسته برای قیمت‌گذاری است که می‌تواند برخی کاستی‌های ارائه‌شده در مدل قیمت‌گذاری بلک-شولز را برطرف کند.^۲

- کالیبراسیون مدل

کالیبراسیون، معمولاً با تعیین یک تابع هدف شروع می‌شود تا میزان خطا حداقل شود. در این مقاله، تابع هدف استفاده از ریشه میانگین مربعات خطا^۳ است که به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌شود.

$$\min_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\hat{V}_i^\theta - V_i)^2}{n}} \quad (15)$$

که در آن، n تعداد قیمت‌های بازار، \hat{V}_i^θ قیمت اختیار معامله تخمینی، V_i قیمت اختیار معامله بازار، θ مجموعه پارامترها، O تمامی مقادیری که پارامترها می‌توانند اختیار کنند. با شناسایی تابع هدف، انواع طرح‌های بهینه‌سازی که می‌توانند برای حل مسئله بهینه‌سازی استفاده شوند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. تمرکز این مقاله بر الگوریتم بهینه‌سازی فراابتکاری بهینه‌سازی ازدحام کبوتر است. این الگوریتم که به اختصار (DSO) نامیده می‌شود، از روش تغذیه‌ای کبوتر الهام گرفته است.^۴

۴. یافته‌های پژوهش

- آمار توصیفی

بررسی معاملات انجام‌شده بر اختیارهای خرید سهام سایپا (خسایپا) نشان می‌دهد، به طور معمول اختیارهای به تاریخ سررسید ۱۴۰۱/۰۳/۲۵ در مقایسه با سایر اختیارها با استقبال بیشتری روبرو بوده و با نزدیک شدن به تاریخ سررسید، ارزش بیشتری داشته‌اند. در جدول (۲) آمار توصیفی داده‌ها به تفکیک کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت شامل

¹ Log Normal

^۲ برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به هستون (۱۹۹۳).

³ Root-Mean-Square Deviation (RMSE)

⁴ Dove Swarm Optimization (DSO)

در تعدادی از مقالات از این الگوریتم با عنوان Swarm Inspired Projection یا SIP یاد شده است.

^۵ برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به پژوهش خریدار، قلیزاده و لطفی، ۱۳۹۷ و سو و همکاران، ۲۰۲۲.

میانگین، میانه، بیشینه، کمینه، انحراف معیار، چولگی، کشیدگی ارائه شده است. در کوتاه‌مدت، $v_0(K, T)$ دارای بالاترین انحراف استاندارد است. این امر نشان می‌دهد که تغییرات قیمت در سررسید کوتاه‌مدت به انحرافات شدید در واریانس سری این سررسید می‌انجامد. این موضوع متعاقباً باعث می‌شود که حرکت قیمت‌ها در دوره کوتاه‌مدت کمی بی‌ثبات‌تر از سایر دوره‌ها باشد. افزون‌بر این، انحراف معیار آن تا پایان دوره نمونه کاهش می‌یابد. حرکت صعودی قیمت در اختیار خرید به سررسید $1401/03/25$ رخ می‌دهد. چنین روندی در بازار تمایل به افزایش سود فعالان بازار سرمایه در طول زمان در کوتاه‌مدت را منجر خواهد شد. جدای از آن، باید انتظار داشت که بازدهی در این دوره‌ها چولگی مثبت با میانگین مثبت باشد و این موضوع در آمار توصیفی نیز برقرار بوده است.

قیمت در همه سررسیدها به جز $(1401/03/25)$ روند نزولی را نشان می‌دهد و بازدهی در این دوره دارای چولگی منفی با میانگین منفی است. بنابراین، با توجه به چولگی منفی با میانگین منفی، فعالان بازار به احتمال زیاد بسیار بالا پی‌می‌برند و اختیار خرید این شرکت را در قیمت‌های پایین بازار می‌فروشند. درخصوص بازدهی کشیدگی بالاتر از ۳ توزیع لپتوکورتیک را نشان می‌دهد و نشانگر این است که این سری، دنباله نسبتاً سنگین‌تری از توزیع عادی را نمایش می‌دهد. کشیدگی کمتر از ۳ نیز توزیع پلاتیکورتیک را نشان می‌دهد و درجه لپتوکورتوز آن در سررسید میان‌مدت و بلندمدت همراه با چولگی منفی بیشتر افزایش می‌یابد.

