Industrial Management Journal
Print ISSN: 2008-5885
Online ISSN: 2423-5369

Performance Analysis and Calculation of Marginal Rates in the Presence of Undesirable Input-output Factors and Non-Discretionary Indexes

Morassa Mahboubi
Ph.D. Candidate, Department of Mathematics, Lahijan Branch, Islamic Azad University, Lahijan, Iran. E-mail: m1.mahboobi@yahoo.com

Sohrab Kordrostami
*Corresponding Author, Prof., Department of Mathematics, Lahijan Branch, Islamic Azad University, Lahijan, Iran. E-mail: kordrostami@liau.ac.ir

Alireza Amirteimoori
Prof., Department of Applied Mathematics, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran. E-mail: aamirteimoori@gmail.com

Armin Ghane-Kanafi
Assistant Prof., Department of Mathematics, Lahijan Branch, Islamic Azad University, Lahijan, Iran. E-mail: arminghane@gmail.com

Abstract

Objective: In many production processes, the efficiency of decision-making units should be investigated in the presence of undesirable inputs and outputs and non-discretionary factors. It is also important for managers to examine the impact of changes on one index on another. Therefore, the purpose of this paper is to develop an approach to estimate the efficiency of systems with undesirable inputs and outputs and non-discretionary measures and also to analyze changes.

Methods: First, a novel approach based on data envelopment analysis was presented in order to analyze efficiency in the presence of undesirable input-output indices and non-discretionary factors. In fact, the new weak disposability axiom was used and the efficiency of the systems was investigated in the presence of undesirable input-output index and non-discretionary factors. Then the impact of changes of one non-discretionary index on another index was measured by maintaining efficiency, and the marginal rates of these changes were calculated.

Results: In order to explain the proposed method in practice, an applied example provided based on 31 branches of Islamic Azad University (department of

education) was presented and the results were discussed and analyzed. By using the suggested method, the efficiency scores and the impact of modifications were obtained.

Conclusion: Performance scores related to branches indicated that most of them behaved well. Also, it was observed that always increasing (decreasing) one index, while maintaining efficiency, does not end in an increase (decrease) in another index but it may remain unchanged or decreased (increased). Due to the inclusion of undesirable input and output measures and non-discretionary factors, the results of the proposed method were more acceptable than the classical DEA models.

Keywords: Data envelopment analysis, Marginal rates of substitution, Undesirable factors, Non-discretionary factors, Weak disposability

Citation: Mahboubi, Morassa, Kordrostami, Sohrab, Amirteimoori, Alireza and Ghane-Kanafi, Armin (2021). Performance Analysis and Calculation of Marginal Rates in the Presence of Undesirable Input-output Factors and Non-Discretionary Indexes. *Industrial Management Journal*, 13(3), 492-513. (*in Persian*)

Industrial Management Journal, 2021, Vol. 13, No.3, pp. 492-513
https://doi.org/10.22059/IMJ.2022.296478.1007710
© Authors
Published by University of Tehran, Faculty of Management

Article Type: Research Paper
Received: August 24, 2020
Accepted: February 23, 2021

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

شاپا چاپی: ۲۰۰۸-۵۸۸۵
شاپا الکترونیکی: ۲۴۲۳-۵۳۶۹
مدیریت صنعتی

تحلیل عملکرد و محاسبه نرخ‌های حاشیه‌ای با حضور عوامل ورودی ـ خروجی نامطلوب و شاخص‌های کنترل‌ناپذیر

مرصع محبوبی
دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران. رایانامه: m1.mahboobi@yahoo.com

سهراب کردرستمی
* نویسنده مسئول، استاد، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران. رایانامه: kordrostami@liau.ac.ir

علیرضا امیرتیموری
استاد، گروه ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران. رایانامه: aamirteimoori@gmail.com

آرمین قانع کنفی
استادیار، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران. رایانامه: arminghane@gmail.com

چکیده

هدف: در بسیاری از فرایندهای تولید، کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده باید در حالی بررسی شود که ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب و عوامل کنترل‌ناپذیر حضور دارد. همچنین بررسی تأثیر تغییرات یک شاخص بر شاخص دیگر، موضوع مهمی برای مدیران است. بنابراین، هدف در این پژوهش توسعه رویکردی برای برآورد کارایی سیستم‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب و عوامل غیراختیاری و همچنین تحلیل تغییرات است.

روش: ابتدا یک رویکرد نوین مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها به‌منظور تحلیل کارایی در حضور شاخص‌های ورودی ـ خروجی نامطلوب و عوامل کنترل‌ناپذیر ارائه می‌شود. در واقع از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف جدید استفاده شده و کارایی سیستم‌ها با حضور شاخص‌های ورودی ـ خروجی نامطلوب و عوامل کنترل‌ناپذیر بررسی می‌شود. سپس تأثیر تغییرات یک شاخص کنترل‌ناپذیر بر شاخص‌های دیگر با حفظ کارایی، سنجیده شده و نرخ‌های حاشیه‌ای این تغییرات محاسبه می‌شود.

یافته‌ها: در ادامه برای توضیح بیشتر روش پیشنهادی، یک نمونه کاربردی مربوط به ۳۱ واحد دانشگاه آزاد اسلامی (بخش آموزش) مطرح و نتایج تحلیل شده است. با استفاده از روش پیشنهادی، نمره‌های کارایی و تأثیر تغییرات به‌دست آمده است.

نتیجه‌گیری: نمره‌های کارایی نشان می‌دهد که اکثر واحدها عملکرد خوبی دارند. به علاوه مشاهده می‌شود که همواره با افزایش (کاهش) یک شاخص، با حفظ کارایی، شاخص دیگر افزایش (کاهش) نمی‌یابد، بلکه ممکن است بدون تغییر یا با کاهش (افزایش) همراه باشد. با توجه به دربرگیری شاخص‌های ورودی و خروجی نامطلوب و شاخص‌های کنترل‌ناپذیر، نتایج روش پیشنهادی در مقایسه با مدل‌های کلاسیک قابل قبول‌تر است.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، دسترسی‌پذیری ضعیف، عوامل کنترل‌ناپذیر، عوامل نامطلوب، نرخ‌های حاشیه‌ای

استناد: محبوبی، مرصع، کردرستمی، سهراب، امیرتیموری، علیرضا و قانع کنفی، آرمین (۱۴۰۰). تحلیل عملکرد و محاسبه نرخ‌های حاشیه‌ای با حضور عوامل ورودی ـ خروجی نامطلوب و شاخص‌های کنترل‌ناپذیر. *مدیریت صنعتی*، ۱۳(۳)، ۴۹۲- ۵۱۳.

مدیریت صنعتی، ۱۴۰۰، دوره ۱۳، شماره ۳، صص. ۴۹۲- ۵۱۳
دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۰۳، پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۰۵
doi: https://doi.org/10.22059/IMJ.2022.296478.1007710
نوع مقاله: علمی پژوهشی
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
© نویسندگان

مقدمه

دسترسی به بیشترین سطح تولید و استفاده بهینه از امکانات محدود، به عبارت دیگر سنجش و بهبود عملکرد سیستم‌ها برای مدیران بسیار مهم بوده است. در بررسی عملکرد بسیاری از سیستم‌ها عوامل کنترل‌ناپذیر و نامطلوب مشاهده می‌شوند. یکی از روش‌های محبوب برای تحلیل کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) نظیر، واحدهای آموزشی، خدماتی، تولیدی، صنعتی با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه و متجانس، روش غیرپارامتری تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) است که بر مدل‌های برنامه‌ریزی خطی مبتنی است. برای نمونه، از کاربرد تحلیل پوششی داده‌ها، می‌توان به ابراهیمی کردلر، جعفرزاده، علی احمدی (۱۳۹۷)، رمضانیان، یاکیده، محمدی بازقلعه (۱۳۹۹) و رادسر، کاظمی، مهرگان، رضوی حاجی‌آقا (۱۴۰۰) اشاره کرد. فارل[1] (۱۹۵۷)، مدلی برای اندازه‌گیری کارایی تولید با استفاده از مرز کارایی بدون استفاده از تابع تولید پیشنهاد کرد او مرز تولید را با استفاده از اتصال (DMU) به صورت تابع قطعه قطعه خطی به دست آورد. چارنز، کوپر و رودز[2] (۱۹۷۸)، کارایی فارل را از چند ورودی و یک خروجی به صورت چندورودی و چندخروجی گسترش دادند و این تکنیک در قالب مدل‌های استاندارد CCR ارائه گردید. مدل‌های دیگری مانند BCC (بنکر، چارنز و کوپر[3]، ۱۹۸۴) و مدل جمعی و... همهٔ این مدل‌ها برای ورودی و خروجی مطلوب به کار رفته است. در تمام مدل‌های ذکرشده، ورودی‌ها و خروجی‌ها در محیط‌های همگن و متجانس در یک سیستم فرض شدند. در حالی که در بسیاری از سازمان‌ها مانند کارخانه‌ها، بیمارستان‌ها، بانک‌ها .... علاوه بر عوامل مطلوب، عوامل نامطلوب نیز تولید می‌شوند. در بین مطالعات تحلیل پوششی داده‌ها روش‌های متفاوتی به منظور رسیدگی خروجی‌های نامطلوب ارائه شده است. به منظور مطالعه بیشتر می‌توان به مقالات هایلو و یمن[4] (۲۰۰۱)، فار و گراسکوف[5] (۲۰۰۴)، سیفورد و ژو[6] (۲۰۰۲)، جهانشاه‌لو، لطفی، شجاع، توحیدی و رضویان[7] (۲۰۰۵)، هادی وینچه ، کاظمی متین و توسلی[8] (۲۰۰۵) وکاسمانن[9] (۲۰۰۵) مراجعه کرد. به علاوه یکی از ویژگی‌های مهم روش سنتی DEA این است که ورودی‌ها وخروجی‌های آن قابل کنترل است، ولی در بسیاری کاربردهای واقعی عوامل محیطی (کنترل‌ناپذیر) نیز حضور دارند. برای نمونه شرایط آب و هوایی (برف و باران)، برای ارزیابی محصولات کشاورزی از کنترل انسان خارج است. در مدل‌های CCR و BCC برای بررسی عملکرد، ورودی‌ها و خروجی‌ها کنترل‌ناپذیر را در نظر نمی‌گیرند یا همانند عوامل کنترل‌پذیر با آن‌ها رفتار می‌کنند، در این‌صورت ارزیابی دقیق از عملکرد سیستم به دست نمی‌آید. بنابراین مدل‌های مختلفی برای رفع این مشکل ارائه شده است. اولین مقاله‌ای که داده‌های کنترل‌ناپذیر را مورد بحث قرار داد، مقاله بنکر و موری (۱۹۸۶)، است واحد تحت ارزیابی در مجموعه مرجع خود با واحدهایی مقایسه می‌گردد که هم سطوح بالاتر و هم پایین‌تر از متغیرهای کنترل‌ناپذیر را دارد. بنکر و موری (۱۹۸۶)، مدل جدید را برای ارزیابی عملکرد ارائه نمود که متغیر تحت ارزیابی نه با سطوح بالاتر و نه با

