دانشگاه فرهنگیان
فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه
دوره هشتم، شماره ۲۷، تابستان ۱۴۰۱

Farhangian University
Quarterly Journal of Education in Basic Sciences
Volume ۸, Issue ۲۷, Spring, ۲۰۲۲

کنترل اثرراشبا و میدان مغناطیسی بر رفتار زمانی درهمتنیدگی هایبریدی در یک نقطه کوانتومی ناهمسانگرد برای یک حالت اولیه غیردرهمتنیده

فاطمه امیری[۱]

دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۶ پذیرش:۱۴۰۰/۱۲/۱۸

چکیده

در این مقاله، ساز و کار (رفتار زمانی) درهمتنیدگی بین درجات آزادی الکترون (درهمتنیدگی هایبرید) در یک نقطه کوانتومی دو بعدی ناهمسانگرد برای یک حالت اولیه غیر درهمتنیده مورد بررسی قرار گرفته است. با محاسبه تحول زمانی آنتروپی فون نیومن به عنوان سنجه ی درهمتنیدگی بین اسپین و مجموع نوسانگرها نشان داده شده است که درهمتنیدگی هایبرید دچار پدیده فروهش و نمو می شود و خصوصیات آن به پارامترهای قابل کنترل، نظیر پارامتر راشبا و میدان مغناطیسی قویاً وابسته است. همانطور که خواهیم دید با افزایش میدان مغناطیسی، میزان درهمتنیدگی کاهش یافته، در حالی که با افزایش ثابت راشبا این کمیت افزایش می یابد. این نتایج روش های جدیدی برای کنترل میزان درهمتنیدگی میان درجات آزادی الکترون، که نیاز اساسی پردازش اطلاعات کوانتومی است، پیش روی ما قرار می دهد.

کلید واژه ها: نقطه کوانتومی، درهمتنیدگی هایبریدی، اثر راشبا، میدان مغناطیسی.

[۱] استادیار گروه علوم پایه، دانشگاه فرهنگیان، شیراز، ایران، fatemeh_۶۲@Yahoo.com

۱-مقدمه

نظریه اطلاعات کوانتومی با بهره‌گیری از ویژگی‌هایی صرفاً کوانتومی مانند درهمتنیدگی، در مواردی برتری‌هایی بر نظریه اطلاعات کلاسیکی دارد. باحالت‌های درهمتنیده می‌توان ظرفیت ذخیره اطلاعات و نیز سرعت پردازش آن را افزایش داد. امروزه کاربردهای زیادی برای حالت‌های درهمتنیده پیشنهادشده است[۳-۱]. در هر یک از کاربردها ویژگی‌های مختلفی از درهمتنیدگی مورداستفاده قرار می‌گیرد. به‌عنوان‌مثال در فناوری اطلاعات در بعضی مواقع نیاز است که درهمتنیدگی حداکثر میزان خود را داشته و در شرایط دیگری لازم است که کاملاً از بین برود(مرگ ناگهانی درهمتنیدگی) و یا از یک سیستم به سیستمی دیگر انتقال یابد[۴]. بدین ترتیب چگونگی تولید و توصیف ویژگی‌های درهمتنیدگی به حوزه‌ی وسیعی از پژوهش تبدیل‌شده است. برای درک روشنی از مفهوم درهمتنیدگی نیاز به بررسی و چگونگی تولید و کنترل آن در محیط‌های گوناگون است که برای آن سیستم‌های مختلف حالت جامدی چون نقاط کوانتومی می‌تواند کاندیدای مناسبی باشد. با توجه به استفاده از درهمتنیدگی کوانتومی در پردازش اطلاعات می‌توان با بهره‌برداری از نقاط کوانتومی، به طراحی کامپیوترهای کوانتومی دست یافت. هدف ما در این مقاله بررسی زمینه‌هایی است که در ساخت ابزارهای تحلیل اطلاعات، می‌توانند بالقوه مفید واقع شوند. در این ارتباط می‌توان از درهمتنیدگی میان سیستم‌های فیزیکی متمایز و یا درهمتنیدگی میان درجات آزادی یک سیستم بهره برد.

درهمتنیدگی بین درجات آزادی مستقل یک‌ذره که امروزه به درهمتنیدگی‌هایبرید مشهور است، یک روش جدید برای پردازش اطلاعات و انتقال اطلاعات کوانتومی را فراهم کرده است[۷-۵]. در این راستا حالت‌های درهمتنیده هایبرید یکی از موضوعات بسیار مهم در فناوری اطلاعات کوانتومی بشمار آمده و اخیراً هم به‌صورت تئوری و هم تجربی مورد بررسی قرارگرفته است [۱۴-۸]. تاکنون مدل‌های مختلفی با استفاده از حالت‌های درهمتنیده هایبرید برای نیل به اهداف فناوری و پردازش اطلاعات کوانتومی ارائه گردیده است. در این ارتباط، مطالعه ویژگی‌ها و خواص درهمتنیدگی بین درجات آزادی یک‌ذره (هایبرید) در نانو ساختارهای کوانتومی، کریستال هایی در حد نانو از مواد نیم‌رسانا، یکی از گزینه‌های پیش رو به شمار می‌رود.

بدین منظور سیستم مورد بررسی در این مقاله، ترکیبی است از دو ماده متفاوت گالیم ارسناید($GaAs$) و ایندیم گالیم ارسناید($InGaAs$)که بر روی‌هم قرارگرفته‌اند (با فصل مشترک تخت)، است[۱۵]. در فصل مشترک این نانو ساختار، الکترونهای رسانش یک گاز الکترونی دوبعدی را تشکیل می دهند[۱۵،۱۶].با محدود کردن این گاز در هر دو بعد (در اینجا x و y) یک نقطه کوانتومی دو بعدی خواهیم داشت (که در راستای z توسط ساختار ناهمگن محدود شده است) به خاطر گافهای انرژی متفاوت این دو ماده، یک پتانسیل عمیق نا متقارن درراستای عمود بر فصل مشترک تشکیل می شود. عدم تقارن پتانسیل فصل مشترک، منجر به اثر وابسته به اسپین، به نام بر هم کنش اسپین- مدار راشبا، می شود[۱۹-۱۷]. این اثر به دلیل عدم وجود خاصیت تقارن معکوس ایجاد می شود از آنجا که اثر راشبا را می توان توسط صفحات پتانسیل خارجی کنترل کرد، این اثر یک مکانیسم برای کنترل حالت های الکترونی را تشکیل می دهد. درچنین نانو ساختارهایی الکترونهای رسانش یک گاز الکترونی دو بعدی را در فصل مشترک تخت تشکیل می دهند. به علاوه تفاوت مواد در سامانه، همراه با میدانهای الکتریکی خارجی به کار رفته، آزادی حرکت الکترون را کاهش می دهد و آن را در یک نقطه کوانتومی دو بعدی محدود می کند. این محدودیت می تواند در هر دو راستای یک نقطه کوانتومی ناهمسانگرد دو بعدی با فرکانس های متفاوت، سهمی شکل باشد[۲۰]. به علت تقارن تخت برگشت زمان، حالت اسپینی الکترون در این سیستم دارای تبهگنی کرامرز است که با اعمال یک میدان مغناطیسی یکنواخت و عمود بر صفحه نقطه کوانتومی در راستای محور z ها،رفع می شود[۲۱]. بنابراین درادامه، یک الکترون محدود شده در یک نقطه کوانتومی ناهمسانگرد دو بعدی، با محدودیت سهمی شکل و در یک میدان مغناطیسی یکنواخت را در نظر می گیریم.

در این مقاله درهمتنیدگی بین درجات آزادی الکترون ها، درهمتنیدگی هایبریدی، در یک نانو نقطه ی دوبعدی و ناهمسانگرد تحت تأثیر میدان مغناطیسی و اثر راشبا مورد بررسی ، قرار می‌دهیم. خاطر نشان می کنیم که این درهمتنیدگی بین درجات آزادی فضایی و اسپینی الکترون صورت می گیرد. برای این منظور ابتدا هامیلتونی تبدیل یافته ی الکترون در نقطه

کوانتومی دوبعدی ناهمسانگرد در یک میدان مغناطیسی یکنواخت همراه با اثر راشبا معرفی می نماییم. و با معرفی یک عملگر کازیمیر [۱] که ویژه مقادیر آن برانگیختگی‌های سیستم را نشان می‌دهد، به محاسبه درهمتنیدگی حالت های الکترون می‌پردازیم.

۲- هامیلتونی سیستم

هامیلتونی سیستم الکترونهای محدود شده توسط پتانسیل سهموی ناهمسانگرد تحت اثر یک میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی و عمود برسطح آن، همراه با برهم کنش اثر اسپین- مدار راشبا به صورت زیر بیان می شود[۲۱].

$$H=\frac{(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m^*}+V_c(x,y)-\frac{\alpha}{\hbar}[(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A})\times\vec{\sigma}]_z+\frac{1}{2}g\mu_B B\sigma_z\ , \tag{۱}$$

اولین جمله در معادله (۱) بیانگر انرژی جنبشی الکترون در حضور میدان مغناطیسی که توسط پتانسیل برداری $\vec{A}$ توصیف می‌شود و $\vec{p}=-i\hbar\nabla$ تکانه الکترون، m^* (که در $InGaAs$، $m^*=0.05m_e$ است) جرم مؤثر الکترون، دومین جمله $V_c(x,y)=\frac{1}{2}m_e^*(\omega_{0x}^2x^2+\omega_{0y}^2y^2)$ ،پتانسیل محدودیت است. α بیانگر پارامتر راشبا برای برهم‌کنش اسپین- مدار و آخرین جمله بیانگر اثر زیمان است که در آن $\vec{\sigma}$ ماتریس‌های پائولی ، μ_B مگنتون بوهر $(\mu_B=\frac{e\hbar}{2m_e^*c})$ است. و در آن g بیانگر، فاکتور لانداو مربوط به الکترون (که در $InGaAs$ ، $g=-4$ است) می باشد، با انتخاب پیمانه متقارن برای پتانسیل برداری $\vec{A}$، $\vec{A}=\frac{B}{2}(-y,x,0)$، و جایگذاری $V_c(x,y)$ در معادله (۱) آنرا می توان به صورت زیر نوشت:

(۲)

$$H=\frac{p_x^{\ 2}}{2m^*}+\frac{1}{2}m^*\Omega_x^{\ 2}x^2+\frac{p_y^{\ 2}}{2m^*}+\frac{1}{2}m^*\Omega_y^{\ 2}y^2+\frac{\omega_c}{2}(xp_y-yp_x)$$
$$-\frac{\alpha}{\hbar}[(p_x-\frac{eB}{2c}y)\sigma_y-(p_y-\frac{eB}{2c}x)\sigma_x]+\frac{\hbar\omega_c}{4}\frac{m}{m_0}g\sigma_z$$

که در آن $\omega_c=\frac{eB}{m_e^*c}$ فرکانس سیکلوترونی، $\Omega_{x(y)}=\sqrt{\omega_{0x(y)}^{\ 2}+\frac{\omega_c^{\ 2}}{4}}$. عملگرهای خلق و نابودی یک نوسانگر هماهنگ ساده دوبعدی را به‌صورت زیر تعریف می کنیم

$$a_{x(y)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m_e^*\Omega_{x(y)}}{\hbar}}\ x(y)+\sqrt{\frac{1}{\hbar m_e^*\Omega_{x(y)}}}P_{x(y)}),$$
$$a_{x(y)}^{\ \dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m_e^*\Omega_{x(y)}}{\hbar}}\ x(y)-i\sqrt{\frac{1}{\hbar m_e^*\Omega_{x(y)}}}P_{x(y)}) \tag{۳}$$

عملگرهای خلق و نابودی طوری تعریف شده‌اند که رابطه جابجایی زیر برقرار می‌سازند،

$$[a_i,a_j^{\ \dagger}]=\delta_{ij}\ ,\quad i,j=x,y \tag{۴}$$

اگر عملگرهای مکان و تکانه ،در هر بعد را، برحسب عملگرهای خلق و نابودی نوسانگر نوشته شده و رابطه جابجایی (۴) بکار رود، هامیلتونی به‌صورت زیر در خواهد آمد:

---

[۱] Casimir operator

(۵)

$$H=\hbar\Omega_x(a_x^\dagger a_x+\frac{1}{2})+\hbar\Omega_y(a_y^\dagger a_y+\frac{1}{2})+i\,\frac{\omega_c}{4}(\frac{\Omega_x+\Omega_y}{\Omega_x\Omega_y})(a_x a_y^\dagger-a_x^\dagger a_y)$$
$$+\hbar\omega_x(a_x\sigma_++a_x^\dagger\sigma_-)+i\,\hbar\omega_y(-a_y\sigma_++a_y^\dagger\sigma_-)+\frac{\hbar\omega_c}{4}\frac{m}{m_0}g\,\sigma_z$$

که در آن $\omega_{x(y)}=\frac{\alpha}{\hbar^2}(\frac{\sqrt{2m\hbar\Omega_{x(y)}}}{2}+\frac{eB}{4c}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\Omega_{x(y)}}})$ و عملگرهای نردبانی اسپین را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_\pm=\frac{1}{2}(\sigma_x\pm i\,\sigma_y)\qquad(۶)$$

که در معادله (۵) دو جمله اول بیانگر انرژی یک نوسانگر ناهمسانگرد دوبعدی با فرکانس‌های Ω_x و Ω_y می‌باشد. جمله سوم توصیف کننده برهم‌کنش دو نوسانگر که ناشی از انتخاب پیمانه متقارن در جمله $\vec{A}.\vec{P}$ هامیلتونی است. جملات چهارم و پنجم برهم‌کنش اسپین با نوسانگر، ناشی از برهمکنش اسپین- مدار راشبا. جمله آخر برهم‌کنش اسپین و میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد که همان اثر زیمان است. با استفاده از یک تبدیل یکانی هامیلتونی را برحسب نوسانگرهای جدیدی به دست آورده که فرم ساده‌تری به خود می‌گیرد. درنهایت هامیلتونی تبدیل یافته را برای محاسبه رفتار زمانی درهمتنیدگی‌هایبریدی بین حالت‌های الکترون در چنین ساختاری مورداستفاده قرار خواهیم داد.

بنابراین با اعمال تبدیل یکانی

$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ i\sin\theta & -i\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}\qquad(۷)$$

که در آن $\theta=\tan^{-1}\frac{\omega_x}{\omega_y}$ بر روی هامیلتونی (۵) خواهیم داشت:

$$\tilde{H}=\hbar[\sum_{k=x,y}\tilde{\Omega}_k b_k^\dagger b_k+\frac{\omega_c m^*}{4m_0}\mathrm{g}\,\sigma_z+\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2}\,(b_x^\dagger\sigma_-+b_x\sigma_+)]\qquad(۸)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در این نمایش، تبادل انرژی بین نوسانگرها و اسپین-نوسانگر در جهت y وجود ندارد.
اثرات این دو نوع برهم‌کنش به ترتیب در فرکانس‌های نوسانی جدید

$$\tilde{\Omega}_x=\Omega_x\cos^2\theta+\Omega_y\sin^2\theta+\lambda\sin2\theta$$
$$\tilde{\Omega}_y=\Omega_x\sin^2\theta+\Omega_y\cos^2\theta-\lambda\sin2\theta\qquad(۹)$$

با $\lambda=\frac{\omega_c}{4}(\frac{\Omega_x+\Omega_y}{\Omega_x\Omega_y})$ و قدرت جفت شدگی نوسانگر نوع x و اسپین ظاهر می‌شوند. عملگر تعداد برانگیختگی کل، $N=a_x^\dagger a_x+a_y^\dagger a_y+\sigma_+\sigma_-$ با ویژه مقدار n تحت تبدیلات یکانی با $\lambda=\frac{\omega_c}{4}(\frac{\Omega_x+\Omega_y}{\Omega_x\Omega_y})$ و قدرت جفتیدگی نوسانگر نوع x و اسپین ظاهر می‌شوند. عملگر تعداد برانگیختگی کل، $N=a_x^\dagger a_x+a_y^\dagger a_y+\sigma_+\sigma_-$ با ویژه مقدار n تحت تبدیلات یکانی ناورداست و با هامیلتونی کل معادله (۵) جابجا می‌شود و بنابراین عملگر کازیمر سیستم است. در نتیجه نمایش هامیلتونی کل در پایه‌های N قطعه‌ای $-$قطری است با بعد $2n+1$ برای هر قطعه. اما به راحتی می‌توان نشان داد هامیلتونی تبدیل یافته، معادله (۸) با هر دو عملگر $\tilde{N}=b_x^\dagger b_x+b_y^\dagger b_y+\sigma_+\sigma_-$ و $\tilde{N}_y=b_y^\dagger b_y$ جابجا می‌شود

و هر دو ثابت حرکت هستند. در این صورت هامیلتونی تبدیل یافته معادله (۸) برای هر قطعه شامل یک زیر قطعه 1×1 و n تا زیر قطعه 2×2 می‌باشد.

ازآنجایی‌که هامیلتونی سیستم مذبور شامل درجه اسپینی، $\left|s\right\rangle$، و فضایی $\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y\right\rangle$، می‌باشد، این هامیلتونی را در فضای هیلبرت $\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y\right\rangle\otimes\left|\pm\right\rangle$ بررسی می‌نماییم. نمایش هامیلتونی (۸) در نماد دیراک را با استفاده از عملگر واحد $\sum_{\tilde{n}_x,\tilde{n}_y}(\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right|+\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,-\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,-\right|)$ به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\tilde{H}=\sum_{\tilde{n}_y}\hbar(\tilde{\Omega}_y\tilde{n}_y-\frac{\omega_0}{2})\left|0,\tilde{n}_y,-\right\rangle\left\langle 0,\tilde{n}_y,-\right|+\sum_{\tilde{n}_x,\tilde{n}_y}H(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y) \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)&=\hbar[\tilde{\Omega}_x\tilde{n}_x+\tilde{\Omega}_y\tilde{n}_y+\omega_0]\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right|\\&+\hbar[\tilde{\Omega}_x(\tilde{n}_x+1)+\tilde{\Omega}_y\tilde{n}_y+\omega_0]\left|\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right|\\&+\hbar\sqrt{(\omega_x^2+\omega_x^2)(\tilde{n}_x+1)}[\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right|\\&+\left|\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right|]\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

همان‌طور که از معادله (۱۰) می‌بینیم، جمله اول قطعه‌های 1×1 و جمله دوم قطعه‌های 2×2 را می‌دهد. ویژه مقدار و ویژه حالت قطعات 1×1 به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(۱۲)\ \tilde{E}(0,\tilde{n}_y)=\hbar(\tilde{\Omega}_y\tilde{n}_y-\frac{\omega_0}{2})$$

و

$$(۱۳)\ \left|\psi(0,\tilde{n}_y)\right\rangle=\left|0,\tilde{n}_y,-\right\rangle$$

ویژه مقادیر هر قطعه 2×2 درحالی‌که با قطری کردن قطعات

$$(۱۴)\ \begin{aligned}\left|\tilde{\psi}_1(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)\right\rangle&=\alpha_1\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right\rangle+\alpha_2\left|\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right\rangle\\\left|\tilde{\psi}_2(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)\right\rangle&=\alpha_2\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right\rangle-\alpha_1\left|\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right\rangle\end{aligned}$$

با ویژه مقادیر

$$(۱۵)\ \tilde{E}_{1,2}(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)=\hbar[\tilde{\Omega}_x(\tilde{n}_x+\frac{1}{2})+\tilde{\Omega}_y\tilde{n}_y\pm\frac{1}{2}R(\tilde{n}_x)]$$

به دست می‌آیند که در آن‌ها

$$(۱۶)\ \alpha_1=\frac{2\sqrt{(\omega_x^2+\omega_y^2)(\tilde{n}_x+1)}}{\sqrt{(\tilde{\Omega}_x-\frac{\omega_c m^*}{4m_0}\mathrm{g}+R(\tilde{n}_x))^2+(\omega_x^2+\omega_y^2)(\tilde{n}_x+1)}}$$

که از بهنجارش آنها داریم $\left|\alpha_2\right|=\sqrt{1-\left|\alpha_1\right|^2}$,

$$R(\tilde{n}_x)=\sqrt{(\tilde{\Omega}_x-\frac{\omega_c m^*}{4m_0}\mathrm{g})^2+(\omega_x^2+\omega_y^2)(\tilde{n}_x+1)} \qquad (۱۷)$$

که در بخش بعدی از معادلات (۱۲) تا (۱۷) برای محاسبه عملگر تحول زمانی تبدیل یافته استفاده می‌شود.

۳- عملگر یکانی تحول زمانی تبدیل یافته

فرض نمایید حالت اولیه سیستم فیزیکی مورد بررسی در لحظه‌ی t_0 با $\left|\alpha,t_0\right\rangle$ نمایش داده شود. به‌طورکلی نمی‌توان انتظار داشت که در لحظات بعد نیز سیستم در همان حالت باقی بماند، بلکه تحول زمانی سیستم حالت آن را دگرگون نموده و به حالت $\left|\alpha,t\right\rangle$ تبدیل می‌نماید. این دو حالت به‌وسیله‌ی یک عملگر یکانی به نام عملگر تحول زمانی $U(t,t_0)$ به‌صورت زیر به یکدیگر مربوط می‌گردند:

$$\left|\alpha,t\right\rangle = U(t,t_0)\left|\alpha,t_0\right\rangle \qquad (۱۸)$$

یکانی بودن این عملگر به‌عنوان مهم‌ترین خصوصیت آن، پایستاری احتمال را با گذشت زمان تضمین می‌نماید

جهت دست یابی به عملگر تحول زمانی می‌بایست از معادله شرودینگر بهره بریم. این عملگر در این معادله صدق می‌کند (۱۹).

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = HU(t,t_0)$$

اگر هامیلتونی سیستم مستقل از زمان باشد، نمونه‌ی مورد بررسی در این مقاله، پاسخ معادله‌ی (۱۹) به‌صورت زیر خواهد بود

$$U(t,t_0) = \exp\left[-iH(t-t_0)/\hbar\right] \qquad (۲۰)$$

برای محاسبه عملگر تحول زمانی در معادله (۲۰)، از نمایشی که در آن هامیلتونی قطری است، استفاده می‌شود. در این نمایش، ماتریس تحول زمانی به‌صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} U_{diagonalized}(\mathrm{t}) &= \sum_{\tilde{n}_y} e^{-i\tilde{E}(0,\tilde{n}_y)\mathrm{t}/\hbar}\left|0,\tilde{n}_y,-\right\rangle\left\langle 0,\tilde{n}_y,-\right| \\ &+ \sum_{\tilde{n}_x,\tilde{n}_y}[e^{-i\tilde{E}_1(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)\mathrm{t}/\hbar}\left|\tilde{\psi}_1(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)\right\rangle\left\langle\tilde{\psi}_1(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)\right| \\ &+ e^{-i\tilde{E}_2(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)\mathrm{t}/\hbar}\left|\tilde{\psi}_2(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)\right\rangle\left\langle\tilde{\psi}_2(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)\right|] \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

جهت بررسی سیستم در فضای اصلی $\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y\right\rangle\otimes\left|\pm\right\rangle$ می‌بایست فرم عملگر تحول زمانی را در این فضا به دست آوریم. این امر با انجام یک تبدیل یکانی امکان‌پذیر می‌باشد.

$$\tilde{U}(t) = \tilde{V}^{\dagger}_{transformation}\,\tilde{U}_{diagonalized}\,\tilde{V}_{transformation} \qquad (۲۲)$$

در رابطه‌ی بالا $\tilde{V}_{transformation}$ معرف عملگر تبدیل یکانی پایه‌هاست. بنابراین عملگر تحول زمانی در فضای هیلبرت $\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y\right\rangle\otimes\left|\pm\right\rangle$ به‌صورت زیر حاصل خواهد شد

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) &= \sum_{\tilde{n}_y}\tilde{U}(0,\tilde{n}_y,\mathrm{t})\left|0,\tilde{n}_y,-\right\rangle\left\langle 0,\tilde{n}_y,-\right| \\ &+ \sum_{\tilde{n}_x,\tilde{n}_y}[\tilde{U}_{11}(\tilde{n}_y,\tilde{n}_y,\mathrm{t})\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right| \\ &+ \tilde{U}_{22}(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,\mathrm{t})\left|\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right| \\ &+ \tilde{U}_{12}(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,\mathrm{t})(\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right| + \left|\tilde{n}_x+1,\tilde{n}_y,-\right\rangle\left\langle\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,+\right|] \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

که در آن

$$\tilde{U}(0,\tilde{n}_y,t)=e^{-i\tilde{E}(0,\tilde{n}_y)t/\hbar}$$
$$\tilde{U}_{1,1}(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,t)=|\alpha_1|^2 e^{-i\tilde{E}_1(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)t/\hbar}+|\alpha_2|^2 e^{-i\tilde{E}_2(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)t/\hbar}$$
$$\tilde{U}_{1,2}(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,t)=\tilde{U}^*_{2,1}(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,t) \quad (۲۴)$$
$$=\alpha_1\alpha_2(e^{-i\tilde{E}_1(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)t/\hbar}-e^{-i\tilde{E}_2(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)t/\hbar})$$
$$\tilde{U}_{2,2}(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,t)=|\alpha_2|^2 e^{-i\tilde{E}_1(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)t/\hbar}+|\alpha_1|^2 e^{-i\tilde{E}_2(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y)t/\hbar}$$

برای به دست آوردن تحول زمانی سیستم تبدیل یافته، فضای هیلبرت اصلی $\left|n_x,n_y,\pm\right\rangle$ را به فضای هیلبرت جدید $\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,\pm\right\rangle$ می‌بریم. بدین منظور در پایان این بخش، ارتباطی بین حالت‌های نوسانگر در نمایش قدیم و نمایش تبدیل یافته ایجاد می‌کنیم که حالت‌های نوسانگری (در دو بعد) از اثر مکرر عملگر خلق (در دو بعد) روی حالت خلأ به دست می‌آید:

$$\left|n_x,n_y\right\rangle=\frac{(a_x^\dagger)^{n_x}(a_y^\dagger)^{n_y}}{\sqrt{n_x}\sqrt{n_y}}\left|0,0\right\rangle \quad (۲۵)$$

با استفاده از رابطه اخیر خواهیم داشت

$$\left|\tilde{n}_x,\tilde{n}_y\right\rangle=(-i)^{n_y}\sqrt{n_x!}\sqrt{n_y!}\sum_{p}^{n_x}\sum_{p'}^{n_y}C(n_x,n_y,p,p') \quad (۲۶)$$
$$(\cos\theta)^{n_x-p+p'}(\sin\theta)^{n_y+p-p'}\left|n_x-p+n_x-p',p+p'\right\rangle$$

که در آن $C(n_x,n_y,p,p')=\frac{(-1)^{p'}\sqrt{(n_x-p+n_x-p')!}\sqrt{(p+p')!}}{p!p'!(n_x-p)!(n_y-p)!}$. لازم به ذکر است، برای به دست آوردن رابطه (۲۶) از این حقیقت، $\left|\tilde{0},\tilde{0},\pm\right\rangle=\left|0,0,\pm\right\rangle$ استفاده شده است

٤- دینامیک عملگر چگالی،برای حالت اولیه غیر درهم تنیده $\left|0,1,+\right\rangle$

ازآنجاکه برای به دست آوردن عملگر چگالی در ابتدا باید حالت اولیه مشخص شود. بدین منظور در این بخش، عملگر چگالی وقتی‌که حالت اولیه سیستم، یک حالت کاملاً غیر درهمتنیده با برانگیختگی دو یعنی حالت $\left|\psi(0)\right\rangle=\left|0,1,+\right\rangle$، بررسی می‌شود. همان‌طور که گفته شد برای به دست آوردن تحول زمانی سیستم تبدیل یافته باید از فضای هیلبرت اصلی به فضای هیلبرت جدید برویم بنابراین

$$\left|\tilde{\psi}(0)\right\rangle=i\cos\left|0,1,+\right\rangle-i\sin\left|1,0,+\right\rangle \quad (۲۷)$$

در این وضعیت، حالت تحول یافته سیستم تبدیل یافته، به شکل زیر می‌باشد:

$$\left|\tilde{\psi}(t)\right\rangle=\tilde{U}(t)\left|\tilde{\psi}(0)\right\rangle=i\cos[\tilde{U}_{11}(0,1)+\tilde{U}_{12}(0,1)]\left|\tilde{0},\tilde{1},+\right\rangle \quad (۲۸)$$
$$-i\sin[\tilde{U}_{11}(1,0)+\tilde{U}_{12}(1,0)]\left|\tilde{1},\tilde{0},+\right\rangle$$

که در آن $\tilde{U}_{11}(0,1)$، $\tilde{U}_{12}(0,1)$ ، $\tilde{U}_{11}(1,0)$ و $\tilde{U}_{12}(1,0)$ در معادله (۲۴) تعریف شده است. بدین ترتیب و با استفاده از معادله (۲۸) عملگر چگالی سیستم به‌صورت زیر به دست می‌آید،

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(t) &= \left|i\cos[\tilde{U}_{11}(0,1)+\tilde{U}_{12}(0,1)]\right|^2 \left|\tilde{0},\tilde{1},+\right\rangle\left\langle\tilde{0},\tilde{1},+\right| \\ &+ i\cos[\tilde{U}_{11}(0,1)+\tilde{U}_{12}(0,1)](-i\sin[\tilde{U}_{11}(1,0)+\tilde{U}_{12}(1,0)])^* \left|\tilde{0},\tilde{1},+\right\rangle\left\langle\tilde{1},\tilde{0},+\right| \\ &+ \tilde{U}_{21}(0,0)\tilde{U}_{11}^*(0,0)\left|\tilde{1},\tilde{0},+\right\rangle\left\langle\tilde{1},\tilde{0},+\right| \\ &- i\sin[\tilde{U}_{11}(1,0)+\tilde{U}_{12}(1,0)](i\cos[\tilde{U}_{11}(0,1)+\tilde{U}_{12}(0,1)])^* \left|\tilde{1},\tilde{0},+\right\rangle\left\langle\tilde{0},\tilde{1},+\right|\end{aligned} \tag{۲۹}$$

اکنون با استفاده از عملگر چگالی به دست آمده، به دنبال ماتریس چگالی کاهش‌یافته نسبت به یکی از زیرسیستم‌ها هستیم. ازآنجایی‌که هدف نهایی به دست آوردن درهمتنیدگی است و درهمتنیدگی بین دو زیرسیستم تعریف می‌شود (در اینجا درهمتنیدگی اسپین- مجموع نوسانگرها) بدین منظور نسبت به حالت‌های اسپینی رد می گیریم. بنابراین عملگر $\rho(t)$ را بین حالت‌های برا و کت‌های $\langle+|,|+\rangle$ و $\langle-|,|-\rangle$ قرار می‌دهیم، آنچه به دست می‌آید عملگر چگالی کاهش‌یافته نام دارد [۲۲] و اندیس R نیز اشاره به این موضوع دارد بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_R(t) &= \left|i\cos[\tilde{U}_{11}(0,1)+\tilde{U}_{12}(0,1)]\right|^2 \left|\tilde{0},\tilde{1}\right\rangle\left\langle\tilde{0},\tilde{1}\right| \\ &+ i\cos[\tilde{U}_{11}(0,1)+\tilde{U}_{12}(0,1)](-i\sin[\tilde{U}_{11}(1,0)+\tilde{U}_{12}(1,0)])^* \left|\tilde{0},\tilde{1}\right\rangle\left\langle\tilde{1},\tilde{0}\right| \\ &+ \tilde{U}_{21}(0,0)\tilde{U}_{11}^*(0,0)\left|\tilde{1},\tilde{0}\right\rangle\left\langle\tilde{1},\tilde{0}\right| \\ &- i\sin[\tilde{U}_{11}(1,0)+\tilde{U}_{12}(1,0)](i\cos[\tilde{U}_{11}(0,1)+\tilde{U}_{12}(0,1)])^* \left|\tilde{1},\tilde{0}\right\rangle\left\langle\tilde{0},\tilde{1}\right|\end{aligned} \tag{۳۰}$$

حال در ادامه در بخش بعد، درهمتنیدگی هایبرید اسپین- مجموع نوسانگرها محاسبه خواهیم کرد.

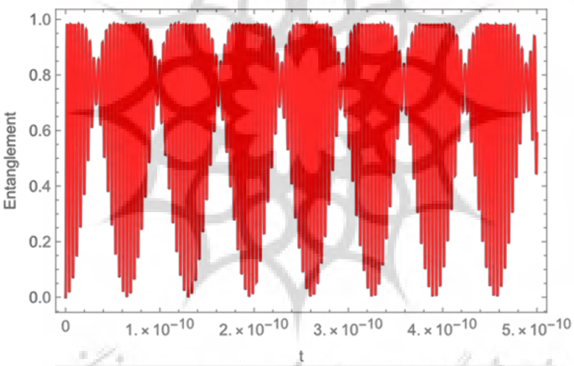
۵- درهمتنیدگی هایبریدی بین اسپین و زیرلایه های ساختاری(اجتماع نوسانگرها)

برای سنجش این درهمتنیدگی ابتدا روی حالت اسپینی ردگیری جزئی انجام داده (این عمل معادل ردگیری روی حالت نوسانگر است)، ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ای نتیجه می‌شود معادله (۳۰) با جایگذاری ویژه مقادیر این معادله در آنتروپی فون نویمان ، $\tilde{S}(\tilde{\rho}_R(t)) = -tr[\tilde{\rho}_R(t)\log_2\tilde{\rho}_R(t)] = -\sum\lambda_i\log_2\lambda_i$، درهمتنیدگی بین اسپین و مجموع نوسانگرها به دست می آید.

از طرف دیگر، شرط لازم برای آن‌که زیر فضای اسپینی و زیر فضای نوسانگری درهمتنیده باشد آن است که ماتریس چگالی کاهش‌یافته خود نمایشی از آنسامبل های آمیخته باشد. بنابراین مشخصات ماتریس چگالی کاهش‌یافته را می‌توان شاهدی بر درهمتنیدگی دانست.

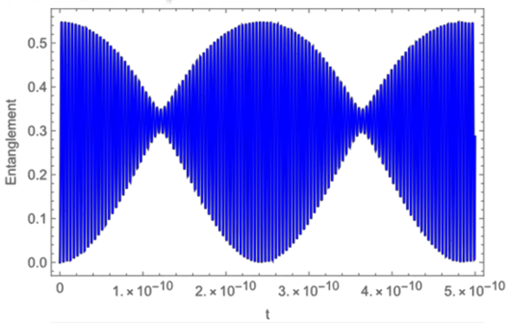
بر اساس معادلات (۱۵) و (۲۴) مشاهده می‌شود که میدان مغناطیسی خارجی و پارامتر راشبا بر رفتار زمانی درهمتنیدگی‌هایبرید اسپین–نوسانگرها تأثیر بسزایی دارد. رفتار زمانی درهمتنیدگی اسپین–نوسانگر و میزان درهمتنیدگی که با آنتروپی فون نویمان سنجیده می‌شود، در شکل‌های (۱) تا (۵) نشان داده شده است. این نمودارها با استفاده از پارامترهای موجود در مرجع [۲۱] برای $InGaAs/GaAs$ رسم شده است. هم‌چنین در مرجع[۲۱]، مقادیر پارامتر راشبا از $\times 1.6\times10^{-12}eVm$ (۲ تا ۰,۳) نشان داده شده است. ابعاد نقطه کوانتومی به‌صورت $L_{0x}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m^*\omega_{0x}}}\right)=\frac{1}{2}L_{0y}=10nm$ در نظر گرفته شده است. در اولین شکل، رفتار درهمتنیدگی اسپین–نوسانگر برحسب زمان (از مرتبه دوره‌ی تناوب نوسانگرها) به عنوان مرجع مقایسه انتخاب شده و ستون سمت چپ از پایین به بالا تنها ثابت راشبا افزایش پیدا می کند. ستون سمت راست در هر شکل به اثر میدان مغناطیسی اختصاص دارد و از بالا به پایین افزایش می یابد.

با یک نگاه اجمالی به شکل‌های (۱) تا (۵)، ویژگی‌های کلی درهمتنیدگی اسپین- نوسانگر به شرح زیر حاصل می‌شود: اول آنکه تحول زمانی درهمتنیدگی ترکیبی از توابع دوره ای زمانی با فرکانسهای مختلف می‌باشد که این، منجر به تشکیل پوشهایی بر نوسانها می‌شود. اطلاعات به‌صورت تناوبی از حالت‌های اسپینی به حالت‌های نوسانگری انتقال می‌یابد. درهمتنیدگی تحت شرایط خاص و قابل کنترل، به مقدار بیشینه یک می‌رسد و به طور دوره‌ای پدیده فروهش و نمو رخ می‌دهد. می توان اثرات میدان مغناطیسی و پارامتر راشبا را بر میزان درهم تنیدگی، فرکانس و دامنه پدیده فروهش و نمو از این شکلها به وضوح استخراج کرد. از مقایسه نمودارهای سمت راست (۲) و (۴) مشاهده می شود که دوره فروهش و نمو، علاوه بر مقدار ماکزیمم، با افزایش میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد.از طرف دیگر، مقایسه نمودارهای سمت چپ (۳) و(۵) که در آنها ثابت اسپین- مدار راشبا از پایین به بالا افزایش یافته است، نشان می‌دهد که مقدار ماکزیمم درهمتنیدگی با افزایش اثر راشبا افزایش یافته علاوه بر این زمان تناوب پدیده فروهش و نمو افزایش می‌یابد. دلیل فیزیکی برای چنین رفتار زمانی درهمتنیدگی اسپین-نوسانگر به شرح زیر است. از ساختار هامیلتونی کل سیستم معادله (۱) به‌طور روشن دیده می‌شود که پارامتر راشبا و بخشی از میدان مغناطیسی باعث آمیختگی اسپین الکترون و حالت‌های نوسانگری می‌شود که باعث به وجود آمدن درهمتنیدگی می‌شود. از طرفی دیگر ویژه مقادیر کل هامیلتونی که در آن فرکانس نوسانات متناسب با قدرت میدان مغناطیسی خارجی است (معادله (۱۰) را ببینید). بنابراین برای میدان مغناطیسی کوچک (طول مغناطیسی بزرگ) فاصله‌ی ترازهای انرژی از یکدیگر کوچک می‌باشد و درحالی‌که برای میدان‌های بزرگ این فاصله بزرگ می‌شود (همچنین معادله (۱۰) را ببینید). در نتیجه برای میدان‌های مغناطیسی کمتر، جفتیدگی اسپین-نوسانگری ضعیف‌تر عمل می‌کند.



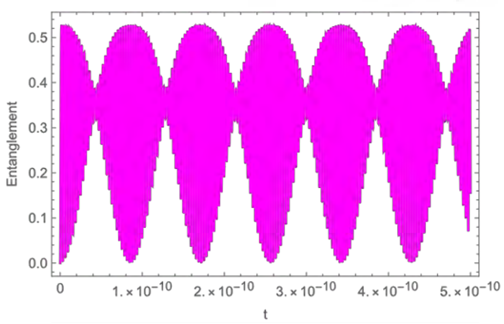
شکل ۱. دینامیک درهم تنیدگی به ازای

$$l_B = 6\times10^{-8} m \text{ و } \alpha = 2\times10^{-12} eVm$$



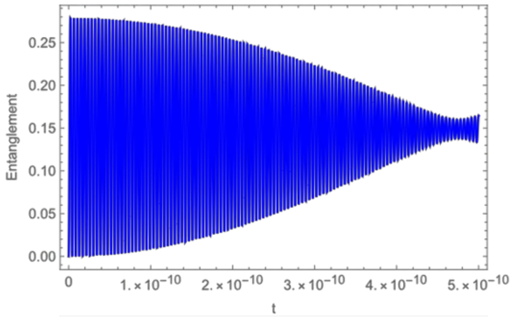
شکل ۲. دینامیک درهم تنیدگی به ازای

$$l_B = 7\times10^{-9} m \text{ و } \alpha = 2\times10^{-12} eVm$$



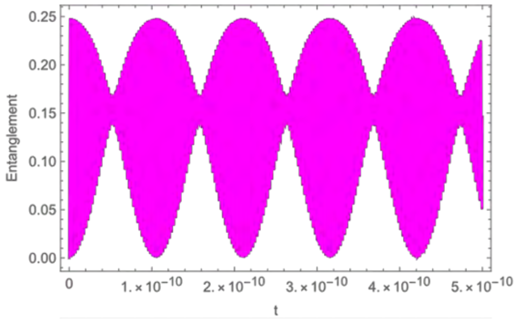
شکل ۳. دینامیک درهم تنیدگی به ازای

$$l_B = 6\times10^{-8} m \text{ و } \alpha = 1\times10^{-12} eVm$$



شکل ۴. دینامیک درهم تنیدگی به ازای

$l_B = 2\times10^{-9}m$ و $\alpha = 2\times10^{-12}eVm$



شکل ۵. دینامیک درهم تنیدگی به ازای

$l_B = 6\times10^{-8}m$ و $\alpha = 0.3\times10^{-12}eVm$

٦- نتایج

در این مقاله دینامیک در همتنیدگی هایبریدی بین زیر لایه‌های ساختاری(نوسانگرها) واسپین برای یک الکترون در یک نقطه کوانتومی ناهمسانگرد دوبعدی، تحت تأثیر جفت‌شدگی اسپین-مدار راشبا و میدان مغناطیسی خارجی ارائه شده است. درهمتنیدگی هایبریدی بین حالتهای اسپینی الکترونی و نوسانگرها برای مقادیر متفاوت ثابت راشبا و میدان مغناطیسی محاسبه و رسم شده است. از این محاسبات نتیجه می شود که برای در همتنیدگی نوسانگرها و اسپین الکترون پدیده فروهش و نمو رخ می‌دهد. خصوصیات این پدیده از قبیل دوره تناوب و مقدار بیشینه، به میدان مغناطیسی خارجی و ثابت راشبا قویاً بستگی دارد. بنابراین بدست آوردن هر میزان دلخواهی از درهمتنیدگی با ثابت راشبا و میدان مغناطیسی امکان‌پذیر است

منابع

[۱] Erhard M, Krenn M, and Zeilinger A (۲۰۲۰). Advances in high-dimensional quantum entanglement. *Nature Rev Phys*, vol ۲, ۳۶۵–۳۸۱.

[۲] Huber, D. et al. Highly indistinguishable and strongly entangled photons from symmetric GaAs quantum dots. Nat. *Commun*. vol ۸, ۱۵۵۰۶, ۲۰۱۷.

[۳] Domínguez-Serna F and Rojas F(۲۰۱۹). Spin-orbit hybrid entangled channel for spin state quantum teleportation using genetic algorithms. *Quantum Information Processing*, ۱۸:۳۲.

[۴] F. Wang, P.-Y. Hou and etc (۲۰۱۸). Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling solid-state spin bath, *Quantum PhysicsPhys*. Rev. B, vol ۹۸, ۰۶۴۳۰۶.

[۵] Y. Hasegawa (۲۰۱۲). Entanglement between degrees of freedom in a single-particle system revealed in neutron interferometry Found. *Phys*. vol ۴۲, ۲۹.

[۶] Huang k, Jeannic H.L and et al (۲۰۱۹). Engineering optical hybrid entanglement between discrete- and continuous-variable states. *New J. Phys*. vol ۲۱, ۰۸۳۰۳۳.

[۷] Z. Yu , L. Tong and et al (۲۰۲۰). Generation of hybrid Greenberger-Horne-Zeilinger entangled states of particlelike and wavelike optical qubits in circuit QED, *Phys*. Rev. A ۱۰۱, ۰۶۲۳۳۴

[۸] J. Heo, C.H. Hong adh iand et al (۲۰۱۳). A Quantum Communication Protocol Transferring Unknown Photons Using Path-Polarization Hybrid Entanglement Chin. *Phys. Lett*. vol۳۰, ۰۴۰۳۰۱.

[۹] Y. Sun, Q.Y. Wen, Z. Yuan (۲۰۱۱). High-efficient quantum key distribution based on hybrid entanglement Opt. Commun.vol ۲۸۴, ۵۲۷-۵۳۰.

[۱۰] F. Yang Zhang and C. Ping Yang (۲۰۲۱). Generation of generalized hybrid entanglement in cavity electro–optic systems. *Quantum Science and Technology*, vol ۶, ۲.

[۱۱] Y. Hasegawa, R. Loidl and et al(۲۰۰۳). Violation of a Bell-like inequality in single-neutron interferometry,*Nature*. ۴۲۵, ۴۵-۴۸.

[۱۲] M. Blasone, F. Dell'Anno and et al (۲۰۰۹). Entanglement in neutrino oscillations Europhys. *Lett*. vol۸۵, ۵۰۰۰۲.

[۱۳] A. Gratsea, M. Lewenstein and A. Dauphin (۲۰۲۰). Generation of hybrid maximally entangled states in a one-dimensional quantum walk. Quantum Sci. *Technol*. vol۵, ۰۲۵۰۰۲.

[۱۴] S. Adhikari, D. Home and et al (۲۰۱۳). *Device-independent cryptography using intra-particle entanglement*, Xiv:۱۱۰۱,۰۶۶۰v۲.

[۱۵] L. Wang, A. Rastelli, et al. (۲۰۰۸). Towards deterministically controlled InGaAs/GaAs lateral quantum dot molecules. *New J. Phys*. ۱۰, ۰۴۵۰۱۰ .

[۱۶] T. Ando, A. B. Fowler and F. Stern (۱۹۸۲). Electronic properties of two-dimensional systemsRev. Mod. *Phy*. ۵۴, ۴۳۷.

[۱۷] Y.A. Bychkov (۱۹۸۴). Rashba Oscillatory Effects and the Magnetic Susceptibility of Carriers in Inversion Layers Physica C, Supercond. vol۱۷, ۶۰۳۹–۶۰۴۵.

[۱۸] J. Nitta, T. Akazaki, et al (۱۹۹۷). Gate Control of Spin-Orbit Interaction in an Inverted InGaAs/InAlAs Heterostructure Phys. Rev. *Lett*. ۷۸،۱۳۳۵–۱۳۳۸.

[۱۹] T. Koga, J. Nitta and et al (۲۰۰۲) Rashba Spin-Orbit Coupling Probed by the Weak Antilocalization Analysis in InAlAs/InGaAs/InAlAs Quantum Wells as a Function of Quantum Well Asymmetry Phys. Rev. *Lett*. ۸۹ ۰۴۶۸۰۱.

[۲۰] S. Ihnatsenka, I.V. Zozpulentko (۲۰۰۶). Spin polarization of edge states and the magnetosubband structure in quantum wires ,*Phys*. Rev. B ۷۳, ۰۷۵۳۳۱.

[۲۱] S. Debald (۲۰۰۵). *Interaction and confinement in nanostructures: Spin-Orbit coupling and electron-phonon scattering*. Ph. D. Thesis, University of Hamburg .

[۲۲] I. Chuang and M. Nilson (۲۰۰۰). *Quantum computation and Quantum Information*, Cambridge University Press.