فصلنامه علمی، پژوهش‌های رشد و توسعه اقتصادی
سال سیزدهم، شماره چهل و نه، زمستان ۱۴۰۱ (۳۶-۱۵)

Quarterly Journal of Economic Growth and Development Research
Vol. 13, No. 49, Desamber 2022 (15-36)
doi.org/10.30473/egdr.2022.62063.6403

برآورد نرخ بهینه مالیات بر آلودگی در یک الگوی رشد درون‌زا

میرناصر میرباقری هیر[۱]، * علی سلمان پور زنوز [۲]

۱. استادیاراقتصاد، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

۲. گروه علوم انسانی، دانشکده اقتصاد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند، مرند، ایران

(دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۱۹ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۲)

Estimation of the optimal pollution tax rate in an endogenous growth mode

Mirnaser Mirbagheri hir[1], *Ali salmanpour[2]

1. Department of economics, Assistant Professor of Economics, Payame Noor University, Tehran, Iran.
2. Assistant Professor of Economics Islamic Azad Marand Branch, Department of Economics Marand, Iran

(Received: **10/Dec/2021** Accepted: **01/Feb/2021**)

مقاله پژوهشی

Original Article

چکیده:

مالیات بر آلودگی یکی از مهمترین ابزارهای دولت در جهت کاهش آلودگی و افزایش رفاه جامعه می‌باشد. مالیات مستقیم زیست محیطی یا مالیات پیگویی با اثرگذاری بر منافع تولیدکنندگانی که محیط زیست را آلوده می‌کنند درصدد وضع مالیات بر تولیدات آلاینده به منظور کاهش آلودگی می‌باشند. بر این اساس هدف اصلی این مطالعه محاسبه نرخ بهینه مالیات بر آلودگی با در نظر گرفتن ملاحظات زیست محیطی با استفاده از یک الگوی رشد درون‌زا در اقتصاد ایران می‌باشد. در این مطالعه از یک الگوی رشد درون‌زا با تابع تولید تصادفی استفاده شده است. پس از بسط الگو و حل آن به روش تصادفی همیلتون- بلمن- ژاکوبی و دستیابی به رابطه تعیین کننده نرخ بهینه مالیات بر آلودگی، با استفاده از پارامترهای اقتصاد ایران، مدل مذکور کالیبره و مقدار بهینه مالیات بر آلودگی محاسبه گردید. نتایج حاصل از برآورد الگو نشان می‌دهد که نرخ بهینه مالیات بر آلودگی برای اقتصاد ایران ۵/۳ درصد از کل تولید می‌باشد. همچنین نرخ بهره یا نرخ سود سرمایه در اقتصاد اسلامی و نوسانات آن، نوسانات تولید، تغییر پارامترهای تابع آلودگی، میزان نرخ بهینه مالیات بر آلودگی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. نتایج آنالیز حساسیت برای اقتصاد ایران حکایت از این دارد که با افزایش ترجیحات زیست محیطی، نرخ سود و نوسانات تولید، نرخ بهینه مالیات بر آلودگی در حالت بهینه رفاه اجتماعی باید افزایش یابد. همچنین با افزایش نوسانات نرخ سود سرمایه برای باقی ماندن در حالت بهینه، نرخ مالیات بر آلودگی باید کاهش یابد.

واژه‌های کلیدی: نرخ بهینه‌ی مالیات بر آلودگی، آسیب‌های زیست محیطی، الگوی رشد درون‌زای تصادفی

طبقه‌بندی JEL: C61، O41، Q51.

Abstract:

Pollution tax is one of the most important tools of the government to reduce pollution and increase the welfare of society. Direct environmental or pigouvian tax, by affecting the revenues of producers, seeks to impose a tax on polluting products to reduce pollution Accordingly, the main purpose of this study is to calculate the optimal pollution tax rate taking into account environmental considerations using an endogenous growth model in the Iranian economy. In this study, an endogenous growth model with a stochastic production function is used. After developing the model and solving it by Hamilton-Belman-Jacobi random method and achieving the relationship determining the optimal rate of pollution tax, using the parameters of the Iranian economy, the model was calibrated and the optimal amount of pollution tax was calculated. The results of model estimation show that the optimal rate of pollution tax for the Iranian economy is 5.3% of total production. Also, the interest rate or capital gain rate in Islamic economy and its fluctuations, production fluctuations, change of pollution function parameters, the rate of the optimal pollution tax rate affect. The results of the sensitivity analysis for the Iranian economy indicate that with increasing environmental preferences, interest rates and production fluctuations, the optimal pollution tax rate should increase in the optimal state of social welfare. Also, with increasing capital gain rate fluctuations, to remain in the optimal situation the pollution tax rate must be reduced.

Keywords Optimal pollution tax rate, environmental damage, stochastic endogenous growth model
JEL: C61, O41, Q51.

نویسنده مسئول: میرناصر میرباقری هیر
E-mail: mirbagheri_hir@yahoo.com

*Corresponding Author: Mirnaser Mirbagheri hir

۱- مقدمه

انجام هر فعالیت اقتصادی موجب انتشار آلودگی و آسیب‌های زیست محیطی می‌گردد. توسعه و رشد همراه با پیامدهای منفی زیست محیطی بوده که باعث بروز جایگزینی بین منافع حاصل از رشد و تخریب محیط زیست گردیده و دیدگاه به وجود آمدن حداکثر رفاه در نتیجه‌ی افزایش تولید را زیر سؤال برده است (فاطمی زردان و همکاران، ۱۴۰۰: ۲۵). وجود این جایگزینی و اهمیت پیامدهای جنبی زیست محیطی و انتشار آلودگی و تبدیل آن به مسئله‌ای جهانی، دولت‌ها را در اجرای سیاست‌های کنترل آلودگی و پیگیری فرایند رشد مصمم ساخته است (بکرمن، ۱۹۹۲: ۴۹۰). بیشتر اقتصاددانان بر این عقیده می‌باشند که استفاده از ابزار مالیاتی می‌تواند یکی از راه‌حل‌های مطرح شده در هر جامعه‌ای برای مشکلات زیست‌محیطی باشد (ستوده‌نیا و همکاران، ۱۳۹۹: ۲۰). مالیات‌ها اثرات جانبی متفاوت می‌توانند داشته باشند. بنابراین، مالیات باید به نحوی وضع شود که کمترین اثرات اختلالی را در سیستم اقتصادی بر جای بگذارد (طالعی اردکانی، ۱۳۹۹: ۱۲۸). تقسیم‌بندی انواع مالیات‌ها به مالیات‌های مستقیم و غیرمستقیم عمده‌ترین نوع طبقه‌بندی در آمارهای دولتی، در سطح بین‌المللی و همچنین در ساختار بودجه ایران است. در این بین مالیات بر درآمد به‌عنوان اصلی‌ترین جزء مالیات‌های مستقیم همواره موردتوجه سیاست‌گذاران و اقتصاددانان بوده است (عبدخانی و همکاران، ۱۴۰۰، ۷۰). از آنجا که درآمد دولت‌ها عمدتاً ناشی از اعمال این نوع مالیات است، لذا سعی دولت‌ها بر این بوده که این نرخ‌ها را به‌طور مناسب و اثرگذار وضع کنند. چرا که افزایش نامتناسب نرخ‌های مالیات بر درآمد، اثرات اجتماعی زیادی را بر توزیع درآمد و رفاه عمومی در جامعه بر جای خواهد گذاشت؛ بنابراین محاسبه نرخ بهینه مالیات به صورتی که رفاه اجتماعی حداکثر شود امری ضروری به‌نظر می‌رسد (هادیان و استادزاد، ۱۳۹۴: ۱۰). لذا با استفاده از مالیات مستقیم بر آلودگی که از تولید اخذ می‌شود، می‌توان به سطح بهینه‌ی آلودگی دست یافت. وضع این مالیات باعث می‌شود که میزان تخریب محیط زیست به یک سطح مطلوب برسد.

مالیات بر آلودگی، نفع شخصی آلوده کننده را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بدیهی است که حفظ منافع شخصی، آلوده کننده را وادار می‌کند تا راه‌هایی برای کاهش پرداخت‌های مالیاتی خود بیابد. البته همیشه این سیاست به نفع کشور نمی‌باشد. بسیاری از این مالیات‌ها اگر فقط توسط یک کشور اجرا شود، اثرات نامطلوبی بر توان بنگاه‌های تولیدی آن کشور خواهند گذاشت. زیرا پرداخت مالیات باعث افزایش هزینه‌های بنگاه‌ها شده و بدین ترتیب در بازار جهانی، قدرت رقابت کالای تولیدی آنها کاهش می‌یابد. از طرفی در کشورهای دیگر، بنگاه‌هایی در حال فعالیت می‌باشند که با پرداخت مالیات آلودگی مواجه نیستند و لذا از یک مزیت رقابتی برخوردار می‌باشند.

سیاست مالیات مستقیم بر آلودگی از نقطه نظر اقتصادی روش مؤثرتر و ساده‌تری نسبت به سیاست کنترلی و دستوری برای مقابله با هزینه‌های جانبی زیست محیطی که شامل وضع قوانین و مقررات دولتی است می‌باشد. در این نوع از سیاست زیست محیطی استانداردها و معیارهای پذیرفتنی از سطح انتشار، آلاینده‌های زیست محیطی را تعیین می‌کند. واحدهای اقتصادی آلاینده، در صورت تخلف از این استانداردها با توقف تولید یا جریمه‌های سنگین مواجه می‌شوند (هراتی و همکاران، ۱۳۹۱: ۱۰۲).

در چارچوب تئوری‌های رشد درون‌زا پیامدهای جنبی زیست محیطی، به سبب انباشت آلودگی، بر مسیر رشد بهینه و رفاه تأثیر می‌گذارد. با توجه به ویژگی‌های اساسی محیط زیست، از جمله مطبوعیت، سلامت و بهره‌وری، اقتصاد تحت تأثیر قرار می‌گیرد. مطبوعیت محیط زیست و سلامت از کانال رفاه کل و با در نظر گرفتن آلودگی یا کیفیت محیط زیست در تابع مطلوبیت مصرف‌کننده در الگوهای رشد وارد می‌شوند. اثر بهره‌وری نیز با در نظر گرفتن کیفیت محیط زیست به عنوان یک عامل تولید قابل بررسی می‌باشد (مهتدی، ۱۹۹۶: ۱۲۳). از این رو هدف اصلی این مطالعه محاسبه نرخ بهینه مالیات بر آلودگی در یک الگوی رشد درون‌زا با یک تابع تولید تصادفی می‌باشد. تصادفی بودن تابع تولید یکی از مهمترین تفاوت‌های این الگو با سایر الگوهای مشابه انجام شده در این زمینه می‌باشد.

سازماندهی مباحث مقاله در ادامه بیان شده است. در قسمت دوم مقاله، مطالعات پیشین و ساختار الگوهای رشد با لحاظ سیاست‌های زیست محیطی، اعم از الگوهای رشد درون‌زای غیرتصادفی و تصادفی بیان شده و مورد بررسی قرار می‌گیرد. در قسمت سوم، مبانی نظری و روش شناسی تحقیق و در قسمت چهارم، نتایج حاصل از حل تجربی الگو و تجزیه و تحلیل نتایج ارائه می‌شود. قسمت پایانی نیز به نتیجه‌گیری و پیشنهادات اختصاص دارد.

۲- ادبیات موضوع

در ادامه ساختار و مبانی الگو بررسی شده است. در ابتدا به

بررسی فروض اولیه الگو می‌پردازیم. در این مطالعه فرض اقتصاد بسته را داریم. همچنین این اقتصاد شامل افراد زیادی با طول عمر نامحدود می‌باشد. در واقع این الگو با فرض نامحدود بودن عمر خانوارها و یکسان بودن ترجیحات در طول عمرشان مدل‌سازی شده است. همه‌ی متغیرها به صورت سرانه در نظر گرفته شده‌اند. مسئله حداکثر سازی مطلوبیت بین دوره‌ای خانوار در رابطه‌ی (۱) آمده است. این رابطه بیانگر ارزش فعلی مطلوبیت انتظاری ناشی از مصرف و آلودگی در طول عمر نامحدود خانوار می‌باشد.

(۱)

$$U = E_0\left[\int_0^{\infty} u(c_t, p_t)\, e^{-\rho t} dt\right]$$

در این رابطه:

u(c,p): تابع مطلوبیت لحظه ای می‌باشد، که این تابع مطلوبیت رابطه مثبت با سطح مصرف سرانه (c_t) و رابطه عکس با میزان آلودگی (p_t) دارد (u_c>0,u_p<0).

ρ: نرخ رجحان زمانی بوده که ثابت و مثبت در نظر گرفته شده است.

در رابطه با ترجیحات مصرف کننده مطالعات از دو فرض ترجیحات جدایی‌پذیر و جدایی ناپذیر استفاده می‌کنند. در این رابطه افرادی مانند دنگ و هوانگ (۲۰۱۰: ۸۲)، گریمود و روگ (۲۰۰۳، ۴۴۱) از تابع جدایی پذیر و افرادی مانند ژانگ و همکاران (۲۰۰۶: ۴۱۶) گرادوس و اسمولدرز (۱۹۹۳: ۳۳) کلمنس و سورتز (۱۹۹۷) اوت و سورتز (۲۰۰۴: ۱۲۶) از توابع مطلوبیت جدایی‌ناپذیر استفاده کرده‌اند. پاوترل (۲۰۰۷) نیز در مطالعه‌ی خود از تابع مطلوبیت جدایی ناپذیر استفاده کرده اما با این تفاوت که وی در تنزیل تابع مطلوبیت لحظه‌ای نه تنها از نرخ رجحان زمانی استفاده کرده، بلکه احتمال مرگ افراد را نیز در تابع مطلوبیت لحظه‌ای وارد کرده است. نتایج مطالعات انجام گرفته توسط کاما و اسچوبرت (۲۰۰۴: ۳۸)، در مورد حداکثرسازی مطلوبیت به مفروضات الگو از نظر جدایی پذیری و جدایی ناپذیری تابع مطلوبیت بستگی دارد. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد، که اگر تابع مطلوبیت تابعی از مصرف و کیفیت زیست محیطی باشد جدایی ناپذیر گرفتن ترجیحات نتایج بهتری به دست می‌دهد. از این رو در این مطالعه تابع مطلوبیت به صورت یک تابع جدایی ناپذیر در نظر گرفته شده است (رابطه ۲). که درآن:

γ: بیانگر ترجیحات زیست محیطی بوده که مقدار آن مثبت و ثابت است و با صفر بودن این پارامتر آلودگی از تابع مطلوبیت حذف می‌شود، در صورتی که با افزایش آن حساسیت افراد نسبت به آلودگی بیشتر می‌شود.

ε: بیانگر درجه‌ی ریسک‌گریزی افراد می‌باشد که مثبت است.

u_c: نشان‌دهنده رابطه مستقیم بین مصرف سرانه و مطلوبیت بوده و مثبت می‌باشد

u_p: بیانگر رابطه بین آلودگی سرانه و مطلوبیت می‌باشد که منفی می‌باشد.