جدول ۲. آمار توصیفی داده‌های پژوهش در سررسیدهای مختلف

سررسید میان‌مدت		سررسید بلندمدت		سررسید کوتاه‌مدت		سررسید
بازدهی	بهای پرداختی بابت آپشن	بازدهی	بهای پرداختی بابت آپشن	بازدهی	بهای پرداختی بابت آپشن	نام متغیر
Return	$v_0(K, T)$	Return	$v_0(K, T)$	Return	$v_0(K, T)$	آماره / نماد
-۰/۰۱	۳۲۳/۰۰۳۱	-۰/۰۲	۲۹۸/۲۱۶۶	۰/۰۰۱	۲۴۰/۱۵۵۶	میانگین
۰/۰۰۰	۲۱۲	۰/۰۰۰	۲۳۶	۰/۰۰۰	۸۳	میانه
۰/۲۵	۱۸۸۹	۰/۳۱	۱۵۵۰	۰/۲۷	۱۳۵۸	بیشینه
-۰/۲۸	۲	-۰/۳۹	۱۰	-۰/۲۰	۱	کمینه
۰/۱۱	۳۲۵/۸۶۶۱	۰/۱۴	۲۴۸/۸۱۰۹	۰/۰۱۶	۳۵۶/۱۹۰۹	انحراف معیار
-۰/۱۷	۱/۰۱۴۴۴	-۰/۴۲	۱/۲۲۱۶۱۳	۰/۶۲	۱/۵۷۰۴۸۲	چولگی
۴/۵۳	۳/۲۹۶۰۵۴	۴/۶	۴/۴۶۲۱۸۵	۴/۸۴	۴/۵۹۹۴۷۹	کشیدگی
۱۲۹۸	۱۲۹۸	۱۶۹۴	۱۶۹۴	۸۲۹	۸۲۹	تعداد مشاهدات

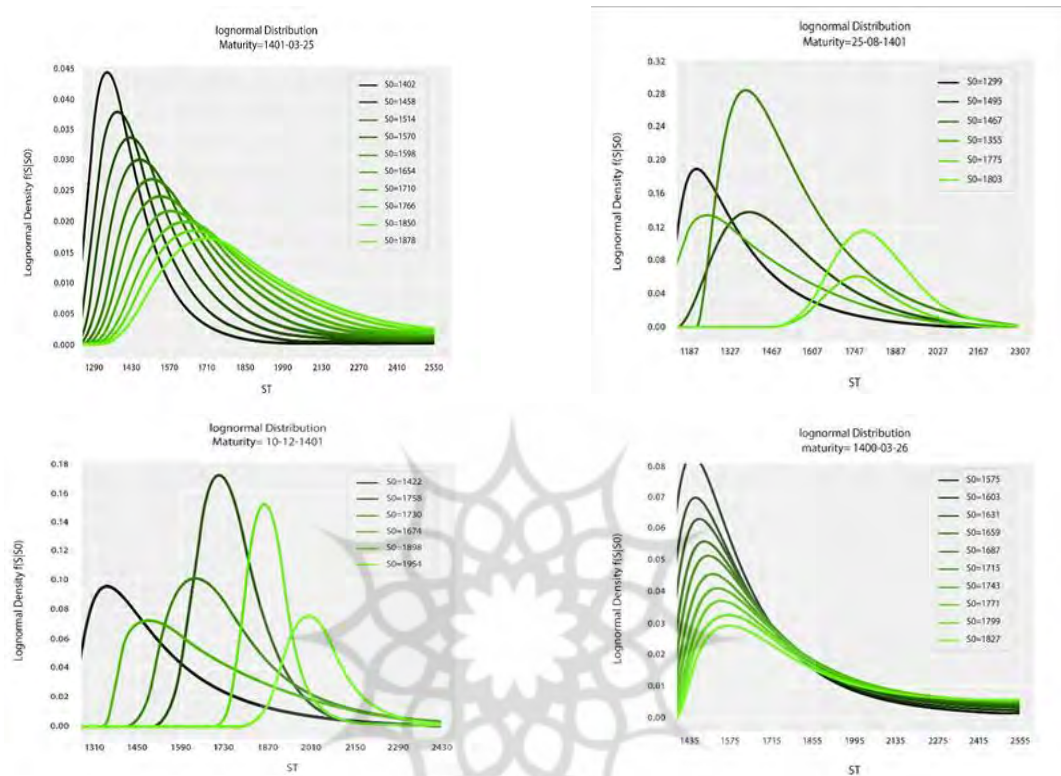
منبع: یافته‌های پژوهش

- کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم یافته

در ابتدا، با استفاده از تکنیک درون‌یابی^۱ برای پرکردن داده‌های از دست‌رفته و صاف کردن سطح موجود قیمت‌ها، برای اطمینان از اینکه برای هر تاریخ سررسید، قیمت اعمال وجود داشته باشد، قیمت متقابل آن درون‌یابی شده است. سپس،