1. Farrell
2. Charnes, Cooper, Rhodes
3. Banker, Charnes and Cooper
4. Hailu, Veeman
5. Färe, Grosskopf
6. Seiford, Zhu
7. Jahanshahloo, Lotfi, Shoja, Tohidi, Razavyan
8. Hadi Vencheh, Kazemi Matin, Tavassoli Kajani
9. Kuosmanen

سطوح پایین‌تر از خود مقیاس نمی‌گردد بلکه فقط به صورتی محدود می‌گردد که از سطح دیگر متغیرهای کنترل‌ناپذیر تجاوز نکند. لاول و ناکس[1] (۱۹۹۴)، مدل دیگری پیشنهاد کردند که در آن یک واحد فقط با واحدی که در محیطی حداقل به نامطلوبی محیط خودش است مقایسه می‌شود. در مطالعه رگریو[2] (۱۹۹۶)، هر واحد تحت بررسی که در محیط پایین‌تر (سختگیرانه‌تر) یا در محیط‌های هم‌تراز با واحد تحت ارزیابی قرار گرفته باشند، مقایسه می‌شوند. در این مدل فرض تحدب روی متغیرهای کنترل‌ناپذیر تعریف نمی‌گردد. رگریو (۲۰۰۴)، مدلی را پیشنهاد نمود که واحد تحت ارزیابی با سطوح پایین‌تر از خودش و نیز در سطح خود، و همچنین با واحدهایی که در شرایط محیطی بالاتری نیز واقع هستند، با تعریف شرایط خاص، مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. کاظمی‌متین و عزیزی (۱۳۹۱) عوامل کنترل‌ناپذیر در سنجش کارایی شرکت‌های برق منطقه‌ای ایران را مدل‌بندی نمودند، در این مدل بندی عوامل قابل کنترل را بهبود بخشیدند و عوامل کنترل‌ناپذیر را ثابت نگه‌داشتند. سیرجانن[3] (۲۰۰۴)، مدل بنکر و موری (۱۹۸۶)، تحت بازده به مقیاس ثابت را به صورت بازده به مقیاس متغیر معرفی کرد، سپس به صورت پایه‌ای مدل را از منظر تئوری بر مبنای اصول مجموعه امکان تولید فرمول‌بندی و از نظر تجربی با مثال‌ها و تحلیل‌های عددی آنها را مورد بررسی قرار دادند. مونیز، پارادی، رگریو و یانگ[4] (۲۰۰۴)، روش‌های تک مرحله‌ای و چند مرحله‌ای را بیان نموده و سپس آن‌ها را باهم مقایسه کردند. کامانهو، پورتلا و واز[5] (۲۰۰۸)، نیز بر مبنای DEA برای اندازه‌گیری کارایی و با در نظر گرفتن عوامل کنترل‌ناپذیر روشی ارائه نمودند. آن‌ها عوامل غیراختیاری را به دو گروه عوامل درونی و عوامل بیرونی طبقه‌بندی کردند. امیرتیموری، مقبولی و کردرستمی[6] (۲۰۱۶)، یک روش دو مرحله‌ای را برای عوامل غیراختیاری در DEA مورد بررسی قرار دادند. در مرحله اول چندعامل غیراختیاری را تبدیل به یک عامل تصنعی، سپس با استفاده از این مدل، عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده مورد ارزیابی قرار گرفت. محقر، صفری، امیرتیموری و صوفی (۱۳۹۵)، سنجش کارایی واحدهای تصمیم گیرنده با ساختار شبکه‌ای موازی با حضور هم‌زمان خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌های کنترل‌ناپذیر، ارائه نمودند.

از طرف دیگر برخی پژوهشگران تحلیل پوششی داده‌ها، تأثیر تغییر یک یا چند شاخص بر یک یا چند شاخص دیگر را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این زمینه می‌توان به مقالات روزن و همکاران[7] (۲۰۰۰)، کوپر، پارک و سورانا[8] (۲۰۰۰)، سویوشی و گاتو[9] (۲۰۱۲)، اشاره نمود. همچنین، خوش‌اندام، امیرتیموری و کاظمی متین[10] (۲۰۱۴)، اندازه‌گیری و محاسبهٔ نرخ‌های حاشیه‌ای با حضور عوامل کنترل‌ناپذیر برای واحد تصمیم‌گیرنده کارا از محیط فعلی به محیطی با مطلوبیت بیشتر یا کمتر از محیط فعلی را بررسی کردند، به گونه‌ای کهDMU همچنان کارایی خود را حفظ نماید. به علاوه خوش‌اندام، کاظمی متین و امیرتیموری (۲۰۱۵)، به بررسی نرخ‌های حاشیه‌ای در حضور خروجی‌های نامطلوب پرداخته‌اند.

1. Lovell, Knox
2. Ruggiero
3. Syrjänen
4. Muñiz, Paradi, Ruggiero, Yang
5. Camanho, Portela, Vaz
6. Amirteimoori, Maghbouli, Kordrostami
7. Rosen, Schaffnit, Paradi
8. Cooper, Park, Ciurana
9. Sueyoshi, Goto
10. Khoshandam, Amirteimoori, Kazemi Matin

جهانی صیادنویری و کردرستمی[1] (۲۰۲۰) به بررسی رابطه جایگزینی شاخص‌های پایداری پرداختند؛ در حالی که عوامل نامطلوب و صحیح مقدار حضور دارند. محبوبی، کردرستمی، امیرتیموری و قانع کنفی[2] (۲۰۲۱) به محاسبهٔ نرخ‌های حاشیه‌ای جانشینی در ساختارهای دومرحله‌ای با شاخص‌های نامطلوب پرداختند. به علاوه محبوبی و همکاران (۲۰۲۱) به تخمین نرخ‌های حاشیه‌ای جانشینی با شاخص‌های ورودی و خروجی نامطلوب پرداختند.

با این وجود در مطالعات حاضر، روشی به منظور بررسی نرخ حاشیه‌ای با حضور هم‌زمان عوامل ورودی ـ خروجی نامطلوب و شاخص‌های کنترل‌ناپذیر موجود نمی‌باشد. بنابراین این پژوهش با تعمیم مدل رگریو (۲۰۰۴)، روشی پیشنهاد می‌دهد به منظور ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در حالی که عوامل کنترل‌ناپذیر و نامطلوب (ورودی‌ها و خروجی‌ها) به طور هم‌زمان حضور دارند. بدین منظور یک فرض دسترسی‌پذیری ضعیف نوین برای عوامل ورودی ـ خروجی نامطلوب در نظر گرفته می‌شود. همچنین تأثیر تغییرات یک شاخص کنترل‌ناپذیر بر شاخص‌های دیگر با حفظ کارایی، سنجیده شده و نرخ این تغییرات محاسبه می‌گردد.

ادامه این مباحث بدین شرح ارائه می‌شود. در بخش ۲ برخی مدل‌های موجود با حضور عوامل کنترل‌ناپذیر مطرح می‌شوند. در بخش ۳ تحت اصل دسترسی‌پذیری ضعیف جدید عوامل نامطلوب روشی نوین برای سنجش کارایی واحدها در حضور شاخص‌های نامطلوب و عوامل کنترل‌ناپذیر ارایه می‌شود. در بخش ۴ نرخ‌های حاشیه‌ای با حضور عوامل کنترل‌ناپذیر و نامطلوب مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۵ مثال کاربردی مطرح می‌شود. سپس نتیجه‌گیری و پیشنهادها ارائه خواهد شد.

مروری بر مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با عوامل نامطلوب و کنترل‌ناپذیر

گروهی از فعالیت‌ها که در سال‌های اخیر توجه پژوهشگران را به خود جلب کرده است، تولید خروجی‌های نامطلوب همراه با خروجی‌های مطلوب است. وجود چنین ضایعات خطرناکی به محیط زیست آسیب می‌زنند. حال برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری در چنین فرایندهای تولیدی، کاهش تولید فرآورده‌های نامطلوب (خروجی‌های نامطلوب) و افزایش تولید فرآورده‌های مطلوب (خروجی‌های مطلوب) به طور هم زمان و استفاده از روشی مناسب و سازگار با تئوری تولید مورد بحث قرار گرفته است. بدین منظور می‌توان روش غیرپارامتری تحلیل پوششی داده‌ها را برای ارزیابی و بررسی عملکرد واحدها به کار برد. این روش به فرم تابع تولید نیاز ندارد. از جمله کارهای انجام شده دراین زمینه می‌توان به مقالات فار و همکاران[3] (۱۹۸۴)، بال و همکاران[4] (۱۹۹۴)، هایلو و ویمن[5] (۲۰۰۱ و ۲۰۰۳)، فار و گراسکوف[6] (۲۰۰۳ و ۲۰۰۴ و ۲۰۰۸) سیفورد و ژو[7] (۲۰۰۲)، کاسمانن[8] (۲۰۰۵) و کاسمانن و پودینوسکی[9] (۲۰۰۹) اشاره کرد.