(۲)

$$u(c_t,p_t)=\begin{cases}\dfrac{\left[c_t\, p_t^{-\gamma}\right]^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} & \varepsilon\neq 1 \\ Ln c_t-\gamma \ln p_t & \varepsilon=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_c=c_t^{-\varepsilon}p_t^{-\gamma(1-\varepsilon)} \\ u_p=-\gamma c_t^{1-\varepsilon}p_t^{-\gamma(1-\varepsilon)-1}\end{cases}$$

در ادامه به بررسی تابع تولید پرداخته شده است. یکی از تفاوت‌های این مطالعه با مطالعات داخلی انجام شده در زمینه‌ی الگوهای رشد درون‌زا تصادفی بودن الگو می‌باشد. حتی در مطالعات خارجی که الگوی آنها به صورت تصادفی در نظر گرفته شده است نیز تفاوت در اینکه کدام جزء از مدل تصادفی باشد وجود دارد. ژانگ و وانگ (۲۰۰۶: ۴۱۹) تولید را تصادفی گرفته و بخش دولت را نیز در مدل وارد کرده و مخارج دولتی را نیز تصادفی در نظر گرفته‌اند. کلمنس و سورتز (۱۹۹۷: ۲۱۰) نیز با وارد کردن دولت در مدل درآمدهای دولت و نیز تولید را تصادفی در نظر گرفته‌اند و در مطالعه‌ای دیگری نیز تابع تولید را تصادفی در نظر گرفته اما شکل تابع تولید با سایر مطالعات انجام شده متفاوت می‌باشد. کاکئو (۲۰۱۲) نیز آلودگی را در مدل تصادفی در نظر گرفته است. فقدان دانش و اطلاعات کافی در زمینه‌ی ترکیب سوخت‌های مورد استفاده و آب وهوا، جنبه‌ی تصادفی فناوری و عدم اطلاع از منابع کارای سوخت را دلیل اینکه آلودگی را تصادفی در نظر گرفته بیان می‌کند. سورتز (۲۰۰۵: ۶۸) در مطالعه ای دیگر اثرات بهره وری زیست محیطی را تصادفی در نظر گرفته است. اوت و سورتز (۲۰۰۴: ۱۳۸) در مطالعه‌ای بدون در نظر گرفتن ملاحظات زیست محیطی بخش دولت را وارد کرده و اوراق قرضه‌ی دولتی که بخش از درآمدهای دولتی می‌باشد را تصادفی در نظر گرفته است. طبق رابطه (۳) تابع تولید در این مطالعه بر اساس مطالعه‌ی سورتز (۲۰۰۳: ۴۵۸) مد نظر گرفته شده است که در آن تولید سرانه‌ی یک کالای همگن توسط یک تابع تولید تصادفی خطی صورت می‌گیرد، و ضریب A موجود در رابطه بهره‌وری انتظاری سرمایه بوده و k_t سرمایه‌ی سرانه‌ی قابل

دسترس برای بنگاه می‌باشد. α کشش تولید سرانه نسبت به سرمایه‌ی سرانه می‌باشد. σ_y dz جزء تصادفی تولید بوده که (dz~N(0 ,dt بیانگر شوک‌های بهره‌وری کل در طول زمان بوده و σ_y واریانس تولید می‌باشد که با افزایش واریانس، جزء تصادفی قسمت تصادفی تولید افزایش می‌یابد. توزیع dz از فرایند تصادفی واینر پیروی می‌کند.

(۳)

$$f\ (k_t) = A\,k_t^{\alpha}\left(dt + \sigma_y\, dz\ \right)$$

در مطالعات مختلف نوع مالیات دریافتی نیز متفاوت می‌باشد. سورتز (۲۰۰۳: ۴۶۲) و ژانگ و همکاران (۲۰۰۶: ۴۲۱)، کلمنس و سورتز (۱۹۹۷) نرخ بهینه‌ی مالیات بر درآمد را محاسبه کرده اند. ولی سورتز (۲۰۰۵) و هراتی و همکاران (۱۳۹۱: ۱۰۳) نرخ بهینه‌ی مالیات بر آلودگی را محاسبه کرده اند.

۳- پیشینه تحقیق

بیشتر مطالعات انجام گرفته در داخل و خارج از کشور بدون توجه به الگوهای رشد و در جهت بررسی برقراری منحنی زیست محیطی کوزنتس بوده است. مطالعات زیر نمونه‌هایی از این قبیل می‌باشند.

دیاکان و نورمن به دنبال نمونه‌هایی از کشورهایی بوده‌اند که فرضیه زیست محیطی کوزنتس در مورد آنها صادق بوده است. آنها به برآورد کشش درآمدی خاص برای هوای پاک که در چارچوب فرضیه‌ی زیست محیطی کوزنتس به کار برده می‌شود پرداخته‌اند (دیاکان و نورمن، ۲۰۰۴: ۵۴).

استرن در مطالعه خود نشان داد که نسل جدید از تجزیه تحلیل‌ها و مدل‌های کارا می‌توانند رابطه بین توسعه‌ی اقتصادی و کیفیت محیط زیست و فرضیه‌ی زیست محیطی کوزنتس را نقض کنند (استرن، ۲۰۰۴: ۱۴۲۴).

لی و همکاران در مطالعه‌ای با عنوان رشد اقتصادی و کیفیت محیط زیست نشان دادند که فرضیه‌ی زیست محیطی کوزنتس با در نظر گرفتن فعالیت‌های انسانی در ارتباط با گازهای گلخانه‌ای مورد تأیید قرار نگرفته است (لی و همکاران، ۲۰۰۷: ۷).

شهباز و همکاران به بررسی ارتباط بین انتشار CO2 و مصرف انرژی و رشد اقتصادی و تجارت پاکستان پرداخته اند. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که یک رابطه‌ی بلندمدت بین متغیرها وجود دارد و فرضیه‌ی زیست محیطی کوزنتس برای پاکستان مورد تأیید واقع شده است (شهباز و همکاران، ۲۰۱۰: ۵).

مطالعاتی که ارتباط بین انتشار آلودگی و سیاست‌های زیست محیطی را با رشد اقتصادی در چارچوب الگوهای رشد درون‌زا مورد بررسی قرار داده‌اند را می‌توان در دو دسته‌ی غیرتصادفی و تصادفی طبقه‌بندی کرد.

مهتدی با استفاده از یک الگوی رشد درون‌زا به بررسی سیاست بهینه‌ی زیست محیطی برای رسیدن به رشد بلندمدت با وجود اثرگذاری کیفیت محیط زیست بر رفاه و تولید می‌پردازد. یافته‌های وی حاکی از آن است که سیاست ترکیبی کنترل‌های مقداری و مالیات و سوبسید بهینه موجب دستیابی به یک سطح بالاتری از رفاه اجتماعی در مقایسه با اجرای سیاست سوبسید یا مالیات، به تنهایی می‌گردد (مهتدی، ۱۹۹۶: ۱۳۱).

آریگا نیز با استفاده از یک الگوی رشد درون‌زا ارتباط بین رشد اقتصادی و سیاست‌های زیست محیطی بهینه و اثرات سیاست بر نرخ رشد و نهایتاً رفاه اجتماعی را مورد بررسی قرار داده است. نتایج مطالعه‌ی وی نشان می‌دهد که هر گونه بهبود یا تخریب کیفیت محیط زیست بستگی به تغییرکیفیت محیط زیست در طول زمان دارد (آریگا، ۲۰۰۲: ۴۲).

بیرتنس و فائن دریافتند که اخذ مالیات بر آلودگی ناشی از انرژی بدون جبران آن موجب کاهش تولید، صادرات، واردات و اشتغال و مصرف می‌شود، در حالی که جبران معادل آن توسط یارانه‌های تولیدی در بخش‌های تولید کننده‌ی صادراتی، موجب افزایش رفاه کل جامعه می‌شود. مطالعات داخلی بسیار اندکی با رویکرد الگوهای رشد در زمینه‌ی سیاست‌های بهینه‌ی زیست محیطی برای کنترل آلودگی انجام شده است (بیرتنس و فائن، ۲۰۰۸: ۲۰۵۸).

از اولین مطالعات، مطالعه‌ی هراتی و همکاران با هدف تعیین سیاست زیست محیطی بهینه‌ی مالیات در چارچوب الگوهای رشد درون‌زا می‌باشد. حل الگو به روش هامیلتونین بیانگر این نتیجه است که مقادیر نرخ رشد در وضعیت پایدار و مالیات بهینه، تابع عوامل زیر است: شاخص‌های ترجیحات زیست محیطی مصرف کننده، کشش آلودگی نسبت به تولید، بهره وری کل عوامل تولید، انتشار تکنولوژی پاک، نرخ رشد مصرف خارجی، نرخ استهلاک سرمایه، معکوس کشش جانشینی بین دوره‌ای مصرف و شاخص‌های تجاری. آنها با استفاده از شاخص‌های متناظر با اقتصاد ایران، الگوی مدنظر را به صورت تجربی حل کرده‌اند. نتایج حل تجربی، بیانگر این است که نرخ بهینه‌ی مالیات بر آلودگی حدوداً ۱۵ درصد است.

همچنین بر اساس نتایج تحلیل حساسیت، شاخص‌های کشش آلودگی نسبت به تولید و ترجیحات زیست محیطی مصرف کننده بیشترین تأثیر را بر مالیات زیست محیطی در ایران دارد ضمن اینکه شاخص‌های نرخ رشد خارجی و شاخص‌های تجاری کمترین تأثیر را دارد (هراتی و همکاران، ۱۳۹۱: ۱۱۰).

مقدسی و طاهری نیز با استفاده از یک الگوی تعادل عمومی مبتنی بر ماتریس حسابداری اجتماعی ۱۳۷۸ به تحلیل آثار اقتصادی و زیست محیطی دریافت مالیات بر آلودگی ناشی از سوخت و فرایند تولید در ایران پرداخته‌اند. یافته‌های مطالعه نشان می‌دهد که دریافت مالیات بر آلودگی ناشی از سوخت و تولید موجب افزایش سطح تولید خدمات و برخی از بخش‌های کشاورزی می‌گردد، در حالی که تولید در بخش‌های صنعتی و انرژی کاهش می‌یابد (مقدسی و طاهری، ۱۳۹۱: ۸۵).

هادیان و استادزاد در مطالعه خود تحت عنوان برآورد سطح بهینه مالیات بر آلودگی در اقتصاد ایران به برآورد سطح بهینه مالیات بر آلودگی با استفاده از یک الگوی ر شد تعمیم یافته می‌پردازند. برای این منظور، یک الگوی سه بخشی شامل خانوار، بنگاه و دولت در نظر گرفته شده که پس از حل الگو با استفاده از آمار مربوط به اقتصاد ایران مقدار بهینه مالیات بر آلودگی محاسبه شده است. پس از کالیبره کردن الگوی حل شده، نرخ بهینه مالیات بر آلودگی ۸/۷ هزار ریال به ازای هر تن نا تشار CO_2 بدست آمده است (هادیان و استادزاد، ۱۳۹۲: ۶۶).

هادیان و استادزاد در مطالعه دیگری تحت عنوان محاسبه نرخ بهینه مالیات بر درآمد با و بدون ملاحظات زیست‌محیطی به محاسبه نرخ بهینه مالیات بر درآمد با و بدون در نظر گرفتن ملاحظات زیست محیطی با استفاده از یک الگوی رشد درون‌زا برای اقتصاد ایران پرداخته است. برای این منظور، ابتدا یک الگوی رشد تعمیم یافته سه بخشی شامل (خانوار، بنگاه و دولت) که در آن به طور همزمان نقش درآمدهای نفتی دولت، مالیات بر درآمد، آلودگی و حساسیت نسبت به تعدیل آلودگی لحاظ گردیده است. پس از بسط الگو و دستیابی به رابطه تعیین‌کننده نرخ بهینه مالیات بر درآمد، با استفاده از پارامترهای اقتصاد ایران، مدل مذکور کالیبره و مقادیر بهینه مالیات در سناریوهای مختلف محاسبه گردیده است. نتایج حاصل از برآورد الگو نشان می‌دهد که نرخ بهینه مالیات بر درآمد برای اقتصاد ایران با وجود آلودگی و در نظر گرفتن ملاحظات زیست‌محیطی ۲۲/۲ درصد و بدون در نظر گرفتن ملاحظات زیست‌محیطی ۲۲/۵ درصد است. همچنین تغییر نرخ رشد اقتصادی، تولید نهایی سرمایه، درآمدهای نفتی دولت، تغییر پارامترهای تابع آلودگی میزان نرخ بهینه مالیات بر درآمد را تحت تأثیر قرار داده است. نتایج آنالیز حساسیت برای اقتصاد ایران نشان می‌دهد که در صورت کاهش درآمدهای نفتی، برای باقی ماندن در وضعیت یکنواخت، نرخ بهینه مالیات بر درآمد افزایش خواهد یافت. در صورت کاهش تولید نهایی سرمایه برای تداوم وضعیت یکنواخت، نرخ بهینه مالیات بر درآمد باید افزایش یابد. رشد اقتصادی بالاتر موجب افزایش نرخ بهینه مالیات خواهد شد. با افزایش حساسیت اجتماعی نسبت به آلودگی، به‌منظور تأمین شرایط بهینه برای رفاه اجتماعی، نرخ بهینه مالیات بر درآمد نیز افزایش خواهد یافت (هادیان و استادزاد، ۱۳۹۴: ۱۱)

رستم‌زاده و نصیرآبادی در مطالعه خود تحت عنوان نقش مالیات‌های غیرمستقیم زیست‌محیطی بر روی کیفیت محیط زیست در مدل رشد درون‌زا در ایران به بررسی نقش مالیات‌های غیرمستقیم زیست‌محیطی بر روی کیفیت محیط زیست در مدل رشد درون‌زا پرداخته است. برای این منظور با استفاده از یک مدل سه بخشی شامل خانوار، بنگاه و دولت و تعریف تابع کیفیت محیط زیست، مقادیر بهینه متغیرها را در مدل تعادل عمومی استخراج کرده است. یافته‌های آنان نشان داد مالیات بر عایدی سرمایه منجر به کاهش مصرف و کاهش سرمایه می‌شود. همچنین افزایش نرخ مالیات بر عایدی سرمایه باعث افزایش درآمدهای مالیاتی دولت و تأمین هزینه جبران آلودگی‌ها شده و در نتیجه کیفیت محیط زیست افزایش پیدا می‌دهد. به‌علاوه جریان هدایت سرمایه در تغییر کیفیت محیط زیست مؤثر می‌باشد. همچنین نتایج نشان داد که در ایران افزایش سرمایه در راستای افزایش تکنولوژی‌های سازگار با محیط زیست نبوده است زیرا همزمان با افزایش کیفیت محیط زیست، سرمایه کاهش پیدا کرده است. لذا باید آثار مثبت و منفی مالیات‌ها با دیدی همه‌جانبه مدنظر قرار گیرد تا ضمن بهره‌برداری از منافع آن، از کیفیت محیط زیست نیز کاسته نشود و در سیستم اقتصادی اختلالی ایجاد نکند (رستم‌زاده و نصیرآبادی، ۱۳۹۶: ۴۰).

مطالعات زیر از جمله مطالعاتی است که ارتباط بین آلودگی و سیاست‌های زیست محیطی را به صورت تصادفی در چارچوب الگوهای رشد درون‌زا مورد بررسی قرار داده‌اند.

گرادوس و اسمولدرز با استفاده از یک الگوی رشد درون‌زا به بررسی اثر افزایش مراقبت‌های زیست محیطی بر انتخاب تکنولوژی بهینه و رشد بلندمدت برای اقتصادی که در آن

آلودگی به عنوان یک محصول جانبی تولید می‌باشد پرداخته‌اند. نتایج مطالعه نشان داده است که در مورد یک ساختار استاندارد نئوکلاسیکی، بدون تحت تأثیر قرار گرفتن نرخ رشد بلندمدت، در فرایند تولید سرمایه‌ی کمتری استفاده شده است. همچنین زمانی که انباشت سرمایه‌ی انسانی موتور رشد باشد، شدت سرمایه‌ی فیزیکی کاهش می‌یابد و نرخ رشد بهینه‌ی درون‌زا در نتیجه‌ی افزایش مراقبت های زیست محیطی تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد (گرادوس و اسمولدرز، ۱۹۹۳: ۴۱).

کلمنس و سورتز با استفاده از یک الگوی رشد درون‌زای تصادفی اثر مالیات بر درآمد را روی رفاه و رشد با در نظر گرفتن انباشت سرمایه‌ی انسانی مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که افزایش نرخ مالیات نسبت به درآمد متوسط، روی نرخ رشد انتظاری اثر دو جانبه دارد. از یک سو ممکن است باعث افزایش رفاه و از سوی دیگر به جهت افزایش نرخ مالیات روی درآمد زودگذر باعث کاهش رفاه شود (کلمنس و سورتز، ۱۹۹۷: ۲۱۱).

سورتز طی مطالعه‌ای اثر آلودگی و سیاست‌های کاهش آن را با استفاده از یک الگوی رشد درون‌زای تصادفی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهد. وی معتقد است که سیاست‌های زیست محیطی توسط دولت انجام می‌گیرد که تأمین مالی آن از طریق اوراق قرضه ی دولتی و مالیات بر درآمد می‌باشد و بدهی دولت تعادل را تحت تأثیر قرار می‌دهد. همچنین نرخ مالیات بر درآمد بهینه با درک تأثیر و نفوذ فردی روی سرمایه‌ی کل کاهش می‌یابد. در مقابل، تأثیر ترجیحات زیست محیطی و عدم قطعیت آن روی سیاست‌های بهینه‌ی زیست محیطی مبهم است (سورتز، ۲۰۰۳: ۴۶۱).

ژانگ و همکاران به بررسی یک الگوی رشد تصادفی با در نظر گرفتن ملاحظات زیست محیطی پرداخته‌اند به گونه‌ای که آلودگی هم در تابع تولید و هم در تابع مطلوبیت در نظر گرفته شده است. یافته‌های این مطالعه نشان می‌دهد که سطح تعادل که یکی از شاخص‌های اصلی اقتصادی می‌باشد، توسط پارامترهای الگو تعیین می‌شود. همچنین انتخاب پارامترهای مدل موجب مبادله بین رفاه و رشد اقتصادی می‌شود (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۶: ۴۲).

توجیمورا با استفاده از الگوی رشد درون‌زا به بررسی سیاست‌های کاهش آلودگی تحت شرایط نااطمینانی و هزینه‌های کاهش آلودگی پرداخته است. وی با فرض اینکه هر بنگاهی هنگام کاهش آلودگی، متحمل هزینه‌هایی می‌شود، دو نوع سیاست متفاوت را جهت رسیدن به هدف مطالعه در نظر گرفته است. در یک سیاست بنگاه فقط هزینه‌های کاهش آلودگی را در نظر می‌گیرد. و در سیاست دیگر بنگاه هزینه‌های کاهش متناسب و ثابت را نیز در نظر می‌گیرد. با استفاده از تجزیه و تحلیل‌های صورت گرفته که به روش حل عددی می‌باشند سیاست بهینه‌ی آلودگی نشان داده شده است (توجیمورا، ۲۰۱۱: ۳).

٤- روش شناسی

ا استناد به مطالب ادبیات موضوع، در این مطالعه بر اساس مطالعه‌ی سورتز (۲۰۰۵: ۶۵) هدف محاسبه‌ی نرخ بهینه‌ی مالیات بر آلودگی می‌باشد. از این رو در رابطه‌ی (۴):

($\dot{p}$) تغییرات آلودگی نسبت به زمان می‌باشد که تابعی مستقیم از سرمایه‌ی سرانه در نظر گرفته شده است. مالیات بر آلودگی (τ) که بر تولید غیرتصادفی وضع می‌شود با افزایش آن تغییرات آلودگی کاهش می‌یابد. δ کشش تغییرات آلودگی سرانه به نسبت سرمایه‌ی سرانه به تولید غیرتصادفی سرانه می‌باشد.

(۴)

$$\dot{p} = [\frac{k_t}{\tau f_d(k_t)}]^{\delta} \Rightarrow dp_t = [\frac{k_t}{\tau f_d(k_t)}]^{\delta} dt$$

رابطه‌ی (۵) بیانگر تغییرات در ثروت سرانه می‌باشد که تابعی از تولیدی است که بابت آن مالیاتی پرداخت نمی‌شود و در واقع درآمد حاصل از تولید می‌باشد. i نرخ سود سرمایه و dz_i بخش فرآیند تصادفی نرخ سود سرمایه که نوسان نرخ سود سرمایه می‌باشد. بر این اساس بخشی از ثروت که تحت تأثیر سود و نوسانات آن قرار می‌گیرد نیز در تعیین تغییرات ثروت نقش دارد. مصرف در هر دوره از زمان نیز تأثیر منفی بر تغییرات ثروت دارد.

(۵)

$$dw_t = (1-\tau) f(k_t) + [(1-n)(i + dz_i) w_t] dt - c_t dt$$

k_t سرمایه‌ی سرانه در هر دوره از زمان و n درصدی از ثروت سرانه در هر دوره می‌باشد.

(۶)

$$k_t = n w_t$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۶) در رابطه‌ی (۳) روابط (۷) و (۸) به دست می‌آید که تابع تولید تصادفی به تفکیک جزء تصادفی(f_R (k_t)) و غیرتصادفی (f_d (k_t))را نشان می‌دهد.

(۷)

$$f(k_t) = An^{\alpha}w_t^{\alpha}dt + A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}dz$$

(۸)

$$f_d(k_t) = An^{\alpha}w_t^{\alpha}$$

$$f_R(k_t) = A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}$$

همچنین با توجه به رابطه (۸) و جای‌گذاری آن در رابطه‌ی (۴)، رابطه (۹) بر اساس متغیرهای ثروت سرانه و درصدی از ثروت که تعیین کننده‌ی سرمایه سرانه می‌باشد و τ آلودگی و بهره‌وری به‌دست می‌آید.

(۹)

$$dp_t = \tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}dt$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۷) در رابطه‌ی (۵) رابطه‌ی (۱۰) به دست می‌آید که بیانگر تغییرات ثروت در هر لحظه از زمان به تفکیک تغییرات تصادفی و غیرتصادفی می‌باشد. هدف از این جای‌گذاری‌ها این است که به نوعی تابع تولید که شامل دو جزء تصادفی و غیرتصادفی می‌باشد را در تغییرات ثروت و تغییرات آلودگی وارد کنیم.

(۱۰)

$$dw = \left[(1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha} + (1-n)(i+dz_i)w_t - c_t\right]dt + (1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}dz$$

در ادامه به حل و بسط الگو با توجه به اینکه خانوار با توجه به محدودیت آلودگی و ثروت به دنبال حداکثرسازی مطلوبیت بین دوره‌ای است خواهیم پرداخت. در واقع ما به دنبال محاسبه‌ی مقادیر بهینه‌ی مصرف (c) و سهم سرمایه از ثروت (n) و نرخ بهینه مالیات بر آلودگی (τ) می‌باشیم. تابع هدف که حداکثر سازی ارزش فعلی مطلوبیت انتظاری خانوار طی طول عمر نامحدود می‌باشد با توجه به محدودیت آلودگی و محدودیت ثروت در سیستم روابط (۱۱) ارائه شده است.

(۱۱)

$$Max\ U = E_0\left[\int_0^{\infty} u(c_t, p_t)e^{-\rho t}dt\right]$$

$$S.t.$$

$$dp_t = \tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}dt$$

$$dw_t = \left[(1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha} + (1-n)(i+dz_i)w_t - c_t\right]dt + (1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}dz$$

اگر تابع هدف، به شکل $V(X_0)$ باشد و محدودیت دارای دو جزء تصادفی و غیرتصادفی باشد جهت حداکثر سازی تابع تصادفی همیلتون- بلمن- ژاکوبین را که فرم کلی آن به صورت سیستم شماره (۱۲) می‌باشد با توجه به متغیرهای وضعیت و کنترل الگوی مدنظر تشکیل می‌دهیم:

(۱۲)

$$V(X_0) = Max\ E_0\left[\int_0^{\infty} h(x,u)e^{-\rho t}dt\right]$$

$$S.t.$$

$$d\vec{x} = \vec{g}(x,u)dt + \vec{\sigma}(\vec{x})dw$$

$\vec{x}$: state variable

$\vec{u}$: control variable

Stochastic HBJ *Equation*

$$\rho V(\vec{x}) = \max_{u\in U} h(\vec{x},\vec{u}) + \nabla_x V(\vec{x}).\vec{g}(x,u) + \frac{1}{2}tr\left[\left(\Delta_x V(\vec{x})\right)\left(\vec{\sigma}(\vec{x})\right)\left(\vec{\sigma}(\vec{x})\right)'\right]$$

$$\nabla_x V(\vec{x}) \longrightarrow Gradiant\ of\ V$$

$$\Delta_x V(\vec{x}) \longrightarrow Hessian\ of\ V$$

در الگوی مورد نظر این مطالعه (سیستم ۱۱) متغیرهای کنترل مصرف (c)، سهم سرمایه از ثروت (n) و نرخ مالیات بر آلودگی (τ) می‌باشد. همچنین متغیرهای وضعیت ثروت (w) و آلودگی (p) می‌باشد که در رابطه (۱۳) نشان داده شده است.

(۱۳)

$$\vec{x} = (w, p)$$

$$\vec{u} = (c, n, \tau)$$

به منظور بررسی شروط حداکثرسازی تابع تصادفی همیلتون - بلمن – ژاکوبین (SHBJ) را با توجه به سیستم (۱۱) تشکیل داده که با توجه به متغیرهای کنترل و وضعیت الگوی ارائه شده به صورت رابطه‌ی (۱۴) می‌باشد. شروط اولیه‌ی بهینه‌سازی نیز در سیستم روابط (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) ارائه شده است.

(۱۴)

$$\rho V(p,w) = \underset{c,n,\tau}{Max}\ u(c,p) + V_p(p,w)\left[\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right] + V_w(p,w)\left[(1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha} + (1-n)(i+dz_i)w_t - c_t\right] + \frac{1}{2}V_{ww}(p,w)\left[(1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]$$

رابطه‌ی (۱۴) بر اساس حداکثرسازی تابع SHBJنسبت به متغیر کنترل مصرف (C) به دست آمده است. به دست آمده از شرط اولیه‌ی بهینه‌سازی همان میل نهایی به مصرف را نشان می‌دهد.

(۱۵)

$$\xrightarrow{c} u_c(c,p) - V_w(p,w) = 0 \Rightarrow u_c(c,p) = V_w(p,w) \Rightarrow V_w(p,w) = c_t^{-\varepsilon}p_t^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$$

رابطه‌ی (۱۶) بر اساس حداکثرسازی تابع SHBJنسبت به متغیر کنترل سهم سرمایه از ثروت (n) به دست آمده است.

(۱۶)

$$\xrightarrow{n} V_p(p,w)\left[\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right]$$
$$+V_w(p,w)\left[-(i+dz_i)w_t+\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}w_t^{\alpha}\right]+V_{ww}(p,w)\alpha\left[(1-\tau)\right.$$

رابطه‌ی (۱۷) نیز بر اساس حداکثرسازی تابع SHBJنسبت به متغیر کنترل نرخ مالیات بر آلودگی (τ) به دست آمده است.

(۱۷)

$$\xrightarrow{\tau} V_p(p,w)\left[-\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right]$$
$$+V_w(p,w)[-An^{\alpha}w_t^{\alpha}]-V_{ww}(p,w)\left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau)=0$$

با توجه به شرایط اولیه بهینه‌سازی رابطه (۱۸) را خواهیم داشت. با تعیین علامت کردن این رابطه محدودیتی برای نرخ بهینه مالیات بر اساس رابطه (۱۸) بدست می‌آید.

(۱۸)

$$w_t^{1-\alpha+\delta(1-\alpha)}=\frac{(\alpha-\delta(1-\alpha)-1)A^{\delta}\tau^{\delta+1}\{(i+dz_i)\}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}p$$

$$\overset{+}{w}_t^{1-\alpha+\delta(1-\alpha)}=\frac{(\alpha-\delta(\bar{1}-\alpha)-1)A^{\delta}\overset{+}{\tau}^{\delta+1}\left\{(i+\overset{+}{dz}_i)\right\}}{\overset{+}{\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}(\overset{??}{\tau}-\alpha)}\overset{+}{p}$$

(۱۹)

$$\tau-\alpha<0\Rightarrow\tau<\alpha$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۹) نرخ مالیات بر آلودگی باید کمتراز کشش تولید نسبت به سرمایه باشد.

در حالت پایدار نرخ رشد متغیر مصرف (c) با نرخ رشد متغیر ثروت (w) برابر می‌باشد که در رابطه‌ی (۲۰) نشان داده شده است.

(۲۰)

$$\frac{\dot{c}}{c}=g^*$$
$$\frac{\dot{w}}{w}=g^*$$

از طرفی با ساده سازی ریاضی، رابطه‌ی (۲۱) نرخ رشد آلودگی در مسیر بهینه را نشان می‌دهد.

(۲۱)

$$\frac{\dot{p}}{p}=\left[1-\alpha+\gamma(1-\alpha)\right]g^*$$

مقدار بهینه ثروت و آلودگی در روابط (۲۲) و (۲۳) آمده است

(۲۲)

$$w_t^*=\varsigma^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(۲۳)

$$p^*=\left[w_t^*\right]^{1-\alpha+\delta(1-\alpha)}\frac{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}{(\alpha-\delta(1-\alpha)-1)A^{\delta}\tau^{\delta+1}\{(i+dz_i)\}}$$

که در این روابط تغییر متغیرهای روابط (۲۴) و (۲۵) در نظر گرفته شده است.

(۲۴)

$$\vartheta_3=\frac{(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}}{\tau}\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]$$
$$\vartheta_2=(1-\alpha)n^{-(1-\alpha)}A$$
$$\vartheta_1=\frac{1}{\tau}(i+dz_i)$$

(۲۵)

$$\varsigma=\frac{-\vartheta_2+\sqrt{\vartheta_2^2+4\vartheta_1\vartheta_3}}{2\vartheta_1}$$

رابطه‌ی (۲۶) را برای نرخ رشد آلودگی در حالت پایا تعریف می‌کنیم.

(۲۶)

$$g_p^*=\frac{\dot{p}^*}{p^*}$$

بر این اساس نرخ رشد آلودگی در مسیر بهینه و نرخ رشد اقتصادی بر اساس رابطه‌های (۲۷) و (۲۸) محاسبه شده است.

(۲۷)

$$g_p^*=\frac{1}{\varsigma}\frac{\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}(\alpha-\delta(1-\alpha)-1)A^{\delta}\tau^{\delta+1}\{(i+dz_i)\}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}$$

(۲۸)

$$g^*=-\frac{\tau n}{\varsigma}\frac{\{(i+dz_i)\}}{\delta(\tau-\alpha)}$$

با توجه به تعیین علامت کلیه متغیرهای موجود در رابطه‌ی (۲۹) نرخ رشد تمامی متغیرها در مسیر بهینه مثبت می‌باشند.

(۲۹)

$$g^*=-\frac{\overset{+}{\tau}n}{\varsigma}\frac{\left\{(i+\overset{+}{dz}_i)\right\}}{\bar{\delta}(\tau-\alpha)}\ \Rightarrow\ g^*>0$$

از طرفی مقدار مالیات بر آلودگی (τ*) در مسیر بهینه با استفاده از رابطه (۳۰) قابل محاسبه است.

(۳۰)

$$\tau^{*}=\frac{-\varsigma(1+\alpha)+\sqrt{\left[\varsigma(1+\alpha)\right]^{2}+4\left[(1-\alpha)^{2}-\varsigma\right](\xi+\alpha\varsigma)}}{2\left[(1-\alpha)^{2}-\varsigma\right]}$$

که در این رابطه α حساسیت تولید نسبت به سرمایه و ξ و ζ به‌صورت روابط ۲۵ و ۳۱ تعریف شده است:

(۳۱)

$$\left[\frac{2(i+dz_{i})\alpha}{i}+(1-\alpha)\right]^{2}=\xi$$

در ادامه به برآورد نرخ بهینه مالیات برآلودگی برای اقتصاد ایران و پس از آن به تحلیل حساسیت این نرخ نسبت به پارامترهای الگو خواهیم پرداخت.

٤- نتایج برآورد مدل

محاسبه نوسانات تولید و نرخ سود سرمایه

در این قسمت به منظور محاسبه نوسانات تولید در ابتدا با استفاده از فیلتر هدریک – پرسکات داده‌های تولید را روندزدایی کرده و سپس واریانس داده‌های بدست آمده از این فیلتر را به عنوان نوسانات تولید در نظر خواهیم گرفت. منطق استفاده از فیلتر هدریک – پرسکات آن است که این روش می‌تواند به تفکیک یک شوک مشاهده شده به اجزای دائمی (عرضه) و موقتی (تقاضا) کمک نماید. برای یک فیلتر یک متغیره تنها تفاوت مشخص بین شوک عرضه و تقاضا آن است که شوک عرضه آثار دائمی بر متغیر واقعی مورد نظر دارد در حالی‌که شوک تقاضا صرفاً آثار موقتی دارد. با وجود این، اگر اجزای موقتی تداوم زیادی داشته باشند بسیار مشکل است که بتوان بین این دو به ویژه در پایان دوره تفاوت گذاشت. در واقع طبقه بندی شوک‌های دائمی به منزله شوک‌های عرضه (و برعکس) و شوک‌های موقتی به منزله شوک تقاضا می‌توانند گمراه کننده باشد. زیرا هیچ دلیلی وجود ندارد که بتوان باور کرد شوک‌های عرضه نمی تواند موقتی باشند.

داده‌های فیلتر هدریک – پرسکات با حداقل کردن مجموع مجذور انحراف متغیر Y از روند آن به دست می‌آید. در واقع مقادیر روند فیلتر هدریک – پرسکات مقادیری هستند که رابطه زیر را حداقل کند.

(۳۲)

$$\min\sum_{t=1}^{T}(y_{t}-y_{t}^{*})^{2}+\lambda\sum_{t=2}^{t-1}\left[(y_{t+1}^{*}-y_{t}^{*})-(y_{t}^{*}-y_{t-1}^{*}\right]^{2}$$

در حالی‌که T تعداد مشاهدات و پارامتر λ عامل موزون است که میزان هموار بودن روند را تعیین می‌کند. λ=۱۶۰۰ برای آمار فصلی و λ=۱۰۰ برای آمار سالانه استفاده می‌شود. این پارامتر این تأثیر را دارد که از آمار تولید، دوره‌های با فرکانس کمتر از هشت سال را حذف می‌کند.

با توجه به داده‌های تولید ناخالص داخلی به قیمت ثابت ۱۳۷۶ (بر حسب میلیون میلیارد ریال) برای اقتصاد ایران و با استفاده از فیلتر هدریک – پرسکات و با واریانس‌گیری از داده‌های بدست آمده از این فیلتر، انحراف معیار (نوسانات تولید) برای سال‌های ۱۳۵۷–۱۳۹۸ ۰/۱۱ بدست آمده است.

برآورد نوسانات نرخ سود سرمایه

در این قسمت با توجه به داده‌های نرخ سود بانکی واقعی طی سال‌های ۱۳۵۷–۱۳۹۸ با استفاده از داده‌های بدست آمده از فیلتر هدریک – پرسکات با ضریب لامیدا ۱۰۰ انحراف معیار نرخ سود سرمایه ۰/۰۳۴ بدست آمده است ( ).

برآورد پارامترهای تابع آلودگی

با توجه به رابطه (۹) و انجام یک تغییر متغیر خواهیم داشت

(۳۳)

$$dp_{t}=\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_{t}^{\delta(1-\alpha)}dt\Rightarrow\frac{\Delta p_{t}}{\Delta t}=\Re k_{t}^{\delta(1-\alpha)}$$

با توجه به اینکه داده‌های این الگو سالانه است، تغییرات زمانی برابر با ۱ می‌باشد ( ).

(۳۴)

$$\frac{\Delta p_{t}}{\Delta t}=\Re k_{t}^{\delta(1-\alpha)}\Rightarrow\Delta p_{t}=\Re k_{t}^{\delta(1-\alpha)}$$

با لگاریتم گیری از رابطه بالا و همچنین با توجه به داده‌های اقتصاد ایران از جمله موجودی سرمایه که از آمار حساب‌های ملی بانک اطلاعاتی سری‌های زمانی اقتصادی بانک مرکزی ایران به قیمت ثابت سال ۱۳۷۶برای سال‌های ۱۳۵۷ تا ۱۳۹۸ استخراج شده است و پس از تخمین مدل رگرسیونی بر اساس جدول شماره ۱ مقدار برابر با ۲/۷ بدست آمده است.

جدول ۱. نتایج برآورد تابع آلودگی

خلاصه پارامترهای الگو در جدول شماره (۲) قابل بررسی می‌باشد.

Dependent Variable: LOG(P)
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 01/11/22 Time: 15:02
Sample (adjusted): 1358 1398
Included observations: 41 after adjustments
LOG(P)=C(1)+C(2)*(1-0.42)*LOG(K)
Instrument specification: P(-1)
Constant added to instrument list

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-9.277439	1.565749	-5.925240	0.0000
C(2)	2.702387	0.194389	13.90195	0.0000

R-squared	0.856262	Mean dependent var	12.48460
Adjusted R-squared	0.851471	S.D. dependent var	0.489242
S.E. of regression	0.188551	Sum squared resid	1.066548
Durbin-Watson stat	0.323431	J-statistic	4.89E-27
Instrument rank	2		

جدول ۲. پارامترهای برآورد شده و فرض شده الگو

پارامتر یا متغیر	نماد	مقدار	منبع
ترجیحات زیست محیطی	γ	۰/۵	فرض تحقیق
درجه ریسک گریزی افراد	ε	۰/۷۹	استادزاد (۱۳۹۱)
کشش تولید نسبت به سرمایه	α	۰/۴۲	استادزاد (۱۳۹۱)
واریانس تولید	σ_y	۰/۱۱	محاسبات تحقیق
نرخ رجحان زمانی[1]	ρ	۰/۰۹	کیارسی (۱۳۸۶)
کشش تغییرات آلودگی سرانه نسبت به سرمایه سرانه به تولید غیرتصادفی سرانه	δ	۲/۷	محاسبات تحقیق
نرخ سود سرمایه	i	۰/۱۷	نرخ سود تسهیلات در عقود مبادله‌ای۲
سهم سرمایه از ثروت	n	۱	فرض الگو
نوسانات نرخ سود سرمایه	dz_i	۰/۰۳۴	محاسبات تحقیق

مأخذ: محاسبات تحقیق

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

۱. مهرگان، نادر و همکاران، در مقاله خود تحت عنوان "برآورد وضعیت تعادلی اقتصاد ایران در چارچوب الگوهای ادوار تجاری حقیقی" این نرخ را ۰/۱۱ محاسبه کرده است همچنین هادیان و استادزاد در مقاله خود تحت عنوان "محاسبه نرخ بهینه مالیات بر درآمد با و بدون ملاحظات زیست محیطی" به تبعیت از کیارسی آن‌را ۰/۰۹ در نظر گرفته است. با عنایت به سنخیت مقاله با مطالعه فوق این نرخ ۰/۰۹ در نظر گرفته شد. احمد جعفری صمیمی و همکاران، در مقاله خود تحت عنوان "اثر مالیات بر ارزش افزوده بر بهره‌وری و تعیین نرخ بهینه آن دراقتصاد ایران: ترکیب رهیافت مرز تصادفی و الگوی رشد درون‌زا" نیز پارامتر نرخ ترجیح زمانی را از محاسبه کیارسی و مقدار ۰/۰۹ در نظر گرفته است.

۲. از سال ۱۳۹۵ به بعد نرخ سود تسهیلات برای عقود مشارکتی و غیرمشارکتی ۱۸ درصد و برای سرمایه‌گذاری بخش کشاورزی ۱۵ درصد با توجه به سهم بخش‌ها این نرخ ۱۷ درصد منظور گردید.

- کالیبره کردن الگو

در ادامه با کالیبره کردن الگوی حل شده به برآورد نرخ بهینه مالیات بر آلودگی و پس از آن بررسی تحلیل حساسیت این نرخ نسبت به پارامترهای الگو با استفاده از نرم‌افزار Matlab پرداخته شده است.

با فرض اینکه کل ثروت شخص سرمایه‌گذاری شود n=1 در نظر گرفته شده و بنابراین بر اساس رابطه (۷۷) پیوست داریم.

(۳۵)

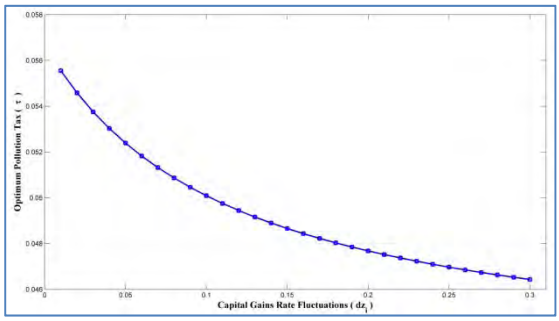
$$\left[\frac{2(i+dz_i)\alpha}{i}+(\tau-\alpha)\right]^2=(\tau-\alpha)^2\tau^2+4(i+dz_i)\sigma_y^2 n\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right](-\tau^2+(1+\alpha)\tau-\alpha)\xrightarrow{n=1}$$

$$\left[\frac{2(i+dz_i)\alpha}{i}+(\tau-\alpha)\right]^2=(\tau-\alpha)^2\tau^2+4(i+dz_i)\sigma_y^2\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right](-\tau^2+(1+\alpha)\tau-\alpha)$$

با حل رابطه فوق با توجه به پارامترهای اقتصاد ایران نرخ بهینه مالیات برآلودگی ۵/۳ درصد از کل درآمد (تولید) برآورد گردید.

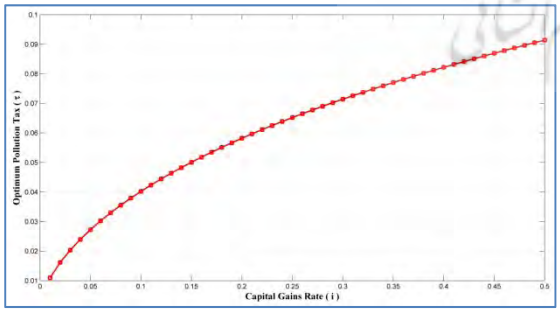
در ادامه به تحلیل حساسیت الگو پرداخته شده است.

نمودار (۳) رابطه‌ی بین نوسانات نرخ سود سرمایه و نرخ مالیات بر آلودگی را نشان می‌دهد. در این نمودار محور افقی نشان دهنده‌ی نوسانات نرخ سود سرمایه و محور عمودی نشان دهنده نرخ بهینه مالیات بر آلودگی می‌باشد. همانگونه که مشاهده می‌شود با افزایش نوسانات نرخ سود سرمایه، نرخ بهینه مالیات بر آلودگی کاهش می‌یابد. به بیان دیگر در صورت کاهش نوسانات نرخ سود سرمایه برای باقی ماندن در حالت بهینه، نرخ مالیات بر آلودگی باید افزایش یابد. نزولی بودن این نمودار به این دلیل می‌باشد که با کاهش نوسانات نرخ سود سرمایه درآمد تصادفی مردم کاهش یافته که در واقع به معنای افزایش درآمد غیرتصادفی افراد به طور نسبی می‌باشد که این امر باعث افزایش ثروت افراد می‌شود. از یک سو، افزایش ثروت، افزایش رفاه ناشی از افزایش مصرف را به دنبال خواهد داشت. از سوی دیگر، به طور نسبی پس‌انداز افزایش خواهد یافت که باعث افزایش تولید خواهد شد. از این رو آلودگی افزایش یافته و کاهش رفاه را در پی خواهد داشت. در نتیجه دولت می‌تواند این کاهش رفاه را از طریق افزایش نرخ مالیات بر آلودگی که باعث افزایش رفاه جامعه می‌شود جبران نماید.



شکل ۱. نمودار تغییرات مالیات بر آلودگی در حالت پایا بر اساس مقادیر مختلف نوسان نرخ سود سرمایه ($dz]_i$)

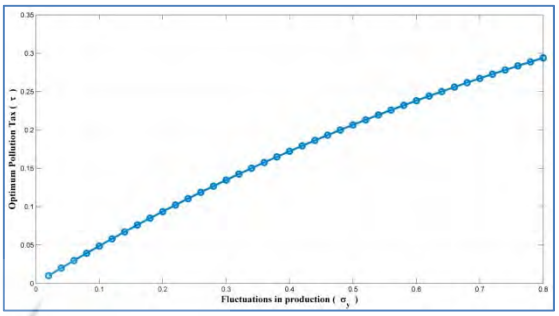
در نمودار (۴) تغییرات مالیات بر آلودگی در حالت پایا بر اساس مقادیر مختلف نرخ سود سرمایه (i) رسم شده است. با افزایش نرخ سود نرخ مالیات بر آلودگی افزایش می‌یابد. با توجه به نمودار رسم شده تأثیر نرخ سود سرمایه بر نرخ آلودگی مقعر می‌باشد. یعنی اثر نرخ سود سرمایه بر نرخ مالیات بر آلودگی در سطوح پایین نرخ سود سرمایه به مراتب بیشتر از سطوح بالای نرخ سود سرمایه می‌باشد. با افزایش نرخ سود سرمایه پرداختی‌های دولت به مردم بابت ثروت افزایش یافته که در حقیقت به معنای افزایش در درآمد افراد تلقی می‌شود. که افزایش در ثروت را به دنبال خواهد داشت. افزایش ثروت باعث افزایش در مصرف و پس‌انداز شده که افزایش مصرف افزایش رفاه را به دنبال خواهد داشت و افزایش پس‌انداز که در این مدل افزایش در سرمایه را به دنبال دارد باعث افزایش تولید شده و آلودگی افزایش خواهد یافت کاهش رفاه را در پی خواهد داشت. در نتیجه دولت می‌تواند با وضع مالیات بر آلودگی و کاهش دادن آلودگی باعث افزایش رفاه جامعه شود. با توجه به این نمودار برای نرخ سود ۱۵ درصد مقدار بهینه مالیات بر آلودگی ۴/۸۵ درصد از کل درآمد می‌باشد.



شکل ۲. نمودار تغییرات مالیات بر آلودگی در حالت پایا بر اساس مقادیر مختلف نرخ سود سرمایه (i)

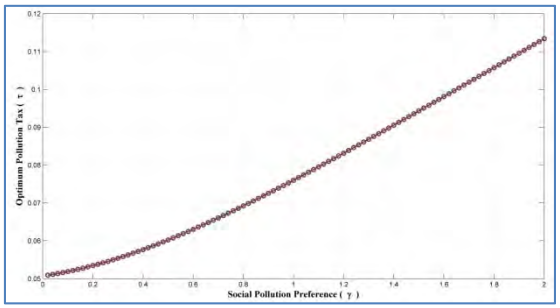
در نمودار (۵) تغییرات مالیات بر آلودگی در حالت پایا بر اساس مقادیر مختلف نوسانات تولید رسم شده است. که بین این دو متغیر رابطه‌ی مستقیم وجود دارد. با توجه به نمودار رسم شده

تأثیر نوسانات تولید بر نرخ مالیات برآلودگی مقعر مـی‌باشـد. در واقع اثر نوسانات تولید بر نرخ مالیات بر آلودگی در سطوح پایین نوسانات تولید به مراتب بیشتر از سطوح بالای نوسـانات تولیـد می‌باشد. با افزایش نوسـانات تولیـد، تولیـد افـزایش یافتـه کـه افزایش آلودگی و کاهش رفاه را به دنبال خواهد داشت. از ایـن رو دولت افزایش مالیات بر آلودگی را به عنوان سیاستی جهـت افزایش رفاه و قرار گرفتن در مسیر بهینه را پیش رو می‌گیرد.



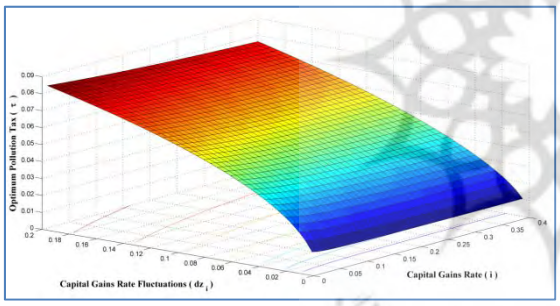
شکل ۳. نمودار تغییرات مالیات بر آلودگی در حالت پایا بر اساس مقادیر مختلف نوسانات تولید (σ_y)

در نمودار (۶) تغییرات مالیات بر آلودگی در حالت پایا بر اسـاس مقادیر مختلف ترجیحات زیست محیطی جامعه رسم شده است. هر چقدر ترجیحات زیست محیطی در یک جامعه بالا باشـد بـه معنی عدم استفاده افراد آن جامعه از آلودگی است. با توجـه بـه نمودار رسم شده تأثیر نوسانات تولید بر نـرخ مالیـات برآلـودگی محدب می‌باشد. در واقع اثر ترجیحات زیست محیطی بـر نـرخ مالیات بر آلودگی در سطوح پایین ترجیحات زیست محیطی بـه مراتب کمتر از سطوح بالای ترجیحات زیست محیطی می‌باشد. در واقع در جوامع با درآمد سرانه بـالا، سـطح سـواد و دانـش و آگاهی شهروندان افزایش می‌یابد و مردم در برابر آلودگی هوا از خود واکنش نشان می‌دهند، همچنـین در اثـر رشـد اقتصـادی، پیشرفت‌های فناوری هر چـه بیشـتر در فراینـد تولیـد بـه کـار می‌رود و به همین جهت در فرایند تولید، آلودگی کمتری ایجـاد می‌شود. از سوی دیگر در جوامعی که به سطح بـالایی از رشـد رسیده اند، در نتیجه ی بالا بودن ترجیحات زیسـت محیطـی و حساسیت بیشتر افکار عمومی به آلودگی در این جوامع، قـوانین زیست محیطی متعدد و فراگیری از جمله نرخ بالای مالیات بـر آلودگی وضع شده و شدیداً اجرا می‌شود کـه نشـان از برقـراری فرضیه‌ی زیست محیطی کوزنتس در این جوامع می‌باشد.



شکل ٤. نمودار تغییرات مالیات بر آلودگی در حالت پایا بر اساس مقادیر مختلف ترجیحات زیست محیطی جامعه

نمودار (۷) نشان دهنده‌ی تغییرات مالیات بر آلـودگی در حالـت پایا بر اساس تغییـرات همزمـان نوسـانات نـرخ سـود سـرمایه ($dz]_i$) و نرخ سود سرمایه (i) می‌باشد. با توجـه بـه نمـودار رسم شده می‌توان نتیجه گرفت که تـأثیر همزمـان نـرخ سـود سرمایه و نوسانات نرخ سود سرمایه مقعـر مـی‌باشـد. یعنـی در سطوح پایین نـرخ سـود سـرمایه و نوسـانات نـرخ سـود، تـأثیر همزمان این دو متغیر بر تغییرات آلـودگی بـه مراتـب بیشـتر از سطوح بالای نرخ سود سرمایه و نوسـانات نـرخ سـود سـرمایه است.



شکل ۱. نمودار تغییرات مالیات بر آلودگی در حالت پایا بر اساس تغییرات همزمان نوسان نرخ سود سرمایه ($dz]_i$) و سود سرمایه (i)

۵- بحث و نتیجه‌گیری:

رشد اقتصادی همراه با آلودگی محـیطزیسـت کـه مهـم تـرین پیامد جنبی منفی فعالیت‌های اقتصادی یک کشـور اسـت روی رفاه اجتمـایی تـأثیر منفـی دارد. از سـوی دیگـر دخالـت‌هـای دولـت‌هـا در جهـت حـذف ایـن پیامـدهای خـارجی بـا وضـع مالیات‌های مستقیم می‌تواند روی تولید کالاهـای آلاینـده اثـر گذاشته و تولید این دسته از کالاهـا را کـاهش دهـد. از طـرف دیگر بـا کـاهش تولیـد و بـه دنبـال آن کـاهش مصـرف رفـاه اجتمایی تحت تأثیر قرار می‌گیرد. لذا یک سیاست‌گذار اقتصادی با شناخت این موضوع بایستی نـرخ بهینـه مالیـات را بگونـه‌ای وضع نماید که ضمن تأثیرگـذاری بـر میـزان آلـودگی و تولیـد

کالاهای آلاینده، موجب دستیابی جامعه به حداکثر رفاه گردد. لذا هدف اصلی این مطالعه محاسبه نرخ بهینه مالیات بر آلودگی در یک الگوی رشد درون‌زا با یک تابع تولید تصادفی می‌باشد. اقتصاد در این الگو شامل تعداد زیادی خانوار مشابه است، که می‌توان رفتار تمام خانوارهای موجود را توسط یک خانوار نماینده یا فرد نشان داد. خانوار با در نظر گرفتن مسیر مصرف و آلودگی به دنبال حداکثر سازی رفاه بین دوره ای می‌باشد.

با توجه به متغیرها و پارامترهای اقتصاد ایران، مقدار بهینه نرخ مالیات بر آلودگی برای اقتصاد ایران۵/۳ درصد از کل درآمد (تولید) محاسبه شده است. کمتر بودن نرخ مالیات بر آلودگی با کشش تولید نسبت به سرمایه با عنایت به مقدار نرخ مالیات محاسبه شده برای اقتصاد ایران مطابقت دارد. تغییرات نرخ مالیات بر آلودگی نسبت به نوسانات نرخ سود سرمایه، نرخ سود سرمایه و نوسانات تولید و ترجیحات زیست محیطی به عوامل مختلف اجتماعی و همچنین پارامترهای تابع آلودگی بستگی دارد. نتایج آنالیز حساسیت برای اقتصاد ایران در این تحقیق نشان می‌دهد که با افزایش ترجیحات زیست محیطی، نرخ بهینه مالیات بر آلودگی در حالت بهینه رفاه اجتماعی باید افزایش یابد. با افزایش نوسانات نرخ سود سرمایه مالیات بر آلودگی کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش نرخ سود نرخ مالیات بر آلودگی افزایش می‌یابد و رابطه‌ی مستقیم بین نوسانات تولید با نرخ مالیات بر آلودگی وجود دارد.

با توجه ارتباط منفی بین نوسان نرخ سود سرمایه و نرخ بهینه مالیاتیکه تامین کننده رفاه در جامعه است پیشنهاد می‌شود تا حد امکان از نوسان نرخ سود سرمایه کاسته شود. همچنین با توجه به ارتباط مثبت و مقعر بین نرخ سود و نرخ بهینه مالیاتی می‌توان برای نرخ‌های سود تسهیلات بانکی مشخص شده توسط بانک مرکزی به استخراج نرخ بهینه مالیاتی که حداکثر رفاه را برای جامعه به ارمغان می‌آورد را استخراج کرد. برای نرخ ۱۷ درصد تسهیلات بانکی حدود ۵ درصد از درآمد به‌عنوان نرخ بهینه پیشنهاد می‌شود. نهایتاً با توجه به تحدب و رابطه مثبت بین ترجیحات زیست محیطی مصرف کنندگان و نرخ بهینه مالیات، سرمایه‌گذاری و افزایش دانش مردم در مورد انواع آلودگی‌ها پیشنهاد می‌شود چرا که برای جوامع با نرخ ترجیحات بالا می‌توان نرخ بالاتر و رفاه بیشتری را به ارمغان آورد.

منابع

بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران، سال‌های مختلف، گزارش اقتصادی و ترازنامه.

بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران، سال‌های مختلف، نماگرهای اقتصادی.

جعفری صمیمی، احمد؛ کریمی پتانلار، کریم و اعظمی، کورش (۱۳۹۷). "مالیات بر ارزش افزوده بر بهره‌وری و تعیین نرخ بهینه آن دراقتصاد ایران: ترکیب رهیافت مرز تصادفی و الگوی رشد درون‌زا". فصلنامه اقتصاد مقداری (بررسی‌های اقتصادی سابق)، دوره ۱۵، ۱۵۵-۱۲۹.

رستم‌زاده، پرویز و نصیرآبادی، شهره (۱۳۹۶). "نقش مالیات‌های غیرمستقیم زیست محیطی بر روی کیفیت محیطزیست درمدل رشد درون‌زا در ایران". فصلنامه نظریه‌های کاربردی اقتصاد، سال چهارم، شماره ۳، ۵۸-۳۵.

ستوده‌نیا، سلمان؛ احمدی شادمهری، محمدطاهر؛ رزمی، سید محمدجواد و فهیمی‌فرد، سید محمد (۱۳۹۹). "بررسی اثر مالیات سبز بر مصرف انرژی و رفاه اجتماعی در ایران با استفاده از الگوی تعادل عمومی محاسبه‌پذیر پویای بازگشتی (*RDCGE*)". فصلنامه علمی پژوهشی پژوهش‌های رشد و توسعه اقتصادی، دوره ۱۰، شماره ۴۰، ۳۴-۱۵.

صمدی، علی حسین؛ زیبایی، منصور؛ قادری، جعفر و بهلولی، پریسا (۱۳۹۸). "سیاست بهینه زیست محیطی، نااطمینانی و کیفیت نهادی: مطالعه موردی ایران، فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی (رشد و توسعه پایدار)". سال نوزدهم، شماره اول، ۸۲-۵۳.

طالعی اردکانی، سمانه (۱۳۹۹). "تأثیر مالیات بر بهره‌وری شاغلان صنایع تولیدی ایران، مطالعه برنامه پنجم توسعه (۱۳۹۴-۱۳۹۰)". *فصلنامه علمی پژوهشی پژوهش‌های رشد و توسعه اقتصادی*، دوره ۱۰، شماره ۴۰، ۱۳۴-۱۲۳.

عبدخانی، روح الله، موسوی، سیدنعمت اله و مجدزاده طباطبایی، شراره (۱۴۰۰). "ارزیابی اثرات شوک مالیاتی بر متغیرهای کلان اقتصادی در یک اقتصاد نفتی با رویکرد مدل تعادل عمومی پویای تصادفی (*DSGE*)". *فصلنامه علمی پژوهشی پژوهش‌های رشد و توسعه اقتصادی*، دوره ۱۱، شماره ۴۳، ۸۲-۶۵.

فاطمی زردان، یعقوب؛ فطرس، محمدحسن؛ سپهردوست، حمید و خضری، محسن (۱۴۰۰). "مطلوبیت و تابع رفاه اجتماعی در استان‌های ایران (بررسی روند تغییرات و همگرایی رفاه)". *فصلنامه علمی پژوهشی پژوهش‌های رشد و توسعه اقتصادی*، دوره ۱۱، شماره ۴۴، ۳۶-۱۵.

کیارسی، مهراب) ۱۳۸۶). "نرخ بهینهٔ مالیات و مخارج دولتی در چارچوب الگوی سه بخشی رشد درون‌زا". الگوی ایران، پایان نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه اصفهان.

مقدسی، رضا و طاهری، فرزانه (۱۳۹۱). "پیامدهای اقتصادی و زیست محیطی مالیات بر آلودگی". تحقیقات اقتصادی کشاورزی، جلد ۴، شماره ۳، ۱۱۱-۷۷.

مهرگان، نادر؛ عیسی‌زاده، سعید؛ عباسیان، عزت‌اله و فرجی، ابراهیم (۱۳۹۵). "برآورد وضعیت تعادلی اقتصاد ایران در چارچوب الگوهای ادوار تجاری حقیقی". فصلنامه نظریه‌های کاربردی اقتصاد، سال سوم، شماره ۲، ۲۲-۱.

هراتی، جواد؛ اسلاملوئیان، کریم و قطمیری، محمد علی (۱۳۹۱). "تعیین مالیات زیست محیطی بهینه در الگوی رشد تعمیم یافته با وجود انتقال تکنولوژی پاک و کیفیت محیط زیست: نمونه اقتصاد ایران". فصلنامه تحقیقات مدلسازی اقتصادی، شماره ۷، ۱۲۶-۹۷.

هادیان، ابراهیم و استادزاد، علی حسین (۱۳۹۲). "برآورد سطح بهینه مالیات بر آلودگی در اقتصاد ایران". فصلنامه علمی پژوهشی پژوهش‌های رشد و توسعه اقتصادی، دوره ۳، شماره ۱۲، ۷۴-۵۷.

هادیان، ابراهیم و استادزاد، علی‌حسین (۱۳۹۴). "محاسبه نرخ بهینه مالیات بر درآمد با و بدون ملاحظات زیست محیطی". فصلنامه علمی- پژوهشی مطالعات اقتصادی کاربردی ایران، سال چهارم، شماره ۱۴، ۲۵-۱.

Ariga, J. (2002). "*Internalizing Environmental Quality in a Simple Endogenous Growth Model*". Working Paper, Department of Agricultural and Resource Economics University of Maryland Collge Park, MD 20742.

Beckerman, W. (1992). "Economic Growth and the Environment: Whose Growth? Whose Environment?". *World Development*, 20, 481–496.

Bjertnaes, G. H. & Faehn, T. (2008). "Energy Taxation in a Small, Open Economy: Social Efficiency Gains Versus Industrial Concerns". *Energy Economics*, 30, 2050-2071.

Clemens, C. & Soretz, S. (1997). "*Welfare Effects of Income Taxian in a Model of Stochastic Growth*". Presented at the European Annual Meeting of the Econometric Society (ESEM) in Toulouse, August 1997 and at the Jahrestagung des Varies Fur Socialpolitik in Bern September 1997.

Deng, X. & Huang, J. (2010). "Scott Rozelle and Emi Uchida, Economic Growth and the Expansion of Urban Land in China". *Urban Studies*, 47, 813-843.

Deacon, R, T. & Norman, C, S. (2004). "Is the Environmental Kuznets Curve an Empirical Regularity?". Escholarship Repository, University of California, Santa Barbara.

Gradus, R. & Smulders, S. (1993). "The Trade-Off Between Environmental Care and Long-Term Growth—Pollution in Three Prototype Growth Models". *Journal of Economics*, 58(1), 25-51.

Grimaud, A. & Rougé, L. (2003). "Non-Renewable Resources and Growth with Vertical Innovations: Optimum, Equilibrium and Economic Policy". *Journal of Environmental Economics and Management*, 45, 433-453.

Kama, A. A. L. & Schubert, K. (2004). "Growth, Environment and Uncertain Future Preferences". *Environmental and Resource Economics*, 28, 31-53.

Kakeu, J. (2012). "*Optimal Depletion of Fossil Fuels under Stochastic Pollution: A Martingale Approach*". Submittid.

Li, H., Grijalva, T. & Berrens, R. (2007). "Economic Growth and Environmental Quality: a Meta-Analysis of Environmental Kuznets Curve Studies". *Economics Bulletin*, 17(5), 1-11.

Mohtadi, H. (1996). "Environment, Growth and Optimal Policy design". *Journal of Public Economics*, 63, 119-140.

Ott, I. & Soretz, S. (2004). "Growth and Welfare Effects of Tax Cuts: The Case of a Productive Public Input with Technological Risk". *Empirica*, 31, 117-135.

Pautrel, X. (2007). "*Pollution, Health and Life Expectancy: How Environmental Policy Can Promote Growth*". CCMP – Climate Change Modelling and Policy, Electronic Copy Available at: http://ssrn.com/abstract=1077151.

Tsujimura, M. (2011). Pollution Reduction Policies under Uncertainty and Their Costs, Memeo.

Shahbaz, M., Lean, H. H. & Shahbaz Sh, M. (2010). "*Environmental Kuznets Curve and the Role of Energy Consumption in Pakistan*". Development Research Unit, Discussion Paper DEVDP 10/05.

Soretz, S. (2005)."Efficient Dynamic Pollution Taxation in an Uncertain Environment". *Environmental & Resource Economics*, 36, 57-84.

Soretz, S. (2003). "Stochastic Pollution and Environmental Care in Endogenous Growth Model". *The Manchester School*, 71(4), Special Issue, 448-469.

Stern, D. (2004). "The Rise and Fall of the Environmental Kuznets Curve". World Development, 32(8), 1419–1439.

Zhang, X., Shigeng, Hu. & Wang, H. (2006). "A Stochastic Growth Model With Environmental Pollution". *Journal of* Systems Science & *Complexity*, 19, 414-422.

.

پیوست

$$U = E_0\left[\int_0^{\infty} u(c_t, p_t)e^{-\rho t}dt\right] \qquad (۱)$$

در این رابطه:

$u(c,p)$: تابع مطلوبیت لحظه‌ای[1] می‌باشد، که این تابع مطلوبیت رابطه مثبت با سطح مصرف سرانه (c_t) و رابطه عکس با (p_t) دارد $(u_c > 0, u_p < 0)$.

ρ: نرخ رجحان زمانی[2] بوده که ثابت و مثبت در نظر گرفته شده است.

طبق رابطه (۲) تابع تولید در این مطالعه بر اساس مطالعه‌ی سورتز (۲۰۰۳) مد نظر گرفته شده است که در آن تولید سرانه یک کالای همگن توسط یک تابع تولید تصادفی خطی صورت می‌گیرد، و ضریب A موجود در رابطه بهره‌وری انتظاری سرمایه بوده و k_t سرمایه‌ی سرانه‌ی قابل دسترس برای بنگاه می‌باشد. α کشش تولید سرانه نسبت به سرمایه‌ی سرانه می‌باشد. $\sigma_y dz_t$ جزء تصادفی تولید بوده که $dz_t \sim N(0, dt)$ بیانگر شوک‌های بهره‌وری کل در طول زمان بوده و σ_t واریانس تولید می‌باشد که با افزایش واریانس، جزء تصادفی قسمت تصادفی تولید افزایش می‌یابد. توزیع dz_t از فرایند تصادفی واینر پیروی می‌کند.

$$f(k_t) = A k_t^{\alpha}\left(dt + \sigma_y dz\right) \qquad (۲)$$

بر اساس رابطه‌ی (۳) $(\dot{p})$ تغییرات آلودگی نسبت به زمان می‌باشد که تابعی مستقیم از سرمایه‌ی سرانه در نظر گرفته شده است. مالیات بر آلودگی (τ) که بر تولید غیرتصادفی وضع می‌شود که با افزایش آن مالیات بر آلودگی کاهش می‌یابد. δ کشش تغییرات آلودگی سرانه به نسبت سرمایه ی سرانه به تولید غیرتصادفی سرانه می‌باشد.

$$\dot{p} = [\frac{k_t}{\tau f_d(k_t)}]^{\delta} \Rightarrow dp_t = [\frac{k_t}{\tau f_d(k_t)}]^{\delta} dt \qquad (۳)$$

[1]. Instantaneous Subutility Function
[2]. The rate of time preference

رابطه (۴) بیانگر تغییرات در ثروت سرانه می‌باشد که تابعی از تولیدی است که بابت آن مالیاتی پرداخت نمی‌شود و در واقع درآمد حاصل از تولید می‌باشد. i نرخ سود سرمایه و dz_i نوسان نرخ سود سرمایه می‌باشد. بر این اساس بخشی از ثروت که به آن سود تعلق می‌گیرد نیز در تعین تغییرات ثروت نقش دارد. مصرف در هر دوره از زمان نیز تأثیر منفی بر تغییرات ثروت دارد.

$$dw_t = (1-\tau)f(k_t) + [(1-n)(i+dz_i)w_t]dt - c_t\,dt \qquad (۴)$$

k_t سرمایه‌ی سرانه در هر دوره از زمان n درصد از ثروت سرانه در هر دوره می‌باشد.

$$k_t = nw_t \qquad (۵)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۵) در رابطه‌ی (۲)، روابط (۶) و (۷) به دست می‌آید که تابع تولید تصادفی به تفکیک جزء تصادفی و غیرتصادفی را نشان می‌دهد.

$$\xrightarrow{(2),(5)} f(nw_t) = A(nw_t)^{\alpha}\left(dt+\sigma_y dz\right) \Rightarrow f(k_t) = An^{\alpha}w_t^{\alpha}\left(dt+\sigma_y dz\right) \Rightarrow$$

$$f(k_t) = An^{\alpha}w_t^{\alpha}dt + A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}dz \qquad (۶)$$

$$f_d(k_t) = An^{\alpha}w_t^{\alpha}$$
$$f_R(k_t) = A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha} \qquad (۷)$$

همچنین با جای‌گذاری روابط (۷) و (۵) در رابطه‌ی (۳)، رابطه‌ی (۸) بر اساس متغیرهای ثروت سرانه و درصدی از ثروت که تعیین کننده‌ی سرمایه‌ی سرانه می‌باشد و نرخ مالیات بر آلودگی و شوک‌های بهره‌وری به‌دست می‌آید.

$$\xrightarrow{(3),(5),(7)} dp_t = [\frac{k_t}{\tau(f_d(k_t))}]^{\delta}dt \Rightarrow dp_t = [\frac{nw_t}{\tau An^{\alpha}w_t^{\alpha}}]^{\delta}dt \Rightarrow dp_t = [\frac{n^{1-\alpha}w_t^{1-\alpha}}{\tau A}]^{\delta}dt$$

$$\Rightarrow dp_t = \tau^{-\delta}A^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}w_t^{\delta(1-\alpha)}dt \Rightarrow$$

$$dp_t = \tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}dt \qquad (۸)$$

با جای‌گذاری روابط (۶) و (۵) در رابطه‌ی (۴)، رابطه‌ی (۹) به دست می‌آید که بیانگر تغییرات ثروت در هر لحظه از زمان به تفکیک تغییرات تصادفی و غیرتصادفی می‌باشد. هدف از این جای‌گذاری‌ها این است که به نوعی تابع تولید که شامل دو جزء تصادفی و غیرتصادفی می‌باشد را در تغییرات ثروت و تغییرات آلودگی وارد کنیم.

$$\xrightarrow{(4),(5),(6)} dw = (1-\tau)f(k_t) + [(1-n)(i+dz_i)w]dt - c\,dt \Rightarrow$$

$$dw = (1-\tau)\left[An^{\alpha}w_t^{\alpha}dt + A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}dz\right] + [(1-n)(i+dz_i)w]dt - c\,dt$$

$$dw = (1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha}dt + (1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}dz + [(1-n)(i+dz_i)w]dt - c\,dt$$

$$dw = \left[(1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha} + (1-n)(i+dz_i)w_t - c_t\right]dt + (1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}dz \qquad (۹)$$

در ادامه به حل و بسط الگو با توجه به اینکه خانوار با توجه به محدودیت آلودگی و ثروت به دنبال حداکثر سازی مطلوبیت بین دوره‌ای است خواهیم پرداخت. در واقع ما به دنبال محاسبه‌ی مقادیر بهینه‌ی مصرف (c) و سهم سرمایه از ثروت (n) و نرخ بهینه‌ی مالیات بر آلودگی (τ) می‌باشیم. تابع هدف که حداکثر سازی ارزش فعلی مطلوبیت انتظاری خانوار طی طول عمر نامحدود می‌باشد با توجه به محدودیت آلودگی و محدودیت ثروت در سیستم روابط (۱۰) ارائه شده است.

$$Max\ U = E_0\left[\int_0^{\infty} u(c_t,p_t)e^{-\rho t}dt\right]$$

$$S.t.$$

$$dp_t = \tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}dt$$

$$dw_t = \left[(1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha} + (1-n)(i+dz_i)w_t - c_t\right]dt + (1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}dz \qquad (۱۰)$$

اگر تابع هدف، به شکل $V(X_0)$ باشد و محدودیت دارای دو جزء تصادفی $\vec{\sigma}(\vec{x})$ و غیرتصادفی $\vec{g}(x,u)$ باشد جهت حداکثر سازی تابع تصادفی همیلتون- بلمن- ژاکوبین را که فرم کلی آن به صورت سیستم (۱۱) می‌باشد با توجه به متغیرهای وضعیت و کنترل الگوی مدنظر تشکیل می‌دهیم. براس

$$V(X_0) = Max\ E_0\left[\int_0^{\infty} h(x,u)e^{-\rho t}dt\right]$$

$$S.t.$$

$$d\vec{x} = \vec{g}(x,u)dt + \vec{\sigma}(\vec{x})dw$$

$\vec{x}$: state variable

$\vec{u}$: control variable

Stochastic HBJ *Equation*

$$\rho V(\vec{x}) = \max_{u\in U}\ h(\vec{x},\vec{u}) + \nabla_x V(\vec{x}).\vec{g}(x,u) + \frac{1}{2}tr\left[\left(\Delta_x V(\vec{x})\right)(\vec{\sigma}(\vec{x}))\right]$$

$$\nabla_x V(\vec{x}) \longrightarrow Gradiant\ of\ V$$

$$\Delta_x V(\vec{x}) \longrightarrow Hessian\ of\ V \qquad (۱۱)$$

منظور حل این مسئله حداکثر سازی متغیر کنترل مصرف (c)، سهم سرمایه از ثروت (n) و نرخ مالیات بر آلودگی (τ)می‌باشد. همچنین متغیرهای وضعیت ثروت (w) و آلودگی(p) می‌باشد که در رابطه‌ی (۱۲) نشان داده شده است.

$$\vec{x} = (w, p)$$

$$\vec{u} = (c, n, \tau) \qquad (۱۲)$$

به منظور بررسی شروط حداکثرسازی تابع تصادفی همیلتون بلمن ژاکوبین[1] را با توجه به سیستم (۱۱) تشکیل داده که با توجه به متغیرهای کنترل و وضعیت الگوی ارائه شده به صورت رابطه‌ی (۱۳) می‌باشد. شروط اولیه‌ی بهینه سازی نیز در سیستم روابط (۱۴) و (۱۵) و (۱۶) ارائه شده است.

$$\rho V(p,w) = \underset{c,n,\tau}{Max}\ u(c,p) + V_p(p,w)\left[\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right] + \ldots$$

$$+V_w(p,w)\left[(1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha} + (1-n)(i+dz_i)w_t - c_t\right] + \frac{1}{2}V_{ww}(p,w)\left[(1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2 \qquad (۱۳)$$

رابطه‌ی (۱۴) بر اساس حداکثرسازی تابع SHBJ نسبت به متغیر کنترل مصرف (C) به دست آمده است. $u_c(c,p)$ به دست آمده از شرط اولیه‌ی بهینه سازی همان میل نهایی به مصرف را نشان می‌دهد.

$$\xrightarrow{c} u_c(c,p) - V_w(p,w) = 0 \Rightarrow u_c(c,p) = V_w(p,w) \Rightarrow V_w(p,w) = c_t^{-\varepsilon}p_t^{-\gamma(1-\varepsilon)} \qquad (۱۴)$$

رابطه‌ی (۱۵) بر اساس حداکثرسازی تابع SHBJ نسبت به متغیر کنترل سهم سرمایه از ثروت (n) به دست آمده است.

$$\xrightarrow{n} V_p(p,w)\left[\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right]$$

$$+V_w(p,w)\left[-(i+dz_i)w_t + \alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}w_t^{\alpha}\right] + V_{ww}(p,w)\alpha\left[(1-\tau)A\sigma_y w_t^{\alpha}\right]^2 n^{2\alpha-1} = 0 \qquad (۱۵)$$

رابطه‌ی (۱۶) نیز بر اساس حداکثرسازی تابع SHBJ نسبت به متغیر کنترل نرخ مایات بر آلودگی (τ) به دست آمده است.

$$\xrightarrow{\tau} V_p(p,w)\left[-\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right]$$

$$+V_w(p,w)\left[-An^{\alpha}w_t^{\alpha}\right] - V_{ww}(p,w)\left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau) = 0 \qquad (۱۶)$$

روابط (۱۵) و (۱۶) پس از مرتب سازی به صورت روابط (۱۷) و (۱۸) ارائه شده است.

[1] Stochastic Hamilton Bellman Jakubian Equation

$$\xrightarrow{(15)} V_p(p,w)\left[\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right]+V_{ww}(p,w)\alpha\left[(1-\tau)A\sigma_y w_t^{\alpha}\right]^2 n^{2\alpha-1}$$
$$= -V_w(p,w)\left[-(i+dz_i)w_t+\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}w_t^{\alpha}\right] \quad (۱۷)$$

$$\xrightarrow{(16)} V_p(p,w)\left[\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right]+V_{ww}(p,w)\left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau)$$
$$= -V_w(p,w)\left[An^{\alpha}w_t^{\alpha}\right] \quad (۱۸)$$

فرم ماتریسی روابط (۱۷) و (۱۸) در رابطه‌ی (۱۹) ارائه شده است.

$$\begin{bmatrix}\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)} & \alpha\left[(1-\tau)A\sigma_y w_t^{\alpha}\right]^2 n^{2\alpha-1}\\ \delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)} & \left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_p\\V_{ww}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-V_w\left[-(i+dz_i)w_t+\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}w_t^{\alpha}\right]\\-V_w\left[An^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]\end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

از روش حل کرامر مقادیر V_p و V_{ww} طی روابط (۲۰) الی (۲۴) محاسبه شده است.

$$V_p=\frac{\begin{vmatrix}-V_w\left[-(i+dz_i)w_t+\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}w_t^{\alpha}\right] & \alpha\left[(1-\tau)A\sigma_y w_t^{\alpha}\right]^2 n^{2\alpha-1}\\ -V_w\left[An^{\alpha}w_t^{\alpha}\right] & \left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)} & \alpha\left[(1-\tau)A\sigma_y w_t^{\alpha}\right]^2 n^{2\alpha-1}\\ \delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)} & \left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau)\end{vmatrix}} \quad (۲۰)$$

$$V_p=\frac{V_w\left\{-\left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau)\left[-(i+dz_i)w_t+\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}w_t^{\alpha}\right]+\left[An^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]\alpha\left[(1-\tau)A\sigma_y w_t^{\alpha}\right]^2 n^{2\alpha-1}\right\}}{\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau)-\alpha\left[(1-\tau)A\sigma_y w_t^{\alpha}\right]^2 n^{2\alpha-1}\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}} \quad (۲۱)$$

$$V_{ww}=\frac{\begin{vmatrix}\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)} & -V_w\left[-(i+dz_i)w_t+\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}w_t^{\alpha}\right]\\ \delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)} & -V_w\left[An^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)} & \alpha\left[(1-\tau)A\sigma_y w_t^{\alpha}\right]^2 n^{2\alpha-1}\\ \delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)} & \left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau)\end{vmatrix}} \quad (۲۲)$$

$$V_{ww}=\frac{-V_w\left\{\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\left[An^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]-\left[-(i+dz_i)w_t+\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}w_t^{\alpha}\right]\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right\}}{\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\left[A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\right]^2(1-\tau)-\alpha\left[(1-\tau)A\sigma_y w_t^{\alpha}\right]^2 n^{2\alpha-1}\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}} \quad (۲۳)$$

جهت محاسبه‌ی دقیق‌تر V_p به ساده سازی بیشتر رابطه‌ی (۲۱) پرداخته و نهایتاً رابطه‌ی (۲۴) را به دست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{(21)} V_p = \frac{V_w \left\{A^2\sigma_y^2 n^{2\alpha} w_t^{2\alpha}(1-\tau)(i+dz_i)w_t - A^2\sigma_y^2 n^{2\alpha} w^{2\alpha}(1-\tau)^2 \alpha A n^{\alpha-1} w_t^{\alpha} + A n^{\alpha} w_t^{\alpha}\alpha(1-\tau)^2 A^2\sigma_y^2 w_t^{2\alpha} n^{2\alpha-1}\right\}}{\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)-1} A^{-\delta} w_t^{\delta(1-\alpha)} A^2\sigma_y^2 n^{2\alpha} w_t^{2\alpha}(1-\tau) - \alpha(1-\tau)^2 A^2\sigma_y^2 w_t^{2\alpha} n^{2\alpha-1}\delta\tau^{-\delta-1} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} w_t^{\delta(1-\alpha)}}$$

$$V_p = \frac{V_w \left\{A^2\sigma_y^2 n^{2\alpha}(1-\tau)(i+dz_i)w_t^{3\alpha} - A^3\sigma_y^2 n^{3\alpha-1}(1-\tau)^2\alpha w_t^{3\alpha} + \alpha(1-\tau)^2 A^3\sigma_y^2 n^{3\alpha-1} w_t^{3\alpha}\right\}}{A^{2-\delta}\sigma_y^2(1-\tau)\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)-1+2\alpha} w_t^{\delta(1-\alpha)+2\alpha} - \alpha(1-\tau)^2 A^{2-\delta}\sigma_y^2\delta\tau^{-\delta-1} n^{\delta(1-\alpha)+2\alpha-1} w_t^{\delta(1-\alpha)+2\alpha}}$$

$$V_p = \frac{V_w A^2\sigma_y^2 n^{2\alpha}(1-\tau)\left\{(i+dz_i) - \alpha(1-\tau)An^{\alpha-1} + An^{\alpha-1}(1-\tau)\alpha\right\} w_t^{3\alpha}}{n^{\delta(1-\alpha)-1+2\alpha} A^{2-\delta}\sigma_y^2(1-\tau)\tau^{-\delta}\left\{(1-\alpha) - \alpha(1-\tau)\tau^{-1}\right\}\delta w_t^{\delta(1-\alpha)+2\alpha}}$$

$$V_p = \frac{V_w A^{\delta}\tau^{\delta}\left\{(i+dz_i) - \alpha(1-\tau)An^{\alpha-1} + An^{\alpha-1}(1-\tau)\alpha\right\} w_t^{\alpha}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}\left\{(1-\alpha) - \alpha(1-\tau)\tau^{-1}\right\} w_t^{\delta(1-\alpha)}}$$

$$(1-\alpha) - \alpha(1-\tau)\tau^{-1} = (1-\alpha) - \frac{\alpha(1-\tau)}{\tau} = \frac{\tau(1-\alpha) - \alpha(1-\tau)}{\tau} = \frac{\tau - \tau\alpha - \alpha + \tau\alpha}{\tau} = \frac{\tau-\alpha}{\tau}$$

$$V_p = \frac{V_w A^{\delta}\tau^{\delta}\left\{(i+dz_i) - \alpha(1-\tau)An^{\alpha-1} + An^{\alpha-1}(1-\tau)\alpha\right\} w_t^{\alpha}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}\{\tau-\alpha\} w_t^{\delta(1-\alpha)}}\tau$$

$$V_p = \frac{V_w A^{\delta}\tau^{\delta}(i+dz_i)w_t^{\alpha}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}\{\tau-\alpha\} w_t^{\delta(1-\alpha)}}\tau$$

$$V_p = \frac{V_w A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)w_t^{\alpha-\delta(1-\alpha)}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)} \qquad (۲۴)$$

با تقسیم طرفین رابطه‌ی (۲۴) بر V_w رابطه‌ی (۲۵) را داریم.

$$\xrightarrow{(24)} \frac{V_p}{V_w} = \frac{A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)w_t^{\alpha-\delta(1-\alpha)}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)} \qquad (۲۵)$$

با دیفرانسیل‌گیری از $V(p,w)$ رابطه‌ی (۲۶) را خواهیم داشت.

$$V(p,w) \Rightarrow \frac{dw}{dp} = -\frac{\frac{dV}{dp}}{\frac{dV}{dw}} = -\frac{V_p}{V_w} \qquad (۲۶)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲۶) در رابطه‌ی (۲۵)، رابطه‌ی (۲۷) را به دست می‌آوریم که با ساده‌سازی رابطه‌ی (۲۷) معادله‌ی دیفرانسیل رابطه‌ی (۲۸) را به دست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{(25),(26)} -\frac{dw}{dp} = \frac{A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)w_t^{\alpha-\delta(1-\alpha)}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)} \qquad (۲۷)$$

$$\xrightarrow{(27)} -w_t^{\delta(1-\alpha)-\alpha}dw = \frac{A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}dp \qquad (۲۸)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۲۸) معادله دیفرانسیل مربوطه را حل می‌کنیم. رابطه‌ی (۲۹) نتیجه‌ی حل معادله‌ی دیفرانسیل می‌باشد. در این بخش به بررسی حساسیت نرخ مالیات بر آلودگی می‌پردازیم. با توجه به اینکه

$$\xrightarrow{(28)} \int -w_t^{\delta(1-\alpha)-\alpha}dw = \int \frac{A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}dp$$

$$\frac{1}{\alpha-\delta(1-\alpha)-1} w_t^{1-\alpha+\delta(1-\alpha)} = \frac{A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}p \Rightarrow$$

$$w_t^{1-\alpha+\delta(1-\alpha)} = \frac{(\alpha-\delta(1-\alpha)-1)A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}p$$

$$w_t^{\overset{+}{1}-\alpha+\delta(1-\alpha)} = \frac{(\alpha-\delta(\overset{-}{1}-\alpha)-1)A^{\delta}\tau^{\overset{+}{\delta+1}}\left\{(i+\overset{+}{dz_i})\right\}}{\delta n^{\overset{+}{\delta(1-\alpha)-1}}(\overset{??}{\tau}-\alpha)}\overset{+}{p} \qquad (۲۹)$$

$$\tau-\alpha<0\Rightarrow\tau<\alpha \qquad (۳۰)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳۰) نرخ مالیات بر آلودگی باید کمتراز کشش تولید نسبت به سرمایه باشد.

با لگاریتم‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۲۹) و سپس دیفرانسیل‌گیری از آن رابطه‌ی (۳۱) که نشان دهنده‌ی نرخ رشد آلودگی که تابعی از نرخ رشد ثروت می‌باشد به دست می‌آید.

$$\xrightarrow{(29)}\left[1-\alpha+\delta(1-\alpha)\right]\frac{\dot{w}}{w}=\frac{\dot{p}}{p}\Rightarrow\frac{\dot{w}}{w}=\frac{1}{\left[1-\alpha+\delta(1-\alpha)\right]}\frac{\dot{p}}{p}$$

$$\frac{\dot{p}}{p}=\left[1-\alpha+\delta(1-\alpha)\right]\frac{\dot{w}}{w} \qquad (۳۱)$$

با کمی ساده سازی رابطه‌ی (۲۳) رابطه‌ی (۳۲) و نهایتاً (۳۴) به دست می‌آید.

$$\xrightarrow{(23)}V_{ww}=\frac{-V_w\left\{\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}An^{\alpha}w_t^{\alpha}+(i+dz_i)w_t\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}-\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}w_t^{\alpha}\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}\right\}}{\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}A^2\sigma_y^2w_t^{2\alpha}n^{2\alpha}(1-\tau)-\alpha(1-\tau)^2A^2\sigma_y^2w_t^{2\alpha}n^{2\alpha-1}\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)}} \qquad (۳۲)$$

$$\Rightarrow V_{ww}=\frac{-V_w\left\{\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1+\alpha}A^{1-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)+\alpha}+(i+dz_i)\delta\tau^{-\delta-1}n^{\delta(1-\alpha)}A^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)+1}-\alpha(1-\tau)n^{\delta(1-\alpha)+\alpha-1}\delta\tau^{-\delta-1}A^{1-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)+\alpha}\right\}}{\delta(1-\alpha)\tau^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)-1+2\alpha}A^{2-\delta}w_t^{2\alpha+\delta(1-\alpha)}\sigma_y^2(1-\tau)-\alpha(1-\tau)^2A^{2-\delta}\sigma_y^2n^{2\alpha-1+\delta(1-\alpha)}\delta\tau^{-\delta-1}w_t^{\delta(1-\alpha)+2\alpha}}$$

$$\Rightarrow V_{ww}=\frac{-V_w\delta\tau^{-\delta}w_t^{\delta(1-\alpha)+\alpha}\left\{(1-\alpha)n^{-(1-\alpha)}A+(i+dz_i)\tau^{-1}w_t^{1-\alpha}-\alpha(1-\tau)n^{\alpha-1}\tau^{-1}A\right\}A^{-\delta}n^{\delta(1-\alpha)}}{\delta(1-\tau)A^{2-\delta}\sigma_y^2\tau^{-\delta}\left\{(1-\alpha)-\alpha(1-\tau)\tau^{-1}\right\}n^{2\alpha-1+\delta(1-\alpha)}w_t^{\delta(1-\alpha)+2\alpha}}$$

$$\xrightarrow{(32)}(1-\alpha)-\alpha(1-\tau)\tau^{-1}=(1-\alpha)-\frac{\alpha(1-\tau)}{\tau}=\frac{\tau(1-\alpha)-\alpha(1-\tau)}{\tau}=\frac{\tau-\tau\alpha-\alpha+\tau\alpha}{\tau}=\frac{\tau-\alpha}{\tau} \qquad (۳۳)$$

$$\xrightarrow{(32),(33)}V_{ww}=\frac{-V_w\tau^{-\delta}\left\{(1-\alpha)n^{-(1-\alpha)}A+(i+dz_i)\tau^{-1}w_t^{1-\alpha}-\alpha(1-\tau)n^{\alpha-1}\tau^{-1}A\right\}}{(1-\tau)A^2\sigma_y^2\tau^{-\delta}\left\{\frac{\tau-\alpha}{\tau}\right\}n^{2\alpha-1}w_t^{\alpha}}\Rightarrow$$

رابطه‌ی (۳۴) و (۳۵) معادل هم می‌باشند. که با طرفین وسطین کردن رابطه‌ی (۳۵) رابطه‌ی (۳۶) به‌دست می‌آید.

$$V_{ww}=\frac{-V_w\tau\left\{(1-\alpha)n^{-(1-\alpha)}A-\alpha(1-\tau)n^{\alpha-1}\tau^{-1}A+(i+dz_i)\tau^{-1}w_t^{1-\alpha}\right\}}{(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}w_t^{\alpha}}$$

$$V_{ww}=\frac{-V_w\tau\left\{n^{\alpha-1}A\left[(1-\alpha)-\alpha(1-\tau)\tau^{-1}\right]+(i+dz_i)\tau^{-1}w_t^{1-\alpha}\right\}}{(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}w_t^{\alpha}}$$

$$V_{ww}=\frac{-V_w\left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau(1-\alpha)-\alpha(1-\tau)\right]+(i+dz_i)w_t^{1-\alpha}\right\}}{(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}w_t^{\alpha}}$$

$$V_{ww}=\frac{-V_w\left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\tau\alpha-\alpha+\tau\alpha\right]+(i+dz_i)w_t^{1-\alpha}\right\}}{(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}w_t^{\alpha}}$$

$$V_{ww}=\frac{-V_w\left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]+(i+dz_i)w_t^{1-\alpha}\right\}}{(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}w_t^{\alpha}}$$

(۳۴)

$$\xrightarrow{(34)} \frac{dV_w}{dw} = \frac{-V_w\left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]+(i+dz_i)w_t^{1-\alpha}\right\}}{(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}w_t^{\alpha}} \quad (۳۵)$$

$$-(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\frac{dV_w}{V_w} = \left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]w_t^{-\alpha}+(i+dz_i)w_t^{1-2\alpha}\right\}dw \quad (۳۶)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی دیفرانسیل شماره (۳۶) به حل این معادله پرداخته که نتیجه‌ی آن در رابطه‌ی (۳۷) آمده است.

$$\xrightarrow{(36)} \int -(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\frac{dV_w}{V_w} = \int\left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]w_t^{-\alpha}+(i+dz_i)w_t^{1-2\alpha}\right\}dw$$

$$-(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\frac{dV_w}{V_w} = \left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]w_t^{-\alpha}+(i+dz_i)w_t^{1-2\alpha}\right\}dw$$

$$-(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\ln(V_w) = \left\{\frac{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]}{1-\alpha}w_t^{1-\alpha}+\frac{1}{2(1-\alpha)}(i+dz_i)w_t^{2(1-\alpha)}\right\} \quad (۳۷)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۱۴) در رابطه‌ی (۳۷) رابطه‌ی (۳۸) به دست می‌آید که با ساده سازی آن به رابطه‌ی (۳۹) می‌رسیم.

$$\xrightarrow{(14),(37)} -(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\ln(c_t^{-\varepsilon}p_t^{-\gamma(1-\varepsilon)}) = \left\{\frac{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]}{1-\alpha}w_t^{1-\alpha}+\frac{1}{2(1-\alpha)}(i+dz_i)w_t^{2(1-\alpha)}\right\}$$

(۳۸)

$$-(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[-\varepsilon\ln c_t-\gamma(1-\varepsilon)\ln p_t\right] = \left\{\frac{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]}{1-\alpha}w_t^{1-\alpha}+\frac{1}{2(1-\alpha)}(i+dz_i)w_t^{2(1-\alpha)}\right\}$$

$$-(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\ln(c_t^{-\varepsilon}p_t^{-\gamma(1-\varepsilon)}) = \left\{\frac{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]}{1-\alpha}w_t^{1-\alpha}+\frac{1}{2(1-\alpha)}(i+dz_i)w_t^{2(1-\alpha)}\right\}$$

(۳۹)

پس از دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۳۹) نتیجه را به صورت رابطه‌ی (۴۰) می‌نویسیم.

$$(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[+\varepsilon\frac{\dot{c}}{c}+\gamma(1-\varepsilon)\frac{\dot{p}}{p}\right] = \left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]\frac{\dot{w}}{w}w_t^{1-\alpha}+(i+dz_i)\frac{\dot{w}}{w}w_t^{2(1-\alpha)}\right\}$$

$$(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[+\varepsilon\frac{\dot{c}}{c}+\gamma(1-\varepsilon)\frac{\dot{p}}{p}\right] = \frac{\dot{w}}{w}\left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]w_t^{1-\alpha}+(i+dz_i)w_t^{2(1-\alpha)}\right\} \quad (۴۰)$$

در حالت پایدار نرخ رشد متغیر مصرف (c) با نرخ رشد متغیر ثروت (w) برابر می‌باشد که در رابطه‌ی (۴۱) نشان داده شده است.

$$\frac{\dot{c}}{c} = g^*$$

$$\frac{\dot{w}}{w} = g^*$$

(۴۱)

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۴۱) در رابطه‌ی (۳۱) رابطه‌ی (۴۲) را داریم که نرخ رشد آلودگی در مسیر بهینه را نشان می‌دهد.

$$\xrightarrow{(31),(41)} \frac{\dot{p}}{p} = \left[1-\alpha+\gamma(1-\alpha)\right]\frac{\dot{w}}{w} \Rightarrow \frac{\dot{p}}{p} = \left[1-\alpha+\gamma(1-\alpha)\right]g^* \quad (۴۲)$$

همچنین با جای‌گذاری رابطه‌ی (۴۱) و (۴۲) در رابطه‌ی (۴۰) رابطه‌ی (۴۳) به دست می‌آید که با ساده سازی آن رابطه‌ی (۴۴) را خواهیم داشت.

$$\xrightarrow{(40),(41),(42)}$$

$$(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[+\varepsilon g^*+\gamma(1-\varepsilon)\left[1-\alpha+\gamma(1-\alpha)\right]g^*\right] = g^*\left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]w_t^{1-\alpha}+(i+dz_i)w_t^{2(1-\alpha)}\right\}$$

(۴۳)

$$(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}g^*\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]=g^*\left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]w_t^{1-\alpha}+(i+dz_i)\,w_t^{2(1-\alpha)}\right\}$$

$$(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]=\left\{n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right]w_t^{1-\alpha}+(i+dz_i)\,w_t^{2(1-\alpha)}\right\} \quad (۴۴)$$

حال در رابطه‌ی (۴۴) تغییر متغیرهای روابط (۴۵) و (۴۶) را اعمال می‌کنیم.

$$w_t^{1-\alpha}=x \quad (۴۵)$$

$$\vartheta_3=(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]$$

$$\vartheta_2=n^{\alpha-1}A\left[\tau-\alpha\right] \quad (۴۶)$$

$$\vartheta_1=(i+dz_i)$$

بر این اساس معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت رابطه‌ی (۴۷) به دست می‌آید که با حل آن رابطه‌ی (۴۸) را خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{(44),(45),(46)}\vartheta_1x^2+\vartheta_2x-\vartheta_3=0 \quad (۴۷)$$

$$x=\frac{-\vartheta_2\pm\sqrt{\vartheta_2^2+4\vartheta_1\vartheta_3}}{2\vartheta_1} \quad (۴۸)$$

در رابطه‌ی (۴۸) جواب منفی قابل قبول نیست و فقط جواب‌های مثبت قابل قبول است. زیرا جواب این رابطه میزان ثروت را به ما می‌دهد که ثروت نیز مثبت می‌باشد. با جای‌گذاری رابطه‌ی (۴۵) در رابطه‌ی (۴۹) نهایتاً رابطه‌ی (۵۰) را که نشانگر ثروت می‌باشد را به دست می‌آوریم.

$$x=\frac{-\vartheta_2+\sqrt{\vartheta_2^2+4\vartheta_1\vartheta_3}}{2\vartheta_1} \quad (۴۹)$$

$$\xrightarrow{(45),(49)}w_t^{1-\alpha}=\frac{-\vartheta_2+\sqrt{\vartheta_2^2+4\vartheta_1\vartheta_3}}{2\vartheta_1} \quad (۵۰)$$

که اگر تغییر متغیر (۵۱) را در نظر بگیریم، در رابطه (۵۲) مقدار بهینه‌ی ثروت را به دست خواهیم آورد.

$$\frac{-\vartheta_2+\sqrt{\vartheta_2^2+4\vartheta_1\vartheta_3}}{2\vartheta_1}=\varsigma \quad (۵۱)$$

$$\xrightarrow{(50),(51)}w_t^*=\varsigma^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (۵۲)$$

حال با جای‌گذاری w^* در رابطه‌ی (۲۹) مقدار بهینه‌ی آلودگی (p^*) را که در رابطه‌ی (۵۳) آورده شده است را می‌توان به دست آورد.

$$\xrightarrow{(29)}w_t^{1-\alpha+\delta(1-\alpha)}=\frac{(\alpha-\delta(1-\alpha)-1)A^\delta\tau^{\delta+1}\left\{(i+dz_i)\right\}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}p\Rightarrow$$

$$p^*=\left[w_t^*\right]^{1-\alpha+\delta(1-\alpha)}\frac{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}{(\alpha-\delta(1-\alpha)-1)A^\delta\tau^{\delta+1}(i+dz_i)} \quad (۵۳)$$

رابطه‌ی (۵۴) را در مورد نرخ رشد آلودگی تعریف می‌کنیم.

$$g_p^*=\frac{\dot{p}^*}{p^*} \quad (۵۴)$$

بر اساس رابطه‌ی (۸) که مربوط به تغییرات آلودگی می‌باشد و با جای‌گذاری w^* در آن رابطه‌ی (۵۵) که تغییرات آلودگی در مسیر بهینه می‌باشد به دست می‌آید.

$$\xrightarrow{(8)} dp_t = \tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} w_t^{\delta(1-\alpha)} dt \xrightarrow{(52)} \dot{p}^* = \tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} \left[w_t^*\right]^{\delta(1-\alpha)} \quad (۵۵)$$

با جای‌گذاری دو رابطه‌ی (۵۵) و (۵۳) در رابطه‌ی (۵۴) که مربوط به تغییرات آلودگی$(\dot{p})$ و میـزان آلـودگی (p) در مسـیر بهینـه می‌باشند نرخ رشد آلودگی در مسیر بهینه بر اساس رابطه‌ی (۵۶) به دست می‌آید.

$$\xrightarrow{(53),(54),(55)} g_p^* = \frac{\dot{p}^*}{p^*} = \frac{\tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} \left[w_t^*\right]^{\delta(1-\alpha)}}{\left[w_t^*\right]^{1-\alpha+\delta(1-\alpha)} \frac{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}{(\alpha-\delta(1-\alpha)-1)A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)}} \quad (۵۶)$$

که با ساده سازی (۵۶) رابطه‌ی (۵۷) را خواهیم داشت که با جای‌گذاری (۵۲) در آن رابطه‌ی (۵۸) را به دست می‌آوریم.

$$g_p^* = \frac{\dot{p}^*}{p^*} = \frac{\tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} (\alpha-\delta(1-\alpha)-1) A^{\delta}\tau^{\delta+1} \left\{(i+dz_i)+\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}\right\} \left[w_t^*\right]^{\delta(1-\alpha)}}{\left[w_t^*\right]^{1-\alpha+\delta(1-\alpha)} \delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)}$$

$$g_p^* = \frac{\dot{p}^*}{p^*} = \frac{\tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} (\alpha-\delta(1-\alpha)-1) A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)}{\left[w_t^*\right]^{1-\alpha} \delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)} \quad (۵۷)$$

$$\xrightarrow{(52),(57)} g_p^* = \frac{1}{\varsigma} \frac{\tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} (\alpha-\delta(1-\alpha)-1) A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)} \quad (۵۸)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۵۴) در رابطه‌ی (۴۲) رابطه‌ی (۵۹) که بیانگر نرخ رشد آلودگی در مسیر بهینه می‌باشد به دست می‌آید.

$$\xrightarrow{(42),(54)} g_p^* = \left[1-\alpha+\delta(1-\alpha)\right] g^* \quad (۵۹)$$

با طرفین وسطین کردن رابطه‌ی (۵۹) و سپس جای‌گذاری کردن رابطه‌ی (۵۸) در آن (g^*) را به دست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{(59),(58)} g^* = \frac{g_p^*}{\left[1-\alpha+\delta(1-\alpha)\right]} = \frac{1}{\varsigma} \frac{\tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} (\alpha-\delta(1-\alpha)-1) A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)\left[1-\alpha+\delta(1-\alpha)\right]} \quad (۶۰)$$

طی روابط (۶۱) و (۶۲) به ساده سازی بیشتررابطه‌ی (۶۰) پرداخته که به صورت زیر نشان داده شده است.

$$g^* = -\frac{1}{\varsigma} \frac{\tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} A^{\delta}\tau^{\delta+1}(i+dz_i)}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)} \quad (۶۱)$$

$$g^* = -\frac{1}{\varsigma} \frac{\tau^{-\delta} n^{\delta(1-\alpha)} A^{-\delta} A^{\delta}\tau^{\delta+1}\left\{(i+dz_i)+\alpha(1-\tau)An^{\alpha-1}\right\}}{\delta n^{\delta(1-\alpha)-1}(\tau-\alpha)} \Rightarrow$$

$$g^* = -\frac{\tau n}{\varsigma} \frac{(i+dz_i)}{\delta(\tau-\alpha)} \quad (۶۲)$$

با توجه به تعیین علامت کلیه متغیرهای موجود در رابطه‌ی (۶۳) نرخ رشد تمامی متغیرها در مسیر بهینه مثبت می‌باشند.

$$g^* = -\frac{\overset{+}{\tau} \overset{+}{n}}{\varsigma} \frac{\overset{+}{(i+dz_i)}}{\underset{-}{\delta(\tau-\alpha)}} \Rightarrow g^* > 0 \quad (۶۳)$$

با جای‌گذاری تغییر متغیرهای سیستم روابط(۴۶) در رابطه‌ی (۵۱) روابط (۶۴) و (۶۵) به دست می‌آید.

$$\xrightarrow{(46)} \vartheta_2^2 + 4\vartheta_1\vartheta_3 = (\tau-\alpha)^2 n^{-2(1-\alpha)} A^2 + 4(i+dz_i)(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right] \quad (۶۴)$$

$$\xrightarrow{(46),(51),(64)}$$

$$\varsigma = \frac{-(\tau-\alpha)n^{-(1-\alpha)}A + \sqrt{(\tau-\alpha)^2 n^{-2(1-\alpha)} A^2 + 4(i+dz_i)(1-\tau)A^2\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]}}{2(i+dz_i)} \Rightarrow$$

$$\varsigma=\frac{-(\tau-\alpha)n^{-(1-\alpha)}+A\sqrt{(\tau-\alpha)^2n^{-2(1-\alpha)}+4(i+dz_i)(1-\tau)\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]}}{2(i+dz_i)}$$

(۶۵)

با توجه به رابطه‌ی (۹) که بیانگر تغییرات ثروت می‌باشد با تقسیم کردن طرفین آن رابطه به تغییرات زمان رابطه‌ی (۶۶) بـه دسـت می‌آید.

$$\xrightarrow{(9)}\frac{dw}{dt}=\left[(1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha}+(1-n)(i+dz_i)w_t-c_t\right]+(1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\frac{dz}{dt} \qquad (۶۶)$$

همان‌طور که قبلاً نیز بیان شده بود توزیع تغییرات تصادفی تابع تولید که مربوط به تغییرات تصادفی در تکنولوژی یا دانـش مربـوط به تولید می‌باشد. نرمال با میانگین صفر و واریانس (dt) در نظر گرفته شده بود که باز با تقسیم طرفین بر تغییرات زمـان (dt)، تـابع دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک خواهد بود که در رابطه‌ی (۶۷) نشان داده شده است.

$$dz\approx N(0,dt)\Rightarrow \Upsilon=\frac{dz}{dt}\approx N(0,1) \qquad (۶۷)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۶۷) در رابطه‌ی (۶۶) که مربوط به تغییرات ثروت نسبت به زمان مـی‌باشـد روابـط (۶۸) و (۶۹) را خـواهیم داشت. همچنین با جای‌گذاری رابطه‌ی (۴۱) در رابطه‌ی (۶۸) رابطه‌ی (۷۰) را خواهیم داشت که تغییرات بهینه ثروت را نشان می‌دهد.

$$\xrightarrow{(66),(67)}\frac{dw}{dt}=\left[(1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha}+(1-n)(i+dz_i)w_t-c_t\right]+(1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\ \Upsilon \qquad (۶۸)$$

$$\xrightarrow{(68)}\dot{w}=\left[(1-\tau)An^{\alpha}w_t^{\alpha}+(1-n)(i+dz_i)w_t-c_t\right]+(1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}w_t^{\alpha}\ \Upsilon \qquad (۶۹)$$

$$\xrightarrow{(41)}w_t^*g^*=\left[(1-\tau)An^{\alpha}\left[w_t^*\right]^{\alpha}+(1-n)(i+dz_i)w^*{}_t-c^*{}_t\right]+(1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}\left[w_t^*\right]^{\alpha}\ \Upsilon \qquad (۷۰)$$

با ساده سازی رابطه (۷۰) مصرف بهینه را خواهیم داشت.

$$w_t^*g^*=\left[(1-\tau)An^{\alpha}\left[w_t^*\right]^{\alpha}+(1-\tau)A\sigma_y n^{\alpha}\left[w_t^*\right]^{\alpha}\ \Upsilon\right]+(1-n)(i+dz_i)w_t^*-c^*{}_t$$

$$w_t^*g^*=\left[(1-\tau)An^{\alpha}\left[w_t^*\right]^{\alpha}\left(1+\sigma_y\Upsilon\right)\right]+(1-n)(i+dz_i)w_t^*-c^*{}_t$$

$$w_t^*g^*=\left[(1-\tau)An^{\alpha}\left[w_t^*\right]^{\alpha}\left(1+\sigma_y\Upsilon\right)\right]+(1-n)(i+dz_i)w_t^*-c^*{}_t$$

$$w_t^*g^*-\left[(1-\tau)An^{\alpha}\left[w_t^*\right]^{\alpha}\left(1+\sigma_y\Upsilon\right)\right]-(1-n)(i+dz_i)w_t^*=-c^*{}_t$$

$$c_t^*=\left[(1-\tau)An^{\alpha}\left[w_t^*\right]^{\alpha}\left(1+\sigma_y\Upsilon\right)\right]+(1-n)(i+dz_i)w_t^*-w_t^*g^*$$

$$c_t^*=\left[(1-\tau)An^{\alpha}\left[w_t^*\right]^{\alpha}\left(1+\sigma_y\Upsilon\right)\right]+\left[(1-n)(i+dz_i)-g^*\right]w_t^* \qquad (۷۱)$$

$$E_0\left[\frac{\partial f(k_t)}{\partial k}\right]=E_0(i+dz_i) \qquad (۷۲)$$

$$E_0\left(\frac{\partial f(k_t)}{\partial k}\right)=E_0\left(\alpha Ak_t^{\alpha-1}\left(dt+\sigma_y dz\right)\right)=E_0(i+dz_i)$$

$$\alpha Ak_t^{\alpha-1}(dt)=i$$

$$\alpha Ak_t^{\alpha-1}=i$$

$$\alpha A(nw)_t^{\alpha-1}=i$$

$$(nw)_t^{\alpha-1}=\frac{i}{\alpha A}\Rightarrow$$

با توجه به رابطه‌ی (۷۳) مقدار بهینه‌ی ثروت را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

$$w_t^* = \frac{1}{n}\left[\frac{i}{\alpha A}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad (۷۳)$$

که با جای‌گذاری رابطه‌ی (۵۲) در آن رابطه‌ی (۷۴) به دست می‌آید.

$$\xrightarrow{(73),(52)} \frac{1}{n}\left[\frac{i}{\alpha A}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = \varsigma^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow$$

$$n^{\alpha-1}\frac{\alpha A}{i} = \varsigma \qquad (۷۴)$$

حال با جای‌گذاری (۶۵) در رابطه‌ی (۷۴) و ساده سازی آن رابطه‌ی (۷۵) را خواهیم داشت.

$$\xrightarrow{(74),(65)} n^{\alpha-1}\frac{\alpha A}{i} = \frac{-(\tau-\alpha)n^{-(1-\alpha)} + A\sqrt{(\tau-\alpha)^2 n^{-2(1-\alpha)} + 4(i+dz_i)(1-\tau)\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]}}{2(i+dz_i)}$$

$$\frac{\alpha A}{i} = n^{1-\alpha}\frac{-(\tau-\alpha)n^{-(1-\alpha)}A + A\sqrt{(\tau-\alpha)^2 n^{-2(1-\alpha)}\tau^2 + 4(i+dz_i)(1-\tau)\sigma_y^2(\tau-\alpha)n^{2\alpha-1}\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]}}{2(i+dz_i)}$$

$$\frac{\alpha A}{i} = \frac{-(\tau-\alpha)A + A\sqrt{(\tau-\alpha)^2\tau^2 + 4(i+dz_i)(1-\tau)\sigma_y^2(\tau-\alpha)n\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]}}{2(i+dz_i)}$$

$$\frac{\alpha}{i} = \frac{-(\tau-\alpha) + \sqrt{(\tau-\alpha)^2\tau^2 + 4(i+dz_i)(1-\tau)\sigma_y^2(\tau-\alpha)n\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]}}{2(i+dz_i)}$$

$$\frac{2(i+dz_i)\alpha}{i} = -(\tau-\alpha) + \sqrt{(\tau-\alpha)^2\tau^2 + 4(i+dz_i)(1-\tau)\sigma_y^2(\tau-\alpha)n\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]}$$

$$\frac{2(i+dz_i)\alpha}{i} + (\tau-\alpha) = \sqrt{(\tau-\alpha)^2\tau^2 + 4(i+dz_i)(1-\tau)\sigma_y^2(\tau-\alpha)n\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]}$$

$$\left[\frac{2(i+dz_i)\alpha}{i} + (\tau-\alpha)\right]^2 = (\tau-\alpha)^2\tau^2 + 4(i+dz_i)(1-\tau)\sigma_y^2(\tau-\alpha)n\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right]$$

$$\left[\frac{2(i+dz_i)\alpha}{i} + (\tau-\alpha)\right]^2 = (\tau-\alpha)^2\tau^2 + 4(i+dz_i)(1-\tau)\sigma_y^2(\tau-\alpha)n\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right] \qquad (۷۵)$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی (۷۶) و جاگذاری آن در رابطه‌ی (۷۵) رابطه‌ی (۷۷) را خواهیم داشت.

$$(\tau-\alpha)(1-\tau) = \tau - \tau^2 - \alpha + \alpha\tau = -\tau^2 + (1+\alpha)\tau - \alpha \qquad (۷۶)$$

$$\left[\frac{2(i+dz_i)\alpha}{i} + (\tau-\alpha)\right]^2 = (\tau-\alpha)^2\tau^2 + 4(i+dz_i)\sigma_y^2 n\left[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)(1-\alpha)(1+\gamma)\right](-\tau^2+(1+\alpha)\tau-\alpha) \qquad (۷۷)$$

رابطه (۷۷) یک معادله درجه چهار بر اساس نرخ مالیات بر آلودگی (τ) می‌باشد. با حل این معادله با روش‌های عددی مقدار τ^* که بیانگرمقدار بهینه نرخ مالیات بر آلودگی در مسیر بهینه می‌باشد، بدست خواهد آمد.