¹ Interpolation

برای دستیابی به تابع توزیع نرمال لگاریتمی (تابع توزیع احتمال شرطی) کدنویسی در پایتون صورت پذیرفت و پارامترهای ثابت مدل مقداردهی شد. نمودار (۳) توزیع نرمال لگاریتمی برای مقادیر مختلف قیمت دارایی پایه در سررسیدهای مختلف را نشان می‌دهد.

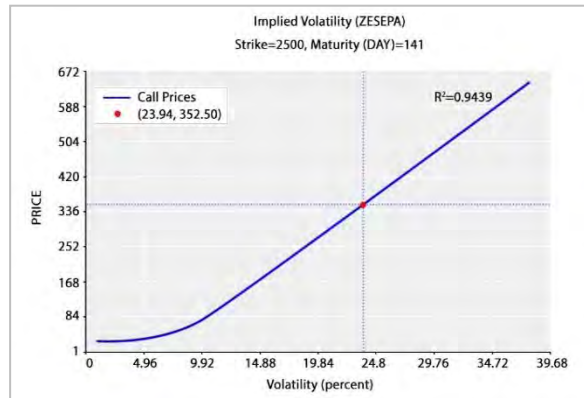


نمودار ۳. توزیع احتمال شرطی برای مقادیر مختلف S_0 اختیار خرید خسپا در سررسیدهای متفاوت

منبع: یافته‌های پژوهش

در ادامه، کالیبراسیون مدل و فرایند تعدیل پارامترها به گونه‌ای که قیمت‌های مدل $\hat{V}_i(\theta)$ بر قیمت‌های بازار V_i منطبق باشد، اجرا شده است. گفتنی است که قیمت‌های بازار ثابت هستند؛ اما، قیمت‌های مدل با تغییر مقادیر پارامترها (θ) می‌توانند تغییر کنند؛ به گونه‌ای که دو قیمت یادشده به اندازه کافی به یکدیگر نزدیک شوند.

در نمودار (۴) مقادیر مختلف نوسان (σ) براساس کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته از کم‌ترین تا نسبتاً بیشترین، مقداردهی شده است تا نقطه‌ای منطبق با قیمت بازار برای قیمت اعمال ۲۵۰۰ ریال و زمان تا سررسید ۱۴۱ روز نقطه‌یابی شود. چنانچه در نمودار ۴ نیز مشخص شده است، مقدار قیمت اوراق اختیار خرید، بر مبنای نوسان تحقق‌یافته ۲۳/۹۴ درصد، ۳۵۲/۵۰ به دست آمده است که با مقدار واقعی بازار (یعنی، ۳۵۴ ریال معادل ۱/۵ ریال) اختلاف دارد. در واقع، اگر این مقدار نوسان تحقق‌یافته به عنوان ورودی تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته قرار گیرد، قیمت آپشن برابر با ۳۵۲/۵۰ ریال خواهد بود.



نمودار ۴. کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم یافته

منبع: یافته‌های پژوهش

- کالیبراسیون مدل نوسانات تصادفی هستون

- یافتن مناسب‌ترین نقطه شروع

یافتن مناسب‌ترین نقطه شروع برای یافتن مجموعه پارامترهای بهینه در مدل اهمیت بسیاری دارد. بنابراین، با داشتن نقطه شروع و داشتن تابع هزینه، می‌توان مجموعه پارامترهای بهینه مدل را شناسایی کرد و برای تحقق این امر به الگوریتم‌های بهینه‌سازی نیاز است. الگوریتم بهینه‌سازی مورد استفاده در این مقاله، الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام کبوتر (DSO) است و نتایج با تکیه بر این الگوریتم به دست آمده است. بدین منظور، بر مبنای پژوهش گالوسیو^۱ و همکاران (۲۰۰۸) با استفاده از رابطه (۱۶)، مقادیر مختلف $\alpha \in (0,1)$ برای دو سری متفاوت از مجموعه پارامترها (θ_1 و θ_2) که کاملاً دلخواه هستند، تنظیم شده است.

$$\theta = \alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\theta_2 \quad (16)$$

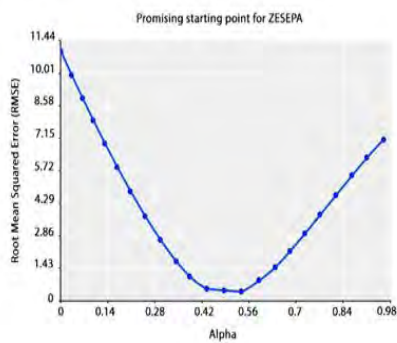
که در رابطه (۱۶) پارامترهای زیر مقداردهی گردید:

$$\theta_1 = \{\kappa_1, \theta_1, \lambda_1, \rho_1, v_{01}\} = \{0.8, 0.04, 0.05, 0.03, 0.074\}$$

$$\theta_2 = \{\kappa_2, \theta_2, \lambda_2, \rho_2, v_{02}\} = \{2.1, 0.01, 0.11, -0.76, 0.043\}$$

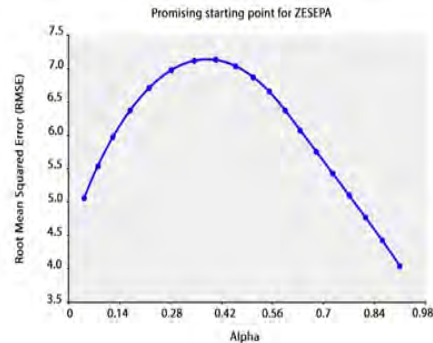
برای هر یک از θ_1 و θ_2 ، مجموعه مقادیر وارد مدل هستون شده و قیمت‌های مدل محاسبه گردید. سپس، با استفاده از تابع هدف (RMSE)، بهترین نقطه شروع به دست آمد. نمودارهای (۵-۷) نمودار تابع RMSE به ازای مقادیر مختلف α را نشان می‌دهد.

¹ Galluccio et al.



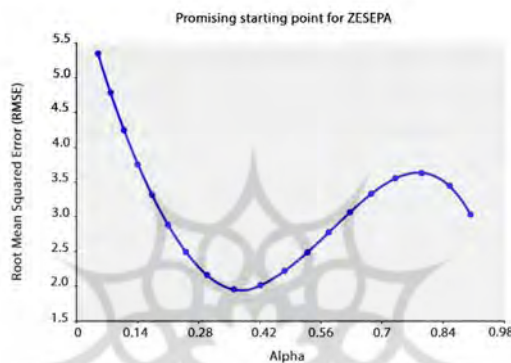
نمودار ۶. تنظیم نقطه شروع پارامترها (نقطه بهینه و مینیمم خطا)

منبع: یافته‌های پژوهش



نمودار ۵. تنظیم نقطه شروع پارامترها (غیرقابل قبول)

منبع: یافته‌های پژوهش



نمودار ۷. تنظیم نقطه شروع پارامترها (غیرقابل قبول)

منبع: یافته‌های پژوهش

- جستجوی شبکه‌ای پارامترها

در ادامه حول نقطه یافته‌شده جستجوی شبکه‌ای انجام شده‌است تا مجموعه نقاط به‌دست آید. جدول (۳) جستجوی شبکه‌ای انجام‌شده حول نقطه شروع را نشان می‌دهد. در ادامه نیز با کدنویسی انجام‌شده، پارامترهای بهینه با حداقل مقدار خطا به‌دست آمد. θ^* مقدار پارامتر بهینه را نشان می‌دهد.

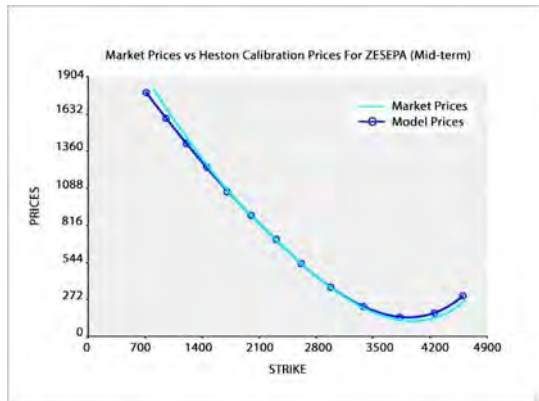
جدول ۳. جستجوی شبکه‌ای انجام‌شده حول نقطه شروع

	κ	θ	λ	ρ	v_0
نقطه شروع اولیه (θ)	۳/۳۴	۰/۰۲۸	۰/۰۸۵	-۰/۱۴۹	۰/۰۶۴
RMSE _{starting point} = ۰/۷۰۴۸۰۳۵۰۷					
بازه همسایگی نقطه شروع	[۲,۸, ۳,۸]	[۰,۰۱۶, ۰,۰۳۶]	[۰,۰۷۵, ۰,۰۹۵]	[-۰,۲۴, -۰,۰۵]	[۰,۰۵, ۰,۰۷]
پارامترهای بهینه (θ^*)	۲/۹۱	۰/۰۲۹	۰/۰۹۳	-۰/۱۰۲	۰/۰۵۷
RMSE _{Optimization} = ۰/۴۶۷۱۶۲۰۰۸۳۵					

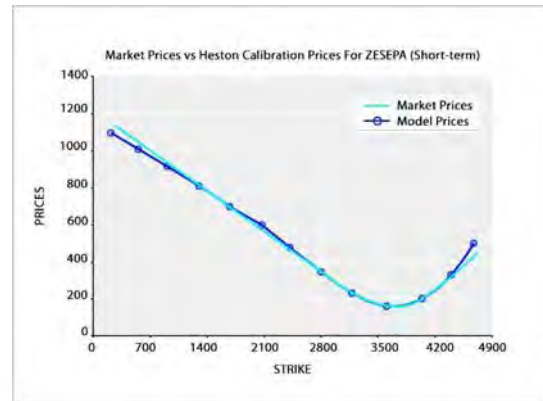
منبع: یافته‌های پژوهش

- مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های مدل

در ادامه نیز نمودارهای (۸ - ۱۰) مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های مدل را در سررسیدهای مختلف نشان می‌دهد. محور افقی قیمت اعمال و محور عمودی نشان‌دهنده قیمت اختیار خرید است.



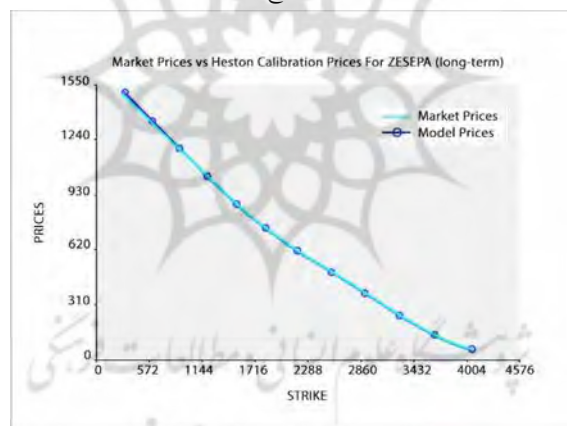
نمودار ۹. مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های کالیبره مدل هستون در سررسید میان‌مدت



نمودار ۸. مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های کالیبره مدل هستون در سررسید کوتاه‌مدت

منبع: یافته‌های پژوهش

منبع: یافته‌های پژوهش



نمودار ۱۰. مقایسه قیمت‌های بازار با قیمت‌های کالیبره مدل هستون در سررسید بلندمدت
منبع: یافته‌های پژوهش

نمودارهای (۸، ۹ و ۱۰) نشان می‌دهند که در همه سررسیدها، قیمت اختیار خرید تحصیل از مدل، متناسب با قیمت اختیار در بازار بوده و در بلندمدت، دقت بالاتری دارد.

- مقایسه کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی و نوسان تصادفی هستون

جدول (۴) مقایسه زمان محاسباتی (برحسب ثانیه) کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی و نوسان تصادفی هستون با تغییر مقادیر N و تکرار محاسبات برای ۱۰۰ بار را نشان می‌دهد.

جدول ۴. مقایسه زمان محاسباتی (برحسب ثانیه) مدل‌های پژوهش (سرعت ۱GHZ)

نسبت روش تکنیک تبدیل انتگرالی به هستون	زمان محاسبه (ثانیه)		N
	کالیبراسیون نوسان تصادفی هستون	کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی	
۱۶/۹۴۶	۰/۰۱۶۷	۰/۲۸۳۰	۲ ^۹
۱۷۸/۴۲۱	۰/۰۱۵۲	۲/۷۱۲۰	۲ ^{۱۰}
۲۲۱/۳۴	۰/۰۲۴۰	۵/۳۱۲۳	۲ ^{۱۱}
۲۴۴/۹۷۶	۰/۰۸۶۰	۲۱/۰۶۸	۲ ^{۱۲}
۵۰۶/۲۶	۰/۱۳۴۰	۶۷/۸۳۹	۲ ^{۱۳}
۶۰۴/۰۶۶	۰/۴۰۳۳	۲۴۳/۶۲	۲ ^{۱۴}
۳۱۱۲/۰۶	۰/۹۹۸۷	۳۱۰۸/۰۲۲	۲ ^{۱۵}