1. Jahani Sayyad Noveiri, Kordrostami
2. Mahboubi, Kordrostami, Amirteimoori, Ghane-Kanafi
3. Fare
4. Ball
5. Hailu and Veeman
6. Fare and Grosskopf
7. Seiford and Zhu
8. Kuosmanen
9. Kuosmanen and Podinovski

اصل دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی‌های نامطلوب به این مطلب اشاره دارد که اگر بردار ورودی x، قادر به تولید بردار خروجی (v, w) باشد، آن‌گاه با کاهش بردار خروجی نامطلوب به اندازه فاکتور θ، بردار خروجی مطلوب نیز به اندازهٔ θ کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، اگر $(v,w) \in L(x)$, $0 \leq \theta \leq 1$ آن‌گاه $(\theta v, \theta w) \in L(x)$.

همچنین، گروه دیگری از داده‌ها که امروزه مورد توجه محققان قرار گرفته است، مصرف ورودی‌های نامطلوب همراه با ورودی‌های مطلوب، در حین فرایند تولید است. در واقع نوعی از ورودی است که در یک فرایند تولید، برخلاف رویه موردانتظار در DEA هرچه بیشتر باشد، خوشایندتر است. به عنوان نمونه، در عملیات بازیافت، ورودی‌های نامطلوب یا همان زباله‌ها برای بهبود سطح کارایی افزایش داده می‌شوند. هدف، کاربرد روشی است که علاوه بر سازگاری با مفاهیم تئوری تولید، قادر به افزایش ورودی‌های نامطلوب و کاهش ورودی‌های مطلوب باشد. به مقاله مهدیلوزاد و پودینوسکی[1] (۲۰۱۸) برای مطالعه بیشتر می‌توان اشاره نمود.

ورودی‌ها دسترسی‌پذیری ضعیف دارند اگر $(x, x') \in P(y)$ آن‌گاه $\delta \geq 1, (x, \delta x') \in P(y)$. این اصل اشاره به این مطلب دارد که اگر بردار ورودی (x, x')، قادر به تولید بردار خروجی (y) باشد، آن‌گاه با افزایش بردار ورودی نامطلوب به اندازه فاکتور δ، بردار ورودی مطلوب بدون تغییر باقی می‌ماند. در واقع، فاکتور δ را فاکتور انبساط معرفی می‌کنند. در مدل‌سازی مسائل واقعی، فاکتورهایی هستند که خارج از کنترل مدیریت می‌باشند و در ارزیابی یک سیستم نیاز به حضور آنها احساس می‌گردد. اولین بار بنکر و موری (۱۹۸۶)، روشی را برای مدل‌سازی فاکتورهای کنترل‌ناپذیر معرفی کردند. این مدل بر پایه همان اصول مدل BCC بنا نهاده شده است. فاکتورهای کنترل‌ناپذیر که با بردار $z = (z_1, \ldots, z_L) \in R^L$ نمایش داده می‌شود همانند ورودی‌های نرمال در مدل وارد شدند اما فاکتور انقباض (θ) فقط برای ورودی‌های قابل کنترل به کار رفت که با بردار $x = (x_1, \ldots x_m) \in R^m$ نشان داده می‌شود، همچنین بردار خروجی با $y = (y_1, \ldots, y_s) \in R^S$ نمایش داده می‌شود. مدل در ماهیت ورودی بنکر و موری (۱۹۸۶)، برای اندازه‌گیری کارایی واحد تحت ارزیابی (x°, y°) به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\min \theta \qquad (۲-۱)\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda^j y_r^j \geq y_r^\circ \qquad r = 1, \ldots, s\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda^j x_i^j \leq \theta x_i^\circ \qquad i = 1, \ldots, m\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda^j z_l^j \leq z_l^\circ \qquad l = 1, \ldots, L\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda^j = 1\\
&\lambda^j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n\\
&\theta \ free \ in \ sign
\end{aligned}
$$

1. Mehdiloozad and Podinovski

در این مدل، فاکتور انقباض θ فقط برای متغیرهای قابل کنترل به کار رفته و متغیرهای کنترل‌ناپذیر همانند ورودی نرمال در مدل وارد شده است. بنابراین اصول موضوعه به کار رفته در مدل (۱-۲) همانند اصول موضوعه‌ای است که بنکر و همکاران (۲۰۱۵) برای مدل BCC ارائه کردند. مجموعه امکان تولیدی آن به این صورت قابل تعریف است:

$$T = \{(y,x,z) | \text{تولید شود} \ z \geq 0 \ \text{و} \ x \geq 0 \ \text{توسط} \ y \geq 0 \ \text{می‌تواند}\}$$

همان طور که از مدل ۱ برمی‌آید فرض تحدب روی متغیرهای کنترل‌ناپذیر نیز به کار رفته و این متغیرها در ساختار مجموعه امکان تولید وارد شده‌اند. اما ایراد عمده‌ای که به این مدل وارد است، ممکن است برخی از واحدها در مجموعه مرجع، ناکارا تلقی شود. به عبارت دیگر، واحد تحت ارزیابی در مجموعه مرجع خود با واحدهایی سنجیده می‌گردد که در شرایط بسیار مطلوب‌تر از آن قرار گرفته‌اند. اگر این متغیرها به صورت متغیرهای محیطی تعریف شوند مدل (۱-۲) در کنترل با چنین عواملی اندازه کارایی را به درستی برآورد نمی‌کند.

در مدل بنکر ـ موری (۱۹۸۶)، سنجش عملکرد با شرط عوامل قابل کنترل یا کنترل‌ناپذیر بودن داده‌های قطعی، ارائه شده است. تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت در مدل (۱-۲) با انجام تغییرات در محدودیت مربوط به متغیرهای کنترل‌ناپذیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\min \quad \theta && && (۲-۲)\\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda^j y_r^j \geq y_r^\circ && , \quad r = 1,\dots,s \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda^j x_i^j \leq \theta x_i^\circ && , \quad i = 1,\dots,m \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda^j z_l^j \leq z_{l\circ} \sum_{j=1}^{n} \lambda^j && , \quad l = 1,\dots,L \\
&\lambda^j \geq 0 && , \quad j = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

متغیر تحت ارزیابی z_l° نه با سطوح بالاتر و نه با سطوح پایین‌تر از خود مقیاس نمی‌گردد بلکه فقط به صورتی محدود می‌گردد که از سطح دیگر متغیرهای کنترل‌ناپذیر تجاوز نکند همان‌طور که از محدودیت سوم مدل بر می‌آید این محدودیت را می‌توان به‌صورت $\sum_{j=1}^{n} \lambda^j (z_l^j - z_l^\circ) \leq 0$ بیان کرد که بیانگر یک متغیر جدید به صورت $z_l^j - z_l^\circ$ است. این متغیر معرف تفاضل سطوح متغیر کنترل‌ناپذیر تحت ارزیابی با سایر سطوح متغیرهای کنترل‌ناپذیر در یک نمونه n تایی می‌باشد.

اصول موضوعه به کار رفته در ساختار مدل (۲-۲) همانند اصول موضوعه مدل CCR است. با این تفاوت که اصل بی‌کرانی اشعه به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\text{if} \ \ (y,x,z) \in T \ \ \text{then} \ \ (ky,kx,z) \in T \ \ \text{for any} \ k > 0$$

مجموعه امکان تولید (T) برای مدل (۲-۲) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \{(y,x,z) | \text{تولید شود} \ z \geq 0, x \geq 0 \ \text{از} \ \text{می‌تواند} \ y \geq 0\}$$

در مدل رگریو (۱۹۹۶)، با فرض عدم تحدب برای متغیرهای کنترل‌ناپذیر، مرز تولیدی با توجه به واحد تحت بررسی مورد ارزیابی قرار گرفت زیرا هر واحد تحت ارزیابی تنها با واحدهایی قیاس می‌گردد که در محیط پایین‌تر یا در همان محیط قرار گرفته باشند. بنابراین مجموعه امکان تولیدی وابسته به zای ثابت به صورت زیر بیان کرد:

$$T(z) = \{(y,x) \mid \text{تولید شود } x \geq 0 \text{ توسط } y \geq 0 \text{ می تواند } \} \qquad , z \geq 0$$

براساس اصول موضوعه، هر محیط مجموعه امکان تولیدی را به دست می‌دهد و هر DMU تنها با DMUهای واقع در محیط خودش یا محیط‌های پایین‌تر از خود مورد ارزیابی واقع می‌گردد. در واقع این اصول مرزهای تولیدی تو در تو ایجاد می‌کند. براساس اصول موضوعه، مدل رگریو (۱۹۹۶)، (با تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر) در ماهیت ورودی به صورت مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda^j y^j \geq y^\circ \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda^j x^j \leq \theta x^\circ \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda^j = 1 \\ & \lambda^j \geq 0 \qquad \forall j \in z^j \leq z^\circ \\ & \lambda^j = 0 \qquad \forall j \in z^j > z^\circ \end{aligned} \qquad (۲-۳)$$

در این مدل متغیر z به عنوان متغیر محیطی معرفی می‌گردد و $z_1 < z_2$ بیانگر این است که z_1 محیط بهتری از z_2 نمی‌باشد.

برخلاف مدل (۱-۲) در این مدل فرض تحدب روی متغیرهای کنترل‌ناپذیر تعریف نمی‌گردد. در مدل (۳-۲) هر DMU تنها با DMUهایی مقایسه می‌گردد که مقادیر متغیر محیطی (z^j) کمتر یا مساوی متغیر محیطی واحد تحت ارزیابی باشد در این صورت سهم متغیر λ_j برای این DMU، مثبت است و سهم بقیه DMUها در بقیه محیط‌ها که متغیر محیط آن مقدار بزرگتری از z° (متغیر محیطی واحد تحت ارزیابی) دارد صفر است که در مدل (۳-۲) به صورت محدودیت پنجم یا همان $(\forall j \in z^j > z^\circ)\lambda^j = 0$ بیان می‌گردد.

رگریو (۲۰۰۴)، مدلی را پیشنهاد نمود که واحد تحت ارزیابی نه تنها با سطوح پایین‌تر از خودش و نیز در سطح خود، ارزیابی می‌گردد؛ بلکه با واحدهایی که در شرایط محیطی بالاتری نیز واقع هستند، با تعریف شرایط خاص، مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، هدف ایجاد یک محیط رقابتی منصفانه‌تر و مجموعه‌های مرجع زیادتری است. این شرایط خاص به ازای هر متغیر کنترل‌ناپذیر به صورت $\delta(z)$ قابل تعریف است و $\delta(z)$ بیانگر مینیمم تفاضل بین سطوح متغیرهای کنترل‌ناپذیر بالاتر از سطح متغیر کنترل‌ناپذیر واحد تحت ارزیابی است.

مدل برنامه‌ریزی خطی پیشنهادی رگریو (۲۰۰۴)، به صورت زیر می‌باشد:

$$min\theta \qquad (۲-۴)$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^j y_r^j \geq y_r^\circ, \qquad r = 1,\dots,s$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^j x_i^j \leq \theta x_i^\circ, \qquad i = 1,\dots,m$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^j = 1$$
$$\lambda^j = \circ \; if z^j > z^\circ + \delta(z) > \circ; \qquad \delta(z) > \circ$$
$$\lambda^j \geq \circ, \qquad \forall j = 1,\dots,n$$

مقدار $\delta(z)$ که بیانگر رابطه بین δ و z است با به کارگیری تکنیک‌های پارامتری، از جمله رگرسیون، قابل تقریب است.

کارایی در حضور عوامل کنترل‌ناپذیر و نامطلوب با استفاده از اصل دسترسی پذیری ضعیف نوین

در این بخش با در نظر گرفتن اصل دسترسی‌پذیری ضعیف جدید، مدلی به منظور ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده، با حضور هم‌زمان عوامل کنترل‌ناپذیر و نامطلوب پیشنهاد می‌شود. همچنین واحد تحت بررسی در محیط فعلی‌اش و سخت گیرانه‌تر از محیط فعلی‌اش مورد ارزیابی واقع می‌شود. در این تکنولوژی واحدهایی که در محیط نامطلوب‌تر واقع هستند، به عنوان مرجع در نظر گرفته نمی‌شود. اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب به طور هم‌زمان با حضور متغیرهای محیطی، ایده اساسی تکنولوژی مورد بحث را تشکیل می‌دهد. با فرض وجود k واحد تصمیم‌گیرنده و تعریف بردارهای ورودی، خروجی مطلوب و نامطلوب به ازای هر واحد تصمیم‌گیرنده به صورت $x^k = (x_1^k,\dots,x_N^k) \geq \circ$ ورودی مطلوب و $x'^k = (x'^k_1,\dots,x'^k_Q) \geq \circ$ ورودی نامطلوب، $v^k = (v_1^k,\dots,v_M^k) \geq \circ$ خروجی مطلوب و $w^k = (w_1^k,\dots,w_J^k) \geq \circ$ خروجی نامطلوب و نیز بردارهای معرف متغیرهای محیطی (کنترل‌ناپذیر) به صورت $z^k = (z_1^k,\dots,z_L^k) \geq \circ,$ مجموعه امکان تولید به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$T(z) = \left\{ (x, x', v, w) \middle| (v, w) \leq f((x, x')|z) \right\}$$

تعریف: اصل دسترسی‌پذیری ضعیف نوین

ورودی‌ها و خروجی‌ها به طور هم‌زمان دسترسی پذیری ضعیف دارند، اگر داشته باشیم:

$$(x, x', v, w) \in T(z), \quad (\alpha_N, \alpha_Q) \geq \cdot \quad ,(\varphi_M, \varphi_J) \geq \cdot \quad \alpha, \varphi \geq \cdot \qquad (۳-۱)$$
$$\Rightarrow \quad (x + \alpha_N, x' + \alpha_Q, v - \varphi_M, w - \varphi_J) \in T(z)$$
$$\alpha_N = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \in R_+^N, \quad \alpha_Q = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \in R_+^Q$$
$$\varphi_M = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \in R_+^M, \quad \varphi_J = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \in R_+^J$$

در تعریف فوق، فاکتور افزایش ثابت α برای هر مؤلفهٔ ورودی مطلوب و ورودی نامطلوب و همچنین فاکتور کاهش ثابت φ برای هر مؤلفهٔ خروجی مطلوب و خروجی نامطلوب، به طور هم‌زمان به کار رفته است. حال، تکنولوژی تولید تحت فرض دسترسی‌پذیری ضعیف نوین در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) دسترسی‌پذیری قوی ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب اگر: $(x,x',v,w)\in T(z)$, $0\le v'\le v$, $x''\ge x$ به ازای هر مؤلفه، آن‌گاه $(x'',x',v',w)\in T(z)$

۲) دسترسی‌پذیری ضعیف ورودی‌های نامطلوب و مطلوب: اگر $(x,x')\in T(z)$, $\alpha\ge 0$ آن‌گاه $(x+\alpha,x'+\alpha)\in T(z)$.

۳) دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی‌های نامطلوب و مطلوب: اگر $(v,w)\in T(z)$, $\varphi\ge 0$ آن‌گاه $(v-\varphi,w-\varphi)\in T(z)$.

۴) محدب بودن: اگر $(x_1,x'_1,v_1,w_1)\in T(z)$ و $(x_2,x'_2,v_2,w_2)\in T(z)$ و $\lambda\in[0,1]$ آنگاه $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda x'_1+(1-\lambda)x'_2,\lambda v_1+(1-\lambda)v_2,\lambda w_1+(1-\lambda)w_2)\in T(z)$

۵) اصل شمول مشاهدات: به ازای هر واحد تحت ارزیابی DMU_k $(k=1,...,K)$؛ اگر DMU_k واقع در محیط z^k باشد (یا به عبارت دیگر DMU_k در محیطی با متغیر محیطی z^k واقع گردد) آن‌گاه واحد مشاهده‌شده DMU_k متعلق به $T(z^k)$ است یعنی $(x^k,x'^k,v^k,w^k)\in T(z^k)$.

۶) تأثیر متغیرهای محیطی: به ازای هر $z_1\le z_2$ داریم $T(z_1)\subset T(z_2)$.

۷) کمینه برون‌یابی: اگر مجموعه امکان‌تولید $T_1(z)$ در اصول (۱) تا (۶) صدق کند آن‌گاه به ازای هر z داریم: $T_1(z)\subseteq T(z)$.

در حقیقت اصل (۶) نمایانگر تأثیر متغیرهای محیطی برای توصیف فرایند تولید است یا به عبارت دیگر، واحد تحت ارزیابی تنها با واحدهایی قابل قیاس است که در محیط خودش یا پایین‌تر از آن واقع است این حقیقت را می‌توان به صورت عبارت زیر بیان نمود:

$$\lambda^k\ge 0 \quad \text{if} \quad z_l^k\le z_l^\circ \qquad \forall l,k \tag{۳-۲}$$

در عبارت (۳-۲) z_l^k معرف مؤلفه‌ی l–ام متغیر محیطی برای واحد k–ام $(k=1,...,K)$ است. یعنی اگر هر مؤلفه‌ی متغیر محیطی واحد k–ام $(k=1,...,K)$ از مؤلفه‌ی نظیر واحد تحت ارزیابی کوچکتر یا مساوی باشد. متغیر وزنی $\lambda^k(k=1,...,K)$ بزرگتر یا مساوی صفر است. پس با استفاده از اصول موضوعه به کار رفته و نیز به کارگیری اصل (۱-۳) می‌توان تکنولوژی تجربی $\hat{T}(z)$ با ساختار غیرخطی را به صورت زیر بیان نمود:

$$\hat{T}(z)=\left\{(v,w,x,x') \;\middle|\; \sum_{k=1}^{K}\lambda^k(x_n^k+\alpha_n)\le x_n \qquad n=1,\dots,N \right. \tag{۳-۳}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\lambda^k(x'^k_q+\alpha_q)=x'_q \qquad q=1,\dots,Q$$

$$\sum_{k=1}^{K}\lambda^k(v_m^k-\varphi_m)\ge v_m \qquad m=1,\dots,M$$

$$\sum_{k=1}^{K}\lambda^k(w_r^k-\varphi_j)=w_j \qquad j=1,\dots,J$$

$$\text{if}\quad z_l^k\le z_l^\circ+\delta(z),\quad \delta(z)>\circ \text{ then}\quad \lambda^k\ge\circ\quad l=1,\dots,L,\quad k=1,\dots,K$$

$$\text{if}\quad z_l^k> z_l^\circ+\delta(z),\quad \delta(z)>\circ \text{ then}\quad \lambda^k=\circ\quad l=1,\dots,L,\quad k=1,\dots,K$$

$$\sum_{k=1}^{K}\lambda^k=1$$

$$\left.\alpha^k\ge 0,\quad \varphi^k\ge 0,\quad v_m^k\ge\varphi_m,\quad w_r^k\ge\varphi_j \quad,\ k=1,\dots,K\right\}$$

در تکنولوژی (۳-۳)، متغیر وزنی λ ، نمایانگر سهم هر واحد تصمیم گیرنده $(k=1,\dots,K)$ در ساختن ترکیب محدبی از واحدهای مشاهده شده است. از سویی دیگر $\alpha_n=\alpha$، n امین مؤلفه α_N و $\alpha_q=\alpha$ ، q امین مؤلفه α_Q و $\varphi_m=\varphi$ ، m امین مؤلفه φ_M و $\varphi_j=\varphi$ ، j امین مؤلفه φ_J و z^k متغیرهای وزنی هستند که در قید آخر ترکیب محدب واحدهای تصمیم‌گیری را ایجاب می‌کند.

متغیر وزنی λ^k به صورت زیر در مدل پیاده‌سازی می‌شود

$$\lambda^k=\lambda^k-\alpha\lambda^k+\alpha\lambda^k=\lambda^k(1-\alpha)+\alpha\lambda^k=\lambda_1^k+\mu_1^k$$

$$\lambda^k=\lambda^k-\varphi\lambda^k+\varphi\lambda^k=\lambda^k(1-\varphi)+\varphi\lambda^k=\lambda_2^k+\mu_2^k$$

مجموع طرفین روابط فوق، به صورت زیر قابل تعریف است:

$$2\lambda^k=\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k\Rightarrow\lambda^k=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k\right)$$

$$\frac{v_m^k}{\lambda^k}\times\lambda^k\ge\varphi_m\Rightarrow v_m^k\times\lambda^k\ge\lambda^k\times\varphi_m\Rightarrow v_m^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\mu_2^k$$

$$\frac{w_j^k}{\lambda^k}\times\lambda^k\ge\varphi_j\Rightarrow w_j^k\times\lambda^k\ge\lambda^k\times\varphi_j\Rightarrow w_j^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\mu_2^k$$

با به کارگیری جانشینی‌های فوق، تکنولوژی غیرخطی (۳-۳) به فرم خطی زیر بازنویسی می‌شود:

(۳-۴)

$$\hat{T}(z)=\left\{(v,w,x,x') \;\middle|\; \sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)x_n^k+\mu_1^k)\le x_n \qquad n=1,...,N\right.$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)x'^k_q+\mu_1^k)=x'_q \qquad q=1,...,Q$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)v_m^k-\mu_2^k)\ge v_m \qquad m=1,...,M$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)w_r^k-\mu_2^k)=w_j \qquad j=1,...,J$$

$$\text{if}\quad z_l^k\le z_l^\circ+\delta(z),\quad \delta(z)>\circ \text{ then}\quad (1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\circ\quad l=1,...,L,\ k=1,...,K$$

$$\text{if}\quad z_l^k>z_l^\circ+\delta(z),\quad \delta(z)>\circ \text{ then}\quad (1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)=\circ\quad l=1,...,L,\ k=1,...,K$$

$$\sum_{k=1}^{K}(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)=1$$

$$v_m^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\mu_2^k \qquad ,k=1,...,K$$

$$w_j^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\mu_2^k \qquad ,k=1,...,K$$

$$\lambda_1^k,\mu_1^k,\lambda_2^k,\mu_2^k\ge 0\Big\}$$

تکنولوژی تعریف‌شده در بالا، برحسب متغیرهای $\lambda_1^k,\mu_1^k,\lambda_2^k,\mu_2^k$ خطی است علاوه بر این محدودیت شرطی اعمال‌شده مجموعه مرجع را تنها به واحدهایی محدود می‌کند که در محیط پایین‌تر یا هم‌تراز با محیط واحد تحت ارزیابی قرار می‌گیرد. برای ارزیابی کارایی واحد o –ام، مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر حل می‌گردد:

(۳-۵)

$$\tau^{o*}=\max\tau$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)x_n^k+\mu_1^k)\le x_n^o \qquad n=1,...,N$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)x'^k_q+\mu_1^k)=(1+\tau)x'^o_q \qquad q=1,...,Q$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)v_m^k-\mu_2^k)\ge v_m^o \qquad m=1,...,M$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)w_r^k-\mu_2^k)=(1-\tau)w_j^o \qquad j=1,...,J$$

$$\text{if}\quad z_l^k\le z_l^\circ+\delta(z),\quad \delta(z)>\circ \text{ then}\quad (1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\circ\quad l=1,...,L,\ k=1,...,K$$

$$\text{if}\quad z_l^k>z_l^\circ+\delta(z),\quad \delta(z)>\circ \text{ then}\quad (1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)=\circ\quad l=1,...,L,\ k=1,...,K$$

$$\sum_{k=1}^{K}(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)=1$$

$$v_m^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\mu_2^k \qquad ,k=1,...,K$$

$$w_j^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\mu_2^k \qquad ,k=1,...,K$$

$$\lambda_1^k,\mu_1^k,\lambda_2^k,\mu_2^k\ge 0$$

در مدل فوق با قرار دادن قید $z_l^k > z_l^\circ + \delta(z), \delta(z) > \circ$ if واحدهایی با سطح مطلوبیت بالاتر از مجموعه مرجع را محدودتر می‌نماید. به این ترتیب واحدهایی که سطح مطلوبیت آنها از دید عوامل کنترل‌ناپذیر بیشتر از $\delta(z)$ نباشد نیز می‌توانند جزء واحدهای مرجع برای واحد تحت بررسی منظور شوند. در مدل (۵-۳) وقتی ورودی‌های نامطلوب ماکزیمم و خروجی‌های نامطلوب مینیمم هستند، توسط بردار جهتی $(d_{x'}, d_w)$ پیاده‌سازی می‌شود. مقدار بهینه تابع هدف میزان ناکارایی واحد تحت بررسی را نشان می‌دهد. اگر مقدار بهینه تابع هدف صفر باشد، واحد تصمیم‌گیرنده تحت بررسی، یک واحد کاراست، به عبارت دیگر، تابع هدف بزرگتر از صفر باشد واحد تصمیم‌گیرنده ناکاراست. در ادامه به محاسبهٔ نرخ حاشیه‌ای در حضور عوامل نامطلوب و کنترل‌ناپذیر خواهیم پرداخت.

نرخ‌های حاشیه‌ای با حضور عوامل کنترل‌ناپذیر و شاخص‌های ورودی ـ خروجی نامطلوب

فرایندهای تولید، نرخ‌های حاشیه‌ای از نقطه نظرهای مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این بخش روشی ارائه می‌دهیم برای محاسبه نرخ‌های حاشیه‌ای برای بررسی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا از محیط فعلی‌اش به محیطی با مطلوبیت بیشتر و یا کمتر از محیط فعلی‌اش که به طور هم‌زمان عوامل کنترل‌ناپذیر و نامطلوب حضور دارند، به گونه‌ای که واحدهای تصمیم‌گیرنده همچنان کارایی خود را حفظ نماید. نقطهٔ $(x^o, x'^o, v^o, w^o, z^o)$ را به عنوان یک نقطهٔ مرزی بر مرز کارایی در نظر می‌گیریم. که هدف به دست آوردن نرخ حاشیه‌ای t امین شاخص (ورودی یا خروجی) به l امین متغیر کنترل‌ناپذیر است. که در این جا به دو حالت اشاره می‌شود.

حالت۱) نرخ حاشیه‌ای t امین خروجی مطلوب به l امین متغیر کنترل‌ناپذیر:

$$MR_{tl}^{+}(x^o, x'^o, v^o, w^o, z^o) = \left[\frac{\partial v_t^o}{\partial z_l^o}\right]$$

اگر ورودی کنترل‌ناپذیر z_l^o به اندازهٔ یک واحد تغییر نماید خروجی v_t^o به اندازهٔ $MR_{tl}^{+}(x^o, x'^o, v^o, w^o, z^o)$ تغییر می‌کند یعنی این که برای انتقال DMU_o از محیط کنونی‌اش به محیطی با مطلوبیت بیشتر، خروجی t به اندازهٔ $MR_{tl}^{+}(x^o, x'^o, v^o, w^o, z^o)$ تغییر خواهد کرد.

گام۱) انتخاب مقداری کوچک و مثبت برای l امین ورودی کنترل‌ناپذیر.

گام۲) حل مدل برنامه‌ریزی خطی زیر به منظور به دست آوردن مقدار بهینهٔ خروجی t ام v_t^{o*}، بعد از تغییر در ورودی کنترل‌ناپذیر l ام به اندازهٔ h با حفظ کارایی.

$$\max v_t^{o*} \qquad (۴-۱)$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k + \mu_1^k + \lambda_2^k + \mu_2^k)x_n^k + \mu_1^k) \le x_n^o \qquad n = 1, \dots, N$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k + \mu_1^k + \lambda_2^k + \mu_2^k)x'^k_q + \mu_1^k) = x'^o_q \qquad q = 1, \dots, Q$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)v_m^k-\mu_2^k)\geq v_m^o \qquad m=1,\ldots,M,\quad m\neq t$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)v_m^k-\mu_2^k)\geq v_t^{o*}$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)w_r^k-\mu_2^k)=w_j^o \qquad j=1,\ldots,J$$

$$if\, z_l^k\leq z_l^\circ+\delta(z)+h,\quad \delta(z)>\circ then(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\geq\circ\ l=1,\ldots,L,k=1,\ldots,K$$

$$if\, z_l^k> z_l^\circ+\delta(z)+h,\quad \delta(z)>\circ then(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)=\circ\ l=1,\ldots,L,k=1,\ldots,K$$

$$\sum_{k=1}^{K}(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)=1$$

$$v_m^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\geq\mu_2^k \qquad ,k=1,\ldots,K$$

$$w_j^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\geq\mu_2^k \qquad ,k=1,\ldots,K$$

$$\lambda_1^k,\mu_1^k,\lambda_2^k,\mu_2^k\geq 0$$

گام۳) محاسبهٔ نرخ حاشیه‌ای راست با استفاده از فرمول زیر:

$$MR_{tl}^{+}=\frac{v_t^{o*}-v_t^{o}}{h}$$

گام ۴) تکرار گام‌های ۲ و ۳ بعد از جایگزینی $h\rightarrow -h$ و محاسبهٔ نرخ حاشیه‌ای چپ.

حالت۲) نرخ‌حاشیه‌ای t امین‌ورودی‌مطلوب به l امین‌متغیرکنترل‌ناپذیر:

$$MR_{tl}^{+}(x^o,x'^o,v^o,w^o,z^o)=\left[\frac{\partial x_t^o}{\partial z_l^o}\right]$$

اگر ورودی غیراختیاری z_l^o به اندازهٔ یک واحد تغییر نماید ورودی x_t^o به اندازهٔ $MR_{tl}^{+}(x^o,x'^o,v^o,w^o,z^o)$ تغییر می‌کند. برای این منظور فرایند چهار مرحله‌ای زیر را برای محاسبهٔ نرخ حاشیه‌ای MR_{tl} تحت بازده به مقیاس متغیر و در نقطهٔ (x^o,x'^o,v^o,w^o,z^o) به صورت زیر پیشنهاد نمودیم:

گام۱) انتخاب مقداری کوچک و مثبت برای l امین ورودی غیراختیاری.

گام ۲) حل مدل برنامه‌ریزی خطی زیر به منظور به دست آوردن مقدار بهینهٔ ورودی t ام x_{to}^{*}، بعد از تغییر در ورودی غیر اختیاری l ام به اندازهٔ h با حفظ کارایی.

(۴-۲)

$$\min x_t^{o*}$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)x_n^k+\mu_1^k)\le x_n^o \qquad n=1,...,N,\quad n\neq t$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)x_n^k+\mu_1^k)\le x_t^{o*}$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)x'^k_q+\mu_1^k)= x'^o_q \qquad q=1,...,Q$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)v_m^k-\mu_2^k)\ge v_m^o \qquad m=1,...,M$$

$$\sum_{k=1}^{K}((1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)w_r^k-\mu_2^k)= w_j^o \qquad j=1,...,J$$

$$\text{if}\quad z_l^k\le z_l^\circ+\delta(z)+h,\quad \delta(z)>\circ\ \text{then}\quad (1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\circ\quad l=1,...,L\ ,\ k=1,...,K$$

$$\text{if}\quad z_l^k> z_l^\circ+\delta(z)+h,\quad \delta(z)>\circ\ \text{then}\quad (1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)=\circ\quad l=1,...,L\ ,\ k=1,...,K$$

$$\sum_{k=1}^{K}(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)=1$$

$$v_m^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\mu_2^k \qquad ,k=1,...,K$$

$$w_j^k\times(1/2)(\lambda_1^k+\mu_1^k+\lambda_2^k+\mu_2^k)\ge\mu_2^k \qquad ,k=1,...,K$$

$$\lambda_1^k,\mu_1^k,\lambda_2^k,\mu_2^k\ge 0$$

گام ۳) محاسبهٔ نرخ حاشیه‌ای راست با استفاده از فرمول زیر:

$$MR_{tl}^{+}=\frac{x_t^{o*}-x_t^o}{h}$$

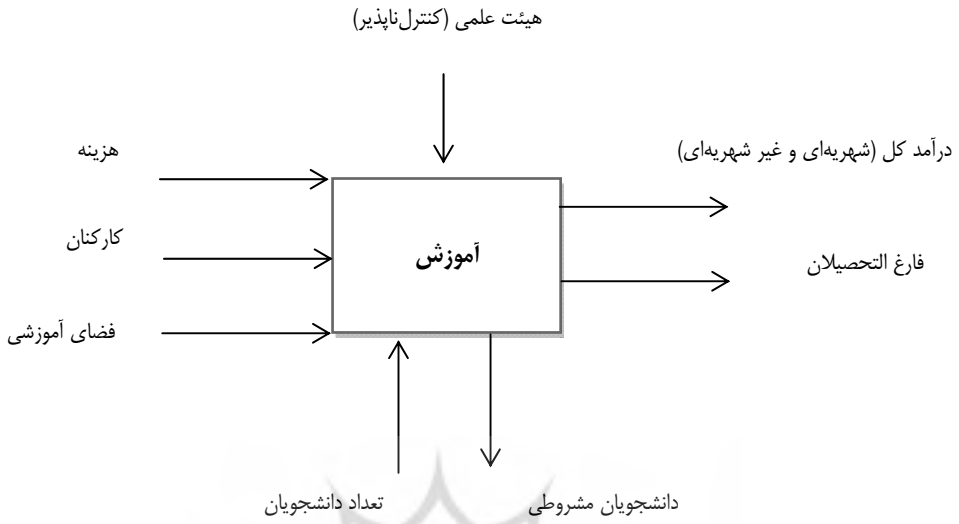
گام ۴) تکرار گام‌های ۲ و ۳ بعد از جایگزینی $h\rightarrow -h$ و محاسبهٔ نرخ حاشیه‌ای چپ.

در این دو فرایند با حضور ورودی کنترل‌ناپذیر z، MR_{tl}^{+} بیشترین تغییر در خروجی مطلوب یـا ورودی مطلـوب t ام، مادامی که l امین ورودی کنترل‌ناپذیر DMU_o از محیطی با سطح z_l^o بـه محیطـی بـا سـطح z_l^o+h منتقـل می‌شود را نشان می‌دهد. همچنین، نرخ حاشیه‌ای t امین ورودی (خروجی) نامطلوب به l امین متغیر کنتـرل‌ناپـذیر نیـز کاربرد دارد. در بخش آتی یک مثال کاربردی با ۳۱ واحد دانشگاهی برای درک بهتر مطالب مطرح شده بیان می‌گردد.

مطالعه موردی

برای تأکید بیشتر بر قابلیت‌های مدل پیشنهادی، روش ذکر شده بر روی مجموعه‌ای از داده‌هـای واقعـی مربـوط بـه ۳۱ واحد دانشگاه آزاد اسلامی (بخش آموزش) پیاده‌سازی می‌شود که داده‌ها توسـط محقـر، صـفری، امیرتیمـوری و صـوفی (۱۳۹۵) گردآوری شده است. در این مثال عوامل نامطلوب (ورودی و خروجی) و ورودی کنترل‌ناپذیر بـه طـور هـمزمـان

حضور دارند. همان‌طور که در شکل۱ مشاهده می‌شود بخش آموزش ۳۱ واحد با سه ورودی مطلوب، یک ورودی نامطلوب، یک ورودی کنترل‌ناپذیر، دو خروجی مطلوب و یک خروجی نامطلوب مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۱ . ساختار تحت بررسی

ورودی‌ها و خروجی‌ها بر مبنای اطلاعات قابل دسترسی، عبارتند از:

- ورودی‌های قابل کنترل بخش آموزش

x_1: هزینه جاری (میلیاردریال) و x_2: تعداد کارکنان و x_3: مساحت کل فضای آموزشی (مترمربع)

- ورودی کنترل‌ناپذیر بخش آموزش

z: کل هیئت علمی تمام وقت و نیمه وقت

- ورودی نامطلوب آموزش

x': تعداد دانشجویان

- خروجی‌های مطلوب آموزش

y_1: درآمدکل (مجموع درآمد غیرشهریه‌ای و شهریه‌ای) (میلیارد ریال)

y_2: فارغ التحصیلان

- خروجی نامطلوب آموزش

y': دانشجویان مشروطی

شاخص‌های فوق در جدول ۱ ارائه و کارایی واحدها در بخش آموزش با استفاده از مدل (۳-۵) ارزیابی شده است.

جدول ۱. ورودی‌ها وخروجی‌های ۳۱ واحد استانی دانشگاه آزاد اسلامی (آموزش)

واحدها	X_1	X_2	X_3	X'	y_1	y_2	y_3	Z
۱	۲۶۶۷	۲۲۱۲	۵۴۶۵۴۹	۸۶۲۷۸	۲۸۰۲	۱۵۸۸۱	۱۶۳۰۷	۱۹۵۷
۲	۱۰۳۸	۸۷۱	۲۳۰۸۷۳	۴۴۳۸۱	۱۲۱۷	۷۵۶۸	۸۳۸۸	۸۸۷
۳	۶۴۴	۶۰۳	۱۳۶۱۵۹	۲۲۷۴۳	۶۹۰	۴۱۰۵	۴۲۹۸	۴۷۹
۴	۲۹۵۳	۱۹۵۸	۱۱۵۰۴۲۱	۸۹۹۶۳	۳۰۰۲	۱۶۴۶۵	۱۷۰۰۳	۲۲۹۵
۵	۹۵۸	۷۵۹	۱۶۸۰۸۸	۳۷۸۰۲	۱۰۱۳	۶۴۹۴	۷۱۴۵	۶۹۵
۶	۲۸۴	۲۴۹	۵۰۱۷۷	۹۰۷۴	۳۶۲	۱۶۳۴	۱۷۱۵	۲۳۵
۷	۶۴۷	۴۶۴	۱۴۵۲۷	۲۷۷۳۲	۷۵۰	۴۹۰۹	۵۲۴۱	۳۴۶
۸	۱۰۲۷۱	۸۶۰۷	۱۴۵۱۰۷۷	۳۷۵۷۶۵	۱۲۰۳۳	۶۷۵۰۶	۷۱۰۲۰	۶۷۹۴
۹	۳۴۷	۲۳۲	۱۲۲۵۲۷	۱۱۷۰۱	۳۸۶	۲۰۶۶	۲۲۱۱	۳۲۵
۱۰	۳۲۰	۲۶۸	۱۳۵۷۶۶	۱۰۳۲۱	۳۲۵	۱۹۶۵	۱۹۵۱	۲۰۱
۱۱	۱۹۳۷	۱۷۰۷	۵۷۱۴۹۵	۶۳۳۳۵	۲۰۷۷	۱۱۹۲۴	۱۱۹۷۰	۱۳۸۰
۱۲	۲۷۶	۲۵۸	۸۴۵۷۵	۸۲۶۱	۲۷۷	۱۴۵۲	۱۵۶۱	۲۴۷
۱۳	۳۰۱۷	۲۶۰۶	۷۸۰۴۵۳	۱۰۵۰۷۵	۳۱۷۶	۱۷۹۴۰	۱۹۸۵۹	۲۱۰۵
۱۴	۶۴۸	۵۹۳	۲۱۸۳۶۸	۲۰۰۷۹	۶۷۰	۳۸۲۵	۳۷۹۵	۶۴۴
۱۵	۱۲۸۲	۱۰۸۸	۳۳۹۱۰۵	۲۹۹۹۰	۱۱۵۸	۵۹۳۷	۵۶۶۸	۸۷۸
۱۶	۵۹۳	۶۱۴	۱۶۳۰۰۳	۲۹۱۵۹	۷۱۵	۴۸۷۵	۵۵۱۱	۳۵۹
۱۷	۲۶۵۳	۲۲۸۳	۸۶۱۶۰۲	۱۰۰۵۵۲	۲۸۲۱	۱۷۲۹۷	۱۹۰۰۴	۲۲۴۸
۱۸	۱۲۱۱	۹۹۹	۲۴۳۲۱۰	۳۸۲۶۵	۱۳۵۴	۶۹۸۲	۷۲۳۲	۷۴۲
۱۹	۳۲۰	۲۵۷	۶۲۰۵۰	۱۰۶۰۸	۳۲۱	۱۹۹۰	۲۰۰۵	۲۰۹
۲۰	۶۱۹	۴۲۷	۱۱۱۵۴۰	۱۹۸۶۳	۶۷۳	۳۴۴۲	۳۷۵۴	۵۲۸
۲۱	۱۲۷۹	۱۲۹۲	۴۱۲۳۵۸	۴۶۷۹۸	۱۵۵۱	۸۹۱۳	۸۸۴۵	۸۶۶
۲۲	۸۲۹	۴۸۳	۱۳۸۹۷۴	۳۰۶۲۸	۹۳۲	۵۳۷۷	۵۷۸۹	۵۶۵
۲۳	۴۹۶	۴۰۷	۷۹۹۷۹	۱۷۹۹۲	۶۴۴	۳۳۳۴	۳۴۰۰	۳۱۴
۲۴	۷۷۶	۵۷۶	۱۹۸۸۶۵	۳۰۵۱۶	۹۰۲	۵۵۲۲	۵۷۶۸	۷۰۰
۲۵	۱۲۵۹	۱۰۳۱	۱۹۰۳۷۴	۴۵۲۸۹	۱۳۹۱	۸۰۴۴	۸۵۶۰	۹۸۴
۲۶	۸۳۶	۶۹۷	۲۶۶۷۰۷	۳۳۴۰۴	۹۵۷	۵۹۳۷	۶۳۱۳	۵۴۴
۲۷	۲۳۵۳	۱۹۲۶	۴۸۰۰۳۶	۶۳۶۶۵	۲۴۲۲	۱۲۳۴۹	۱۲۰۳۳	۱۷۸۴
۲۸	۱۵۹۸	۱۴۰۱	۵۱۲۰۵۰	۴۲۹۹۳	۱۶۱۳	۸۵۷۳	۸۱۲۶	۱۰۰۸
۲۹	۷۹۸	۶۱۷	۱۴۶۴۰۰	۳۷۶۳۹	۱۳۵۰	۷۰۰۷	۷۱۱۴	۳۴۱
۳۰	۷۶۰	۶۱۵	۲۰۰۵۵۱	۲۴۵۷۵	۷۹۶	۴۴۹۰	۴۶۴۵	۷۱۶
۳۱	۸۳۳	۸۸۹	۳۲۰۱۴۱	۲۳۴۱۲	۸۷۸	۴۹۲۸	۴۴۲۵	۴۷۲

تمام واحدهای تصمیم گیرنده به‌جز واحدهای ۳-۱۴-۲۰-۲۴-۲۶-۳۰ در بخش آموزش ۳۱ واحد دانشگاه آزاد اسلامی کارا ارزیابی شده‌اند. ناکارایی ۶ واحد از ۳۱ واحد دانشگاه آزاد اسلامی در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲. ناکارایی ٦ واحد استانی دانشگاه آزاد اسلامی (آموزش)

واحدها	τ^{o*}	ناکارایی
۳	۰/۰۰۰۲	۰/۹۹۹۸
۱۴	۰/۰۰۰۲	۰/۹۹۹۸
۲۰	۰/۰۰۰۳	۰/۹۹۹۷
۲۴	۰/۰۰۰۲	۰/۹۹۹۸
۲۶	۰/۰۰۰۲	۰/۹۹۹۸
۳۰	۰/۰۰۰۳	۰/۹۹۹۷

حال در این قسمت هدف محاسبه تغییرات برخی شاخص‌ها به ازای تغییرات برخی دیگر است در حالی که مقدار کارایی حفظ شود. با استفاده از مدل (۲-۴)، مقادیر نرخ‌های حاشیه‌ای واحدهای کارا (حالت دوم) محاسبه و در جدول ۳ ارائه شده است. بقیه واحدهای تصمیم گیرنده کارا، نرخ حاشیه‌ای راست آنها صفر و نرخ‌های حاشیه‌ای چپ با مقادیر نشدنی، تعریف نشده است.

جدول ۳. نرخ‌های حاشیه‌ای واحدهای کارای دانشگاه آزاد اسلامی (آموزش) حالت۲

واحدها	X_1	X_2	X_3
۹ $h=\pm 5$	$MR^{+}_{z,x_1}=0$ $MR^{-}_{z,x_1}=-$	$MR^{+}_{z,x_2}=0$ $MR^{-}_{z,x_2}=-10/1970$ $x^{*}_{2}=282/9848$	$MR^{+}_{z,x_3}=0$ $MR^{-}_{z,x_3}=-$
۱۶ $h=\pm 5$	$MR^{+}_{z,x_1}=0$ $MR^{-}_{z,x_1}=-10/4821$ $x^{*}_{1}=645/4105$	$MR^{+}_{z,x_2}=0$ $MR^{-}_{z,x_2}=-$	$MR^{+}_{z,x_3}=0$ $MR^{-}_{z,x_3}=-$
۲۲ $h=\pm 5$	$MR^{+}_{z,x_1}=0$ $MR^{-}_{z,x_1}=-$	$MR^{+}_{z,x_2}=0$ $MR^{-}_{z,x_2}=-7/2945$ $x^{*}_{2}=519/4723$	$MR^{+}_{z,x_3}=0$ $MR^{-}_{z,x_3}=-$

برای نمونه واحد تصمیم‌گیرنده ۹، در جدول ۱ با ورودی‌های $x_1=347$ و $x_2=232$ و $x_3=122527$ را در نظر می‌گیریم. در جدول ۳ با افزایش $h=+5$ واحد متغیر کنترل‌ناپذیر و با حل مدل (۲-۴)، اولین ورودی مطلوب برابر با $x^{*}_{1}=347$ و دومین ورودی مطلوب برابر با $x^{*}_{2}=232$ و سومین ورودی مطلوب $x^{*}_{3}=122527$ می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش متغیر کنترل‌ناپذیر به اندازه $h=+5$، با ثابت ماندن مقدار کارایی، ورودی‌های مطلوب همان مقدار قبلی را کسب کرده‌اند یعنی بدون تغییر خواهند بود و نرخ حاشیه‌ای راست آنها صفر خواهند شد. اما

با کاهش $h = -۵$ واحد متغیر کنترل‌ناپذیر و با حل مدل (۲-۴)، اولین و سومین ورودی مطلوب نشدنی و دومین ورودی مطلوب به $x_۲^* = ۲۸۲/۹۸۴۸$ تبدیل خواهند شد. نرخ حاشیه‌ای چپ ورودی دوم، به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$MR^-_{z,x_۲} = \frac{۲۸۲/۹۸۴۸ - ۲۳۲}{-۵} = -۱۰/۱۹۷۰$$

در ادامه واحد تصمیم‌گیرنده ۱۶، در جدول ۱ با ورودی‌های $x_۱ = ۵۹۳$ و $x_۲ = ۶۱۴$ و $x_۳ = ۱۶۳۰۰۳$ را در نظر می‌گیریم. در جدول ۳ با افزایش $h = +۵$ واحد متغیر کنترل‌ناپذیر، با حل مدل (۲-۴)، اولین و دومین و سومین ورودی مطلوب با افزایش متغیر کنترل‌ناپذیر، با حفظ کارایی، بدون تغییر خواهند بود و نرخ حاشیه‌ای راست آنها صفر خواهد شد. اما با کاهش $h = -۵$ واحد متغیر کنترل‌ناپذیر و با حل مدل (۲-۴)، اولین ورودی مطلوب $x_۱^* = ۶۴۵/۴۱۰۵$ و دومین و سومین ورودی مطلوب نشدنی خواهند شد. نرخ حاشیه‌ای چپ ورودی اول، به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$MR^-_{z,x_۲} = \frac{۶۴۵/۴۱۰۵ - ۵۹۳}{-۵} = -۱۰/۴۸۲۱$$

حال، واحد ۲۲، در جدول ۱ با ورودی‌های $x_۱ = ۸۲۹$ و $x_۲ = ۴۸۳$ و $x_۳ = ۱۳۸۹۷۴$ را در نظر می‌گیریم. در جدول ۳ با افزایش $h = +5$ واحد متغیر کنترل‌ناپذیر و با حل مدل (۲-۴)، ورودی‌های مطلوب با حفظ کارایی، بدون تغییر خواهند بود. و نرخ حاشیه‌ای راست آنها صفر خواهند شد. اما با کاهش $h = -5$ واحد متغیر کنترل‌ناپذیر و با حل مدل (۲-۴)، اولین و سومین ورودی مطلوب نشدنی و دومین ورودی مطلوب به $x_2^* = 519/4723$ تبدیل می‌شود که افزایش به اندازه ۳۶/۴۷۲۳ واحد خواهد داشت. نرخ حاشیه‌ای چپ ورودی دوم، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$MR^-_{z,x_۲} = \frac{۵۱۹/۴۷۲۳ - ۴۸۳}{-۵} = -۷/۲۹۴۵$$

نرخ حاشیه‌ای راست (حالت اول) برای تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا صفر، و نرخ حاشیه‌ای چپ آنها نشدنی خواهند شد.

نتایج نشان می‌دهد اگر، به هر دلیلی، تعداد اعضای هیئت علمی برخی از واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی با حفظ کارایی، کاهش یابد برخلاف تصور، هزینه جاری و تعداد کارکنان باید افزایش پیدا کند. در غیر این صورت بدون تغییر یا نشدنی خواهند بود.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

تحلیل پوششی داده‌ها تکنیک مناسبی جهت ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده و یافتن نقاط قوت و ضعف آن‌ها، در حضور هم‌زمان فاکتورهای کنترل‌ناپذیر و نامطلوب در سیستم‌های مدیریتی می‌باشد. در مدل‌های پایه‌ای DEA، فرض بر این است که تمامی ورودی‌ها وخروجی‌های مطلوب به ترتیب کاهش و افزایش یابند. اما فرایند تولیدی، در خلال فعالیت‌های صنعتی، معمولا مصرف ورودی‌ها و تولید خروجی‌های نامطلوب به موازات ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب

روی می‌دهد. به عنوان مثال آلودگی هوا، آب و خاک و...خروجی‌های نامطلوب و زباله‌ها و... به عنوان ورودی‌های نامطلوب طبقه‌بندی می‌گردد. برای اندازه‌گیری کارایی چنین فعالیت‌های صنعتی، هدف، استفاده از روشی که مصرف ورودی‌های نامطلوب افزایش و تولید خروجی‌های نامطلوب کاهش یابد. از طرفی، در سنجش کارایی سیستم‌های تولیدی، همیشه تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها تحت نظارت مدیریت واقع نمی‌شود در واقع بعضی از شاخص‌ها خارج از کنترل مدیریت است. در این پژوهش مجموعه امکان تولید با فرض دسترسی‌پذیری ضعیف جدید، برای ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب و همچنین با حضور عوامل محیطی (کنترل‌ناپذیر) در نظر گرفته شده است. در نتیجه کارایی سیستم‌ها در حضور عوامل ورودی ـ خروجی نامطلوب و متغیرهای کنترل‌ناپذیر بررسی شده است. همچنین به دلیل پیچیدگی موجود فرایندهای تولیدی، تغییر یک شاخص، تغییرات شاخص‌های دیگر را معمولاً به دنبال خواهد داشت که این موضوع نیز در این تحقیق مورد مطالعه قرار گرفته است. در واقع در این بررسی به تحلیل عملکرد واحدها در حضور شاخص‌های ورودی و خروجی نامطلوب و شاخص‌های کنترل‌ناپذیر پرداخته شده است. به علاوه تغییر برخی شاخص‌ها به ازای تغییر برخی شاخص‌های دیگر بررسی شده است. در مثال کاربردی این پژوهش، سنجش کارایی با حضور هم‌زمان عوامل نامطلوب و متغیرهای کنترل‌ناپذیر در سیستم دانشگاهی بخش آموزش بررسی شد. سپس با توجه به کارا بودن واحدها، نرخ‌های حاشیه‌ای چپ و راست آن، محاسبه و تفسیر گردید. با این تفسیر، مشاهده شد که، همواره با افزایش (کاهش) یک شاخص، با حفظ کارایی، شاخص دیگر افزایش (کاهش) نمی‌یابد. ممکن است بدون تغییر و یا با کاهش (افزایش) مواجه شود.

پژوهشگران بعدی می‌توانند پژوهش حاضر را تکمیل و نقص‌های آن را برطرف کنند. همچنین موضوعات زیر به پژوهشگران آینده پیشنهاد می‌شود:

- محاسبهٔ نرخ‌های حاشیه‌ای جهتی و گروهی با حضور عوامل غیراختیاری و نامطلوب.
- محاسبهٔ نرخ‌های حاشیه‌ای با حضور عوامل نامطلوب و متغیرهای کنترل‌ناپذیر با تکنولوژی‌های دیگر (FDH و...).
- رتبه‌بندی واحدها در حضور شاخص‌های ورودی ـ خروجی نامطلوب و عوامل کنترل‌ناپذیر

منابع

ابراهیمی کردلر، علی؛ جعفرزاده، عبدالحسین؛ علی احمدی، محمدهادی (۱۳۹۷). ارائه مدلی برای ارزیابی کارایی به‌کمک ترکیب مدل اندازه‌گیری با دامنه تعدیل شده و محدودیت‌های وزنی (مطالعه موردی: شعبه‌های شرکت بیمه ایران). *مدیریت صنعتی*، ۱۰(۲)، ۱۶۱-۱۸۲.

رمضانیان، محمدرحیم؛ یاکیده، کیخسرو؛ محمدی بازقلعه، نرجس (۱۳۹۹). ارائه مدلی مناسب جهت بهبود طبقه‌بندی چندمعیاره اقلام موجودی با استفاده از مدل (SBM) مطالعه موردی: شرکت صنعتی پارس خزر. *مدیریت صنعتی*، ۱۲(۳)، ۴۸۵-۵۰۱.

رادسر، مصطفی؛ کاظمی، عالیه؛ مهرگان، محمد رضا؛ رضوی حاجی‌آقا، سیدحسین (۱۴۰۰). طراحی یک الگوریتم بر پایه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای با شاخص‌های خوب و بد به منظور ارزیابی صنعت برق ایران. *مدیریت صنعتی*، ۱۳ (۱)، ۱-۲۶.

کاظمی متین، رضا؛ عزیزی، رزا (۱۳۹۱). مدل‌بندی عوامل غیرقابل کنترل در اندازه‌گیری کارایی شرکت‌های برق منطقه‌ای ایران. *کیفیت و بهره وری در صنعت برق ایران*، ۱(۱)، ۵۷-۶۳.

محقر، علی؛ صفری، حسین؛ امیرتیموری، علیرضا؛ صوفی، منصور (۱۳۹۵). مدل جدید تحلیل پوششی داده‌ها برای سنجش کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با ساختار شبکه‌ای موازی. *مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن*، ۱۳(۳)، ۹-۲۶.

References

Amirteimoori, A., Maghbouli, M. & Kordrostami, S. (2016). Multi- dimensional Nondiscretionary Factors in Data Envelopment Analysis: A Slack-Based Measure. *Computational Economics*, 48(2), 211-223.

Banker, R.D., Morey, R.C. (1986). Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs. *Operations Research*, 34(4), 513-521.

Banker, RD. & Morey, RC. (1986). The Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis. *Manage Sci*. 1613-1627.

Banker, RD., Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Manage Sci*. 30(9), 1078-1092.

Camanho, A.S., Portela, M.C. & Vaz, C.B. (2009). Efficiency analysis accounting for internal and external non-discretionary factors. *Computers & Operations Research*, 36(5), 1591-1601.

Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.

Cooper, W.W., Park, D.K.S. & Ciurana, P.J.T.P. (2000). Marginal Rates and Elasticities of Substitution with Additive Models in DEA. *J Product Anal.*, 13(2), 105-123.

Ebrahimi Kordlar, A., Jafarzadeh, A., Aliahmadi, M.H. (2018). Proposing a Model of Efficiency Evaluation Based on the Adjusted Range Measurement Model and Weight Restrictions (Case Study: Branches of Iran Insurance Company). *Industrial Management Journal*, 10(2), 161- 182. (*in Persian*)

Färe, R. & Grosskopf, S. (2004). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. *European Journal of Operational Research*, 157(1), 242-245.

Farrell, M.J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*, 120(3), 253.

Hadi Vencheh, A., Kazemi Matin R., & Tavassoli Kajani, M. (2005) Undesirable factors in efficiency measurement. *Applied Mathematics and Computation*,163(2), 547-552.

Hailu, A. & Veeman, TS.(2001). Non-parametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs: An Application to the Canadian Pulp and Paper Industry. *Am J Agric Econ.* 83(3), 605-616.

Jahani Sayyad Noveiri, M., & Kordrostami, S. (2020). Trade-offs analysis of sustainability dimensions using integer-valued DEA. *Croatian Operational Research Review*, 11(2), 275-289.

Jahanshahloo, G.R., Lotfi, F.H., Shoja, N., Tohidi, G., & Razavyan, S. (2005). Undesirable inputs and outputs in DEA models. *Applied Mathematics and Computation*, 169(2), 917-925.

Kazemi Matin, R., & Azizi, R. (2012). Modeling Non-Discretionary Factors In Efficiency Measurement Of The Iranian Regional Electricity Companies. *Iranian Electric Industry Journal of Quality And Productivity* (IEIJQP), 1(1), 57-63. (*in Persian*)

Khoshandam, L., Amirteimoori, A. & Matin, R.K. (2014). Marginal rates of substitution in the presence of non-discretionary factors: A data envelopment analysis approach. *Measurement*, 58, 409-415.

Khoshandam, L., Kazemi Matin, R., & Amirteimoori, A. (2015). Marginal rates of substitution in data envelopment analysis with undesirable outputs: A directional approach. *Measurement*, 68, 49-57.

Kuosmanen, T. (2005). Weak Disposability in Nonparametric Production Analysis with Undesirable Outputs. *American Journal of Agricultural Economics*, 87(4), 1077-1082.

Lovell, C.A., Knox, L. (1994). Linear programming approaches to the measurement and analysis of productive efficiency. *Top* 2(2), 175-248.

Mahboubi, M., Kordrostami, S., Amirteimoori, A., & Ghane-Kanafi, A. (2021). Estimating Marginal Rates of Substitution in Two-Stage Processes with Undesirable Factors. *Iranian Journal of Management Studies*,14(2), 419-436.

Mahboubi, M., Kordrostami, S., Amirteimoori, A., & Ghane-Kanafi, A. (2021). Undesirable factors and marginal rates of substitution in Data Envelopment Analysis. *Mathematical Sciences*, 16, 1-13.

Mohaghar, A., Safari, H., Amirteimoori, A. R., Soufi, M. A. (2016). New Data Envelopment Analysis Model for Efficiency Measurement of Decision Making Units with Parallel Network Structure. *Journal of Operational Research in Its Applications*, 13 (3), 9-26. (*in Persian*)

Muñiz, M., Paradi, J., Ruggiero, J., & Yang, Z.(2006). Evaluating alternative DEA models used to control for non-discretionary inputs. *Computers & Operations Research*, 33(5), 1173-1183.

Radsar, M., Kazemi, A., Mehregan, M. & Razavi Hajiagha, S.H. (2021). Designing an algorithm based on network data envelopment analysis with desirable and undesirable indicators for the evaluation of the Iranian power industry. *Industrial Management Journal*, 13(1), 1-26. (*in Persian*)

Ramzaniyan, M.R., Yakideh, K. & Mohammadi Bazghaleh, N. (2020). Providing an Appropriate Model for Improving Multi-Criteria Inventory Classification Using SBM Model (Case Study: Pars Khazar Industrial Company). *Industrial Management Journal*, 12(3), 485-501. (*in Persian*)

Rosen, D., Schaffnit, C., & Paradi, J.C. (1998). Marginal Rates and Two-dimensional Level Curves in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 9(3), 205-232.

Ruggiero, J.(1996). On the measurement of technical efficiency in the public sector. *European Journal of Operational Research*, 90(3), 553-565.

Ruggiero, J. (1998) Non-discretionary inputs in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 111(3), 461-469.

Ruggiero, J. (2004). Performance evaluation when non-discretionary factors correlate with technical efficiency. *European Journal of Operational Research*, 159(1), 250-257.

Seiford, L.M., & Zhu, J. (2002). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142(1), 16-20.

Sueyoshi, T., & Goto M.(2012). Returns to Scale, Damages to Scale, Marginal Rate of Transform and Rate of Substitution in DEA Environmental Assessment. *Energy Econ.* 34(4), 905-917.

Syrjänen, M.J. (2004). Non-discretionary and discretionary factors and scale in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 158(1), 20-33.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی