Financial Research Journal

Print ISSN: 1024-8153

Online ISSN: 2423-5377

Applying the Relative Robust Approach for Selection of Optimal Portfolio in the Tehran Stock Exchange by Second-order Conic Programming

Reza Raei

Prof., Department of Finance, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: raei@ut.ac.ir

Ali Namaki*

*Corresponding Author, Assistant Prof., Department of Finance, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: alinamaki@ut.ac.ir

Moemen Ahmadi

MSc., Department of Finance, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: moemen.ahmadi@ut.ac.ir

Abstract

Objective: The purpose of this study was to apply the relative robust approach that minimizes the maximum regret to deal with the present uncertainty in the input data of the Markowitz mean-variance portfolio optimization model by reconstructing that model as a second-order conic program. Regret is defined as the difference between the obtained solution and the optimal solution under a specified input data set. This approach uses scenarios to consider the present uncertainty in the input data. Moreover, the robust portfolio optimization model introduced by Bertsimas and Sim, which considers uncertainty as an interval, was used to be compared with the relative robust approach and the Markowitz model.

Methods: In this research, the return of 50 more active stocks of the Tehran Stock Exchange (TSE) was used to obtain the optimal portfolio using the minimax regret method based on the Markowitz Model. Then, using the out-of-sample Sharpe criterion, the results of the minimax regret method were compared with the classic methods.

Results: Based on the research findings, the relative robust approach in the out-of-sample test on most corresponding points of the efficient frontier showed better performance in comparison with the Markowitz model. Also, the Bertsimas and sim approach delivered better performance than the Markowitz model in the out-of-sample test. The results did not prove any significant difference for out-of-sample outputs between the relative robust and Bertsimas and sim approaches.

Conclusion: According to the obtained results, the relative robust approach can surpass the mean-variance approach for investors with almost all levels of risk-return preferences. The approach presented in this research can provide investors with a new risk criterion that can be considered in choosing the optimal portfolio. Furthermore, the results confirmed that investors act indifferently in choosing between the relative robust solution and the solution of Bertsimas and Sim's approach. This method can be applied as a portfolio optimization approach and also different markets can be considered under this technique to have a better understanding of its capability.

Keywords: Portfolio optimization, Relative robust approach, Minimax regret.

Citation: Raei, Reza; Namaki, Ali & Ahmadi, Momen (2022). Applying the Relative Robust Approach for Selection of Optimal Portfolio in the Tehran Stock Exchange by Second-order Conic Programming. *Financial Research Journal*, 24(2), 184 - 213. https://doi.org/10.22059/FRJ.2021.316147.1007118 (*in Persian*)

Financial Research Journal, 2022, Vol. 24, No.2, pp. 184- 213
Published by University of Tehran, Faculty of Management
https://doi.org/10.22059/FRJ.2021.316147.1007118
Article Type: Research Paper

Received: May 10, 2021
Received in revised form: May 22, 2021
Accepted: October 07, 2021
Published online: August 30, 2022

شاپا چـاپـی: ۸۱۵۳-۱۰۲۴
شاپا الکترونیکی: ۵۳۷۷-۲۴۲۳

تحقیقات مالی

پیاده‌سازی رویکرد استوار نسبی برای انتخاب پرتفوی بهینه در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم

رضا راعی

استاد، گروه مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: raei@ut.ac.ir

علی نمکی*

* نویسنده مسئول، استادیار، گروه مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: alinamaki@ut.ac.ir

مؤمن احمدی

کارشناس ارشد، گروه مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: moemen.ahmadi@ut.ac.ir

چکیده

هدف: هدف این پژوهش، به‌کار بردن رویکرد استوار نسبی برای حداقل‌کردن حداکثر پشیمانی است. برای مواجهه با عدم قطعیت موجود در داده‌های ورودی، مدل بهینه‌سازی پرتفوی مارکویتز با استفاده از بازآفرینی مدل مارکویتز، به‌صورت مدل مخروطی مرتبه دوم در نظر گرفته شده است. پشیمانی را می‌توان اختلاف بین جواب به‌دست‌آمده از جواب بهینه، تحت یک دسته داده ورودیِ مشخص تعریف کرد. این رویکرد با استفاده از سناریوها، عدم قطعیت موجود در داده‌های ورودی مدل را در نظر می‌گیرد. همچنین، برای مقایسه رویکرد استوار نسبی و مدل مارکویتز، از مدل بهینه‌سازی استوار پرتفوی برتسیماس و سیم استفاده شده است که عدم قطعیت را به‌صورت فاصله در نظر می‌گیرد.

روش: با استفاده از بازدهی‌های سهام موجود در شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار تهران، از ابتدای سال ۱۳۹۵ تا انتهای سال ۱۳۹۷، وزن‌های سهام موجود در پرتفوی‌های بهینه هر سه مدل برآورد شد و با استفاده از داده‌های سال ۱۳۹۸، روی آنها آزمون برون‌نمونه‌ای انجام گرفت.

یافته‌ها: بر اساس یافته‌های پژوهش، رویکرد استوار نسبی مدل مارکویتز، در آزمون خارج از نمونه روی بیشتر نقاط متناظر مرز کارا در قیاس با مدل مارکویتز عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. همچنین رویکرد استوار برتسیماس و سیم بر اساس وزن‌های بهترین شارپ درون‌نمونه‌ای، عملکرد بهتری از مدل مارکویتز داشته است. نتایج آزمون‌های آماری، تفاوتی در عملکرد خارج از نمونه‌ای بین دو رویکرد استوار نسبی و برتسیماس و سیم نشان نداده است.

نتیجه‌گیری: نتایج حاضر نشان می‌دهد که رویکرد استوار نسبی در مقایسه با رویکرد میانگین واریانس، کمابیش می‌تواند برای بیشتر اشخاص با ترجیحات ریسک و بازده متفاوت، عملکرد بهتری داشته باشد. همچنین، رویکرد ارائه‌شده می‌تواند معیار ریسک جدیدی برای استفاده‌کنندگان ارائه دهد و در انتخاب پرتفوی بهینه مورد توجه قرار گیرد. به‌علاوه، افراد در انتخاب بین دو رویکرد استوار نسبی و استوار مطلق بی‌تفاوت‌اند.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی پرتفوی، رویکرد استوار نسبی، حداقل حداکثر پشیمانی.

استناد: راعی، رضا؛ نمکی، علی و احمدی، مؤمن (۱۴۰۱). پیاده‌سازی رویکرد استوار نسبی برای انتخاب پرتفوی بهینه در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم. *تحقیقات مالی*، ۲۴(۲)، ۱۸۴– ۲۱۳.

تحقیقات مالی، ۱۴۰۱، دوره ۲۴، شماره ۲، صص. ۱۸۴– ۲۱۳
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
نوع مقاله: علمی پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۲۰
تاریخ ویرایش: ۱۴۰۰/۰۳/۰۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۱۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۶/۰۸
doi: https://doi.org/10.22059/FRJ.2021.316147.1007118

مقدمه

مسئلهٔ انتخاب پرتفوی از دارایی‌ها را می‌توان یکی از دغدغه‌های بسیار مهم سرمایه‌گذاران دانست. هدف تخصیص دارایی‌ها در یک پرتفوی، متوازن‌کردن ریسک پرتفوی و متنوع‌سازی آن است که نتیجهٔ آن کاهش ریسک خواهد بود (راعی و هاشمی، ۱۳۹۵). سرمایه‌گذاران اهداف متفاوتی را ممکن است دنبال کنند بنابراین به پرتفوی‌های متفاوتی نیز خواهند رسید. مارکویتز (۱۹۵۲) اولین شخصی بود که با ارائه ایده خود به مفهوم ریسک و تنوع‌بخشی به روشی کمّی پرداخت و چارچوبی را برای انتخاب بین دارایی‌های ریسکی ارائه کرد. نکته اصلی اثر وی این بود که مفهوم تنوع‌بخشی را در فرایند انتخاب یک پرتفوی از دارایی‌های ریسکی وارد کرد. چارچوب ارائه شده توسط وی یک مدل بهینه‌سازی چند هدفه بود که سعی داشت بازدهی را حداکثر و ریسک را حداقل کند. به بیان دیگر روشی که وی برای انتخاب بین دارایی‌های ریسکی ارائه کرد روشی بود که سعی می‌کرد به هر دارایی وزنی را تخصیص دهد که بازده مورد انتظار پرتفوی را به ازای یک سطح مشخصی از ریسک پرتفوی حداکثر کند یا ریسک پرتفوی را به ازای سطح مشخصی از بازده مورد انتظار پرتفوی حداقل کند.

رویکرد میانگین واریانس مارکویتز، به‌عنوان رویکردی کلاسیک در بهینه‌سازی، مشکل مهم دیگری هم داشت. فرض ساده رویکرد نام برده این بود که داده‌های ورودی (بردار بازده و ماتریس واریانس ـ کوواریانس) قطعی و مشخص هستند، در حالی که همان طور که خواهیم دید، مارکویتز از داده‌های تاریخی برای انتخاب پرتفوی بهینه استفاده کرد که داده‌های آینده به احتمال بسیار زیادی متفاوت از این داده‌های گذشته خواهند بود. به همین جهت ممکن است که جواب مسئله مارکویتز با تغییر داده‌های آتی از داده‌های تاریخی غیر بهینه یا در مواردی حتی غیرممکن باشد. برای رفع مشکل عدم قطعیت داده‌های ورودی مدل بهینه‌سازی در مسائل بهینه‌سازی کلاسیک، از رویکردهایی همانند تحلیل سناریو و بهینه‌سازی تصادفی نیز می‌توان استفاده کرد. البته رویکرد تحلیل سناریو و رویکرد بهینه‌سازی تصادفی نیز به دلایل بااهمیتی نمی‌توانند جواب قانع کننده‌ای برای این مشکل باشند. برای نمونه، در تحلیل سناریو جواب بهینه نهایی در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار نمی‌گیرد و در بهینه‌سازی تصادفی نیز فرض می‌شود که توزیع داده‌های ورودی مشخص است در حالی که ممکن است توزیع داده‌های آینده متفاوت از داده‌های گذشته باشد. اما رویکرد استوار در مورد داده‌های ورودی مدل و توزیع احتمال آنها هیچ فرضی در نظر نمی‌گیرد و همچنین جواب بهینه نهایی یکتایی را ارائه می‌کند که به ازای تمام تحقق‌های ممکن پارامترهای دارای عدم قطعیت مسئله نزدیک به بهینه باقی بماند (کرنوجلس و توتونچو[1]، ۲۰۱۸). رویکرد استوار نخست، در سال ۱۹۷۳ توسط سویستر[2] ارائه شد (سویستر، ۱۹۷۳). در بهینه‌سازی استوار متغیرهای تصادفی، به‌عنوان پارامترهای نامشخص متعلق به یک مجموعه محدب عدم قطعیت[3] مدل‌سازی می‌شوند و تصمیم‌گیرنده را در برابر بدترین مورد درون این مجموعه محافظت می‌کنند (برتسیماس و تیل[4]، ۲۰۰۶). رویکرد سویستر،

1. Cornuejols & Tütüncü
2. Soyster
3. Convex uncertainty set
4. Bertsimas & Thiele

هر پارامتر دارای عدم قطعیت موجود در مدل بهینه‌سازی را برابر با بدترین مقدار ممکن برای آن، در یک مجموعه قرار می‌دهد. رویکرد سویستر متمایل به انتخاب بدترین مورد ممکن است و به همین دلیل، به‌شدت محافظه‌کارانه تلقی می‌شود. از آنجا که ممکن است تصمیم‌گیرنده‌ای که با عدم قطعیت روبه‌رو است، همواره به‌دنبال جوابی محافظه‌کارانه نباشد، رویکردهای دیگری برای کاستن از شدت محافظه‌کاری رویکرد سویستر ارائه شدند. یکی از این رویکردها رویکرد برتسیماس و سیم است. برتسیماس و سیم عدم قطعیت موجود در داده‌ها را به شکل یک فاصله که انتظار می‌رود داده‌های ورودی مدل در آن فاصله قرار بگیرند وارد فرایند تصمیم‌گیری کردند. آنها همچنین با معرفی متغیری به نام Γ (گاما) توانستند رویکردی بر اساس عدم قطعیت فاصله‌ای ارائه دهند. این رویکرد توانست محافظه‌کاری مدل، یعنی شدت نوسان داده‌ها از مقدار مرکزی فاصله عدم قطعیت مدنظر را توسط آن کنترل کنند و به جواب‌هایی استوار دست یابند (برتسیماس و سیم، ۲۰۰۴). رویکرد برتسیماس و سیم، دارای ابزاری برای کنترل سطح محافظه‌کاری بود؛ ولی این رویکرد نیز همچنان همانند رویکرد سویستر، تنها به بدترین تحقق ممکن داده‌ها با توجه به سطح Γ داده شده توجه داشت. رویکرد دیگری که در این پژوهش به آن پرداخته شده است، رویکرد استوار نسبی است که توسط کوولیس و یو[1] معرفی شد و برخلاف رویکرد سویستر و رویکرد برتسیماس و سیم که فقط به بدترین تحقق ممکن داده‌های درون مجموعه‌های عدم قطعیت توجه می‌کردند، تمامی داده‌های درون مجموعه‌های عدم قطعیت را در نظر می‌گیرد و آنها را وارد فرایند تصمیم‌گیری خود می‌کند و جوابی کمتر محافظه‌کارانه از رویکردهای مذکور ارائه می‌دهد (کوولیس و یو، ۱۹۹۷). یک تصمیم‌گیرنده نه تنها نگران چگونگی عملکرد یک تصمیم با تحقق سناریوهای مختلف است، بلکه نگران این نیز است که چگونه می‌تواند عملکرد واقعی تصمیم گرفته شده را با عملکرد بهینه‌ای مقایسه کند که اگر اطلاعات کامل دربارهٔ تحقق سناریو قبل از تصمیم‌گیری در دسترس بود، به‌دست می‌آمد. هیچ کدام از رویکردهای بهینه‌سازی قطعی و تصادفی توانایی برطرف کردن چنین نگرانی‌هایی را ندارند، در حالی که همان طور که خواهیم دید، رویکردی که کوولیس و یو ارائه کردند بر اساس فرض برآورده شدن چنین نگرانی‌هایی ایجاد شده است (کوولیس و یو، ۱۹۹۷). رویکرد کوولیس و یو بر اساس معیار حداقل‌سازی مقدار حداکثر پشیمانی[2] روی تعداد معینی سناریو داده‌های ورودی است. پشیمانی را به صور مختلفی که در ساده‌ترین بیان می‌توان آن را انحراف جواب به‌دست آمده از معیار[3] مدنظر تصمیم‌گیرنده که به‌دنبال رسیدن به آن است، در نظر گرفت.

با توجه به این مقدمه، در ادامه به مرور پیشینه پژوهش پرداخته شده و سپس روش‌شناسی آن معرفی می‌شود. سپس به پیاده‌سازی مدل‌های نام برده پرداخته شده و نتایج این مدل‌ها بررسی می‌شود. در ادامه، روی نتایج به‌دست آمده از مدل‌ها، آزمون برون‌نمونه‌ای انجام شده و عملکرد رویکردها مقایسه می‌شود. در پایان نیز نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی بر اساس یافته‌ها ارائه خواهد شد.

1. Kouvelis & Yu
2. Regret
3. Benchmark

پیشینه پژوهش

ادبیات بهینه‌سازی استوار بر این اساس ایجاد شد که تخمین‌های نقطه‌ای برای استفاده به‌عنوان برآوردهای آتی از دقت کافی برخوردار نیستند و در طی بحث بر سر این موضوع که عدم قطعیت را به چه شکلی باید وارد فرایند تصمیم‌گیری نمود توسعه یافت. توتونچو و کوئنیگ (۲۰۰۴)، ریسک و بازده را با استفاده از مجموعه‌های عدم قطعیت پیوسته در یک مدل تخصیص استوار دارایی استفاده کردند. مولوی، واندربای و زنیوس[1] (۲۰۰۸)، اولین کسانی بودند که روی مدل‌های بهینه‌سازی استوار با داده‌های ورودی که به‌صورت مجموعه سناریو هستند کار کردند. اکسیدوناس، هاساپیس، سولیس و سامیتاس[2] (۲۰۱۷)، به این هدف پرداختند که یک مدل استوار بهینه‌سازی ارائه دهند که واریانس پرتفوی را برای مجموعه محدودی از سناریوهای ماتریس کوواریانس حداقل می‌کند. آنها برای رسیدن به این هدف یک برنامه غیرخطی عدد صحیح ـ مختلط با محدودیت‌های درجه دوم ارائه کردند. درستی این رویکرد به‌صورت برون‌نمونه‌ای روی داده‌هایی از Eurostoxx50، S&P100، S&P500 و صندوق‌های قابل معامله بررسی شد که نتایج حاکی از عملکرد برون‌نمونه‌ای بهتر رویکرد آنها در اکثر مواقع نسبت به جواب بدترین سناریو بود.

کاچادور، دیاس و گادینو[3] (۲۰۲۱) پشیمانی را به‌صورت زیان مطلوبیت تعریف کردند و این رویکرد را با رویکرد استوار مطلق مقایسه کردند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که رویکرد استوار نسبی در خارج از نمونه عملکرد بهتری از رویکرد استوار مطلق داشته است. سیموس، مک‌دونالد، ویلیامز، فن و هاوسر[4] (۲۰۱۸)، تابع هدف حداقل‌سازی ریسک را با استفاده از رویکرد استوار نسبی پیاده کردند و این رویکرد را با اضافه کردن محدودیت‌های جدید اجرا کردند تا استفاده‌کنندگان بتوانند چارچوب مدل خود را با به کار بستن مدل این پژوهش حفظ کنند. آنها پشیمانی را به‌صورت حداکثر تفاوت بین نوسان[5] و یک مقدار معیار تعریف کردند. آنها این مدل را در مقایسه با مدل‌های دیگر در چندین بازار آزمون کردند. اکسیدوناس، ماوروتاس، هاساپیس و زوپونیدیس[6] (۲۰۱۷)، یک مدل خطی را برای بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از متوسط قدر مطلق انحرافات به‌عنوان معیاری از ریسک بر اساس رویکرد بهینه‌سازی استوار نسبی ارائه داده‌اند. در این پژوهش از روش مجموع وزن‌دار[7] برای انتخاب بین دو تابع هدف یعنی حداقل‌سازی ریسک پرتفوی و حداکثرسازی بازده مورد انتظار پرتفوی و تشکیل مرز کارا استفاده شد و همچنین توابع هدف مدل را استانداردسازی کردند. آنها مدل خود را با استفاده از داده‌های Eurostoxx50 اجرا کردند. لی و وانگ[8] (۲۰۲۰) در پژوهش خود یک مدل دو هدفه برای حداکثرسازی بازده مورد انتظار و حداقل‌سازی متوسط قدر مطلق انحرافات را تحت رویکرد استوار نسبی با استفاده از مجموعه‌های عدم قطعیت بیضوی ارائه دادند و این مدل را با استفاده از داده‌های واقعی مورد بررسی

---

1. Mulvey, Vanderbei & Zenios
2. Xidonas, Hassapis, Soulis & Samitas
3. Cacador, Dias & Godinho
4. Simões, McDonald, Williams, Fenn & Hauser
5. Volatility
6. Xidonas, Mavrotas, Hassapis & Zopounidis
7. Weighted Sum
8. Li & Wang

قرار دادند. نتایج خارج از نمونه‌ای مدل ارائه شده حاکی از عملکرد خارج از نمونه‌ای بهتر از رویکرد استوار سنتی روی داده‌های کوتاه مدت و میان مدت و عملکرد مشابه روی داده‌های بلندمدت بود. کاچادور، گادینو و دیاس[1] (۲۰۲۰)، رویکرد استوار نسبی را با استفاده از تعریف پشیمانی به‌صورت زیان مطلوبیت به کار بردند. نتایج این پژوهش حاکی از آن است که رویکرد ارائه شده برای سرمایه‌گذاران ریسک پذیر دارای ارزش بیشتری است. آنها همچنین رویکرد خود را با رویکرد اکسیدوناس و همکاران (۲۰۱۷) مقایسه کردند که حاکی از عملکرد بهتر رویکرد این پژوهش بود. هاوسر، کریشنامورتی و توتونچو[2] (۲۰۱۳)، حالت‌های مختلف مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز تحت رویکرد استوار نسبی را مورد بررسی قرار دادند و رویکرد حل برای انواع حالات ایجاد شده را مورد بحث قرار دادند. رویکرد اثر آنها بر اساس رویکرد انحراف مطلق استوار است که پشیمانی را به‌صورت مطلق در نظر می‌گیرد.

در زمینه پژوهش‌های داخلی انجام شده نیز باقری نقنه، داوودی و میرصالحی بروجنی (۱۳۹۹) در یک پژوهش ماتریس واریانس کوواریانس را دارای عدم قطعیت فرض کرده و پشیمانی را به‌صورت تفاوت بین واریانس به‌دست آمده و بهترین واریانس ممکن در نظر می‌گیرند. آنها این مدل را با استفاده از داده‌های بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی قرار داده‌اند. محمدی و محمدی[3] (۲۰۱۸) در پژوهش خود رویکرد ارائه شده توسط اکسیدوناس و همکاران (۲۰۱۷) را با استفاده از داده‌های بورس ایران مورد بررسی قرار دادند و به نتایج مشابهی دست یافتند.

در پژوهش حاضر سعی شده است که با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار نسبی که پشیمانی را به‌صورت نسبی و نه مطلق مورد استفاده قرار می‌دهد، مدل مارکویتز بازآفرینی شود؛ به‌گونه‌ای که برای داده‌های ورودی، به‌جای داده‌های قطعی، از تعداد محدودی سناریو بردار بازده مورد انتظار و ماتریس واریانس کوواریانس استفاده شود که از داده‌های تاریخی ایجاد می‌شوند و قابلیت مقایسه بالایی با مدل اصلی ارائه شده توسط مارکویتز داشته باشد. بدین جهت مدل مارکویتز با تابع هدف ارجحیت[4] که بازده مورد انتظار را حداکثر و ریسک پرتفوی را به ازای سطحی از معیار ریسک‌گریزی حداقل می‌کند، به‌صورت دقیق تحت رویکرد استوار با استفاده از پشیمانی نسبی بازنویسی شده و راه‌کار حل مدل نیز با استفاده از برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین این رویکرد با رویکرد مارکویتز و رویکرد استوار مطلق برتسیماس و سیم به‌صورت برون‌نمونه‌ای مقایسه می‌شود.

روش‌شناسی پژوهش

بهینه‌سازی

اصلی‌ترین ابزارهای تصمیم‌گیری در مالی شامل تکنیک‌های پیش‌بینی و بهینه‌سازی هستند. تکنیک‌های پیش‌بینی بیشتر مربوط به آمار می‌شوند (راعی، ۱۳۸۵). کرنوجلس و توتونچو بهینه‌سازی را فرایند یافتن بهترین راه انجام

1. Caçador, Godinho & Dias
2. Hauser, Krishnamurthy & Tütüncü
3. Mohammadi & Mohammadi
4. Preference

تصمیم‌گیری‌ها که یک مجموعه از محدودیت‌ها را ارضا می‌کند تعریف می‌کنند. یک مدل بهینه‌سازی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد (کرنوجلس و توتونچو، ۲۰۱۸):

رابطه ۱)

$$\min_{x} f(x)$$
$$s.t.\ \ x\epsilon X$$

جواب در دسترس[1] جوابی است که در مجموعه محدودیت‌ها صدق کند. جواب بهینه[2] نیز جوابی از بین مجموعه جواب‌های در دسترس است که بهترین مقدار ممکن را برای تابع هدف ارائه می‌دهد. این جواب برای یک مسئله حداکثرسازی جواب x^o است به شرطی که:

رابطه ۲)

$$f(x^o) \geq f(x)\ \ \forall\ \ x \in X$$

برای یافتن جواب مسائل بهینه‌سازی تابع هدف تا جایی به سمت بهترین مقدار حداکثر یا حداقل میل داده می‌شود که محدودیت‌های مدل نقض نشوند (کرنوجلس و توتونچو، ۲۰۱۸).

مدل بهینه‌سازی پرتفوی میانگین واریانس مارکویتز

سرمایه‌گذاران معمولاً به‌صورت ذهنی در مسئله انتخاب پرتفوی اهداف متعارضی همچون حداکثر کردن بازده و حداقل کردن ریسک و سایر اهداف را دنبال می‌کنند. در بهینه‌سازی برای حل این‌گونه مسائل از روش‌های بهینه‌سازی چند هدفه همچون روش آرمانی یا وزن‌دهی استفاده می‌شود (اسلامی بیدگلی و سارنج، ۱۳۸۷). مدل مارکویتز نیز بر اساس مفروضاتی شکل گرفته است که آنها را می‌توان به این صورت خلاصه کرد که سرمایه‌گذاران در فرایند سرمایه‌گذاری به جز بازده به ریسک هم توجه می‌کنند و بازده را عنصری مطلوب و ریسک را عنصری نامطلوب می‌دانند و بین بازده و ریسک همواره یک بده ـ بستان در جریان است که ترکیب دارایی‌های ریسکی درون پرتفوی را مشخص می‌کند. بنابراین برای هر سرمایه‌گذار با توجه به سطح ریسک‌گریزی وی یک پرتفوی بهینه وجود دارد. مارکویتز واریانس یک سهم را به‌عنوان معیار ریسک آن سهم معرفی کرد. مدل مارکویتز را می‌توان به سه شکل بیان کرد که البته می‌توان نشان داد که هر سه شکل به ازای مقادیر دقیقی از ورودی‌های مسئله جواب‌های مشابه را در اختیار تصمیم‌گیرندگان قرار می‌دهند. در این پژوهش از آنجایی که فرض می‌شود عدم قطعیت داده‌های ورودی هم در بردار بازده مورد انتظار دارایی‌ها و هم در ماتریس واریانس ـ کوواریانس وجود دارد از شکل زیر استفاده می‌شود (هاوسر و همکاران، ۲۰۱۳):

رابطه ۳)

$$\max_{x\in R^n}\ \ \mu^T x - \lambda x^T Q x$$
$$s.t.\ \ \sum_i x_i = 1$$
$$x, \lambda \geq 0$$

مدل بالا یک مدل درجه دوم است. در مدل فوق Q برابر با ماتریس واریانس ـ کوواریانس؛ μ بردار بازده مورد

1. Feasible Solution
2. Optimal Solution

انتظار دارایی‌های موجود در پرتفوی؛ بردار x برداری شامل وزن تمام دارایی‌ها در پرتفوی؛ λ ضریب ریسک‌گریزی و T ترانهاده ماتریس یا بردار مدنظر است.

رویکرد استوار برتسیماس و سیم

رویکرد برتسیماس و سیم در گروه رویکردهای بهینه‌سازی استوار مطلق همچون روش سویستر، روش بن تال و نیمروفسکی[1]، روش مولوی و سایرین قرار می‌گیرد. این رویکرد نسبت به سایر رویکردها از ویژگی‌های جذاب‌تری برخوردار است. یکی از این ویژگی‌ها قابلیت تبدیل مدل تحت بررسی به یک مدل خطی است. این ویژگی، توانایی حل مسئله را در مدت زمانی قابل قبول بسیار افزایش می‌دهد. همچنین ویژگی دیگری که این رویکرد دارد و به نحوی خود علت ویژگی اول است، تعریف مجموعه‌های عدم قطعیت به‌صورت یک بازه فاصله‌ای است که کار با مسئله را بسیار آسان‌تر از سایر تعاریف مجموعه‌های عدم قطعیت می‌کند (برتسیماس و سیم، ۲۰۰۴).

در رویکرد برتسیماس و سیم پارامترهای دارای عدم قطعیت مدل به‌صورت یک فاصله که حول مقدار اسمی متقارن هستند مدل‌سازی می‌شوند. برتسیماس و سیم سطح محافظه‌کاری را توسط یک مقدار کلی Γ که سطح نوسان تمام پارامترها از مقدار اسمی را نشان می‌دهد کنترل می‌کنند. در ابتدا برای تشریح رویکرد برتسیماس و سیم تعریف فاصله مورد انتظار برای بازده دارایی‌ها ضروری است. یک ماتریس R را در نظر بگیرید که شامل پارامترهای محدودیت‌های مدل، یعنی بازده‌ها است که دارای عدم قطعیت هستند. پارامترهای نامشخص مدل یعنی r_i ها به‌صورت یک فاصله متقارن مدل سازی می‌شوند (برتسیماس و سیم، ۲۰۰۴):

رابطه ۴)
$$r_i \in [\bar{r}_i - \sigma_i, \bar{r}_i + \sigma_i]$$

که σ_i در آن انحراف معیار سهم iام است. بنابراین بازه‌ای که بازده مورد انتظار هر سهم در آن نوسان می‌کند برابر با یک انحراف معیار فرض شده است. در ادامه داریم:

رابطه ۵)
$$z_i = \frac{r_i - \bar{r}_i}{\sigma_i}$$

بدیهی است مقدار z_i همواره در فاصله $[-۱,۱]$ قرار خواهد گرفت. بنابراین مقدار $\sum_{j=1}^{n} z_{ij}$ برای محدودیت iام که دارای n متغیر ورودی است نیز همواره بین $[-n, n]$ خواهد بود. برتسیماس و سیم با معرفی مقدار بودجه عدم قطعیت محدودیت iام سعی می‌کنند تا سطح محافظه‌کاری مدل را کنترل کنند:

رابطه ۶)
$$\sum_{j=1}^{n} |z_{ij}| \le \Gamma_i, \qquad \forall i$$

مقدار بودجه عدم قطعیت برای همه محدودیت‌ها در فاصله $[۰, n]$ خواهد بود. مدل بالا به این شرح است که ضریب Γ مقدار نوسان بازده هر سهم از مقدار مرکزی آن را طی فرایند تعیین پرتفوی بهینه را تعیین می‌کند. هرچه این

1. Ben-Tal & Nemirovski

مقدار بیشتر باشد، متغیرهای بیشتری می‌توانند از مقدار مرکزی خود نوسان کنند و بدترین مقدار را به خود بگیرند؛ بنابراین مسئله جوابی را به‌دست خواهد داد که شدت محافظه‌کاری بیشتری دارد. در صورتی که با استفاده از رویکرد بالا یک مسئله حداکثرسازی بازده مورد انتظار پرتفوی را ایجاد کنیم، به مسئله زیر خواهیم رسید (برتسیماس و سیم، ۲۰۰۴):

رابطه ۷

$$\begin{aligned} &\max_x \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{r}_i - \Gamma p - \sum_{i=1}^{n} q_i \\ &\quad p + q_i \geq x_i \sigma_i \\ &\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ &\quad p, q_i, x_i \geq 0 \end{aligned}$$

مدل بالا یک مدل خطی است که بازده مورد انتظار پرتفوی را حداکثر می‌کند.

همچنین برتسیماس و سیم برای اینکه به احتمال $e_i -$ ۱ محدودیتی به شکل $a_i' x \geq b_i$ که a_{ij}های آن از فرم $[\bar{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ تبعیت می‌کنند، نقص نشود، مقدار Γ را به‌صورت زیر تعیین کردند:

رابطه ۸

$$\Gamma_i = 1 + N^{-1}(1 - e_i)\sqrt{n}$$

که در آن، N تابع توزیع تجمعی نرمال است.

رویکرد استوار نسبی

رویکرد استوار نسبی تصمیماتی را تولید می‌کند که تحت تمام سناریو داده‌های ورودی به مدل دارای یک مقدار هدف قابل قبول باشد. معیاری که برای تولید جواب استوار استفاده می‌شود معیار حداقل حداکثر[1] است. طبق این معیار جواب استوار جوابی است که به ازای آن، کمترین (بالاترین) میزان سود (هزینه) به ازای تمامی سناریوهای آتی ممکن داده‌های ورودی تا حد ممکن بالا (پایین) باشد (کوولیس و یو، ۱۹۹۷). جواب‌های این معیار جواب‌های محافظه‌کارانه‌ای خواهند بود چون پیش‌فرض معیار حداقل حداکثر بر اساس وقوع بدترین تحقق داده‌ها است. بنابراین از حداقل حداکثر پشیمانی استفاده می‌شود؛ چرا که استفاده از پشیمانی از محافظه‌کاری مدل خواهد کاست؛ زیرا معیار انتخاب تصمیم بهینه همانند رویکرد استوار سویستر و رویکرد برتسیماس و سیم بدترین تحقق پارامترهای مدل نیست، بلکه تصمیمات با توجه به مقدار بهینه تابع هدف مربوط به هر سناریو انتخاب خواهند شد. پشیمانی را می‌توان بدین صورت تعریف کرد: «نسبت سود از یک تصمیم خاص به سود تصمیم بهینه، برای یک سناریو داده‌های ورودی مشخص».

برای استفاده از رویکرد حاضر از تعداد معینی سناریو داده‌های ورودی برای در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌های ورودی استفاده می‌شود. هر سناریو یک تحقق ممکن با احتمال مثبت ولی مقدار احتمال نامشخص برای داده‌های ورودی مسئله است. در ادامه به معرفی رویکرد استوار نسبی بر اساس اثر کوولیس و یو پرداخته می‌شود.

مسئله بهینه‌سازی قطعی زیر را در نظر بگیرید (کوولیس و یو، ۱۹۹۷):

1. Minimax

رابطه ۹)
$$z^s = f(X_s^*, D^s) = \min_{X \in F_s} f(X, D^s)$$

که در آن، S مجموعه تمامی سناریوهای تحقق‌پذیر ممکن پارامترهای مدل در افق زمانی آینده؛ X متغیرهای تصمیم؛ D مجموعه داده‌های ورودی؛ D^s داده‌های ورودی مربوط به سناریو s و F_s تمام تصمیم‌های قابل دسترس در صورت تحقق سناریو s است. مسئله بالا، مسئله‌ای قطعی را نشان می‌دهد که برای داده‌های ورودی، از یک نمونه داده‌های ورودی استفاده شده که به سناریو s مربوط است. X_s^* نیز تصمیم (جواب) بهینه یک مسئله بهینه‌سازی قطعی است.

تصمیم استوار نسبی X_R تصمیمی تعریف می‌شود که بهترین بدترین مورد[1] نسبت انحراف از بهینگی را در میان تمام تصمیمات قابل دسترس روی تمام سناریوهای داده های ورودی قابل تحقق نمایش می‌دهد (کوولیس و یو، ۱۹۹۷):

رابطه ۱۰)
$$Z_R = \max_{s \in S} \frac{f(X_R, D^s) - f(X_s^*, D^s)}{f(X_s^*, D^s)} = \min_{X \in \cap_{s \in S} F_s} \max_{s \in S} \frac{f(X, D^s) - f(X_s^*, D^s)}{f(X_s^*, D^s)}$$

جمله $X \in \cap_{s \in S} F_s$ عبارت است از اشتراک مجموعه محدودیت روی تمام سناریوهای قابل دسترس.

فرایند یافتن جواب بهینه بدین صورت است که نسبت انحراف عملکرد یک تصمیم مشخص در یک سناریو از عملکرد تصمیم بهینه در آن سناریو ثبت می‌شود و برای این تصمیم مشخص این عمل برای همه سناریوها تکرار می‌شود. سپس معیار استواری برای این تصمیم مشخص بدترین نسبت انحراف از تصمیم بهینه روی تمامی سناریوها است. این فرایند برای همه تصمیم‌های ممکن تکرار می‌شود. سپس بین تصمیم‌ها تصمیمی به‌عنوان جواب انتخاب می‌شود که کمترین بدترین نسبت انحراف را داشته است. به بیان دیگر نسبت انحراف همان پشیمانی است که حداکثر آن برای هر تصمیم پیدا و انتخاب شد و بین همه تصمیم‌ها تصمیمی با حداقل حداکثر پشیمانی انتخاب می‌شود. برای یافتن جواب بهینه مدلی با رویکرد بهینه‌سازی استوار نسبی باید مسئله ریاضی زیر حل شود که دارای S محدودیت است (کوولیس و یو، ۱۹۹۷):

رابطه ۱۱)
$$\begin{aligned} &\min \quad Z_R = y \\ &s.t. \quad f(X, D^s) \le (y+1) z^s \quad s \in S \\ &\quad X \in \cap_{s \in S} F_s \end{aligned}$$

یافتن جواب بهینه مدل بالا می‌تواند بسیار دشوارتر از دیگر مدل‌های استوار باشد؛ چرا که مقدار $z^s = f(X_s^*, D^s) = \min_{X \in F_s} f(X, D^s)$ خود یک مسئله بهینه‌سازی است که مدل بالا را به یک مدل بهینه‌سازی سه مرحله‌ای تبدیل می‌کند که در تقابل با سایر مدل‌های بهینه‌سازی استوار همچون مدل برتسیماس و سیم که یک مرحله‌ای هستند، فرایند یافتن جواب آن دشوارتر خواهد بود. البته درجه دشواری یافتن جواب بهینه بستگی به مدل پایه یعنی $z^s = f(X_s^*, D^s) = \min_{X \in F_s} f(X, D^s)$ خواهد داشت.

1. Best worst case

همان گونه که بیان شد، در این پژوهش سعی می‌شود مدل مارکویتز در قالب رویکرد استوار نسبی ارائه مجدد شـود تا مدلی ایجاد شود که قابلیت مقایسه بالایی با مدل مارکویتز داشته باشد. بدین جهت مدل مارکویتز که پیش‌تر ارائه شـد در قالب استوار نسبی در اینجا بازنویسی می‌شود. برای به‌کاربستن رویکـرد حـداقل حـداکثر پشـیمانی نسـبی، ابتـدا بایـد سناریوهای ورودی مدل را برای در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌های ورودی تعریف کرد. همان طور که بیان شد، در این پژوهش عدم قطعیت داده‌های ورودی شامل بردار بازده مورد انتظار و ماتریس واریانس کوواریانس است. در این پژوهش برای ایجاد سناریوها از داده‌های تاریخی استفاده می‌شود. هر سناریو عبارت است از بازدهی‌های ماهیانه تعدادی سهام در طی زمان که از طریق آنها بردار بـازده و مـاتریس واریـانس ـ کوواریـانس محاسـبه مـی‌شـود. بازنویسـی یـک مسـئله حداکثرسازی کلی به‌صورت استوار نسبی از طریق رابطه ۱۲ به‌دست می‌آید (کوولیس و یو، ۱۹۹۷):

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad Z_R = y \\ &\text{s.t.} \quad f(X, D^s) \geq (1-y)z^s \;\; s \in S \\ &\quad X \in \cap_{s \in S} F_s \end{aligned}$$ رابطه ۱۲)

با جای‌گذاری مدل مارکویتز یاد شده در بخش قبل در مدل بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &Min \quad Z_R = y \\ &\text{s.t.} \quad \mu^{sT} x - \lambda x^T Q^s x \geq (1-y) z^s \;\; \forall s \in S \\ &\quad \sum_i x_i = 1 \\ &\quad x, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$ رابطه ۱۳)

مقدار z^s در مسئله بالا مقدار تابع هدف مدل مارکویتز به ازای سناریو داده ورودی s است. برای یافتن جواب بهینه مقادیر z^s برای همه سناریوها خارج از مسئله به‌صورت مسائل درجه دوم بهینه یافت می‌شوند و به‌عنوان پارامتر در رابطـه بالا قرار داده می‌شوند. مدل بالا دارای تابع هدف خطی و محدودیت‌های درجه دوم است که قابلیت تبدیل به یـک مـدل برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم با S محدودیت مخروط درجه دوم چرخانده شده[1] را دارد.

مخروط درجه دوم چرخانده شده به‌صورت زیر تعریف می‌شود (موزک اپز[2]، ۲۰۲۱):

$$Q_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n | 2x_1x_2 \geq x_3^2 + \cdots + x_n^2, \qquad x_1x_2 \geq 0\}$$ رابطه ۱۴)

با یک سری عملیات ساده می‌توان تمامی محدودیت‌های درجه دوم مدل را به شکل زیر تبدیل کرد:

$$\lambda x^T Q^s x - \mu^{sT} x - z^s y \leq -z^s$$ رابطه ۱۵)

با فرض اینکه ماتریس $Q^s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ متقارن نیمه‌معین مثبت است محـدودیت بـالا را مـی‌تـوان بـه‌صـورت زیـر بازنویسی کرد:

1. Rotated quadratic cone
2. MOSEK ApS

رابطه ۱۶)
$$t - \mu^{sT}x - z^s y + z^s = 0$$
$$\lambda x^T Q^s x \leq t$$

با توجه به متقارن و نیمه معین مثبت بودن ماتریس $Q^s \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس $F \in \mathbb{R}^{k\times n}$ بـه شـکل زیـر وجـود دارد:

رابطه ۱۷)
$$Q^s = F^{sT}F^s$$

ماتریس Q را می‌توان به شکل‌های مختلفی همچون تجزیه چولسکی[1] تجزیه کرد. در ادامه می‌توان نوشت:

رابطه ۱۸)
$$x^T Q^s x = x^T F^{sT} F^s x = \|F^s x\|_2^2$$

پس می‌توان هر محدودیت درجه دو را به‌صورت یک مخروط درجه دوم چرخانده شده به شکل زیر نوشت:

رابطه ۱۹)
$$\left(t, \frac{0.5}{\lambda}, F^s x\right) \epsilon Q_r^{n+2}$$

و در نهایت مدل بازآفرینی شده یک مدل مخروطی مرتبه دوم با S محدودیت درجه دوم چرخانده شده خواهد بـود. جواب مسئله را نیز به راحتی می‌توان توسط الگوریتم نقطه درونی به‌صورت کاراتری به‌دست آورد.

فرضیه‌های پژوهش

همان طور که در بخش‌های قبل بیان شد، مدل مارکویتز به‌دلیل فرض قطعیت داده‌های ورودی مدل در صورت نوسـان داده‌های آتی از مقادیر استفاده شده جهت تخمین (اغلب داده‌های تاریخی) ممکن است شرایط بهینگی و یا حتی شـرایط شدنی بودن جواب ارائه شده را از دست بدهد. رویکردهای استوار مطلق (در این پـژوهش رویکـرد اسـتوار برتسـیماس و سیم) و استوار نسبی با در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌های ورودی مدل با این مشکل مواجه می‌کننـد. ایـن دو رویکـرد اگرچه هر دو در گروه رویکرد استوار قرار می‌گیرند؛ اما خود نیز دارای تفاوت‌هایی با هم هسـتند. رویکـرد اسـتوار مطلـق همواره به بدترین داده‌های درون مجموعه‌های عدم قطعیت توجه می‌کنـد در حـالی کـه رویکـرد اسـتوار نسـبی بیشـتر داده‌های موجود در مجموعه‌های عدم قطعیت را در فرایند تصمیم‌گیری وارد می‌کنـد. همچنـین رویکـرد اسـتوار مطلـق متمایل به ارائه جواب‌های محافظه‌کارانه است در حالی که رویکرد استوار نسبی لزوماً جـواب‌هـایی محافظـه‌کارانـه ارائـه نمی‌کند. مدل برتسیماس و سیم البته امکان کنترل سطح محافظه‌کاری را فراهم می‌کند و با تغییر سطح محافظـه‌کـاری نقاط مختلفی روی مرز کارا تخمین زده می‌شوند. همچنین رویکرد استوار نسبی با ارائه مقـادیر پشـیمانی پـس از اجـرای مدل معیار جذابی برای بررسی جواب‌های تخمین زده شده ارائه می‌کند.

فرضیه الف: پرتفوی حاصل از بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای رویکرد حداقل حداکثر پشیمانی در آزمـون خـارج از نمونه روی شاخص شارپ، عملکرد بهتری نسبت به پرتفوی مشابه رویکرد استوار برتسیماس و سیم خواهد داشت.

1. Cholesky decomposition

فرضیه ب: پرتفوی حاصل از بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای رویکرد حداقل حداکثر پشیمانی در آزمون خارج از نمونه روی شاخص شارپ، عملکرد بهتری نسبت به پرتفوی مشابه رویکرد مارکویتز خواهد داشت.

فرضیه ج: پرتفوی حاصل از بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای رویکرد استوار برتسیماس و سیم در آزمون خارج از نمونه روی شاخص شارپ، عملکرد بهتری نسبت به پرتفوی مشابه رویکرد مارکویتز خواهد داشت.

فرضیه د: پرتفوی حاصل از رویکرد حداقل حداکثر پشیمانی در آزمون خارج از نمونه روی شاخص شارپ در تمام نقاط تخمین زده شده مرز کارا عملکرد بهتری نسبت به پرتفوی‌های متناظر رویکرد مارکویتز خواهد داشت.

پژوهش حاضر از لحاظ ماهیت و روش به ترتیب کاربردی و توصیفی است. از آنجایی که برای پژوهش حاضر از داده‌های بورس استفاده شده است، این پژوهش در زمره پژوهش‌های کتابخانه‌ای قرار می‌گیرد.

جامعه و نمونه آماری

جامعه آماری پژوهش حاضر شرکت‌های موجود در بورس اوراق بهادار تهران است و نمونه این پژوهش شرکت‌های حاضر در فهرست ۵۰ شرکت فعال‌تر است. شناسایی شرکت‌های فعال‌تر در بورس اوراق بهادار تهران بر اساس ترکیبی از میزان نقدشوندگی، تعداد و ارزش معاملات، تناوب معاملات و اثرگذاری شرکت بر بازار است. بنابراین شرکت‌های موجود در این شاخص شرکت‌هایی هستند که هم میزان معاملات و هم تناوب معاملات بالایی دارند که به جهت کیفیت و کمیت داده‌ها برای این پژوهش حائز اهمیت فراوان است. بازه زمانی نمونه ۴ سال است که از ابتدای سال ۱۳۹۵ تا انتهای سال ۱۳۹۸ انتخاب شده است. داده‌های گردآوری شده مقدار قیمت پایانی تعدیل شده هر سهم در پایان روز است که با استفاده از آنها بازدهی‌های ماهیانه مورد محاسبه قرار گرفته‌اند. همچنین جهت گردآوری داده‌ها از نرم‌افزار ره‌آورد نوین ۳ استفاده شده است. با استفاده از داده‌های سه سال ابتدایی این نمونه وزن‌های پرتفوی‌های بهینه در هر سه رویکرد تخمین زده شده و با استفاده از داده‌های سال آخر نمونه نتایج به‌صورت برون‌نمونه‌ای مورد آزمون قرار گرفته‌اند. برای محاسبه شاخص شارپ نرخ بدون ریسک معادل نرخ سود سپرده‌های سرمایه‌گذاری در ابتدای دوره نمونه، ۱۵ درصد در نظر گرفته شده است. در این پژوهش تنها متغیری که استفاده شده است، بازدهی‌های سهام است. بیشتر سرمایه‌گذاران در تجزیه و تحلیل‌های مالی خود از بازدهی سهام استفاده می‌کنند که می‌توان ادعا کرد بازدهی خود دارای محتوای اطلاعاتی است (دیدار و بیکی، ۱۳۹۶).

برای محاسبه بازدهی‌ها از رابطه زیر استفاده شده است:

$$r_{it} = ln\left(\frac{P_{it}}{P_{it-1}}\right)$$ رابطه ۲۰)

که در آن P_{it} قیمت تعدیل شده سهم iام در زمان t و P_{it-1} قیمت تعدیل شده سهم iام در زمان $t-1$ است. همچنین ln لگاریتم طبیعی است.

برای مدل مارکویتز و مدل استوار برتسیماس و سیم از بازدهی ۳۶ ماه سه سال نخست برای ۵۰ سهم به‌عنوان ورودی‌های مدل استفاده شده است. برای ایجاد سناریوهای مدل استوار نسبی نیز از بازدهی‌های ماهیانه ابتدای ۱۳۹۵ تا انتهای ۱۳۹۷ به‌صورت زیر استفاده شده است:

جدول ۱. سناریوهای رویکرد استوار نسبی

سناریو	از	تا
سناریو اول	فرودین ۱۳۹۵	مهر ۱۳۹۵
سناریو دوم	فرودین ۱۳۹۵	اردیبهشت ۱۳۹۶
سناریو سوم	فرودین ۱۳۹۵	آذر ۱۳۹۶
سناریو چهارم	فرودین ۱۳۹۵	تیر ۱۳۹۷
سناریو پنجم	فرودین ۱۳۹۵	اسفند ۱۳۹۷

بدین ترتیب، ۵ سناریو ایجاد شده است که سناریو نخست معادل یک سناریو کوتاه‌مدت و سناریو آخر معادل یک سناریو بلندمدت است.

از آنجایی که دو مدل مطرح شده مارکویتز و حداقل حداکثر پشیمانی با استفاده از روش وزن‌دهی به توابع هدف ریسک و بازده نقاط مرز کارا را به‌دست می‌آورند، در این پژوهش برای یافتن نقاط مرز کارا در این دو مدل از وزن‌های زیر استفاده می‌شود تا نقاطی از مرز کارا برای هر دو مدل به‌دست آید که متناظر باشند بدین معنا که دارای وزن‌های ریسک و بازده مشابه باشند. بدین صورت می‌توان برای شخصی با وزن ریسک و بازده مشخص نشان داد که کدام یک از دو مدل مارکویتز و مارکویتز بازآفرینی شده در قالب استوار نسبی در خارج از نمونه عملکرد بهتری را نشان خواهد داد.

جدول ۲. وزن‌های مرز کارا

نقاط مرز کارا	وزن بازده	وزن ریسک
۱	۰/۹۱	۰/۰۹
۲	۰/۸۲	۰/۱۸
۳	۰/۷۳	۰/۲۷
۴	۰/۶۴	۰/۳۶
۵	۰/۵۵	۰/۴۵
۶	۰/۴۵	۰/۵۵
۷	۰/۳۶	۰/۶۴
۸	۰/۲۷	۰/۷۳
۹	۰/۱۸	۰/۸۲
۱۰	۰/۰۹	۰/۹۱

بدین صورت نقطه اول مرز کارا در دو مدل ترجیحات سرمایه‌گذاری را نشان می‌دهد که دارای نسبت ریسک‌گریزی بسیار پایینی است و برعکس شخصی نقطه آخر ترجیحات سرمایه‌گذاری با بیشترین مقدار ریسک‌گریزی است.

مدلی که بر اساس رویکرد استوار برتسیماس و سیم ایجاد شده است از رویکرد وزن‌دهی استفاده نمی‌کند. در این مدل برای ایجاد مرز کارا مقدار Γ از طریق رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Gamma_i = 1 + N^{-1}(1 - e_i)\sqrt{n}$$

با در نظر گرفتن مقدار صفر نیز برای Γ تعداد $\Gamma + 1$ نقطه روی مرز کارای این مدل ایجاد خواهد شد. در این مدل نقطه اول مرز کارا جوابی با کمترین سطح محافظه‌کاری را ارائه خواهد داد چرا که در این نقطه کم‌ترین اجازه نوسان به سهم‌ها از مقدار میانی داده خواهد شد. با افزایش مقدار ضریب Γ مدل اجازه نوسان بیشتری به بازده‌ها از مقدار میانی خواهد داد و پرتفوی‌های با سطح محافظه‌کاری بالاتری ایجاد می‌شوند.

جهت انجام محاسبات این پژوهش از نرم‌افزار متلب[1] و مینی‌تب[2] استفاده شده است.

یافته‌های پژوهش

نتایج حاصل از اجرای مدل‌ها

نتایج حاصل از مدل مارکویتز برای ایجاد ۱۰ نقطه مرز کارا در جدول زیر ارائه شده است.

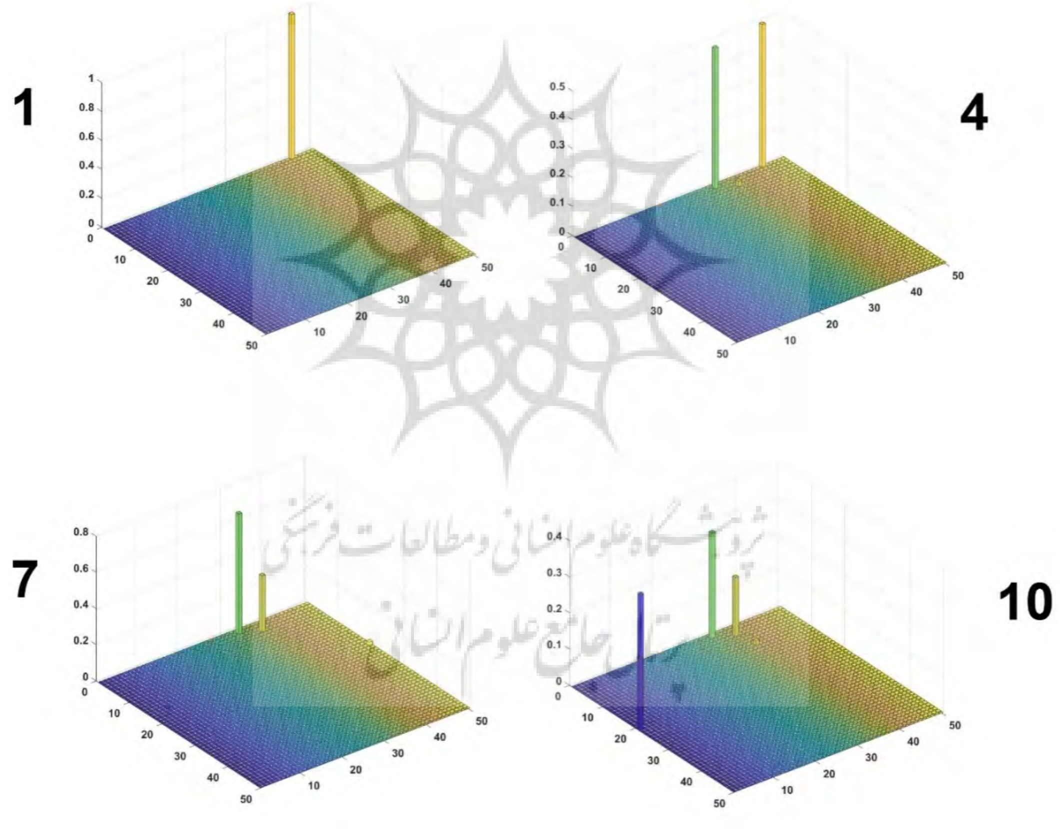
جدول ۳. وزن‌های استخراج شده توسط مدل مارکویتز

سهم	نقطه ۱۰	نقطه ۹	نقطه ۸	نقطه ۷	نقطه ٦	نقطه ٥	نقطه ٤	نقطه ۳	نقطه ۲	نقطه ۱
۳۴	٪۳۳	٪۳۵	٪۲۱	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰
۴۲	٪۲۹	٪۴۱	٪۵۳	٪۶۷	٪۶۹	٪۶۱	٪۴۹	٪۱۲	٪۰	٪۰
۶	٪۲۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰
۳۸	٪۱۶	٪۲۲	٪۲۶	٪۳۱	٪۲۶	٪۱۷	٪۲	٪۰	٪۰	٪۰
۴۶	٪۱	٪۲	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰
۳۷	٪۰	٪۰	٪۰	٪۲	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰
۲۷	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۵	٪۲۳	٪۴۹	٪۸۸	٪۱۰۰	٪۱۰۰

مدل مارکویتز ۴۳ سهم را به‌دلیل نداشتن شرط بهینگی، یعنی بازده مورد انتظار منهای ریسک، در هیچ کدام از ترکیبات ریسک و بازده وارد تصمیم‌گیری‌ها نکرده است. در نقطه اول و دوم تمام دارایی به سهمی اختصاص داده شده است که بیشترین مقدار بازده در بین سهم‌ها را دارد. اما با افزایش وزن حداقل‌سازی ریسک درصد حضور این سهم در بین سهم‌ها کاهش می‌یابد تا به صفر برسد. همچنین در نقطه دهم، مرز کارا که وزن حداقل‌سازی ریسک در انتخاب

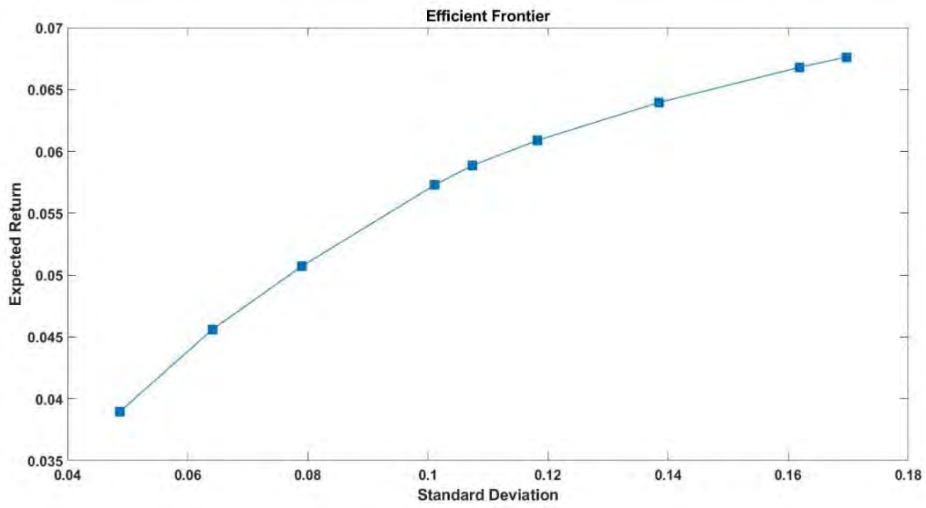
1. Matlab
2. Minitab

پرتفوی بهینه در حداکثر است سهمی بالاترین وزن را دارد که دارای یکی از کم‌ترین مقادیر ریسک است. موارد ذکر شده در مورد وزن سهم‌ها در شکل زیر آمده است. شکل‌های زیر به ترتیب وزن‌های مربوط به تعـدادی از نقـاط ده‌گانـه مـرز کارای مدل مارکویتز هستند. رأس بالایی شکل سهم‌هایی با بالاترین بازده و ریسک و رأس پایینی شکل سهم‌هـایی بـا کمترین بازده و ریسک را نشان می‌دهد. همچنین رأس راست سهم‌هایی با کم‌ترین بازده و بالاترین ریسک و رأس چپ سهم‌هایی با کمترین ریسک و بالاترین بازده را نمایش مـی‌دهـد. در ایـن شـکل مشـخص اسـت کـه بـا افـزایش وزن حداقل‌سازی ریسک و کاهش حداکثرسازی بازده مـورد انتظـار در تخمـین پرتفـوی بهینـه، وزن سـهم‌هـای موجـود در پرتفوی‌های بهینه از سهم‌هایی با بالاترین بازده و ریسک به سمت سهم‌هایی با بالاترین بازده و کمترین ریسک حرکـت می‌کنند.



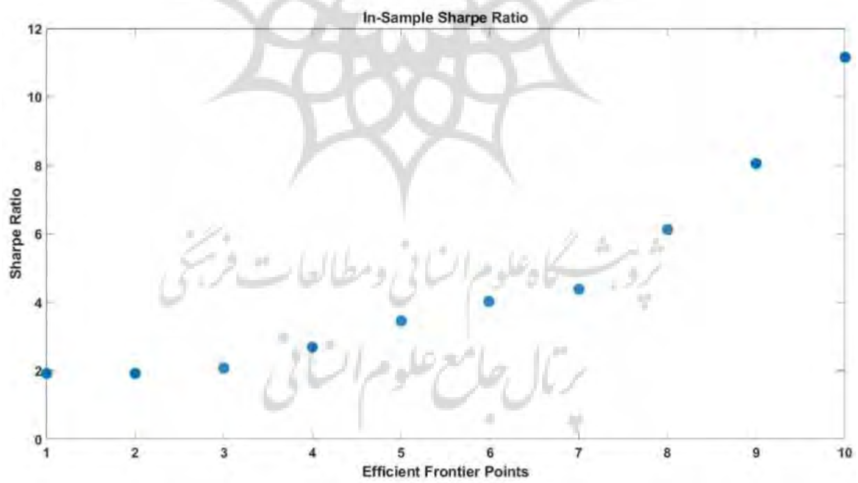
شکل ۱. هیستوگرام سه بعدی وزن‌های تعدادی از نقاط تخمین زده شده مدل مارکویتز

مرز کارای ایجاد شده توسط مدل مارکویتز در شکل زیر ارائه شده است. در این شـکل همـان طـور کـه در جـدول وزن‌های بهینه پرتفوی نیز مشخص است، نقاط اول و دوم روی هم قرار می‌گیرند؛ چرا که تنها سهم تشکیل دهنده ایـن دو پرتفوی سهم شماره ۲۷ با وزن ۱۰۰ درصد است:



شکل ۲. مرز کارای مدل مارکویتز

مقادیر شارپ درون‌نمونه‌ای مدل مارکویتز با فرض نرخ بدون ریسک ۱۵درصد در نمودار زیر ارائه شده‌اند:



شکل ۳. مقادیر شارپ درون‌نمونه‌ای مدل مارکویتز

بالاترین مقدار شارپ درون‌نمونه‌ای مربوط به پرتفوی پایانی مرز کارا است که از این پرتفوی جهت مقایسه با پرتفوی بالاترین مقدار شارپ درون‌نمونه‌ای مدل‌های حداقل حداکثر پشیمانی و مدل استوار برتسیماس و سیم استفاده خواهد شد.

در ادامه نتایج مدل استوار برتسیماس و سیم با فرض سطح اطمینان ۹۵ درصد ارائه می‌شود. در صورتی سطح اطمینان برابر با ۹۵ درصد باشد مقدار Γ برابر با ۱۳ خواهد بود و با در نظر گرفتن مقدار صفر نیز برای Γ ، ۱۴ نقطه برای

مرز کارا به‌دست می‌آید. در جدول زیر وزن‌های مربوط به تعدادی از نقاط مرز کارا جهت خلاصه کردن داده‌ها آورده نشده است. وزن‌های به‌دست آمده به ازای تعدادی از نقاط مختلف مرز کارا به شرح جدول زیر است:

جدول٤. وزن‌های استخراج شده توسط مدل استوار با رویکرد برتسیماس و سیم

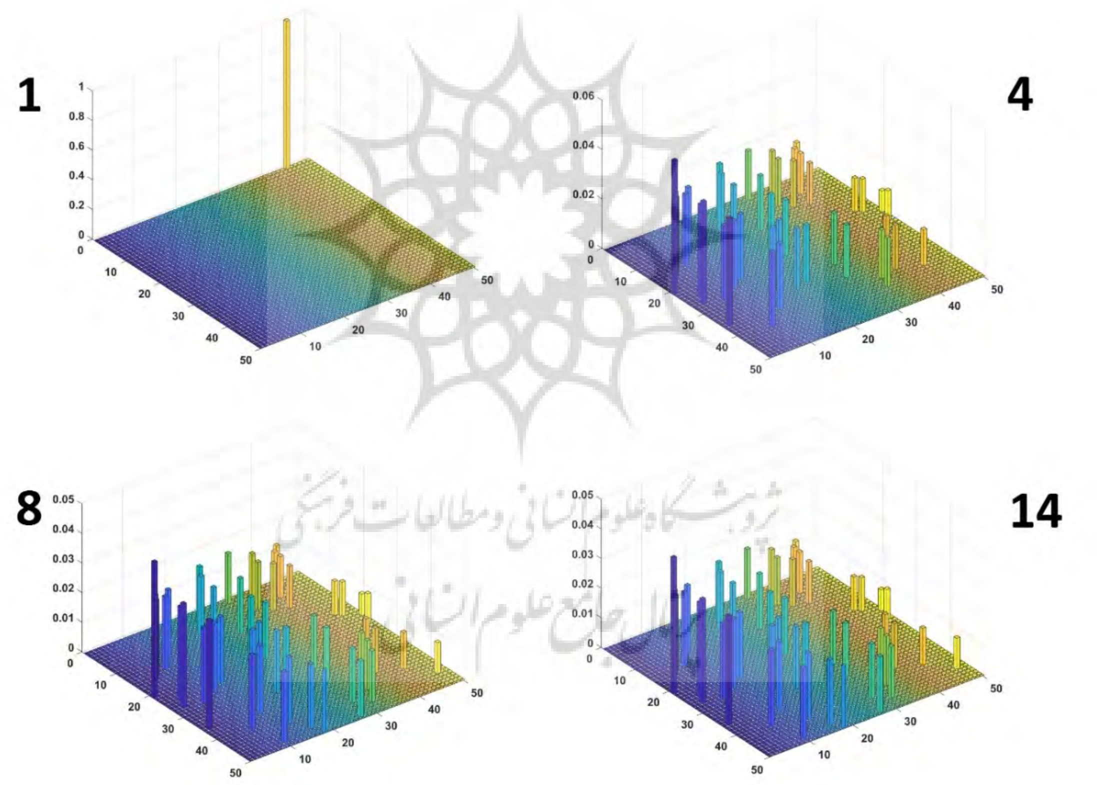
نقطه ۱	نقطه ۲	نقطه ۳	نقطه ٤	نقطه ٥	نقطه ٦	نقطه ۷	نقطه ۹	نقطه ۱۱	نقطه ۱٤	سهم
٪۰	٪۱۱	٪۷	٪۵	٪۵	٪۵	٪۵	٪۵	٪۵	٪۵	۶
٪۰	٪۷	٪۴	٪۳	٪۳	٪۳	٪۳	٪۳	٪۳	٪۳	۳۴
٪۰	٪۶	٪۴	٪۳	٪۳	٪۳	٪۳	٪۳	٪۳	٪۳	۳۱
٪۰	٪۶	٪۴	٪۳	٪۳	٪۳	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۵۰
٪۰	٪۶	٪۳	٪۳	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۹
٪۰	٪۵	٪۳	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۲۰
٪۰	٪۵	٪۳	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۱۸
٪۰	٪۵	٪۳	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۵
٪۰	٪۵	٪۳	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۱۳
٪۰	٪۵	٪۳	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۲۱
٪۰	٪۵	٪۳	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۴
٪۰	٪۴	٪۳	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۴۲
٪۰	٪۴	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۲۶
٪۰	٪۴	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۳۸
٪۰	٪۴	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	٪۲	۴۶
٪۰	٪۳	٪۲	٪۲	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	۱۷
٪۰	٪۳	٪۲	٪۲	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	۲۵
٪۰	٪۳	٪۲	٪۲	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	۳۹
٪۱۰۰	٪۳	٪۲	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	٪۱	۲۷

در جدول ۴ برای خلاصه‌کردن سهم‌هایی با وزن‌های کمتر حذف شده‌اند چرا که تمام ۵۰ سهم شرکت داده شده‌اند بنابراین برخلاف مدل مارکویتز هیچ سهمی وجود ندارد که هیچگاه در هیچ پرتفوی ظاهر نشده باشد. در نقطه اول که مقدار Γ برابر با صفر است، به هیچ کدام از سهم اجازه هیچ انحرافی از مقدار اسمی داده نشده است، بنابراین سهمی انتخاب شده است که دارای بیشترین میانگین بازده است. جواب این نقطه از این نظر شبیه جواب به‌دست آمده از مدل مارکویتز با حداقل وزن ریسک است. در صورتی که مقدار Γ برابر با ۵۰ یعنی حداکثر مقداری که داده‌های ورودی اجازه نوسان دارند قرار بگیرد، مدل ۱۰۰ درصد از وزن پرتفوی را در سهمی سرمایه‌گذاری می‌کند که دارای بیشترین مقدار $\bar{r}_i - \sigma_i$ است. این مطلب در جدول زیر نیز مشخص است. با افزایش سطح Γ بازده مورد انتظار پرتفوی کاهشی است.

جدول۵. بازده مورد انتظار مدل استوار به همراه مقادیر گاما

بازده مورد انتظار پرتفوی	Γ
٪۷	۰
٪۳	۱
٪۳	۲
٪۲	۳
٪۲	۱۵
٪۲	۳۵
٪۲	۵۰

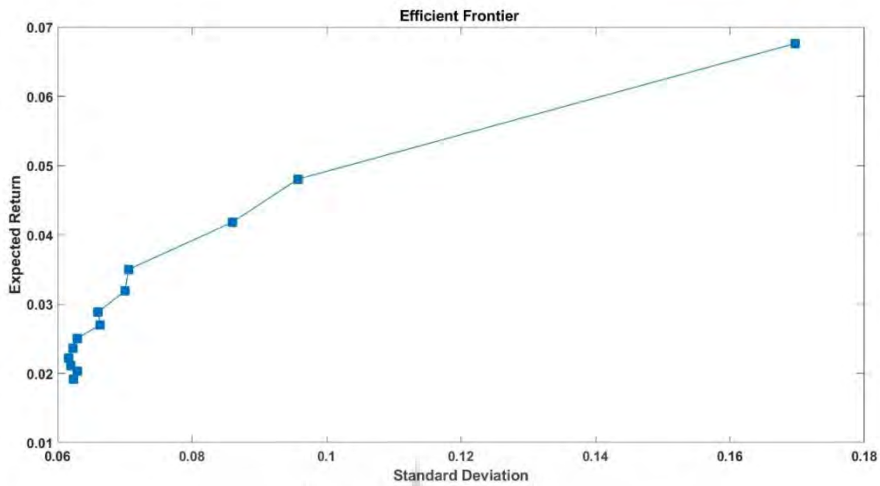
هیستوگرام سه بُعدی وزن‌های به‌دست آمده از این رویکرد در شکل ۴ نمایش داده شده است:



شکل ٤. هیستوگرام سه بعدی وزن‌های تعدادی از نقاط تخمین زده شده مدل استوار با رویکرد برتسیماس و سیم

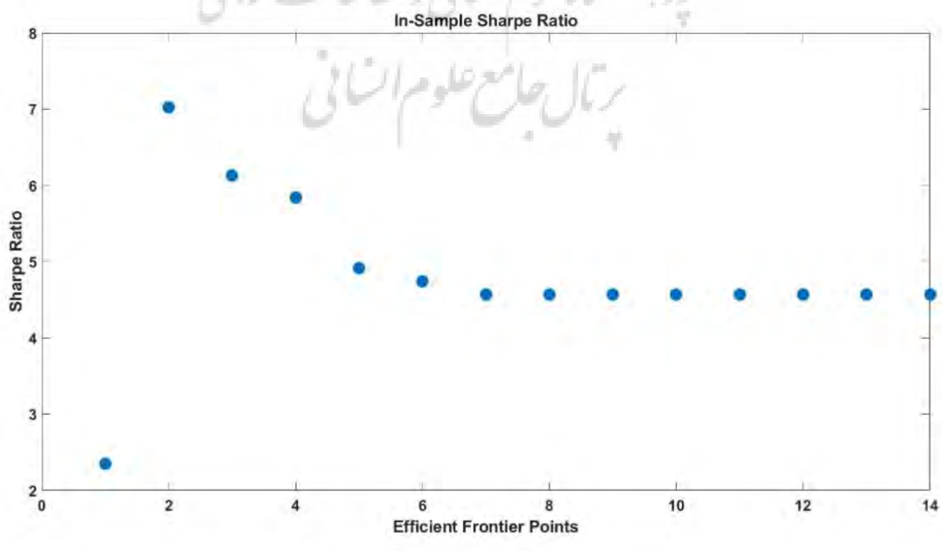
نمودارهای بالا وزن‌های سهام در پرتفوی‌های مختلف مدل استوار با رویکرد برتسیماس و سیم را نشان می‌دهد که مشخص است با افزایش ضریب Γ، سهم‌هایی با بازده و ریسک بالا جایگاه خود را به سهم‌هایی با بازده و ریسک در تمامی سطوح می‌دهند اما وزن سهم‌های با ریسک پایین بیشتر می‌شود که این تأییدی بر تمایل مدل به جواب‌های محافظه‌کارانه است.

مرز کارای ایجاد شده توسط مدل استوار با رویکرد برتسیماس و سیم در شکل زیر ارائه شده است:



شکل ۵. مرز کارای رویکرد استوار برتسیماس و سیم

در این شکل نقاط غیرکارا به سبب مقایسه حذف نشده‌اند. همان طور که در مرز کارا مشخص است مدل استوار برتسیماس و سیم بیشتر متمایل به انتخاب پرتفوی‌هایی است که در بخش جنوب غربی قرار دارند که دارای بازده و ریسک مورد انتظار پایین‌تری هستند. ۱۱ نقطه تخمین زده شده در این بخش قرار دارند، در حالی که تنها سه نقطه در بخش‌های دیگر قرار دارد که این خود دلالت بر این موضوع دارد که مدل حاضر پرتفوی‌های محافظه‌کارانه‌تری نسبت به مدل مارکویتز انتخاب می‌کند. مقادیر شارپ درون‌نمونه‌ای مدل استوار با فرض نرخ بدون ریسک ۱۵درصد در نمودار زیر ارائه شده است.



شکل ٦. مقادیر شارپ درون‌نمونه‌ای مدل استوار برتسیماس و سیم

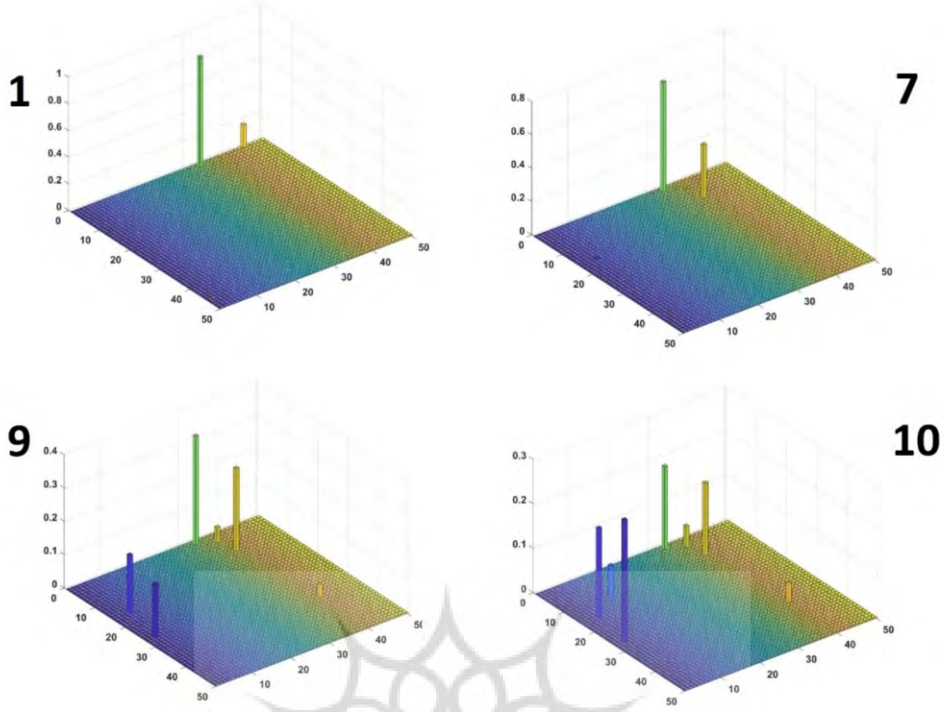
مقادیر شارپ درون‌نمونه‌ای مدل استوار با رویکرد برتسیماس و سیم نشان می‌دهد که با افزایش ضریب Γ مقادیر شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای مدل کاهشی بوده‌اند؛ چرا که مدل به سمت انتخاب پرتفوی‌های محافظه‌کارانه‌تری حرکت کرده است. بالاترین مقدار شارپ درون‌نمونه‌ای برای مدل استوار پرتفوی شماره ۲ است که از این پرتفوی جهت مقایسه با پرتفوی بالاترین مقدار شارپ درون‌نمونه‌ای مدل مارکویتز و مدل حداقل حداکثر پشیمانی استفاده خواهد شد.

جدول ۶ وزن‌های به‌دست آمده در مدل حداقل حداکثر پشیمانی برای ایجاد ۱۰ نقطه مرز کارا را نمایش می‌دهد.

جدول٦. وزن‌های استخراج شده توسط مدل حداقل حداکثر پشیمانی

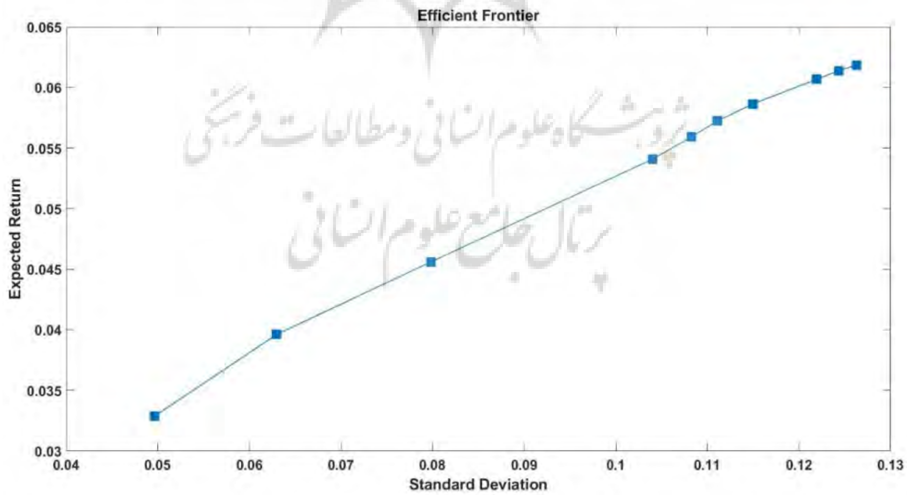
نقطه ۱	نقطه ۲	نقطه ۳	نقطه ٤	نقطه ٥	نقطه ٦	نقطه ۷	نقطه ۸	نقطه ۹	نقطه ۱۰	سهم
٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۱۱	٪۱۶	٪۲۸	۱۰
٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۲	٪۹	٪۱۸	٪۲۰	۳۴
٪۸۳	٪۸۹	٪۱۰۰	٪۸۹	٪۸۳	٪۷۵	٪۶۶	٪۴۷	٪۳۳	٪۱۹	۴۲
٪۰	٪۰	٪۰	٪۱۱	٪۱۸	٪۲۵	٪۳۲	٪۲۸	٪۲۵	٪۱۶	۴۶
٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۷	۹
٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۱	٪۳	٪۵	٪۵	۳۸
٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۲	٪۴	٪۴	۱۶
٪۱۷	٪۱۱	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	٪۰	۲۷

در اینجا نیز همانند مدل کلاسیک مارکویتز ۴۲ سهم به‌دلیل نداشتن شرایط بهینگی در هیچ کدام از ترکیبات ریسک و بازده انتخاب نشده‌اند. از این لحاظ نسبت به مدل مارکویتز یک سهم را بیشتر وارد انتخاب‌های پرتفوی بهینه کرده است، اما همچنان نسبت به مدل استوار برتسیماس و سیم سهم‌های کمتری وارد تصمیم‌گیری‌ها کرده است. بنابراین از این لحاظ عملکرد رویکرد حداقل حداکثر پشیمانی مابین مدل مارکویتز و استوار بوده است. در نقطه اول ۸۳ درصد وزن پرتفوی به سهمی اختصاص داده شده است که دارای بهترین مقدار نسبت بازده به ریسک درون‌نمونه‌ای است، اما با افزایش وزن ریسک درصد حضور این سهم در بین سهم‌های بهینه کاهش می‌یابد تا به ۱۹ درصد می‌رسد و تنها ۱۷درصد وزن پرتفوی به سهم ۲۷ که دارای وزن ۱۰۰ درصد در مدل‌ها مارکویتز و استوار بود تخصیص داده شده است. همچنین در نقطه ۱۰م مرز کارا که وزن ریسک در انتخاب پرتفوی بهینه در حداکثر است سهمی بالاترین وزن را دارد که از لحاظ نسبت بازده به ریسک در سطح میانه قرار دارد. پس از این سهم، سهم شماره ۳۴ دارای بیشترین وزن است که این سهم نیز از لحاظ نسبت بازده به ریسک در سطح میانه قرار دارد. در این پرتفوی ۷ سهم حضور دارند در حالی که در پرتفوی متناظر مارکویتز ۵ سهم حضور داشتند. با افزایش وزن ریسک و کاهش وزن بازده، سهم‌هایی با بازده و ریسک بالا جایگاه خود را به سهم‌هایی با بازده بالا و ریسک پایین و بازده بالا و ریسک متوسط واگذار می‌کنند. این نکات در شکل زیر نمایش داده شده است:



شکل ۷. هیستوگرام سه بعدی وزن‌های تعدادی از نقاط تخمین زده شده مدل حداقل حداکثر پشیمانی

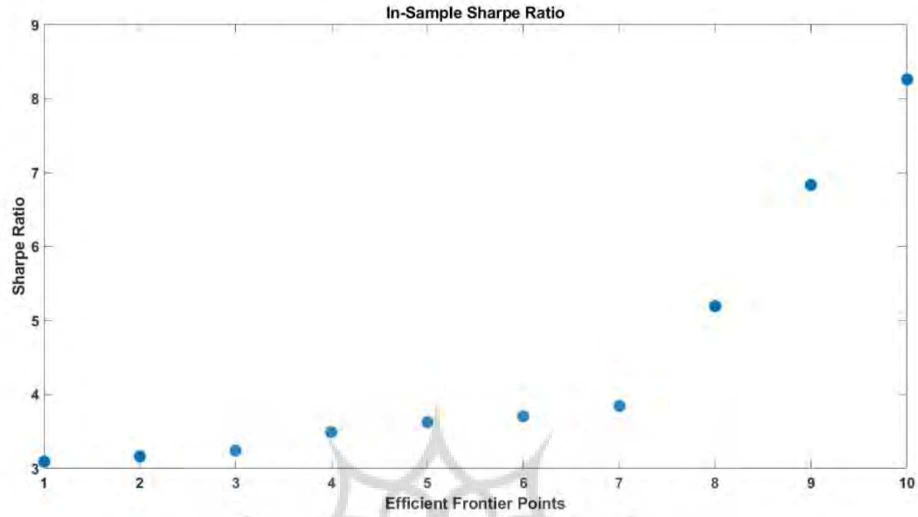
مرز کارای ایجاد شده توسط مدل حداقل حداکثر پشیمانی در شکل زیر ارائه شده است:



شکل ۸. مرز کارای مدل حداقل حداکثر پشیمانی

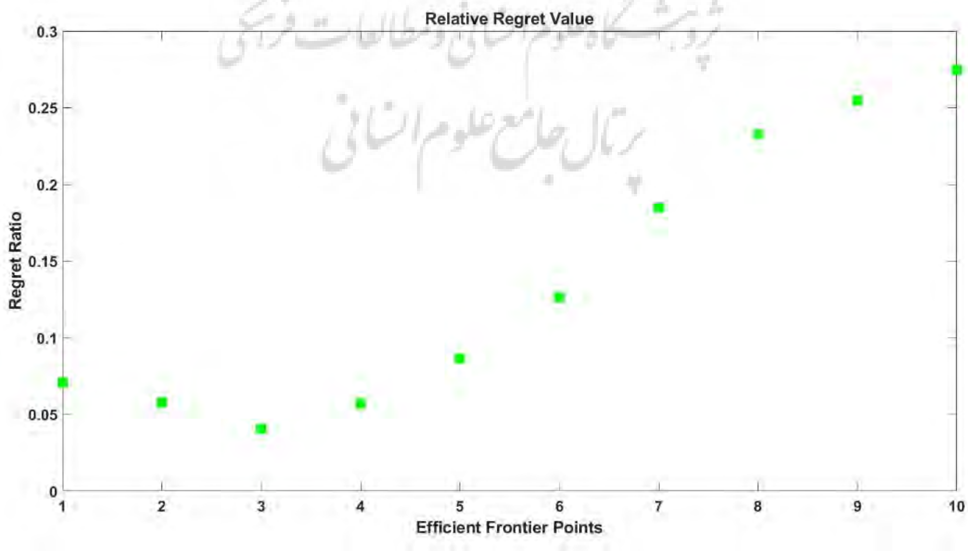
رویکرد مارکویتز پرتفوی‌های انتخاب شده را در طول مرز کارا پراکنده می‌کرد و رویکرد برتسیماس و سیم پرتفوی‌ها را در بخش جنوب غربی قرار می‌داد. در حالی که رویکرد حداقل حداکثر پشیمانی تمایل به ایجاد پرتفوی‌هایی در بخش شمال شرقی یعنی با نسبت بازده و ریسک مورد انتظار بالا دارد.

مقادیر شارپ درون‌نمونه‌ای مدل حداقل حداکثر پشیمانی با فرض نرخ بدون ریسک ۱۵ درصد در نمودار زیر ارائه شده است.



شکل ۹. مقادیر شارپ درون‌نمونه‌ای مدل حداقل حداکثر پشیمانی

در اینجا نیز پرتفوی آخر مرز کارا بیشترین مقدار شارپ درون‌نمونه‌ای را داشت که از آن جهت مقایسه با پرتفوی‌های مشابه دو مدل دیگر استفاده خواهد شد. در نمودار زیر مقادیر پشیمانی به ازای نقاط مرز کارا که برابر با وزن‌دهی‌های مختلف ریسک و بازده است نمایش داده شده است:



شکل ۱۰. مقادیر پشیمانی به ازای نقاط مرز کارا

در این شکل نقاطی که دارای مقدار پشیمانی پایین‌تری هستند، نقاط استوارتری در مرز کارا هستند بنابراین انتظار می‌رود این نقاط پرتفوی‌های محافظه‌کارانه‌تری تولید کنند. مقایسه نمودار بالا با مقادیر جمع مقادیر شارپ برون‌نمونه‌ای آنها این نکته را تأیید می‌کند که پرتفوی‌هایی با مقادیر پایین‌تر پشیمانی، پرتفوی‌هایی با مقادیر شارپ پایین‌تری به‌صورت برون‌نمونه‌ای به‌دست می‌دهند. مقایسه مقادیر پشیمانی با ضرایب وزن‌دهی به ریسک و بازده نیز نشان می‌دهد که «هرچه ضریب ریسک در تخمین پرتفوی بهینه افزایش یابد یا ضریب بازده کاهش یابد، مقدار پشیمانی نیز افزایش می‌یابد.». می‌توان چنین برداشت کرد که در فرایند انتخاب پرتفوی بهینه هرچه توجه به بازده در انتخاب پرتفوی بهینه کمتر باشد یا توجه به ریسک بیشتر باشد پرتفوی به دست آمده کمتر استوار است. بنابراین می‌توان گفت: «یک سرمایه‌گذار می‌تواند علاوه بر ترجیحات ریسک و بازده خود به مقادیر پشیمانی نیز برای انتخاب پرتفوی متناسب با سطح ریسک‌گریزی خود توجه کند.»

آزمون فرضیه‌های پژوهش

در این بخش به مقایسه برون‌نمونه‌ای پرتفوی‌های ایجاد شده پرداخته می‌شود. در جدول زیر مقادیر شارپ ماهیانه برون‌نمونه‌ای برای وزن‌های تخمین زده شده نقطه‌ای از مرز کارا که بیشترین مقدار شارپ درون‌نمونه‌ای را داشت برای هر سه مدل مارکویتز، برتسیماس و سیم و حداقل حداکثر پشیمانی نمایش داده شده است:

جدول۷. مقادیر شارپ برون‌نمونه‌ای سه مدل

	ماه											
	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
مدل مارکویتز	۳	۳/۱	-۰/۶	-۰/۱	-۰/۴	۱/۸	۱/۴	-۱/۲	۱/۶	۱/۶	۱/۱	۱/۹
مدل برتسیماس و سیم	۴/۲	۳/۳	-۰/۶	۱/۳	-۱/۳	۳/۱	۰/۷	-۱	۲/۳	۱/۷	۱/۴	۲/۳
مدل حداقل حداکثر پشیمانی	۳	۳/۵	-۰/۷	۰/۵	-۰/۳	۳	۰/۳	-۱	۱/۴	۲/۱	۱/۹	۲

جهت انجام مقایسه به آزمون آماری تفاوت مقادیر شاخص شارپ برون‌نمونه‌ای بین سه مدل که در جدول بالا آمده است پرداخته می‌شود. ابتدا فرض‌های الف، ب و ج مورد آزمون قرار می‌گیرند.

جهت انجام آزمون فرض‌های ذکر شده ابتدا از آزمون کولموگروف ـ اسمیرنف برای تعیین اینکه مقادیر مشاهدات توزیع نرمال دارند یا نه استفاده می‌شود. فرض صفر این آزمون برای هر کدام از دسته داده‌های جدول بالا به این شرح است که «مقادیر شاخص شارپ برون‌نمونه‌ای دارای توزیع نرمال هستند.». پس از این آزمون در صورتی که مشاهدات از توزیع نرمال پیروی کنند می‌توان از آزمون مقایسات زوجی استفاده کرد. در غیر این صورت باید از آزمون ویلکاکسون استفاده شود. نتایج حاصل از آزمون کولموگروف ـ اسمیرنف برای هر سه دسته داده ذکر شده در جدول ۸ آمده است:

جدول۸. آزمون نرمالیتی مقادیر شارپ برون‌نمونه‌ای

خاصه	Bertsimas & Sim	Markowitz	حداقل حداکثر پشیمانی
میانگین	۱/۴۴۳	۱/۰۱۶	۱/۳۰۸
انحراف معیار	۱/۷۵۸	۱/۳۸۲	۱/۵۲۵
تعداد داده‌ها	۱۲	۱۲	۱۲
آماره KS	۰/۱۲۸	۰/۱۵۱	۰/۱۳۹
آماره P-Value	>۰/۱۵	>۰/۱۵	>۰/۱۵

همان طور که در جدول بالا پیداست مقدار P-Value برای آزمون داده‌های هر سه مدل بزرگ‌تر از ۰/۰۵ به‌دست آمده است بنابراین فرض صفر مبنی بر اینکه مشاهدات توزیع نرمال دارند را نمی‌توان رد کرد. بنابراین برای انجام مقایسه بین هر سه مدل از آزمون مقایسات زوجی استفاده می‌شود.

نتایج حاصل از انجام فرضیه الف به شرح زیر است:

جدول۹. نتایج آزمون مقایسات زوجی مقادیر شارپ دو مدل حداقل حداکثر پشیمانی و مدل استوار

نتایج آزمون	
فرض صفر	$H_0: \mu\_difference = 0$
فرض یک	$H_1: \mu\_difference \neq 0$
آماره T	۰/۷۲
آماره P-Value	۰/۴۸۶

نتایج در جدول فوق ارائه شده و آماره t برابر ۰/۷۲ و احتمال معناداری نیز بیشتر از ۵ درصد است بنابراین فرض صفر را نمی‌توان رد کرد و می‌توان نتیجه گرفت که مقدار شاخص شارپ بر اساس وزن‌های نقطه بهترین شارپ درون‌نمونه‌ای مدل حداقل حداکثر پشیمانی از نظر آماری با مقادیر شاخص شارپ مدل استوار تفاوت معناداری ندارند.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که «پرتفوی به‌دست آمده از مدل حداقل حداکثر پشیمانی بر اساس وزن‌های نقطه‌ای با بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای، عملکرد بهتری را نسبت به پرتفوی به‌دست آمده از مدل استوار بر اساس وزن‌های نقطه‌ای با بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای، در خارج از نمونه نشان نمی‌دهد».

نتایج حاصل از انجام فرضیه ب نیز به شرح زیر است:

جدول۱۰. نتایج آزمون مقایسات زوجی مقادیر شارپ دو مدل مارکویتز و مدل حداقل حداکثر پشیمانی

نتایج آزمون	
فرض صفر	$H_0: \mu\_difference = 0$
فرض یک	$H_1: \mu\_difference \neq 0$
آماره T	۲/۳۶
آماره P-Value	۰/۰۳۸

نتایج در جدول فوق ارائه شده و آماره t برابر ۲/۳۶ و احتمال معناداری نیز کمتر از ۵ درصد است بنابراین فرض صفر را نمی‌توان پذیرفت و بین مقادیر شاخص شارپ دو مدل بر اساس وزن‌های نقطه آخر مرز کارا اختلاف وجود دارد و با توجه به اینکه میانگین تفاضل برابر مقداری مثبت یعنی ۰/۲۹۲ است می توان گفت که مقادیر شاخص شارپ بر اساس وزن‌های نقطه آخر مرز کارا مدل حداقل حداکثر پشیمانی از مقادیر شاخص شارپ مدل مارکویتز بیشتر است.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که «پرتفوی به‌دست آمده از مدل حداقل حداکثر پشیمانی بر اساس وزن‌های نقطه‌ای با بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای، عملکرد بهتری را نسبت به پرتفوی به‌دست آمده از مدل مارکویتز بر اساس وزن‌های نقطه‌ای با بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای، در خارج از نمونه نشان می‌دهد».

نتایج حاصل از انجام فرضیه ج نیز به شرح زیر است:

جدول ۱۱. نتایج آزمون مقایسات زوجی مقادیر شارپ مارکویتز و مدل استوار

نتایج آزمون	
فرض صفر	$H_0: \mu\_difference = 0$
فرض یک	$H_1: \mu\_difference \neq 0$
آماره T	۲/۲۱
آماره P-Value	۰/۰۴۹

نتایج در جدول فوق ارائه شده و آماره t برابر ۲/۲۱ و احتمال معناداری نیز کمتر از ۵درصد است بنابراین فرض صفر را نمی‌توان پذیرفت و بین مقادیر شاخص شارپ دو مدل بر اساس وزن‌های نقطه آخر مرز کارا اختلاف وجود دارد و با توجه به اینکه میانگین تفاضل برابر مقداری مثبت یعنی ۰/۴۲۷ است می‌توان نتیجه گرفت که مقدار شاخص شارپ بر اساس وزن‌های نقطه بهترین شارپ درون‌نمونه‌ای مدل استوار از مقادیر شاخص شارپ مدل مارکویتز بیشتر است.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که «پرتفوی به‌دست آمده از مدل استوار بر اساس وزن‌های نقطه‌ای با بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای، عملکرد بهتری را نسبت به پرتفوی به‌دست آمده از مدل مارکویتز بر اساس وزن‌های نقطه‌ای با بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای، در خارج از نمونه نشان می‌دهد».

برای انجام فرضیه د ابتدا از حاصل جمع‌های مقادیر شارپ برون‌نمونه‌ای به ازای ۱۰ نقطه تخمین زده شده در دو مدل مارکویتز و حداقل حداکثر پشیمانی آزمون نرمالیتی گرفته شده و سپس به مقایسه دو دسته داده پرداخته می‌شود. جمع مقادیر شارپ برون‌نمونه‌ای به ازای ۱۰ نقطه تخمین زده شده در دو مدل مارکویتز و حداقل حداکثر پشیمانی به شرح جدول زیر به‌دست آمده‌اند:

جدول ۱۲. جمع مقادیر شارپ برون‌نمونه‌ای به ازای هر نقطه تخمین زده شده

نقاط مرز کارا	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰
حداقل حداکثر پشیمانی	۹/۴	۹	۸/۴	۹/۳	۹/۸	۱۰/۲	۱۰/۶	۱۲/۶	۱۴/۱	۱۵/۷
مارکویتز	۶/۷	۶/۷	۷/۷	۱۰/۱	۱۰/۲	۹/۳	۹/۲	۹/۸	۱۰/۲	۱۲/۲

نتایج حاصل از آزمون کولموگروف ـ اسمیرنف برای هر دو دسته داده ذکر شده در جدول بالا در زیر آمده است:

جدول۱۳. آزمون نرمالیتی جمع مقادیر شارپ برون‌نمونه‌ای

خاصه	حداقل حداکثر پشیمانی	Markowitz
میانگین	۱۰/۹۲	۹/۱۹۶
انحراف معیار	۲/۴۲۴	۱/۷۳۱
تعداد داده‌ها	۱۰	۱۰
آماره KS	۰/۲۵۴	۰/۲۱۱
آماره P-Value	۰/۰۶۷	>۰/۱۵

همان طور که در جدول بالا پیداست مقدار P-Value برای آزمون داده‌های هر دو دسته داده بزرگ‌تر از ۰/۰۵ به‌دست آمده است بنابراین فرض صفر مبنی بر اینکه مشاهدات توزیع نرمال دارند را نمی‌توان رد کرد. بنابراین برای انجام مقایسه بین داده‌ها از آزمون مقایسات زوجی استفاده می‌شود.

نتایج حاصل از انجام فرضیه د به شرح زیر است:

جدول۱٤. نتایج آزمون مقایسات زوجی حاصل جمع مقادیر شارپ

نتایج آزمون	
فرض صفر	$H_0: \mu\_difference = 0$
فرض یک	$H_1: \mu\_difference \neq 0$
آماره T	۳/۳۶
آماره P-Value	۰/۰۰۸

نتایج در جدول فوق ارائه شده و آماره t برابر ۳/۳۶ و احتمال معناداری کمتر از یک درصد است بنابراین فرض صفر را نمی‌توان پذیرفت و نتیجه می‌گیریم که بین مقادیر جمع شاخص شارپ دو مدل اختلاف وجود دارد و با توجه به اینکه میانگین تفاضل برابر مقداری مثبت یعنی ۱/۷۲۵ است می توان نتیجه گرفت مقدار جمع شاخص شارپ مدل حداقل حداکثر پشیمانی از مقادیر جمع شاخص شارپ مدل مارکویتز بیشتر است.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مدل حداقل حداکثر پشیمانی در خارج از نمونه روی بیشتر نقاط مرز کارا عملکرد بهتری را نسبت به مدل مارکویتز نشان می‌دهد، که نشان دهنده این است که مدل حداقل حداکثر پشیمانی می‌تواند برای همه افراد با ترجیحات ریسک و بازده متفاوت عملکرد بهتری نسبت به مدل مارکویتز داشته باشد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش سعی شد وزن‌های پرتفوی بهینه بر اساس داده‌های گذشته به صورتی تخمین زده شوند که خارج از نمونه بهترین عملکرد را داشته باشند. در اینجا مدل مارکویتز با استفاده از رویکرد حداقل حداکثر پشیمانی بازآفرینی شد که با استفاده از سناریوها و بدون فرض وجود توزیع احتمال یا تحمیل احتمال به سناریوها وزن‌های بهینه را با استفاده از

تابع هدف مدل مارکویتز تخمین بزند. این رویکرد از آنجا که یک رویکرد استوار است سعی در ارائه جوابی دارد که تحت هر حالتی، شرایط بهینگی را حفظ کند و همچنین غیرممکن نباشد. در اینجا رویکرد حداقل حداکثر پشیمانی روی مدل دو هدفه مارکویتز اعمال شد که حاصل آن یک مدل مخروطی مرتبه دوم با مخروط‌های مرتبه دوم چرخانده شده بود. همچنین از مدل بهینه‌سازی استوار پرتفوی برتسیماس و سیم نیز برای مقایسه استفاده شد.

در این پژوهش تمام شرکت‌ها موجود در بورس اوراق بهادار تهران به‌عنوان جامعه و نمونه آن ۵۰ شرکت فعال‌تر در ابتدای سال ۱۳۹۵ تعیین شد. بازه زمانی نمونه نیز از ابتدای سال۱۳۹۵ تا انتهای سال۱۳۹۸ به مدت ۴ سال تعیین شد که از داده‌های مربوط به سه سال نخست نمونه جهت تخمین وزن‌ها و از داده‌های سال پایانی نمونه جهت آزمون برون‌نمونه‌ای سه مدل استفاده شد. ابتدا بازدهی و انحراف معیار ماهیانه سهم‌ها در سه سال نخست محاسبه شده و ۵ سناریو برای مدل حداقل حداکثر پشیمانی تعیین شد و پس از آن وزن‌های بهینه هر سه مدل پژوهش با فرض ایجاد ۱۰ نقطه مرز کارای متناظر برای دو مدل حداقل حداکثر پشیمانی و مارکویتز و با فرض ضریب اطمینان ۹۵ درصد برای رویکرد برتسیماس و سیم تخمین زده شد و نتایج حاصل از هر سه مدل ارائه شد. نتایج اجرای مدل‌ها نشان داد که با توجه به ورود سهم‌های بیشتری در پرتفوی‌های انتخاب شده توسط رویکرد برتسیماس و سیم نسبت به مدل مارکویتز و مدل حداقل حداکثر پشیمانی این مدل توانایی تنوع بخشی بالاتری نسبت به دو مدل دیگر دارد. همچنین با معرفی مقدار پشیمانی برای مدل مارکویتز به این نتیجه رسیدیم که یک سرمایه‌گذار می‌تواند علاوه بر ترجیحات ریسک و بازده خود به مقادیر پشیمانی نیز برای انتخاب پرتفوی متناسب با سطح ریسک‌گریزی خود توجه کند چرا که در این شکل نقاطی که دارای مقدار پشیمانی پایین‌تری هستند، نقاط استوارتری در مرز کارا هستند. بنابراین انتظار می‌رود این نقاط پرتفوی‌های محافظه‌کارانه‌تری تولید کنند. مقایسه مقادیر پشیمانی با مقادیر شارپ برون‌نمونه‌ای برای نقاط مختلف مرز کارا نیز این ایده را تأیید می‌کند. همچنین مقایسه مقادیر پشیمانی با ضرایب وزن‌دهی به ریسک و بازده نشان داد که هرچه ضریب ریسک در تخمین پرتفوی بهینه افزایش یابد یا ضریب بازده کاهش یابد، مقدار پشیمانی نیز افزایش می‌یابد.

در ادامه جهت بررسی فرضیات پژوهش، با استفاده از داده‌های روزانه سال۱۳۹۸ و در نظر گرفتن نرخ بدون ریسک معادل ۱۵ درصد، شاخص شارپ ماهیانه برای تمامی وزن‌های تخمین زده شده توسط سه مدل محاسبه گردید. سپس به مقایسه عملکرد برون‌نمونه‌ای بین پرتفوی‌های انتخاب شده از هر مدل بر اساس بهترین شاخص شارپ درون‌نمونه‌ای پرداخته شد که نتایج حاصل از آزمون سه پرتفوی حاکی از عملکرد بهتر مدل حداقل حداکثر پشیمانی و استوار با رویکرد برتسیماس و سیم از مدل مارکویتز بود. همچنین مقایسه بین دو رویکرد حداقل حداکثر پشیمانی و برتسیماس و سیم نشان داد که از نظر آماری بین عملکرد دو پرتفوی تفاوت معناداری وجود نداشت.

برتری عملکرد خارج از نمونه‌ای مدل استوار نسبی نسبت به مدل کلاسیک میانگین واریانس مارکویتز با نتایج سایر پژوهش‌های یاد شده همچون سیموس و همکاران (۲۰۱۸) و کاچادور و همکاران (۲۰۲۰) هم‌خوانی دارد. همچنین فلاح‌پور و تندنویس (۱۳۹۳) نشان دادند که در عملکرد خارج از نمونه‌ای مدل ارائه شده توسط برتسیماس و سیم بر

اساس داده‌های بورس اوراق بهادار تهران بهتر از مدل مارکویتز است که با نتایج حاصل از این پژوهش هم‌خوانی دارد. عدم وجود تفاوت معنادار بین نتایج مقایسه دو رویکرد استوار نسبی و مطلق روی داده‌های بلندمدت نیز با نتایج لی و وانگ (۲۰۲۰) هم‌خوانی دارد.

در نهایت با استفاده از آزمون مقایسات زوجی به مقایسه برتری عملکرد برون‌نمونه‌ای مدل حداقل حداکثر پشیمانی در تمام نقاط مرز کارای تخمین زده شده متناظر نسبت به مدل مارکویتز پرداخته شد که نتایج آزمون حاکی از برتری عملکرد برون‌نمونه‌ای مدل حداقل حداکثر پشیمانی در تمامی نقاط مرز کارا بود.

با توجه به نتایج پژوهش، پیشنهاد زیر ارائه می‌شود:

- به‌کار بردن رویکرد استوار نسبی جهت انتخاب پرتفوی دارایی‌های ریسکی و ارائه معیار ریسک جدید تحت عنوان پشیمانی به‌عنوان ابزاری مناسب جهت مدیریت ریسک پرتفوی.

همچنین برای پژوهش‌های آتی موضوعات زیر پیشنهاد شده است:

- داده‌های مورد استفاده در این پژوهش در دوره‌ای با ثبات از بازار سرمایه انتخاب شده‌اند که می‌توان با گسترش داده ها، وضعیت‌های مختلفی از بازار را در تخمین پرتفوی‌ها مورد استفاده قرار داد. همچنین با استفاده از روش پنجره غلتان برای ایجاد سبدها می‌توان نتایج تخمین پرتفوی‌های بهینه را به نحو پویاتری بررسی شود.
- می‌توان رویکرد استوار نسبی را روی سایر مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی با تابع‌های هدف متفاوت همچون حداقل‌سازی نیم واریانس و... استفاده کرد.
- در این پژوهش برای ایجاد مدل استوار نسبی از روش وزن‌دهی برای ایجاد مرز کارا به تبعیت از مدل مارکویتز استفاده شد و این روش اگرچه از روش‌های پرکاربرد در بهینه‌سازی چندهدفه است اما می‌توان از سایر رویکردهای حل مسائل بهینه‌سازی چند هدفه همچون بهینه‌سازی آرمانی جهت مقایسه با رویکرد مارکویتز و نیز مقایسه با رویکرد حاضر استفاده کرد.
- همچنین مدل مارکویتز از توابع هدف به‌صورت مطلق استفاده می‌کند که بدین معنا است که مدل مارکویتز تابع‌های هدف را استاندارد سازی نمی‌کند. اگرچه رویکرد پیشنهادی مارکویتز به‌صورت ضمنی یک رویکرد وزن‌دهی است چرا که تنها برای ریسک ضریب تعیین می‌کند ولی می‌توان به راحتی به این نتیجه رسید که مارکویتز در واقع ضریب ریسک را مقدار λ و ضریب بازده مورد انتظار را مقدار یک قرار داده است. در این صورت تعیین مقدار برای λ با مقداری دشواری همراه است. در مدل حداقل حداکثر پشیمانی ایجاد شده نیز از همین رویکرد استفاده شد چرا که هدف ایجاد مدل مارکویتز بر اساس رویکرد استوار حداقل حداکثر پشیمانی بود. اما برای وزن‌دهی از مقادیر λ و $1-\lambda$ استفاده شده است که همواره مقداری بین صفر و یک باشند. استاندارد سازی توابع هدف در مسائل بهینه‌سازی چند هدفه تحت چنین شرایط وزن‌دهی، می‌تواند تاثیر بسزایی در بهبود جواب‌های ارائه شده داشته باشد و حتی نتایج حاصل در این پژوهش را تغییر دهد.

منابع

اسلامی بیدگلی، غلامرضا؛ سارنج، علیرضا (۱۳۸۷). انتخاب پرتفوی با استفاده از سه معیار میانگین بازدهی، انحراف معیار بازدهی و نقدشوندگی در بورس اوراق بهادار تهران. *بررسی‌های حسابداری و حسابرسی*، ۱۵(۴)، ۳-۱۶.

باقری نقنه، عاطفه؛ داوودی، سید محمدرضا و میرصالحی بروجنی، وحید (۱۳۹۹). بهینه‌سازی استوار نسبی سبد سهام با در نظرگرفتن معیار پشیمانی. *دومین کنفرانس بین‌المللی نوآوری در مدیریت کسب‌وکار اقتصاد*، تهران، ایران.

دیدار، حمزه؛ بیکی، خدیجه (۱۳۹۶). بررسی تأثیر کیفیت حاکمیت شرکتی بر رابطهٔ بین ساختار سرمایه و مازاد بازده در شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران. *بررسی‌های حسابداری و حسابرسی*، ۲۴(۲)، ۱۹۷-۲۲۰.

راعی، رضا (۱۳۸۵). انتخاب سبد سرمایه ریسکی با استفاده از شبکه‌های عصبی. *بررسی‌های حسابداری و حسابرسی*، ۱۳(۴)، ۷۰-۸۳.

راعی، رضا؛ هاشمی، سید محمد امیر (۱۳۹۵). تخصیص دارایی استوار بر اساس پیش‌بینی‌های روش‌های اقتصادسنجی (ARMA و GARCH) و فرض عدم قطعیت بازده و کوواریانس. *تحقیقات مالی*، ۱۸(۳)، ۴۱۵-۴۳۶.

فلاح‌پور، سعید؛ تندنویس، فرید (۱۳۹۳). کاربرد مدل پایدار در انتخاب پرتفوی بهینه سهام. *فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری*، ۳(۱۰)، ۶۷- ۸۴.

References

Bagheri Naghneh, A., Davoodi, S. M., & Mirsalehi Borojeni, V. (2020, September). Optimize the relative strength of the portfolio portfolio by taking into account the regret criteria. Paper presented at the second International Conference on innovations in Bussiness administration and Economics, Tehran, Iran. (*in Persian*)

Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations research*, 52(1), 35-53.

Bertsimas, D., & Thiele, A. (2006). Robust and Data-Driven Optimization: Modern Decision Making Under Uncertainty. *Models, Methods, and Applications for Innovative Decision Making*, (March), 95-122.

Caçador, S. C., Godinho, P. M. C., & Dias, J. M. P. C. M. (2020). A minimax regret portfolio model based on the investor’s utility loss. *Operational Research*, 22, 449-484.

Caçador, S., Dias, J. M., & Godinho, P. (2021). Portfolio selection under uncertainty: a new methodology for computing relative-robust solutions. *International Transactions in Operational Research*, 28(3), 1296-1329.

Cornuejols, G., Pena, J., & Tütüncü, R. (2018). *Optimization methods in finance* (2th Ed.). Cambridge University Press.

Didar, H., & Beiki, K. (2017). Reviewing the Effect of Corporate Governance Quality on Relationship between Capital Structure and Additional Return on Companies Listed in Tehran Stock Exchang. *Journal of the Iranian Accounting and Auditing Review*, 24(2), 197-220. (*in Persian*)

Eslami-Bidgoli, G., & Sarenj, A. (2009). Portfolio Selection Using Return Mean, Return Standard Deviation and Liquidity in Tehran Stock Exchange. *Journal of the Iranian Accounting and Auditing Review*, 15(4), 3-16. (*in Persian*)

Fallahpour, S., & Tondnevis, F. (2014). Robust model for optimal portfolio selection. *Investment science*, 3(10), 67-84. (*in Persian*)

Hauser, R., Krishnamurthy, V., & Tütüncü, R. (2013). Relative robust portfolio optimization. *arXiv preprint arXiv:1305.0144.*

Kouvelis, P., & Yu, G. (1997). *Robust Discrete Optimization and Its Applications*. Springer Science & Business Media.

Li, J., & Wang, L. (2020). A minimax regret approach for robust multi-objective portfolio selection problems with ellipsoidal uncertainty sets. *Computers & Industrial Engineering*, 147, 106646.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.

Mohammadi, S. E., & Mohammadi, E. (2018). Robust portfolio optimization based on minimax regret approach in Tehran stock exchange market. *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 11(Special issue: 14th International Industrial Engineering Conference), 51-62.

MOSEK ApS. (2021, March 18). *MOSEK Modeling Cookbook*. Mosek. https://docs.mosek.com/modeling-cookbook/index.html

Mulvey, J. M., Vanderbei, R. J., & Zenios, S. A. (2008). Robust Optimization of Large-Scale Systems. *Operations Research*, 43(2), 264-281.

Raei, R. (2006). Risky Portfolio Selection through Neural Networks. *Journal of the Iranian Accounting and Auditing Review*, 13(4), 70-83. (*in Persian*)

Raei, R., & Hashemi, S. M. A. (2016). Robust Asset Allocation Based on Forecasts of Econometric Methods (ARMA & GARCH) and Uncertainty for Return & Covariance. *Financial Research Journal*, 18(3), 415-436. (*in Persian*)

Simões, G., McDonald, M., Williams, S., Fenn, D., & Hauser, R. (2018). Relative Robust Portfolio Optimization with benchmark regret. *Quantitative Finance*, 18(12), 1991–2003.

Soyster, A. L. (1973). Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming. *Operations Research*, 21(5), 1154–1157.

Tütüncü, R. H., & Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132(1), 157-187.

Xidonas, P., Hassapis, C., Soulis, J., & Samitas, A. (2017). Robust minimum variance portfolio optimization modelling under scenario uncertainty. *Economic Modelling*, 64, 60-71.

Xidonas, P., Mavrotas, G., Hassapis, C., & Zopounidis, C. (2017). Robust multiobjective portfolio optimization: A minimax regret approach. *European Journal of Operational Research*, 262(1), 299-305.