منبع: یافته‌های پژوهش

درخصوص $N < 2^9$ ، هر دو مدل کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی و نوسان تصادفی هستون زمان نسبتاً یکسانی برای محاسبه پیچیدگی‌ها نشان دادند؛ بنابراین، مقادیر قبل از آن در جدول (۴) نشان داده نشده‌است. با توجه به نتایج جدول (۴) روشن است که کالیبراسیون نوسان تصادفی هستون بسیار سریع‌تر از کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرالی به‌ویژه، برای N های بزرگ عمل می‌کند. در واقع، کالیبراسیون نوسان تصادفی هستون تعداد محاسبات مورد نیاز برای N نقطه را از $2N^2$ به $2N \log N$ کاهش می‌دهد. بنابراین، در صورتی که محاسبه پارامترهای بهینه هزینه‌بر نباشد (چنانچه در مدل پژوهش نیز نشان داده‌شد) مدل پیشنهادی از سرعت مناسبی در کسری از ثانیه برخوردار خواهد بود.

در ادامه جدول (۵) میانگین درصد مطلق خطا^۱ برای کالیبراسیون مدل‌های پژوهش در وضعیت سوددهی^۲، زیان‌دهی^۳ و بی‌تفاوتی^۴ در سناریوهای مختلف سررسید را نشان می‌دهد.

جدول ۵. میانگین درصد مطلق خطای مدل در سناریوهای گوناگون

وضعیت سوددهی (درصد)	وضعیت بی‌تفاوتی (درصد)	وضعیت زیان‌دهی (درصد)	کالیبراسیون	سررسید
۹/۰۱۵۱	۰/۹۱۵۸	۰/۹۸۲۵	تکنیک تبدیل انتگرالی	کوتاه‌مدت (> ۴۵ روز)
۷/۸۸۹۰	۰/۵۹۳۱	۱/۳۰۲۷	هستون	
۴/۱۹۵۰	۰/۸۰۹۹	۰/۷۴۰۷	تکنیک تبدیل انتگرالی	میان‌مدت (۹۰-۴۵ روز)
۲/۱۲۹	۰/۵۱۷۵	۰/۵۷۰۵	هستون	
۲/۰۰۰۱	۰/۷۶۲۳	۰/۷۵۴۶	تکنیک تبدیل انتگرالی	بلندمدت (< ۹۰ روز)
۰/۸۹۲۶	۰/۲۸۹۱	۰/۳۰۷۹	هستون	

منبع: یافته‌های پژوهش

¹ MAPE

² In-the-Money

³ Out- of-the-Money

⁴ At-the-Money



براساس نتایج جدول (۵) در وضعیت بی‌تفاوتی و وضعیت سوددهی کالیبراسیون هستون برای همه سررسیدها بهتر از تکنیک تبدیل انتگرالی عمل می‌کند. در وضعیت زیان‌دهی نیز اگرچه کالیبراسیون هستون در دوره کوتاه‌مدت ضعیف عمل می‌کند؛ اما با افزایش زمان تا سررسید، کالیبراسیون هستون بهتر از تکنیک تبدیل انتگرالی در میان‌مدت و بلندمدت پاسخ داده‌است. برای کاهش خطای سناریوی کوتاه‌مدت - وضعیت سوددهی می‌توان روزهای بیشتری را تجزیه و تحلیل نمود تا مشخص شود هر دو مدل در سناریوی کوتاه‌مدت و وضعیت سوددهی چگونه عمل می‌کنند. به‌طورکلی، تجزیه و تحلیل مجموع داده‌های استفاده‌شده در حال حاضر نشانه بسیار خوبی از دقت هر دو مدل است. به‌طورکلی، نتایج نشان داد کالیبراسیون مبتنی بر تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته در پیش‌بینی آپشن‌های با سررسید کوتاه‌مدت بهتر است. همچنین، رویکرد معرفی‌شده از نظر هزینه محاسبات تابع توزیع احتمال شرطی امکان‌پذیر و عملی است و بنابراین، به‌عنوان روش پیشنهادی توصیه می‌گردد.

در ادامه نیز کالیبراسیون هستون برای پیش‌بینی آپشن‌هایی که دارای سررسید میان‌مدت و بلندمدت هستند، بهتر عمل می‌کند. اگر به دنبال قیمتی باشیم که در زمان سررسید فراتر از داده‌های در دسترس این مقاله قرار داشته باشد (فراتر از سررسید بلندمدت)، می‌توان از تکنیک برون‌یابی^۱ مبتنی بر منحنی^۲ و یا مبتنی بر مدل^۳ (که تمرکز این مقاله بر مورد دوم است) استفاده گردد. مبتنی بر منحنی به این معنا که داده‌ها تا نقطه در دسترس بر یک منحنی متناسب می‌شوند و در ادامه برون‌یابی می‌شوند.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

هدف این مقاله، مقایسه کالیبراسیون مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی بر نوسانات تصادفی و تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته بود که برای نیل به آن از کالیبراسیون تکنیک تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته مبتنی بر نوسانات ثابت و نیز کالیبراسیون مدل نوسان تصادفی هستون مبتنی بر نوسانات متغیر استفاده گردید. دلیل به‌کارگیری تکنیک کالیبراسیون - که یک فرایند بسیار حائز اهمیت است - این بود که تفاوت بین قیمت‌های مشاهده شده بازار و قیمت‌های مدل را به حداقل برسد.

نتایج حاصل از تخمین فرضیه اول پژوهش نشان داد کالیبراسیون مدل تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته مبتنی بر روش دوزنقه‌ای، توانایی تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد که این نتیجه مطابق با یافته‌های ایتکین و همکاران (۲۰۲۱)، راثیه و همکاران (۲۰۲۱) و باوندپوری گیلان و همکاران (۱۳۹۶) است. در ادامه، نتایج حاصل از تخمین فرضیه دوم پژوهش نشان داد کالیبراسیون مدل تصادفی هستون مبتنی بر نوسان‌های دارای پایه، توانایی تخمین قیمت اوراق اختیار معامله منتشرشده در بورس اوراق بهادار ایران را دارد و این نتیجه مطابق با یافته‌های صاحبی فرد و همکاران (۱۳۹۹)، فلیپ و همکاران (۲۰۲۲)، رامیرز و همکاران (۲۰۲۲) است. براساس نتایج، پیشنهاد می‌شود در راستای توسعه زیرساخت‌های آموزشی و فرهنگ‌سازی اوراق اختیار معامله، اداره ابزارهای نوین مالی شرکت بورس اوراق بهادار تهران، برای محاسبه پارامترهای کلیدی قراردادهای اختیار معامله در سناریوهای مختلف، مدل ارائه‌شده این مقاله را مدنظر قرار دهد تا بدین طریق ارزش‌گذاری دقیق‌تری از قراردادهای اختیار معامله به‌دست آید.

¹ Extrapolation Technique

² Curve-Based

³ Model-Based

منابع

- باوندپوری گیلان، ناظم، مظاهری، مهدی، فتوحی فیروزآبادی، مرتضی (۱۳۹۶). حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در رودخانه با ضرایب متغیر دلخواه با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته، *مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی*، ۷(۱): ۸۹-۱۱۶.
- جنایی، امید، دهمرده قلعه نو، نظر (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون کسری - پرشی، *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۲۱(۳): ۳۹۲-۴۱۶.
- خردیار، سینا، قلیزاده، محمد حسن، لطفی، فروغ (۱۳۹۷). پیش‌بینی درماندگی مالی با استفاده از روش ترکیبی PCA-ANFIS و الگوریتم فراابتکاری بهینه‌سازی ازدحام کبوتر، *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۹(۳۷): ۱۳۳-۱۵۷.
- راجی‌زاده، سیمین (۱۴۰۱). ارزیابی شاخص نوسان VIX در بازار سرمایه ایران و تأثیر قیمت‌گذاری آتی آن با استفاده از مدل گارو. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۱۳(۵۲): ۸۰-۶۰.
- شاکران، زهرا (۱۳۹۱). ارزش‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی تحت وجود تلاطم تصادفی، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان، ۳-۱۸.
- صاحبی‌فرد، حسین، دسترنج، الهام، عطاآبادی، عبدالباقی عبدالمجید (۱۳۹۹). قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی برمبنای مدل هستون (شواهدی از بورس اوراق بهادار تهران)، *فصلنامه دانش سرمایه‌گذاری*، ۹(۳۳): ۲۵۷-۲۴۱.
- فخاری، حسین، ولی‌پور خطیر، محمد، موسوی، سیده مائده (۱۳۹۶). بررسی عملکرد شبکه عصبی بیزین و لونیگ مارکوات در مقایسه با مدل‌های کلاسیک در پیش‌بینی قیمت سهام شرکت‌های سرمایه‌گذاری. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۱۹(۲): ۳۱۸-۲۹۹.
- فرخی، زهرا؛ فرخی، فاطمه (۱۳۹۵). مفاهیم مقدماتی و ارزش‌گذاری اوراق مشتقه، چاپ اول، تهران: انتشارات بورس وابسته به شرکت اطلاع‌رسانی و خدمات بورس.
- موسوی، ساناز، سهیلی، علیرضا (۱۳۹۵). بررسی عددی تطبیق پارامترهای مدل هستون، چهارمین کنفرانس ریاضی و علوم انسانی، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۵۵-۱۵۱.
- نیسی، عبدالساده، ملکی، بهروز، رضائیان، روزبه (۱۳۹۵). تخمین پارامترهای مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان، *مجله مهندسی مالی و مدیریت ریسک اوراق بهادار*، ۷(۲۸): ۱۱۵-۹۱.
- Albanese, C., Kuznetsov, A. (2005). Unifying the three volatility models. *Risk*, 17(3): 94-98.
- Alghalith, M (2020). Pricing options under simultaneous stochastic volatility and jumps: A simple closed-form formula without numerical/computational methods, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 540: 1-4.
- Black, F., & Scholes, M.S (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654. ISSN 0022-3808. DOI: 10.1086/260062
- Cotta, R.M., & Mikhailov, M.D. (1993). Integral transform method, *Applied Mathematical Modelling*, 17(3), 156-161, [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(93\)90041-E](https://doi.org/10.1016/0307-904X(93)90041-E).
- Echenim, M., Gobet. E., & Maurice. A-C (2022), Unbiasing and robustifying implied volatility calibration in a cryptocurrency market with large bid-ask spreads and missing quotes, hal open acces, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03715921>
- Felpel, M. Kienitz, J., & McWalter, Th (2022), Effective Stochastic Local Volatility Models, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4016334>



- Florescu, I., Mariani, M.C., & Sewell, G. (2014). Numerical solutions to an integro-differential parabolic problem arising in the pricing of financial options in a Levy market. *Quantitative Finance*, 14(8): 1445-1452.
- Heston S.L (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *The Review of Financial Studies*, 6(2): 327–343. ISSN 0893-9454. DOI: 10.1093/rfs/6.2.327
- Hirsu, A., & Neftci, S. N (2014), An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives (Third edition), Chapter 25 - Overview of Calibration and Estimation Techniques, Academic Press, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384682-2.00025-6>
- Itkin, A., Lipton, A., & Muravey, D. (2021). Generalized Integral Transforms in Mathematical Finance. WORLD SCIENTIFIC. <https://doi.org/10.1142/12147>.
- Milan, M., & Pospíšil, J (2017), Calibration and simulation of Heston model, *journal Open Mathematics*, 15(1), 679-704. DOI 10.1515/math-2017-0058
- Ramírez, A. O., Martínez, V. F., Teresa, M., & Palacios, V. M (2022), Parameter calibration of stochastic volatility Heston, from <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8387459.pdf>
- Rathie, A. K., Geum, Y., & Kim, H. (2021). Various Approaches for Generalized Integral Transforms. In *Mathematical Problems in Engineering* (Vol. 2021, pp. 1–2). Hindawi Limited. <https://doi.org/10.1155/2021/9781038>
- Stein J., & Stein E (1991), Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *Review of Financial Studies*, 4(4): 727– 752. ISSN 0893-9454. DOI: 10.1093/rfs/4.4.727
- Su, M.-C., Chen, J.-H., Utami, A. M., Lin, S.-C., & Wei, H.-H. (2022). Dove Swarm Optimization Algorithm. In *IEEE Access* (Vol. 10, pp. 46690–46696). Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). <https://doi.org/10.1109/access.2022.3170112>
- Thao, H.T.P., & Thao, T.H. (2012). Estimating Fractional Stochastic Volatility. *The International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 82(38): 1861-1869.
- Yavuz, M., Abdeljawad, T. (2020). Nonlinear regularized long-wave models with a new integral transformation applied to the fractional derivative with power and Mittag-Leffler kernel. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 367 (2020). <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02828-1>

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی