برنامه ریزی ریاضی و نقطهٔ سربسری

غلامرضا ـ اسلامی بیدگلی

درمقاله قبلی* درباره نقطه سربسری دیدیم درحالتی که موسسه به تولید یك محصول و یاترکیب خاصی ازمحصولات معینی اشتغال دارد می توان بااصلاح اطلاعات تاریخی و برگردان آنهابه ارقام پیش بینی شده ، اشکالات مربوط به خطی بودن منحنی های درآمدوهزینه رامرتفع کرد وآنهاراآنطورکه بایدرسم کرد، ویاحتی ازطریق استفاده ازمدلهای ریاضی معمول نظیر " مشتقات " راه حلهائی رابرای دستیابی به فرمول ریاضی جهت نقطه سربسری پیداکرد. مثلا" وقتیکه هزینه های متغیر با تولید ازطریق روابطی نظیر رابطه ۹/۹۵ +Q ۰/۰۰۱ = V درارتباط بوده و نیز رابطه تولیدوقیمت فروش بصورت Q = ۸۹۰ ـ ۷.P باشد می توان ازطریق فرمول ساده ریاضی زیرنقطه سربسری رایافت. زیرا:

نقطه سربسر = (P-۷)Q-F

و یا

نقطه سربسر = (P- ۰/۰۰۱ Q+ ۹/۹۵)Q-F

ویا = (P- ۰/۰۰۱) (۸۹۰ -۷.P)+ ۹/۹۵) (۸۹۰-۷.P)-F

ویا = (P- ۱۲)(- ۷۴/۹ P+ ۸۱۲/۳)

وچنانچه رابطه بالا رامساوی صفر فرض نموده و برای مقدار P حل کنیم دو جواب برای P بدست می آید که عبارتنداز۱۲ و ۱۰/۸۵ ونقطه سربسری عبارت خواهدبوداز۵۰ واحدو۱۳۰/۸۵ واحد. برای دستیابی به قیمتی که سودرابه حداکثرمی رساند ازرابطه بالا باتوجه به P مشتق

---

* ر.ك. شماره های ۱ و ۲ حسابدار

می گیریم. این رابطه بصورت زیردرمی آید:

$$\frac{dBEP}{dP} = ۱۴۹/۸\ P + ۱۷۱۱/۱$$

حل این رابطه قیمت ۱۱/۴۲ ریال رابدست خواهدداد واین قیمتی است که تحت شرایط داده شده حداکثرسود(۲۵ ریال) درسطح تولید۹۰/۵واحد رابدست می دهد و چون قیمت فعلی فروش ۱۲ ریال است لذاموسسه تولیدی موردنظرمی تواندراین صورت باکاهش قیمت فروش تا۱۱/۴۲ ریال سود خودرا افزایش دهد. ولی وقتی موسسه محصولات متنوعی راتولید می کند ویانمی تواندترکیب خاصی ازمحصولات مختلف راتولید کند، باهرتغییری که درمیزان تولید هرکدام ازمحصولات تولیدی ایجادشود، بعلت محدود بودن ظرفیت تولیدی، میزان تولید سایرمحصولات تغییر خواهدکردو بناچار ارقام هزینه و درآمد سایرمحصولات نیزدچاردگرگونی شده واین خودباعث می شود تاموسسه درمواردی حتی تابینهایت نقطه سربسری داشته باشد. خاصه آنکه درکلیه روشهای معمول و سنتی محاسبه نقطه سربسری مسئله محدود بودن منابع تولید ومشکلات تامین آنها درنظرگرفته نمی شود. بعبارت دیگردرمحاسبات نقطه سربسری به روش سنتی فرض براین است که موسسه امکانات تولید رابه اندازه کافی دراختیاردارد تابتواند هرمقدارکه بخواهد تولیدکندتابه نقطه سربسر برسد ویااینکه درجه مشکلات تامین آنهایکسان فرض می شود، درحالیکه این فرض کمتر صورت واقعیت به خود می گیرد چه امکانات تولید هرموسسه ، حداقل درموردبعضی ازعوامل تولید، محدوداست واین باعث می شود که دربسیاری ازموارد موسسه حتی امکان رسیدن به نقطه سربسر رانداشته باشد. درموارد دیگرتامین یکی ازعوامل تولید برای تولید محصولات پیش بینی شده بامشکلات خاصی روبروست که دربرنامه ریزیها و محاسبات نقطه سربسری بایددرنظرگرفته شود.

برای روشن شدن مطلب فرض کنیم موسسه ای به تولید ۲ کالای A

و B اشتغال دارد. اطلاعات مربوط به هزینه تولیدوفروش این محصولات عبارتنداز:

شرح	A	B
قیمت فروش هرواحد	۱۰۰	۲۰۰
هزینه های متغیرهرواحد	۵۰	۱۰۰
سهم هزینه های ثابت و سودازهرواحد (۱)	۵۰	۱۰۰

اگرجمع هزینه های ثابت موسسه مبلغ ۱۵۰٫۰۰۰ ریال باشد موسسه علاقمند است بداند درچه سطح تولیدی به نقطه سربسرخواهدرسید. بسادگی می توان تشخیص داد که جواب های مسئله بینهایت است. جدول زیرنمونه هائی ازترکیب تولید محصولات A و B راکه طی آن موسسه مربوطه به نقطه سربسرمی رسد نشان می دهد:

ردیف	تعدادترکیب تولید A	تعدادترکیب تولید B	فروش A	فروش B	فروش جمع	هزینه تولید متغیر A	هزینه تولید متغیر B	هزینه ثابت	جمع هزینه ها
۱	—	۱۵۰۰	—	۳۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	—	۱۵۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
۲	۳۰۰۰	—	۳۰۰۰۰۰	—	۳۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	—	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
۳	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
۴	۲۰۰۰	۵۰۰	۲۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
۵	۱۸۰۰	۶۰۰	۱۸۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰	۶۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
۶	۲۲۰۰	۴۰۰	۲۲۰۰۰۰	۸۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۱۱۰۰۰۰	۴۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
۷	۲۸۰۰	۱۰۰	۲۸۰۰۰۰	۲۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۱۴۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
۸	۱۲۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۶۰۰۰۰	۹۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
۹	۶۰۰	۱۲۰۰	۶۰۰۰۰	۲۴۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
۱۰	۷۵۰	۱۱۲۵	۷۵۰۰۰	۲۲۵۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۲۷۵۰۰	۱۱۲۵۰۰	۱۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰

(۱) Contribution

دیده می شود که باتغییر ترکیبات مختلف تولید ازکالاهای A و B می توان نقاط سربسری متعددی داشت واین درحالتی است که فقط ۲ محصول تولید می شود. مسلما" چنانچه تعداد محصولات تولیدی به n برسد تعداد نقاط سربسری نیز بیشمار خواهدشد، و بازاین درحالتی است که فرض می شود کلیه عوامل تولید، برای مثلا" تولید ۱۵۰۰ واحد ازکالای B و یا ۳۰۰۰ واحداز کالای A کافی می باشد. درنگاه اول ممکن است این طور تصورشود که برای موسسه بهترخواهد بود که فقط به تولید کالای B مبادرت ورزد(چون سهم هزینه های ثابت وسودهرواحد ازمحصول B بیشترازسهم سود و هزینه های ثابت هر واحد ازمحصول A می باشد) ولذاموسسه باتولید کمتربه نقطه سربسر خواهدرسید. ولی این تصور صحیح نیست، زیراممکن است وقت لازم برای تولید هرواحدازکالای B سه برابروقت لازم برای تولید هر واحد ازکالای A باشد ویامواداولیه لازم برای تولید ۱۵۰۰ واحدازکالای B رادراختیارنداشته باشیم. برای برطرف کردن این اشکال ازفرمولهای برنامه ریزی خطی کمك می گیریم.

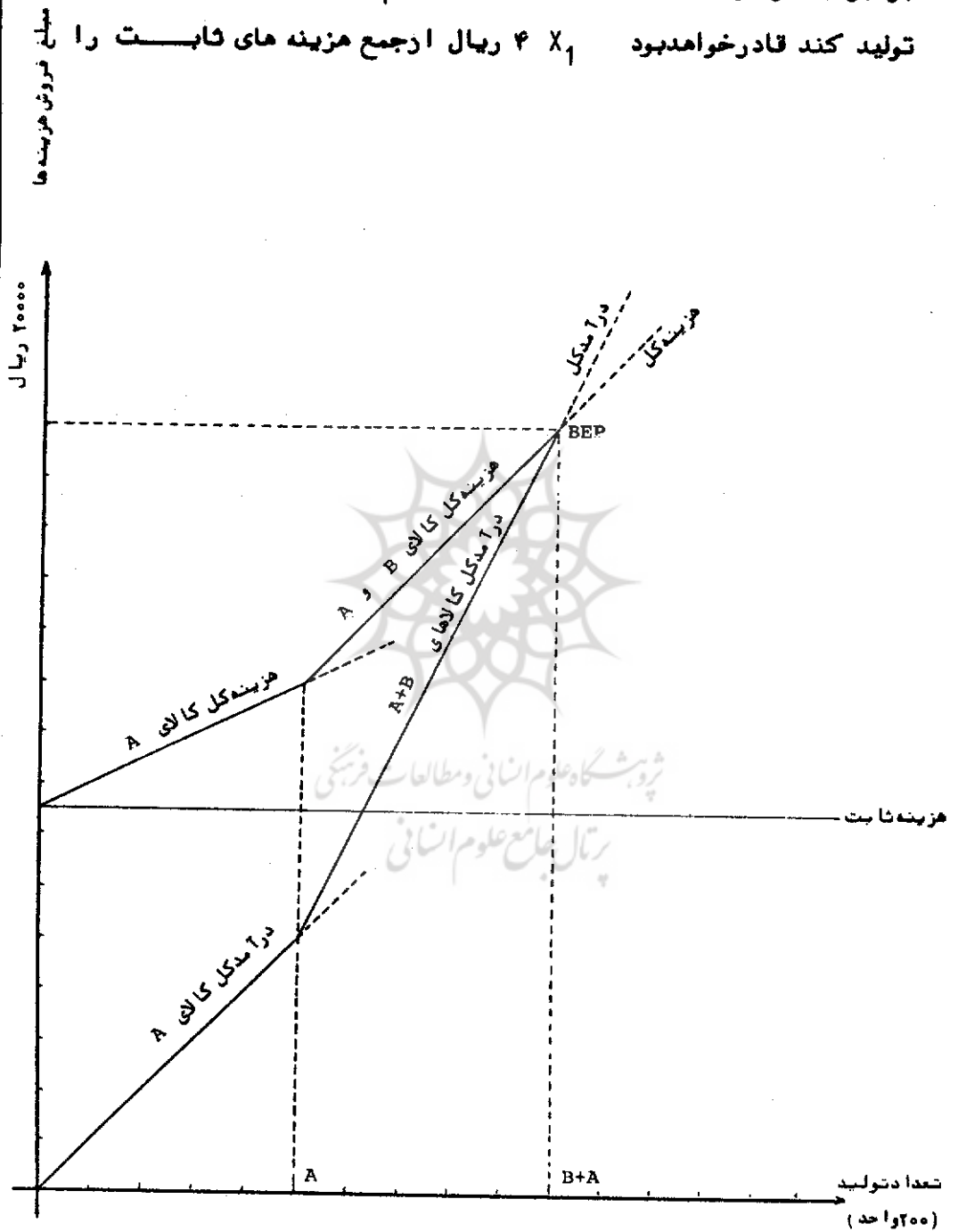
فرض کنید امکانات تولید موسسه همراه هزینه ودرآمد موسسه از تولید وفروش کالاهای A و B عبارتنداز:

شرح	نوع کالاها A	B	مقدار عوامل تولیددراختیار موسسه
هزینه متغیرهرواحد	۹ریال	۸ریال	
قیمت فروش هرواحد	۱۳"	۱۱"	
سهم سودوهزینه های ثابت	۴ "	۳ "	

مقدارمواداولیه لازم برای تولید هرواحد	۱کیلو	۱کیلو	۵۰کیلو
ساعات کارلازم برای تولید هرواحد	۱ساعت	۲ساعت	۸۰ساعت
سایرعوامل تولید هرواحد	۳واحد	۲واحد	۱۴۰واحد
کل هزینه های ثابت			۲۰۰ ریال

باتوجه به اطلاعات بالا نقاط سربسری رابرای موسسه مذکور تعیین می کنیم. همانطورکه دیدیم کاربرد فرمولهای سنتی بااشکالات زیادی برای تعیین نقاط سربسری روبرو بود. دراین حالت خاصه محدودیت عوامل تولید نیزدرنظرگرفته شده است که بالاجبارامکان استفاده ازفرمولهای معمول محاسبه نقطه سربسر راغیرممکن می سازد. لذاباید مبادرت به استفاده ازسایرتکنیکهانمود. زیراکه درحالت بالا هرتغییری درترکیب تولید محصولات A و B و مبلغ هزینه های متغیر کل اثرگذارده و رسم منحنی هزینه های متغیر رامشکل می سازد. لذا فرمولهای سنتی نقطه سربسری برای رسم نمودارمربوطه جوابگو نخواهد بود وتنهاامکان استفاده ازرسم نمودارهای سنتی برای بدست آوردن جدولی وجوددارد که درآن ترکیبهای مختلف تولیدبرای محصولات A و B نشان داده می شود. درجدول صفحات قبل ملاحظه شد که تعداد این ترکیبات بسیار زیادخواهندبود. برای نمونه چندتائی درصفحه بعد رسم می شوند تاملاحظه شود که حتی اگردو محصول نیزتولید شوند دررسم نمودارهای سربسری چه مشکلاتی بوجود می آید وطبعا" درحالتی که n محصول تولید شود تقریبا" رسم نمودارهابصورت سنتی غیرممکن می شود. درتعریف نقطه سربسر گفته شد که نقطه سربسری نقطه ای است که درآن جمع هزینه های تولید(بااحتساب هزینه های ثابت) با جمع درآمدهای حاصل ازفروش تولیدات برابراست. درمثال مذکور

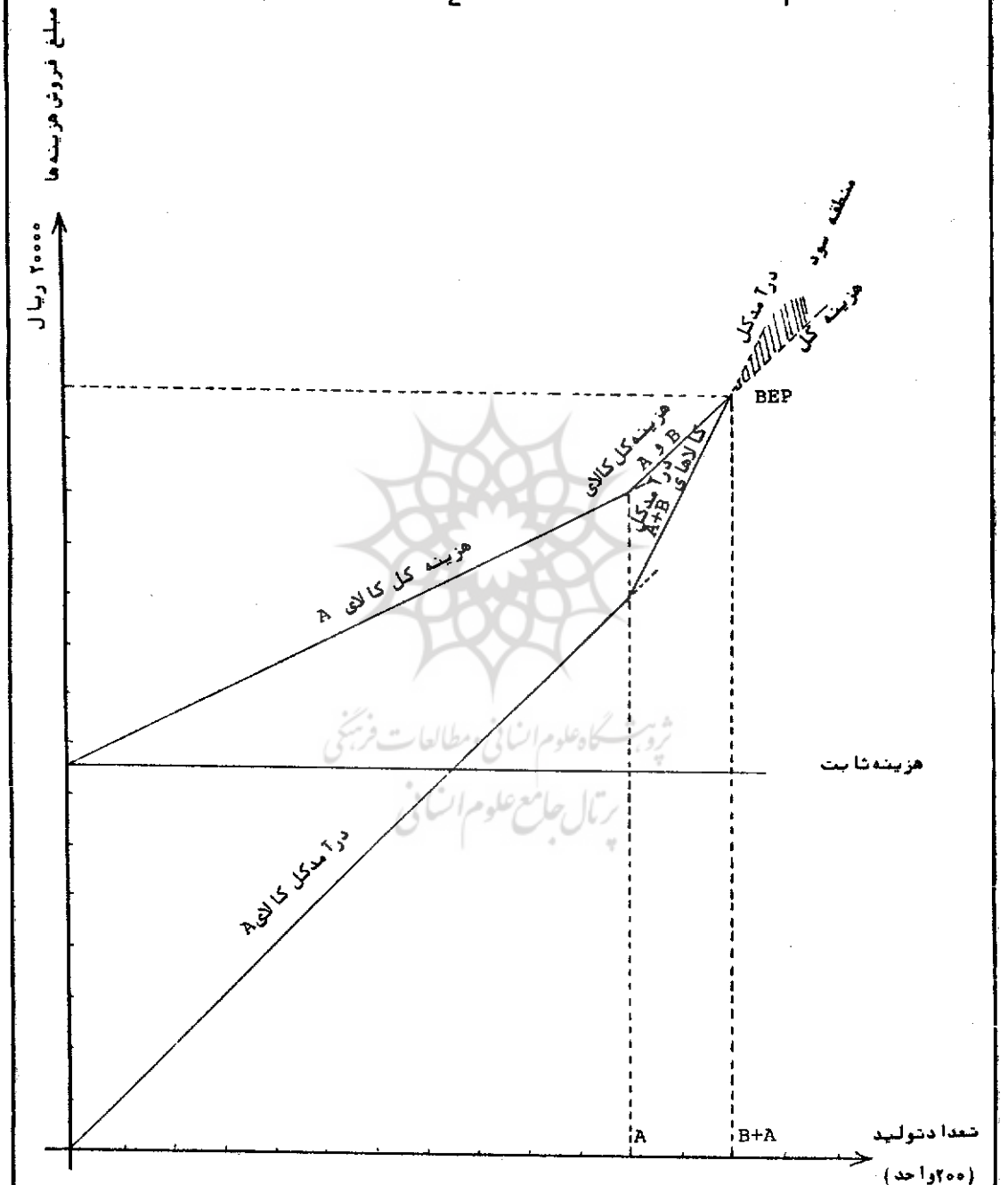
" سهم هزینه های ثابت و سود " حاصل ازفروش هرواحدازمحصول A برابر با۴ ریال است. لذاچنانچه موسسه X_1 واحدار کالای A تولید کند قادرخواهدبود X_1 ۴ ریال ازجمع هزینه های ثابـــت را



رسم نمودار سربسری وقتیکه از A تعداد ۱۰۰۰ واحد واز B تعداد ۱۰۰۰ واحد تولیـــد شود

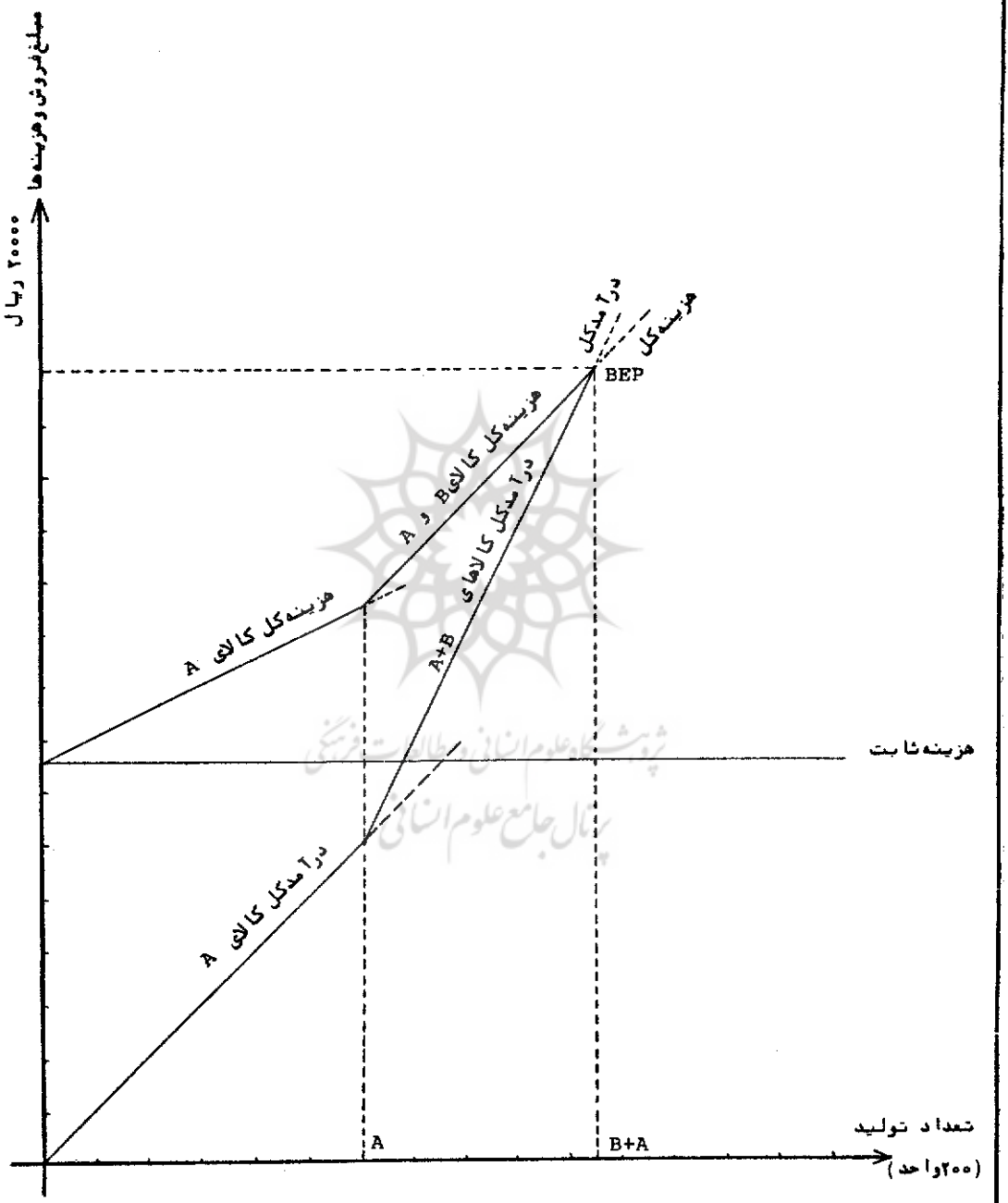
پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

بپوشاند. همینطوراگرموسسه X_2 واحدارکالای B تولید کنـــد مبلغ X_2 ۳ ریال ارجمع هزینه های ثابت راخواهدپوشاند. درنتیجـه درترکیب X_1 واحدارکالای A و X_2 واحدارکالای B جمعـا"



رسم نمودار سربسری وقتیکه از A تعداد ۲۲۰۰ واحد واز B تعداد ۴۰۰ واحد تولیـد شود

مبلغ $4X_1 + 3X_2$ ریال ازهزینه های ثابت بازیافت خواهد شـــد.
چون جمع هزینه های ثابت مبلغ ۲۰۰ ریال است پس برای رسیدن به
نقطه سربسری باید مقادیری برای X_1 وX_2 درمعادله زیرچنان تعیین



رسم نمودار سربسری وقتیکه از A ۱۲۰۰ واحد واز B ۹۰۰ واحدتولیدشود

شود که $۴X_1 + ۳X_2 = ۲۰۰$ باشد، همچنین مقادیر مربوط به X_1 و X_2 بایدآنچنان انتخاب شوند که روابط زیرنیزبرقرارباشند:

$$X_1 + X_2 = ۵۰ \qquad (۱)$$

زیراکه تولیدهرواحدازکالای A به یك کیلو مواداولیه نیازداردوبرای هرواحدازکالای B نیزبایدیك کیلو مواداولیه مصرف شودوکل مواداولیه موجود ۵۰ کیلو می باشد.

$$X_2 + 2X_2 \leq 80 \qquad (۲)$$

زیراکه تولیدهرواحدازکالای A به یك ساعت وقت نیازداردوتولیدهر واحدازکالای B محتاج صرف دو ساعت وقت است وجمع ساعات قابل استفاده ۸۰ ساعت است که می تواند کلا" صرف تولید کالای A ویا B ویاترکیبی ازتولیدهردوشود.

$$3X_1 + 2X_2 \leq 140 \qquad (۳)$$

زیراکه تولیدهرواحدازکالای A به سه واحدازسایرعوامل تولیدوتولید هرواحدازکالای B به دو واحدازسایرعوامل احتیاج داردوجمع سایر عوامل تولید ۱۴۰ واحدمی باشد.

چون مقادیر X_1 و X_2 بایدحتما" مثبت باشند پس روابط زیرنیز باید صادق باشند:

$$X_1 \geq 0 \qquad (۴)$$

$$X_2 \geq 0 \qquad (۵)$$

حل این قبیل مسائل ازطریق استفاده ازفرمولهای برنامه ریزی ریاضی امکان پذیراست. مسئله بالاابتدا ازراه برنامه ریزی خطی حل (۲)

---

(۲) برای مطالعه دراین باره به کتابهای زیرمراجعه شود:
Taha,H.A."Operations Research:An Introduction,"The Macmillan Co.,new York,1968 قسمت اول وسوم کتاب

(ii Vajda,S.,"Mathematical Programming ",Reading Massachosetts:Addison - Wesley 1961.

می شود و طی آن مقادیر X_1 و X_2 در رابطه $4X_1 + 3X_2$ باتوجه به (۳) محدودیت های زیر:

$$X_1 + X_2 \leq 50$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 80$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 140$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

موردمحاسبه قرارمی گیرند. حل این مسئله مقادیرزیر رابرای X_1 و X_2 بدست می دهد:

$$X_1 = 40$$
$$X_2 = 10$$

واین مقادیرنشان می دهند که موسسه موردبحث درشرایط گفته شده حداکثرمقادیرفوق الاشاره راتولیدخواهدکردوبافروش آنهانه تنهاسودی نخواهدداشت بلکه ۱۰ ریال نیززیان خواهدکرد. ارائه چنین فرمولی این مزیت راداردکه مدیران موسسه رامتوجه این واقعیت می سازدکه درشرایط موجود موسسه به نقطه سربسرنخواهدرسید مگراینکه مقدارعوامل

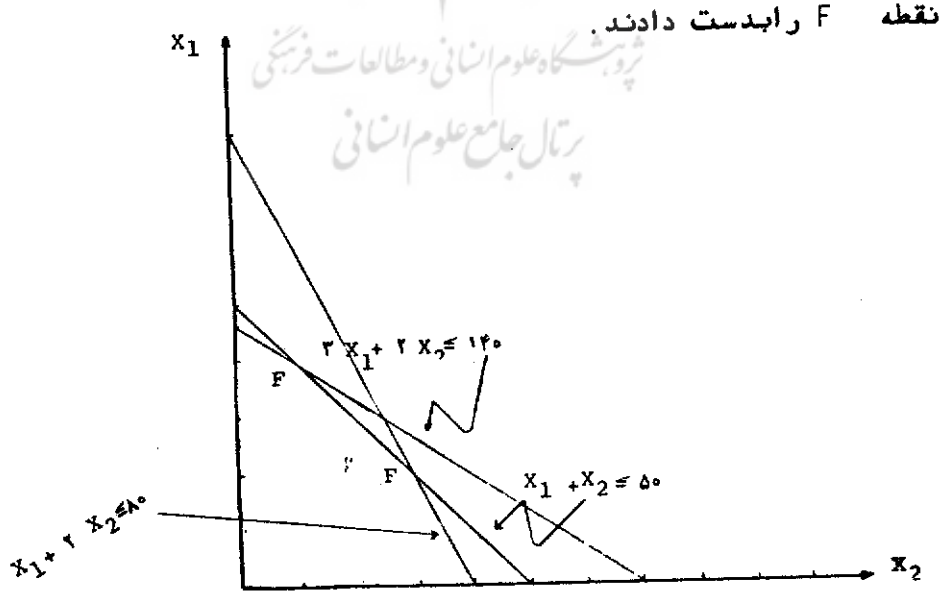
(iii Beale,E.M.L.,"Mathematical Programming In Practice," Pitman,1968

(iv Dantzing,G.B.,"Linear Programming,An Extension", Princeton University,1963

(v Dorfman,R.,Samolson,P.A.And Solow,R.M.,"Linear Programming And Economic Analusis,"MCGRAW-HILL,1968,

(۳) دربعضی فصول کتب زیرنویس شماره ۲۵ راجع به برنامه ریزی خطی " مطالبی نوشته شده است. دربان فارسی آقای مسعود رفیع جزوه ای تحت عنوان " مقدمه ای بربرنامه ریزی خطی " بوسیله دانشکده اقتصاد دانشگاه تهران منتشرکردند. اخیرا" کتب منتشره درزمینه برنامه ریزی ریاضی و یاتحت عنوان روشهای مقداری درمدیریت افزایش یافته است وازجمله این کتب " مقدمه ای بربرنامه ریزی خطی " ترجمه کیومرث پریانی میباشد. این کتاب توسط " و . آلن اسپاپوی " نوشته شده و درسال ۱۳۶۲ ترجمه شده و بوسیله انتشارات دانش پژوه منتشرشده است.

تولیدبیشترشوندویادرهزینه های ثابت موسسه صرفه جوئی بعمل آیـــــد.
اگرفرض شود که باتجدیدنظردرهزینه های ثابت موسسه مدیران موسسه مبلغ هزینه های ثابت را از ۲۰۰ ریال به ۱۲۰ ریال کاهش دهند، آنوقت موسسه مبلغ ۷۰ ریال سودخواهدبرد ولی موسسات معمولا" هدفشان فقـــط رسیدن به نقطه سربسری نیست بلکه ضریب اطمینان نیزدرمحاسبـات خود منظورمی دارند وحداقل دنبال این مسئله هستندکه بهترین شرایـط رابرای رسیدن به نقطه سربسربیابند. مثلا" دراین موردمی خواهنـــد به این مطلب دست یابند که درچه شرایطی معادله $۴X_1 + ۳X_2 = ۱۲۰$ مقادیری برای X_1 و X_2 بدست خواهدداد که ضمنا" شرایط پیش گفتـــه شـــده در آن مصداق داشته باشد.حل این مسائل ازطریق " برنامه ـ ریزی براساس هدف صورت می گیرد. همانطورکه گفته شد معادلات ـ خطی(L.P.) تنهاقادرند که تعدادی معادله خطی رانسبت به یك تابـع هدف حل نمایند و بهترین مقادیرممکنه راباتوجه به تابع هدف بـــرای متغیرهابدست بدهند. درمثال قبلی دیدیم کـه تابع هدف ونامعادلات خطی جوابهای ثابتی برای X_1 و X_2 بدست دادند. این مقادیردرشکل ۱ نقطه F رابدست دادند.



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

درصورتیکه ازاین نقطه دورشویم یاجواب منطقی نسبت به نامساویهابدست نمی آید ویامقدارتابع هدف کمتراز۱۹۰ خواهدشد ، لذامشخص می شود که دراین حالت ازنقطه سربسربرنامه ریزی خطی کاملا" جواب لازم رابه دست نخواهدداد، زیرادراین مورد مامی خواهیم مقادیرمتغیرهاراطوری بدست آوریم که نقطه F شکل ۱ به نقطه سربسر نزدیکترشود ونه اینکه مانندمثال قبلی بهترین جواب رانسبت به نامساویهابدست دهد. برای ابتکارمسئله راازطریق " برنامه ریزی براساس هدف " (۴) حل می کنیم.

دراین نوع برنامه ریزی فرض می شود که تابع هدف باتغییری درطرفین رابطه بصورت یکی ازروابط محدودیت به محدودیت هااضافه می شود. به این معنی که درحل مسئله قبلی(که جمع هزینه های ثابت برابر با۲۰۰ ریال بود) بهاین نتیجه رسیدیم که موسسه درشرایط داده شده هیچوقت به نقطه سربسرنخواهدرسیدولذادرابطه $۴X_1 + X_2 - ۲۰۰ = ۰$ درشرایط داده شده مقادیری برای X_1 و X_2 هیچوقت مصداق نخواهد داشت. درمسئله جدید نمی دانیم آیادرشرایط موجود رابطه $۴X_1 + ۳X_2 - ۱۲۰ = ۰$ برای بعضی ازمقادیر X_1 و X_2 صحت خواهدداشت یانه. به این دلیل رابطه بالارابصورت زیر می نویسیم:

$$۴X_1 + ۳X_2 - (\overset{+}{Y} - \overset{-}{Y}) = ۱۲۰$$

که به ازا مقادیرمختلف X_1 وX_2 برای $\overset{+}{Y} - \overset{-}{Y}$ مقادیری بدست خواهد آمد. هدف این است که مقادیر $\overset{+}{Y} - \overset{-}{Y}$ به حداقل برسد. (۵)

---

(۴) برای آشنائی با" برنامه ریزی براساس هدف Goal Programming مراجعه شود به :

A.Charnes & W.W.Cooper," Management Models & Industrial Applications Of Linear Programming ", New York,John Wiley & Sons, Inc.,1961.

(۵) برای اثبات ریاضی ومواردومثالهای مشابه مراجعه شود به:
Y.Ijiri, " Management Goals & Accounting For Control " Amsterdam:North - Holland Publishing Company,1965.

زیراکه هرچه این مقدار($\bar{Y} - \dot{Y}$) کمترباشدبه نقطه سربسر نزدیکترمی شویم و اگر $\dot{Y} - \bar{Y}$ منفی باشد موسسه سودآورخواهدبود پس هدف ازاین مسئله این است که مقدار $\dot{Y} - \bar{Y}$ به‌کمترین مقدار خود برسد وشرایط زیرنیزبرقرارباشد:

۱) $X_1 + X_2 \leq 50$

۲) $X_1 + 2X_2 \leq 80$

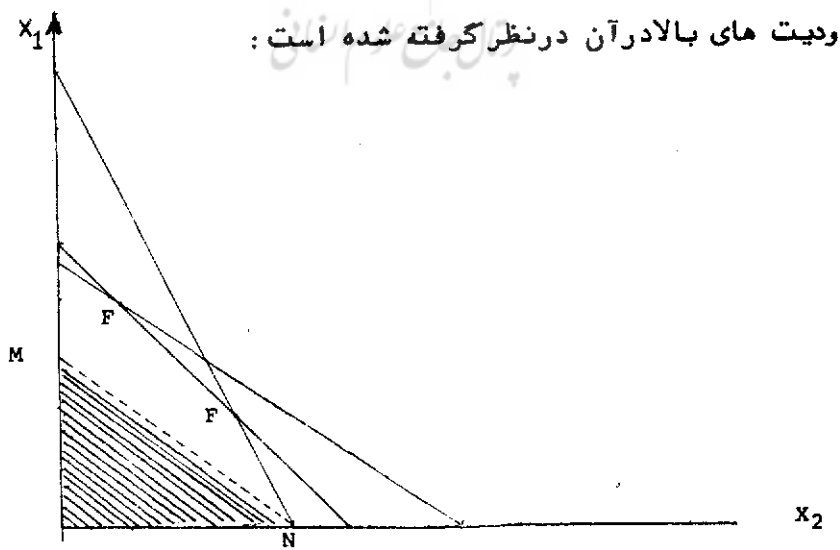
۳) $3X_1 + 2X_2 \leq 140$

۴) $4X_1 + 3X_2 + \bar{Y} - \dot{Y} = 120$

۵) $X_1 \geq 0$

۶) $X_2 \geq 0$

اگرموسسه بخواهدبه نقطه سربسربرسد بایدمقدار $\dot{Y} - \bar{Y}$ برابربا صفرباشد. چون دراینصورت ۱۲۰ = (۰) + ۳ X + ۴ X ویا ۰ = ۱۲۰ - ۳ X + ۴ X می شود. حل این مسئله مقادیری رابرای X_1 و X_2 به ماخواهددادکه به ازا آنهاموسسه به نقطه سربسر می رسد. برای اینکه مسئله بهترروشن شود مبادرت به رسم نموداری می شودکه محدودیت های بالادرآن درنظرگرفته شده است:



باتوجه به نامعادلات و ازروی شکل مشخص می شود که منطقه هاشورزده منطقه ایست که هرنقطه ازآن می تواند مقادیری برای X_1 و X_2 بدست بدهد که به ازا آن نامعادلات محدودیت (۱) و (۲) و(۳) و(۵)و(۶)صادق باشد ودرنقطه ای رابطه $4X_1 + 3X_2$ ماکزیمم (بیشترین) مقدارخود راخواهدداشت.

دراینجامادنبال مقادیری برای X_1 و X_2 هستیم که درمنطقه هاشور زده باشد ودررابطه $4X_1 + 3X_2 = 120$ نیزصدق کند. ملاحظه میشود که تعدادابن نقاط می تواند خیلی زیادباشد. یکی ازآن نقاط می تواند روی محور X_1 ودیگری می تواند روی محور X_2 درمنطقه هاشورزده باشد. به این معنی که درنقطه ای مانند M که درآن $X_1 = 30$ باشد مقدار X_2 صفرخواهدبود.

نامعادلات بالا رامی توان باکمك متغیرهای کمکی(S_i) بصورت زیر نوشت:

$$X_1 + X_2 + S_1 = 50$$
$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 80$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_3 = 140$$
$$4X_1 + 3X_2 + Y^- - Y^+ = 120$$
$$X_i \quad 0 \quad ' \quad X_2 \quad 0$$

وقتی $X_1 = 30$ و $X_2 = 0$ باشد مقادیرمتغیرهای کمکی بشرح زیرخواهند بـــود:

$$S_3 = 50 \ , \ S_2 = 50 \ , \ S_1 = 20$$

مقادیرمتغیرهای کمکی، S_1 ، S_2 و S_3 بدان معنی هستندکه درشرایطی که ازمحصول A مقدار۳۰ واحدتولیدشود ومحصول B صفرواحد، ازماده اولیه مقدار۲۰ واحدبی مصرف باقی خواهدماند، وازساعات کاردردسترس

۵۰ ساعت، وازسایرعوامل تولید ۵۰ واحد بلااستفاده خواهدبود. این معنی درجدول زیرنشان داده شده است:

مقادیرثابت	=	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	متغیرها / معاملات
۵۰	=	۰	۰	۲۰	۰	۳۰	(۱)
۸۰	=	۰	۵۰	۰	۰	۳۰	(۲)
۱۴۰	=	۵۰	۰	۰	۰	۹۰	(۳)
۱۲۰	=	۰	۰	۰	۰	۱۲۰	(۴)

یك نقطه دیگردرمنطقه هاشورزده که می تواند موسسه رابه نقطه سربسر برساند این است که باتولید انحصاری کالای B به نقطه سربسربرسیم. چون هرواحدازکالای B می تواند ۳ ریال ازهزینه های ثابت را بپوشاند لذاچنانچه بخواهیم صرفا" باتولیدکالای B به نقطه سربسر برسیم باید تعداد ۴۰ واحدازکالای B تولیدکنیم. این مقدارتولید از کالای B درمنطقه هاشورزده قراردارد ولذادرشرایط داده شده عملی می باشد. دراینصورت سایرمجهولات نامعادلات مقادیر زیر راخواهند داشت:

$$S_3 = 60 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_1 = 10 \quad , \quad X_1 = 0$$

باداشتن نقاط M و N درمنطقه هاشورزده خط MN رارسم می کنیم معلوم است که هرنقطه روی خط MN مقادیری برای X_1 و X_2 بدست خواهدداد که به ازا آنهاموسسه به نقطه سربسرمی رسد.

مقادیرثابت	=	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	متغیرها / معادلات
۵۰	=	۰	۰	۱۰	۴۰	۰	(۱)
۸۰	=	۰	۰	۰	۸۰	۰	(۲)

۱۴۰	=	۶۰	.	.	۸۰ .	(۳)
۱۲۰	=	.	.	.	۱۲۰ .	(۴)

ملاحظه می شود که درهردوحالت گفته شده دربالاموسسه به نقطه سربسر می رسد ولی اجرای هرکدام ازاین حالتهابرای موسسه یکسان نمیباشد، زیرامشکلات وامکانات تهیه عوامل تولید برای موسسه یکسان نیست. دراین حالت دیده می شود که مقادیرمتغیرهای کمکی درهرکدام از دو حالت بشرح زیر می باشد:

متغیرهای کمکی / حالتها	S_1	S_2	S_3
حالت اول	۲۰	۵۰	۵۰
حالت دوم	۱۰	.	۶۰

بادردست داشتن جدول بالامدیریت موسسه باتوجه به حدودمشکلات تامین عوامل تولیدوتعیین حدوداطمینان برای تهیه آنهابرای اجرای یکی ازحالات فوق الذکراخذتصمیم خواهدنمود ولی دراین حالت نیزمشکل این است که تعدادحالاتی که درآن موسسه به نقطه سربسرمی رسد زیاداست زیراتعدادترکیبات تولیدکالاهای A و B ، باتوجه به بینهایت بودن نقاط روی خط MN ، بینهایت می باشند. ازطریق ریاضی می توان رابطه خط MN رابرای نقاط M و N بصورت $PX_1+(1-P)X_2=X_1$ نوشت که درآن P بین صفر و یك هرمقداری راانتخاب می کند و به ازا هرمقدارکه به P داده می شود، بشرطی که ازصفرکمتروازیك بیشترنباشد، یعنی $0 \leq P \leq 1$ ، برای X_1 و X_2 مقادیری پیدامی شود که تحت آن موسسه به نقطه سربسرمی رسد. مثلا" اگر

$P = 0.5$ باشد برای X_1 و X_2 مقادیر زیربدست خواهد آمد:

$$X_1=0.5(30)+(1-0.5)(0)=15$$

$$X_2=0.5(0)+40(1-0.5) \quad =20$$

یعنی بهاتولیـــد ۱۵ واحد ازکالای A و ۲۰ واحدازکالای B موســـــه به نقطه سربسرمی رسدزیرا:

سهم هزینه های ثابت و سودحاصل ازتولید۱۰ واحدازکالای A ۲۰×۳=۶۰

سهم هزینه های ثابت و سودحاصل ازتولید ۲۰ واحدازکالای B ۲۰×۳=۶۰

وجدول مربوط به ارزشهای متغیرهادراین حالت بصورت جدول زیرنشان داده می شود:

مقادیرثابت	=	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	متغیرهـــا / معادلات
۵۰	=	۰	۰	۱۵	۲۰	۱۵	(۱)
۸۰	=	۰	۱۵	۰	۴۰	۱۵	(۲)
۱۴۰	=	۵۵	۰	۰	۴۰	۴۵	(۳)
۱۲۰۰	=	۰	۰	۰	۶۰	۶۰	(۴)

و اگر $P = ۰/۴۰$ باشد مقادیر X_1 وX_2 بصورت زیرمحاسبه خواهدشد:

$$X_1 = ۰/۴۰(۳۰) + (۱-۰/۴۰)(۰) = ۱۲$$

$$X_2 = ۰/۴۰(۰)+۴۰(۱-۰/۶۰)=۲۴$$

وسهم هزینه های ثابت وسودموسسه تولیدی درشرایطی که $X_1 = ۱۲$ و$X_2=۲۴$ باشد عبارت خواهدبودار:

سهم سودوهزینه های ثابت ازX_1 ۱۲×۴ = ۴۸

سهم سودوهزینه های ثابت ازX_2 ۲۴×۳ = ۷۲

جمع سهم سودوهزینه های ثابت ازتولید

۱۲واحد X_1 و ۲۴واحد X_2 ۱۲۰

ونتایج حاصل ازاجرای این تولیددرموردمتغیرهای اصلی و کمکی درجدول زیرنشان داده شده است:

مقادیرثابت	=	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	متغیرها / معادلات
۵۰	=	۰	۰	۱۴	۲۴	۱۲	(۱)
۸۰	=	۰	۲۰	۰	۴۸	۱۲	(۲)
۱۴۰	=	۵۶	۰	۰	۴۸	۳۶	(۳)
۱۲۰	=	۰	۰	۰	۷۲	۴۸	(۴)

مقادیرمتغیرهای اصلی و کمکی درهرکدام ازچهارحالت بالادرجدول زیر نشان داده می شود:

S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	متغیرها / حالتها
۵۰	۵۰	۲۰	۰	۳۰	(۱)
۶۰	۰	۱۰	۴۰	۰	(۲)
۵۵	۱۵	۱۵	۲۰	۱۵	(۳)
۵۶	۲۰	۱۴	۲۴	۱۲	(۴)

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

باوجودیکه مقادیرحاصله برای رسیدن به نقطه سربسری دراین حالت نیززیاداست ولی تهیه جداولی بشرح بالا ومقایسه ارقام حاصله میتواند مدیریت راتاحدود زیادی دراخذتصمیم برای ترکیب تولیدات راهنمائی کند. مثلاً" مشکلات مربوط به تامین مواداولیه و یاکشش بازاربرای جذب

محصولات عوامل تعیین کننده دراخذتصمیم برای اجرای یکی ازحالتهای محاسبه شده می باشند. علاوه برآن هدف موسسه تنهارسیدن به نقطه سربسری نیست بلکه علاقمنداست بادرنظرداشتن همه عوامل و مشکلات سودخودرابه حداکثربرساند، لذافرموله کردن مسئله بصورت برنامه ریزی ریاضی برای $\text{Max.} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. باتوجه به تحقق شرایط نامعادلات مسئله درحل این مسئله راهنمای خوبی برای مدیریت میباشد.

پس می توان بااستفاده ازکاربردفرمولهای برنامه ریزی ریاضی براحتی نقطه سربسری را حتی درشرایطی تعیین نمود که موسسه به تولید n کالای مختلف اشتغال داردودرآن کلیه محدودیت های مربوط به عوامل تولید وبازاریابی درنظرگرفته می شوند. ولی هدف یك موسسه رسیدن به نقطه سربسر نیست، مگرآنکه باداشتن انگیزه، مثلا" رسیدن به حداکثرمطلوبیت، سربسرنیزبشود. دربسیاری ازموارد هنور انگیزه سودآوری هدف موسسات است. ازرابطه بالا می توان دربرنامه ریزیهای تولید بنحوی استفاده نمودکه سودآوری موسسه به حداکثرنیزبرسد. دراین صورت بجای داشتن تابع هدف:

$$f(X) - F = 0$$

که درآن F مبلغ هزینه های ثابت رانشان می دهد، تابع هدف :

$$\text{Max.}F(X)$$

راخواهیم داشت.

ممکن است گفته شود که درروش ارائه شده نیزنقاط سربسری بینهایت خواهندبودوانتخاب یك ترکیب تولیدباترکیب تولیددیگرتفاوتی نخواهد داشت. این گفته صحیح نیست، زیرااگرچه جواب مسئله بینهایت خواهدبود ولی تهیه بعضی ازعوامل تولیدبرای موسسه همیشه اشکالاتی را باعث می شود، لذاموسسه می تواندباتوجه به مقادیرمتغیرهای کمکی، که ازحل مسئله بدست می آید، ترکیبی ازتولیدراانتخاب کندکه کمترین

مشکل رابرای موسسه ایجاد می کند.

ازدیگرخصوصیات این روش محاسبه این است که می توان محدودیت های بازاریابی رانیزدرفرمولهای مسئله دخالت داد. به این معنی که اگرمثلا" تحقیقات بازاریابی نشان دادکه موسسه قادرنخواهدبود بیش از n واحدازمحصولی رابفروش برساند، دراین صورت این مسئله بصورت یك محدودیت به محدودیت ها اضافه می شود مثلا" اگرقراراست ازکالای A حداکثر ۱۵ واحدتولیدشود دراین صورت نامعادله $X_1 = ۱۵$ بصورت یك محدودیت به مسئله داده خواهد شدویااگرباید ازکالای A حتما" ۱۵ واحدتولید شود دراینصورت $X_1=۱۵$ به نامعادلات اضافه خواهدشد.

چون برنامه هایکامپیوتری برای حل مسائل مربوط به برنامه ریزی ریاضی دردسترس می باشد می توان درهرموردکه اطلاعات مسئله تغییر می کند باصرف وقت کمی جوابهای جدیدی رابدست آورد، یابعبارتی بادردست داشتن آخرین اطلاعات همیشه می توان بهترین انتخاب ها رابدست داد.

همانطورکه می بینید بااراثه این روش محاسبه نقطه سربسری بعضی ازاشکالات متعددی راکه دربالابه آنهااشاره کردیم می توانیم برطرف کنیم، مثلا":

۱) فرض محدود بودن محاسبات به یك محصول و یاترکیب خاصی ازگروه محصولات معینی ازبین می رود.

۲) مسائل مربوط به سودآوریهارامی توان باتوجه به محدودیتها در مسئله دخالت داد.

۳) چنانچه براثرعرضه زیادمحصول تغییری درقیمت هاداده شود و موسسه علاقمندبه این تغییر قیمت نباشد، می توان درمدل بالا تولیدمحصول رابه مقدارمعینی محدودکرد.

۴) بادرنظرگرفتن کلیه جوانب فرض محدود بودن رابطه سودیاحجم تولید مرتفع می شود.

۵) سایرانگیزه اداره یك موسسه (بغیرازسودآوری) رانیزمی توان بعنوان یك تابع هدف درمسئله گنجاند. مثلا" اگرهدف موسسه تولیدبیشترباشدمی توان تابع هدف رابصورت زیرنوشت:

$$\text{Max.} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

مشروط براینکه:

$$a_{ij}X_i \leq B$$

که دراینصورت مقدار سودی که موسسه می خواهد بدست آورد، بصورت یك محدودیت به مسئله داده خواهدشد یعنی مثلا" رابطه $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}X_i - F - ۱۰ر۰۰۰ر۰۰۰ =$ نشان خواهددادکه سودموسسه پس ازکسرهزینه های ثابت بالغ برده میلیون ریال می شود.

استفاده ازمدل ارائه شده برای ارزشیابی عملکردواحدهای‌تولیدی

برای ارزشیابی عملکردواحدهای تولیدی روشهای مختلف زیرراعنوان نموده اند:

روش سودحسابداری	Accounting Profit
نسبت برگشت سودبه سرمایه	Return On Investment
باقیمانده درآمد	Residual Income
ارزش افزوده	Added Value Method
ارزش فعلی سودهای آینده	Present Value Of Future Profit
بهره وری نیروی کار	Labor Productivity

هرکدام ازروشهای بالا می توانند درموارد بسیاری موردانتقاد باشند

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

مثلا" درمواردی که هدف یك موسسه تولیدی دسترسی به حداکثرفروش‌باشد. (برای ازمیان بردن رقبا)، دراین صورت موسسه شایدقیمت فروش کمتری ازسایر رقباپیشنهادنماید، وچه بساکه قیمت فروش خودرادرسطح قیمت تمام شده نگاه دارد، آیادراین شرایط می توان با" نسبت برگشت سود به سرمایه " عملکرد موسسه راارزیابی کرد؟ مسلما" خیر، زیراکه هدف موسسه چیزی بجزسودآوری بوده‌است ولذادرارزشیابی عملکرداین موسسه باید دریافت که باتوجه به محدودیت های موجود وامکاناتی که دراختیارموسسه بوده است آیامدیران به هدف موسسه (که حاصل فروش بیشتربوده است) دسترسی پیداکرده اندیاخیر؟ پس بایددید چه روش (روشهائی) برای برنامه ریزی درجهت رسیدن به هدفهاباتوجه به بررسی امکانات وجود دارد واین مساله بایدموردبررسی قرارگیردکه‌آیاامکان مقایسه واقعیات باپیش بینی هاباتوجه به محدودیت هاهست؟

نگاهی به مطالبی که دربالاعنوان شده است می رساندکه می توان ازمدلهای برنامه ریزی ریاضی برای ارزیابی عملکردواحدهای تولیدی و بازرگانی‌استفاده‌نمود مثلا" فرض کنیم که موسسه ای به تولید کالای X_i مبادرت داردواطلاعات زیربرای دوره مالی آینده پیش بینی شده است:

قیمت فروش هرواحد B_i

هزینه متغیرهرواحد γ_i

سهم سودوهزینه های ثابت α_i

مواداولیه موردنیازهرواحدازهرکدام ازمحصولات b_i

نیروی کارموردنیازهرواحدازهرکدام محصولات (ساعت) c_i

ساعات کارماشین موردنیازهرواحد d_i

حداکثرفروش کالای $i = 5$ ۱۰۰ واحد

هدف موسسه: سودآوری

مواداولیه دردسترس	B
نیروی کارگردردسترس	C
ساعات کارماشین	D

باتوجه به اطلاعات بالا ترکیب تولیدهرکدام ازمحصولات بالابافرمول زیرتعیین خواهدشد:

$$\text{Max.} \sum_{i=1}^{n} X_i \, a_i$$

Subject to:

$$b_{pi} x_i \leq B_p$$

$$c_{pi} x_i \leq C_p$$

$$d_{pi} x_i \leq D_p$$

$$X_i \geq 0$$

$$X_5 = 100$$

حل این مسئله مقادیر X_i رابرای هرکدام ازمحصولات (به ازا $i = 1, 2, 3, \ldots, n$) راهمراه مقدار $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ باتوجه به محدودیت هاوضرایب پیش بینی شده دراختیارقرارخواهدداد. درعمل مقدارعوامل تولید(B، C ، D) و ضرایب پیش بینی شده برای مصرف هرکدام ازعوامل تولید(b_i ، c_i ، d_i) تغییرخواهند نمود، ولی بادردست داشتن اطلاعات دقیق درآخر دوره مالی مجددا" خواهیم توانست فرمول زیررا داشته باشیم:

شرح عوامل :	پیش بینی	واقعی
مواداولیه	B_p	B_A

نیروی کار	C_p	C_A
ساعات کارماشین	D_p	D_A
موادمصرفی هرواحدتولید	b_{pi}	b_{ai}
ساعات مصرفی هرواحدتولید	c_{pi}	c_{ai}
ساعات ماشین مصرفی هرواحد	d_{pi}	d_{ai}
حداکثرفروش کالای	100	50
سهم سودوهزینه های ثابت	α_i	λ_i برای $\lambda_i < \alpha_i$

بااین ترتیب مسئله بصورت زیرفرموله خواهدشد:

$$\text{Max.} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$$

مشروط براینکه:

$$b_{ai}X_i \leq B_A$$

$$C_{ai}X_i \leq C_A$$

$$d_{ai}X_i \leq D_A$$

$$X_5 = 50$$

$$X_i \geq 0$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

حل این مسئله جوابهایی رابرای X_i و مقدار $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ بدست خواهدداد که حداکثرسودی خواهدبود که درشرایط واقعی، موسسه بایدکسب می نمود. مقایسه این سودبا" سودواقعی " حاصل شده، نشان دهنده مغایرتی خواهدبود که مویدکارآیی، یا، عدم کارآیی " موسسه می تواند باشد. به این ترتیب موسسه باچندمسئله روبروست:

۱) مقایسه سودواقعی باسودی که میتوانست درشرایط واقعی حاصل شده باشد.

۲) مقایسه سودواقعی باسودپیش بینی شده.

۳) مقایسه سودی که می توانست درشرایط واقعی حاصل شده باشد با سودپیش بینی شده.

این مغایرات بطورکلی می توانند ناشی ازعوامل زیرباشند:

۱) ضعف دربرنامه ریزی

۲) ضعف دراجرای برنامه های پیش بینی شده

۳) غلط بودن اطلاعات

۴) محدودیت های خارج ازکنترل مدیران

دقت ومطالعه درهرحالت ازموارد بالانشان دهنده کارآئی واحدتولیدی خواهدبود ●

تسلیت به همکار

آقای غلامرضا اسلامی بیدگلی همکارعزیز ماپدرگرامی خود را از دست دادند. مصیبت وارده رابه ایشان تسلیت می گوئیم.

هیئت تحریره

خواننده عزیز:

متاسفانه به علت تراکم مطالب دراین شماره موفق به چـــــاپ " بخشنامه های مالیاتی " نشدیم. انشاالله ازشماره آینده چاپ ایـــن بخشنامه هارا ادامه می دهیم.