



## Application of Copula Based Correlations and Mutual Information in Time Series Clustering and Enhanced Indexing by Adopting the Robust Optimization Approach

**Shapour Mohammadi**

Associated Prof., Department of Finance and Insurance, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: shmohmad@ut.ac.ir

**Reza Raei** 

Prof., Department of Finance and Insurance, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: raei@ut.ac.ir

**Farid Tondnevis**

\*Corresponding Author, PhD Candidate, Department of Finance, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: farid.tondnevis@gmail.com

### Abstract

**Objective:** Enhanced index Tracker portfolio, as one of the investment management strategies, is trying to combine the benefits of both active and passive approaches. This research is going to provide a two-stage model that can first reproduce the index performance with a smaller number of index-forming shares and, secondly, calculate the Enhanced index tracker portfolio weights.

**Methods:** In the first step, using a binary mathematical programming model to create clustering of time series, an index tracker portfolio was created. Coppel-based correlation coefficients and mutual information were used as time series similarity measures at this stage. In the second stage, the weight of investment in the selected shares was determined in a way that the return on the portfolio surplus was maximized relative to the index created in the first stage. The uncertainty resulting from the estimation of the excess stock returns in the second phase was considered by using a robust optimization approach.

**Results:** The results obtained by applying the out of sample test on the 50 more active companies in the Tehran Stock Exchange from the spring of the Iranian calendar year of 1394 to spring of 1395, using the tracking error and market ratio, indicate that in addition to the success of the similarity criteria in time series


clustering and index tracking, at a confidence level of 99%; Enhanced index Tracker portfolios based on normal, T and Clayton Copula correlation coefficients have a positive significant difference with the index.

**Conclusion:** According to this study, to develop an enhanced index tracker portfolio, it is practical to apply copula-based correlation coefficients and try a robust optimization approach to take into account the uncertainty of the parameters.

**Keywords:** Enhanced index tracker portfolio, Clustering, Copula, Mutual information, Robust optimization

**Citation:** Mohammadi, Shapour, Raei, Reza and Tondnevis, Farid (2021). Application of Copula Based Correlations and Mutual Information in Time Series Clustering and Enhanced Indexing by Adopting the Robust Optimization Approach. *Financial Research Journal*, 23(4), 497-522. <https://doi.org/10.22059/FRJ.2020.286126.1006904> (in Persian)

Financial Research Journal, 2021, Vol. 23, No.4, pp. 497-522

 <https://doi.org/10.22059/FRJ.2020.286126.1006904>

© Authors

Published by University of Tehran, Faculty of Management

Article Type: Research Paper

Received: August 13, 2019

Accepted: December 24, 2019



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
پرتال جامع علوم انسانی

## کاربرد ضرایب همبستگی مبتنی بر کاپولا و اطلاعات متقابل در خوشه‌بندی سری‌های زمانی و تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار

شاپور محمدی

دانشیار، گروه مدیریت مالی و بیمه، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: shmohmad@ut.ac.ir

رضا راعی

استاد، گروه مدیریت مالی و بیمه، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: raei@ut.ac.ir

فرید تندنویس

\* نویسنده مسئول، دانشجوی دکتری، گروه مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: farid.tondnevis@gmail.com

### چکیده

**هدف:** تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته، به‌عنوان یکی از استراتژی‌های مدیریت سرمایه‌گذاری، سعی در ترکیب مزایای دو رویکرد فعال و غیرفعال دارد. این پژوهش، به‌دنبال ارائه یک مدل دومرحله‌ای است که بتواند در مرحله نخست، عملکرد شاخص را با تعداد کمتری از سهام تشکیل‌دهنده شاخص بازسازی نماید و در مرحله دوم، اوزان پرتفوی شاخصی ارتقایافته را محاسبه کند.

**روش:** در مرحله نخست، با استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی صفر و یک به‌منظور خوشه‌بندی سری‌های زمانی، پرتفوی ردیاب شاخص شکل گرفت. معیارهای ضرایب همبستگی مبتنی بر کاپولا و همچنین اطلاعات متقابل به‌عنوان شاخص‌های شباهت سری‌های زمانی در این مرحله استفاده شدند. در مرحله دوم، اوزان سرمایه‌گذاری در سهام منتخب، به‌گونه‌ای مشخص شد که بازده مازاد پرتفوی نسبت به پرتفوی شاخصی ایجادشده در مرحله اول (نماینده شاخص)، بیشینه شود. عدم قطعیت ناشی از تخمین بازده مازاد سهام‌ها در مرحله دوم، با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار در نظر گرفته شده است.

**یافته‌ها:** نتایج آزمون خارج از نمونه روی شاخص ۵۰ شرکت فعال تر بورس اوراق بهادار تهران، در بازه زمانی بهار ۱۳۹۴ تا بهار ۱۳۹۷ با استفاده از خطای ردیابی و نسبت بازار، نشان از این موضوع دارد که علاوه بر موفقیت معیارهای شباهت ذکرشده در خوشه‌بندی سری‌های زمانی و تشکیل پرتفوی مبتنی بر شاخص، در سطح اطمینان ۹۹ درصد، پرتفوی شاخصی ارتقایافته مبتنی بر ضرایب همبستگی کاپولا‌ی نرمال، تی و کلایتون دارای اختلاف بازده مثبت معنادار با شاخص هستند.

**نتیجه‌گیری:** استفاده از ضرایب همبستگی مبتنی بر کاپولا و همچنین رویکرد بهینه‌سازی استوار به‌منظور در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترها، در تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته، موفق عمل می‌کند.

**کلیدواژه‌ها:** پرتفوی شاخصی ارتقایافته، خوشه‌بندی، کاپولا، اطلاعات متقابل، بهینه‌سازی استوار

**استناد:** محمدی، شاپور، راعی، رضا و تندنویس، فرید (۱۴۰۰). کاربرد ضرایب همبستگی مبتنی بر کاپولا و اطلاعات متقابل در خوشه‌بندی سری‌های زمانی و تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار. *تحقیقات مالی*، ۲۳(۴)، ۴۹۷-۵۲۲.

## مقدمه

در نگاه کلی می‌توان استراتژی‌های مدیریت سرمایه‌گذاری را به دو رویکرد فعال و غیرفعال دسته‌بندی کرد. رویکرد غیرفعال که بر اساس فرض کارایی اطلاعاتی بازار سرمایه<sup>۱</sup> و در نتیجه، عدم امکان کسب بازده غیرنرمال استوار است، سعی بر ایجاد ضوابط مشخصی برای مدیریت صندوق سرمایه‌گذاری دارد. یکی از رایج‌ترین ضوابط در مدیریت غیرفعال صندوق‌های سرمایه‌گذاری، این است که پرتفوی، باید با سرمایه‌گذاری در برخی از سهم‌های یک شاخص از بازار به طور نسبی بازدهی آن شاخص داشته‌باشد. به عبارتی در این رویکرد سرمایه‌گذار، به دنبال تشکیل پرتفوی به گونه‌ای است که با سرمایه‌گذاری در تعدادی از سهم‌های تشکیل‌دهنده یک شاخص، عملکرد شاخص را بازسازی نماید. (چن و روی<sup>۲</sup>، ۲۰۱۲) در رویکرد فعال، سرمایه‌گذار از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار است و سعی می‌کند در طول زمان سهم‌هایی که عملکرد بهتری نسبت به سایر سهم‌ها خواهند داشت را شناسایی نماید. فرض اساسی در این روش آن است که تجربه‌ها و قضاوت‌های شخصی مدیران سرمایه‌گذاری در مورد انتخاب سهم‌هایی با عملکرد مناسب و همچنین تعیین زمان مناسب برای خرید و فروش سهم‌ها، در ایجاد ارزش افزوده مؤثر هستند. (بیزلی، مید و چنگ<sup>۳</sup>، ۲۰۰۳)

هر یک از این استراتژی‌ها ضعف‌ها و قوت‌های خود را دارند. استراتژی فعال، هزینه ثابت بالایی دارد (مانند هزینه تحلیل)، همچنین با توجه به شناسایی و خرید سهم‌هایی که زیر ارزش قیمت‌گذاری شده‌اند و به تبع آن، فروش سایر سهم‌ها، هزینه معاملات در این روش در مقایسه با رویکرد غیرفعال بالاتر است. این موضوع در حالی است که استراتژی غیرفعال هزینه ثابت و هزینه معاملاتی پایین‌تری نسبت به استراتژی فعال دارد؛ اما نقطه ضعف موجود در این میان آن است که بازدهی منفی بازار و به تبع آن شاخص، به بازدهی منفی پرتفوی منجر خواهد شد. همچنین در استراتژی فعال، سرمایه‌گذار هم در معرض ریسک شرکت و هم در معرض ریسک بازار قرار می‌گیرد اما پرتفویی که با استفاده از روش غیرفعال مدیریت می‌شود فقط متأثر از ریسک بازار خواهد بود (بیزلی و همکاران، ۲۰۰۳).

پرتفوی شاخصی ارتقایافته<sup>۴</sup> سعی دارد که با ترکیب مزایای دو رویکرد فعال و غیرفعال، ضمن پایین نگه‌داشتن هزینه‌های معاملاتی، با ایجاد بازدهی مازاد مثبت نسبت به شاخص، سطح ریسک پرتفوی را معادل شاخص بازار نگه دارد. به عبارتی پرتفوی شاخصی ارتقایافته، پرتفویی است که ضمن ایجاد بازدهی مازاد مثبت نسبت به شاخص، این مقدار بازدهی مثبت را در طول زمان حفظ نماید (لئوناردو و همکاران<sup>۵</sup>، ۲۰۱۷). این پژوهش سعی دارد با استفاده از یک مدل دو مرحله‌ای، به تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته بپردازد. مدل مرحله اول، با استفاده از رویکرد خوشه‌بندی سری‌های زمانی یک پرتفوی ردیاب شاخص با تعداد مشخص سهام - که توسط سرمایه‌گذار تعیین می‌شود - را ایجاد می‌کند. خوشه‌بندی سری‌های بازده سهام تشکیل‌دهنده شاخص در این مرحله، بر اساس معیارهای شباهت متنوعی مانند ضرایب هم‌بستگی مبتنی بر کاپولا<sup>۶</sup> و شاخص اطلاعات متقابل<sup>۱</sup> انجام می‌شود. به عبارتی در مرحله اول، شاخص بازار با

1. Information Capital Market Efficiency
2. Chen & Roy
3. Beasley, Meade and Chang
4. Enhanced Indexing
5. Leonardo
6. Copula

تعداد کمتری از سهام، بازسازی می‌شود. در گام دوم، یک مدل بهینه‌سازی ریاضی، بازدهٔ مازاد پرتفوی نسبت به شاخص بازسازی شده را بیشینه، و اوزان سرمایه‌گذاری در سهام، برای تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته را محاسبه می‌نماید. بازدهٔ مازاد سهام‌های تشکیل‌دهندهٔ پرتفوی ردياب شاخص با استفاده از مدل‌های خودهم‌بستگی<sup>۲</sup> پیش‌بینی می‌شود. همچنین عدم قطعیت موجود در بازدهٔ مازاد سهام‌های تشکیل‌دهندهٔ شاخص در مدل بهینه‌سازی مرحلهٔ دوم، با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار<sup>۳</sup> در نظر گرفته می‌شود.

بر اساس توضیحات ارائه‌شدهٔ فوق، مهم‌ترین نوآوری‌های پژوهش حاضر استفاده از معیارهای شباهت مبتنی بر کاپولا و همچنین اطلاعات متقابل در تشکیل پرتفوی مبتنی بر شاخص (گام اول مدل)، و همچنین استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار در مدل مرحلهٔ دوم، به منظور در نظر گرفتن عدم قطعیت موجود در پارامترهای مدل است. در ادامه پس از بررسی پیشینهٔ تجربی و نظری، روش‌شناسی پژوهش مورد بررسی قرار خواهد گرفت. پس از آن، نتایج پژوهش و آزمون فرضیات ارائه خواهند شد. در انتها نیز نتیجه‌گیری نهایی مورد بحث قرار داده می‌شود.

### پیشینهٔ تجربی

از آنچه که در بررسی ادبیات موضوع به دست می‌آید روش‌های رديابی شاخص و تشکیل پرتفوی ردياب را می‌توان به ۴ گروه کلی، طبقه بندی نمود. طبقهٔ اول، به طور مستقیم به کمینه‌سازی اختلاف میان عملکرد پرتفوی و شاخص می‌پردازد که به خطای رديابی<sup>۴</sup> معروف است (چن و روی، ۲۰۱۲). برخی پژوهشگران، خطای رديابی را به عنوان قدرمطلق اختلاف بازدهٔ مورد انتظار شاخص و پرتفوی معرفی نموده‌اند (کلارک، کراس و استیمن<sup>۵</sup>، ۱۹۹۴ و می‌ها، چنگ‌زان، فنگ‌مین و هونگ<sup>۶</sup>، ۲۰۱۱) برخی دیگر از پژوهش‌ها واریانس اختلاف بین بازدهٔ شاخص و پرتفوی را به عنوان معیار خطای رديابی معرفی نموده‌اند (مید و سالکین<sup>۷</sup>، ۱۹۸۹ و ۱۹۹۰ و رول و رنالد، ۲۰۰۲). همان طور که در تعریف خطای رديابی به عنوان واریانس اختلاف بین بازدهٔ پرتفوی و شاخص یا مجذور این اختلاف واضح است، مسئلهٔ کمینه‌سازی خطای رديابی، یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی درجهٔ دوم است و از نظر محاسباتی پیچیدگی‌های خاص خود را دارد. برخی محققان به بررسی رویکردهای ابتکاری برای تحلیل مسئله پرداختند و در واقع بر پیچیدگی محاسباتی مسئله تمرکز نمودند (بیزلی و همکاران، ۲۰۰۳). گیلی و کلزی<sup>۸</sup> (۲۰۰۲) نیز به بررسی الگوریتم ابتکاری پذیرش آستانه‌ای پرداختند و این الگوریتم را به عنوان رویکردی مؤثر در رديابی شاخص معرفی نمودند. لئوناردو و همکاران (۲۰۱۷) با اشاره به پیچیدگی زمانی الگوریتم‌های استاندارد تحلیل مسئلهٔ برنامه‌ریزی درجهٔ دوم به ارائهٔ یک روش ابتکاری مبتنی بر

1. Mutual Information
2. Auto Regressive
3. Robust Optimization
4. Tracking Error
5. Clarke, Krase and Statman
6. Meihua, Chengxian, Fengmin and Hong
7. Meade and G. Salkin
8. Gilli and Kellezi

الگوریتم ژنتیک پرداختند و سه شاخص اس‌اندپی ۵۰۰<sup>۱</sup>، فتسی ۱۰۰<sup>۲</sup> و دکس<sup>۳</sup> را با موفقیت و در زمانی مناسب‌تر از الگوریتم‌های استاندارد، ردیابی نمودند. فرناندو فرانسیسکو و خاویر<sup>۴</sup> (۲۰۱۷) به مقایسه دو الگوریتم فراابتکاری جست‌وجوی ممنوع<sup>۵</sup> و الگوریتم ژنتیک<sup>۶</sup> در تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص مبتنی بر ۷ شاخص واقعی پرداختند و برتری الگوریتم جست‌وجوی ممنوع را در این خصوص اثبات نمودند. رودلف، مارکوس و پورگن<sup>۷</sup> (۱۹۹۹) نیز به معرفی معیارهایی خطی برای اندازه‌گیری خطای ردیابی پرداختند و با استفاده از برنامه‌ریزی خطی مقدار خطای ردیابی را کمینه نموده، و جواب مسئله را استخراج کردند. عیوضلو، شفیع زاده و قهرمانی (۱۳۹۶) با مقایسه دو رویکرد هم‌بستگی و هم‌انباشتگی<sup>۸</sup> بر اساس اطلاعات بازار سرمایه ایران، برتری مدل مبتنی بر هم‌انباشتگی در تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص را اثبات نمودند. سجادی و سبزواری (۱۳۹۴) به تحلیل مسئله با استفاده از الگوریتم کرم شبتاب پرداختند و پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای برای تحلیل مسئله ایجاد نمودند. امیری، کرمی و ناصر پور (۱۳۹۵) نیز با استفاده از الگوریتم بیگ بنگ - بیگ کرانچ<sup>۹</sup> و الگوریتم دیفرانسل تکاملی<sup>۱۰</sup> به تحلیل مسئله فوق پرداختند.

رویکرد دیگری که در ادبیات به آن اشاره شده است، استفاده از مدل‌های عاملی به‌منظور ایجاد تطابق بین مشخصه‌های پرتفوی ردیاب و شاخص است. (چن و روی، ۲۰۱۲) مدل‌های عاملی بازده یک سهم را با استفاده از یک یا چند عامل اقتصادی یا غیراقتصادی (رفتاری، اجتماعی و...) توضیح می‌دهند. برای مثال یک مدل تک‌شاخصی به‌منظور به‌دست‌آوردن بازده سهم  $i$  از یک مدل رگرسیون خطی استفاده می‌کند (بیزلی و همکاران، ۲۰۰۳) به این ترتیب که:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i \cdot r_M + \varepsilon \quad \text{رابطه ۱}$$

یک مدل کمینه‌سازی واریانس تحت شرایطی که بتای پرتفوی برابر با یک باشد می‌تواند به‌عنوان یک روش تشکیل پرتفوی ردیاب مورد استفاده قرارگیرد. چراکه که پرتفوی ردیاب باید مطابق با شاخص حرکت کند و ضریب رگرسیون شاخص نسبت به خودش برابر ۱ خواهد بود (رود، ۱۹۸۰). اردوگان و همکاران (۲۰۰۴) با در نظر گرفتن چندین عامل و هزینه‌های معاملاتی به بیشینه‌سازی شاخص شارپ پرداختند. این محققان به‌منظور برآورد دقیق‌تری از بازده دارایی‌ها از مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای (شارپ، ۱۹۶۳) استفاده نمودند. کوریلی و مارسلینو<sup>۱۱</sup> (۲۰۰۶) با ارائه یک مدل عاملی، پویایی شاخص که به دلیل تغییر قیمت سهم‌ها و وزن آنها در شاخص اتفاق می‌افتد را در نظر گرفته و با استفاده از این مدل پویا به تحلیل مسئله ردیابی شاخص پرداختند. فلاح‌پور، تندنویس و هاشمی (۱۳۹۴) با استفاده

1. S&P500
2. FTSE100
3. DAX
4. Fernando, Francisco and Javier
5. Tabu Search
6. Genetic Algorithm
7. Rudolf, Markus and Jurgen
8. Co-integration
9. Big bang big crunch
10. Differential Evaluation Algorithm
11. Corielli and Marcellino

کمینه‌سازی واریانس جزء‌اخلال به تشکیل پرتفویی با بنای نزدیک به ۱ پرداختند و عدم قطعیت موجود در پارامترهای مدل را با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار تحلیل نمودند.

رویکرد خوشه‌بندی سری‌های زمانی برای تشکیل پرتفوی مبتنی بر شاخص نیز مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. فوکاردی و فبوزی<sup>۱</sup> (۲۰۰۴) به ارائه مدل خوشه‌بندی بر مبنای هم‌جمعی پرداختند و پرتفوی مبتنی بر شاخص را تشکیل دادند. داز و کینوتی<sup>۲</sup> (۲۰۰۵) با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی تصادفی، به تحلیل مسئله ردیابی شاخص با استفاده از خوشه‌بندی سری‌های زمانی پرداخته‌اند. کورنجلوس و توتونچی<sup>۳</sup> (۲۰۰۵) مدل بهینه‌سازی صفر و یک را برای خوشه‌بندی سری‌ها زمانی بر مبنای ضریب هم‌بستگی پیرسون را معرفی نمودند و چن و روی (۲۰۱۲) و فلاح‌پور و تندوبیس (۱۳۹۴) عدم قطعیت ضریب هم‌بستگی به عنوان پارامتر این مدل را با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار مورد بررسی قرار دادند.

روش دیگری که برای ردیابی شاخص مورد استفاده قرار می‌گیرد روش میانگین واریانس مارکوییتز<sup>۴</sup> است. رچارد رول (۱۹۹۲) با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی مارکوییتز (۱۹۵۲ و ۱۹۵۹) به تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص پرداخته و راودر<sup>۵</sup> (۱۹۹۸) هزینه‌های معاملاتی را نیز به این مدل اضافه نمود. روی و دخیانگ (۲۰۱۶) با ارائه مدل پایدار ۳ عاملی فاما و فرنچ<sup>۶</sup> به ترکیب مدل‌های عاملی و رویکرد میانگین واریانس برای تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته پرداختند و با بازنویسی مدل و تبدیل آن به یک مدل بهینه‌سازی ترکیبی مخروطی درجه دوم نشان دادند که عملکرد این مدل پایدار، نسبت به مدل‌های مبتنی بر شاخص شارپ بهتر خواهد بود. از رویکرد میانگین واریانس بیشتر برای تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته استفاده می‌شود. چراکه این رویکرد به بیشینه‌سازی بازده مازاد و کمینه‌سازی واریانس خطای ردیابی می‌پردازد تا بتواند بازده‌ای پایدار و بالاتر از شاخص را ایجاد نماید (واندرلی، استلا و اسوالدو<sup>۷</sup>، ۲۰۱۶). الکساندر و باپتیستا (۲۰۱۰) با ارائه مدلی به بیشینه‌سازی آلفا (اختلاف بازده شاخص و پرتفوی) پرداختند. یائو، ژنگ و ژائو<sup>۸</sup> (۲۰۰۶) نیز با استفاده از روش کنترل خطی تصادفی درجه دوم به تحلیل مدل مذکور پرداختند و بین بازده پرتفوی و شاخص در بازار سرمایه هنگ کنگ و نیویورک اختلاف معنادار ایجاد کردند.

## مبانی نظری

در این قسمت از پژوهش، پس از بررسی رویکردهای کاپولا و اطلاعات متقابل به‌منظور تعیین شاخص‌های شباهت سری‌های زمانی، رویکرد بهینه‌سازی استوار که به‌منظور در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترهای مدل‌های بهینه‌سازی استفاده می‌شود مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

1. Focardi and Fabozzi

2. Dos and Cincotti

3. Cornuejols and Tutuncu

4. Markowitz mean-Variance

5. Rohweder

6. Robust Fama & French 3 factor Model

7. Wanderlei, Estela and Oswaldo

8. Yao, Zhang and Zhou



### کاپولا

رویکرد کاپولا برای اولین بار توسط اسکالر<sup>۱</sup> (۱۹۵۹) معرفی شد. این رویکرد می‌تواند توزیع حاشیه‌ای سری‌های زمانی مختلف را به توزیع مشترک آنها مرتبط سازد تا هم‌بستگی میان دو متغیر تصادفی را تشریح نماید. بر اساس تئوری اسکالر برای توزیع مشترک دو بعدی  $F(x_1, x_2)$  برای دو متغیر تصادفی  $X_1$  و  $X_2$  با توزیع‌های حاشیه‌ای  $F(x_1)$  و  $F(x_2)$  یک تابع کاپولا  $C$  وجود دارد که:

$$F(x_1, x_2) = C[F_1(x_1), F_2(x_2)] \quad \text{رابطه ۲}$$

با مشتق گرفتن از دو طرف معادله فوق داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 C[F_1(x_1), F_2(x_2)]}{\partial F_1 \partial F_2} f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = \frac{\partial^2 C[u_1, u_2]}{\partial u_1 \partial u_2} \times \prod_i \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} \\ &= c(\tilde{u}) \times \prod_i f_i(x_i) \end{aligned} \quad \text{رابطه ۳}$$

در رابطه فوق،  $f_i$  نشان‌دهنده تابع چگالی  $F_i(x_i)$  و  $u_i = u_i$  برای هر  $i = 1, 2$  و  $\tilde{u} = (u_1, u_2)$  و  $c(\tilde{u})$  تابع چگالی کاپولا است. هنگامی که متغیرهای پیوسته باشند، طبق قضیه اسکالر هر تابع توزیع احتمال چند متغیره می‌تواند با یک توزیع حاشیه‌ای و یک ساختار وابستگی به صورت معادله فوق نشان داده شود. این تئوری محققان را قادر می‌سازد که بتوانند با توابع کاپولای متنوع توزیع حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی را با توزیع مشترک آنها مرتبط سازند و از طریق این ارتباط، الگوهای هم‌بستگی میان این متغیرها را تشخیص دهند (پاتون<sup>۲</sup>، ۲۰۰۷). کاپولاها دارای انواع متعددی هستند که در جدول زیر، اطلاعات کلی در خصوص آنها قابل دسترس است.

جدول ۱. معرفی انواع کاپولا

نوع کاپولا	تابع توزیع	تابع چگالی
نرمال <sup>۳</sup>	$C^{Ga}(u_1, u_2; \rho) = \Psi_\rho(\Psi^{-1}(u_1), \Psi^{-1}(u_2))$	$C^{Ga}(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) =  \Sigma ^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2} \xi' (\Sigma^{-1} - I) \xi)$
تی‌استودنت <sup>۴</sup>	$C^T(u_1, u_2; \rho) = T_{v, \rho}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2))$	$C_v(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = K  \Sigma ^{\frac{1}{2}} (1 + v^{-1} \xi \Sigma \xi)^{-(v+2)/2} \prod_{i=1}^n (1 + v^{-1} \xi_i^2)^{(v+1)/2}$

1. Sklar  
2. Patton  
3. Normal  
4. T-student



نوع کاپولا	تابع توزیع	تابع چگالی
	$T_{v,\rho}$ توزیع دو متغیره تی استیودنت، $\rho$ ضریب هم‌بستگی، $v$ درجه آزادی و $t_v^{-1}$ معکوس توزیع تک متغیره تی استیودنت است. $K$ نشان‌دهنده تابع گاما و به صورت زیر است:	$K = \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)^{-n} \Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)$
فرانک <sup>۱</sup>	$C^{Frank}(u_1, u_2; \alpha) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right)$	$C^{Frank} = \frac{\alpha(1 - e^{-\alpha})e^{-\alpha(u_1+u_2)}}{((1 - e^{-\alpha}) - (1 - e^{-\alpha u_1})(1 - e^{-\alpha u_2}))^2}$
گامبل <sup>۲</sup>	$C^{Gumble}(u_1, u_2; \alpha) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right)$	$C^{Gumble} = \frac{e^{(-((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}})((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha)^{\alpha-1}}}{u_1 u_2 ((-\ln u_1) + (-\ln u_2))^{\frac{2}{\alpha}}} \times (((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + \alpha - 1)$
کلایتون <sup>۳</sup>	$C^{Clayton}(u_1, u_2; \alpha) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{\frac{1}{\alpha}}$	$C^{Clayton} = (1 + \alpha)(u_1 u_2)^{-\alpha-1} ((u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{\frac{1}{\alpha}} - 1)^{\frac{1}{\alpha}}$

منبع: امبرجت، مک‌نیل و استرامان<sup>۴</sup> (۲۰۰۲)، سونگ<sup>۵</sup> (۲۰۰۰)، استولاتر<sup>۶</sup> (۲۰۰۸) و خورابی و مایورر<sup>۷</sup> (۲۰۱۳)

سه کاپولای پایانی که در جدول فوق نشان داده شده‌اند، با عنوان کاپولاهای ارشمیدسی<sup>۸</sup> شناخته می‌شوند. این خانواده، یک دسته مهم از توابع کاپولا با ساختار ساده و خصوصیات تحلیلی بسیاری است. تابع کاپولای ارشمیدسی دو متغیره به صورت  $C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\{\varphi(u_1) + \varphi(u_2)\})$  است که پیوسته، اکیداً کاهشی و دارای تابع مولد  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  به طوری که  $\varphi(1) = 0$  و تابع شبه معکوس  $\varphi^{[-1]}$  به صورت معادله زیر است (کشاورز حداد، حیرانی، ۱۳۹۳):

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad \text{رابطه ۴}$$

1. Frank
2. Gumbel
3. Clayton
4. Embrechts, McNeil and Straumann
5. Song
6. Štulajter
7. Kharoubi and Maurer
8. Archimedean Copulas

## اطلاعات متقابل

اطلاعات متقابل یک معیار کمی است، که نشان‌دهنده میزان ارتباط میان دو متغیر تصادفی است. بر خلاف ضرایب همبستگی معروف همچون ضریب همبستگی پیرسون (تی سی، ۲۰۱۰) که تنها ارتباط خطی میان دو متغیر را در نظر می‌گیرد، این معیار سعی بر در نظر گرفتن تمامی ارتباط‌های ممکن میان دو متغیر تصادفی دارد. این متغیر به زبان ساده نشان می‌دهد که با در اختیار داشتن مقادیر یک متغیر تصادفی، چه اطلاعاتی ممکن است از دیگر متغیر تصادفی به دست آید. هرچه این اطلاعات بیشتر باشد، معیار اطلاعات متقابل میان این دو متغیر بالاتر خواهد بود. به زبان ریاضیاتی، مقدار اطلاعات متقابل میان دو متغیر تصادفی  $x$  و  $y$  که دارای تابع توزیع مشترک  $P(x, y)$  هستند با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود (اریک، ۲۰۱۳):

$$I(X; Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(x, y) \log \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} \quad (\text{رابطه ۵})$$

## بهینه‌سازی استوار

به طور کلی در دنیای تئوریک مسئله بهینه‌سازی، فرض بر این است که پارامترهای ورودی مدل دارای قطعیت هستند. اما واضح است که برای به کار بردن روش‌های بهینه‌سازی در دنیای واقعی فرض قطعیت پارامترها، فرض صحیحی نیست. چراکه در بسیاری از موارد خطای پیش‌بینی باعث فاصله گرفتن مقدار واقعی پارامترها از مقدار پیش‌بینی شده برای آنها می‌شود. همچنین خطای اندازه‌گیری نیز می‌تواند باعث شود مقدار واقعی پارامترها با مقدار در نظر گرفته شده برای آنها یکسان نباشد. (بن‌تال، الگاوئی و نیمیروفسکی<sup>۱</sup>، ۲۰۰۶) با توجه به توضیحات بالا، در نظر گرفتن عدم اطمینان پارامترهای مدل‌های بهینه‌سازی، برای به کار بردن آنها در واقعیت، مسئله مهمی است که در نتایج اکتسابی و صحت آنها نقش مؤثری دارد. اگر پارامترهای مدل از مقدار اسمی خود نوسان کنند، امکان دارد جواب بهینه‌ای که بر اساس مقدار اسمی پارامترها محاسبه شده است، شرایط بهینگی را از دست بدهد یا برخی از محدودیت‌ها را نقض کند و از محدوده جواب‌های موجه خارج شود (کورنوجلوس و توتونچی، ۲۰۰۵). از این رو در نظر گرفتن این عدم قطعیت در اجرای نتایج مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی در دنیای واقعی اهمیت بالایی دارد. یکی از رویکردهایی که در ادبیات موضوع برای این منظور در نظر گرفته شده است، بهینه‌سازی استوار است. بهینه‌سازی استوار زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که تحلیل‌گر به دنبال جوابی است که به ازای تمامی مقادیر ممکن برای پارامتر دارای عدم قطعیت خوب رفتار کند یا به عبارت دیگر شدنی باقی بماند. بر خلاف برنامه‌ریزی تصادفی که بر اساس تئوری احتمالات با عدم قطعیت پارامترها رفتار می‌کند، این رویکرد به تمامی مقادیر ممکن برای پارامتر دارای عدم قطعیت، اهمیت یکسان می‌دهد. (برتسیماس و سیم<sup>۲</sup>، ۲۰۰۴) به عبارت دیگر این رویکرد، فرضی در مورد توزیع پارامترهای مدل نمی‌نماید. عدم اطمینان پارامترهای مدل در این رویکرد توسط مجموعه عدم قطعیت، که در برگیرنده تمامی مقادیر ممکن برای پارامترهای مدل است، توضیح داده

1. BenTal, ElGhaoui and Nemirovski

2. Bertsimas and sim

می‌شود (کورنولوس و توتونچی، ۲۰۰۵). در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به فرم عمومی رابطه (۸)، بدون اینکه فرضی در مورد توزیع پارامتر مدل شود، برای هر یک از پارامترها یک مجموعه عدم قطعیت متقارن مطابق رابطه (۹) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} & \min_x c'x \\ & \text{St} \\ & Ax \geq b \\ & x \in X \end{aligned} \quad \text{رابطه ۶}$$

$$a_{ij} = [\bar{a}_{ij} - \widehat{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} + \widehat{a}_{ij}] \quad \text{رابطه ۷}$$

برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) با اشاره به این مطلب که احتمال رخ دادن بدترین شرایط برای همه پارامترها بسیار اندک است، به تصمیم‌گیرنده این اختیار را می‌دهند که میزان محافظه‌کاری را با تعریف یک پارامتر تعیین نماید. با این توضیحات مدل پایدار برنامه‌ریزی خطی مشتمل بر دو مسئله بهینه‌سازی اصلی (بر روی متغیرها) و داخلی (بر روی پارامترها) به صورت رابطه (۸) ارائه خواهد شد:

$$\begin{aligned} & \min_x c'x \\ & \text{St} \\ & \sum_j \bar{a}_{ij} x_j - \Gamma_i p_i - \sum_{j=1}^n q_{ij} \geq b_i \\ & p_i + q_{ij} \geq \widehat{a}_{ij} y_j \\ & -y_j \leq x_j \leq y_j \\ & x \in X \\ & y \geq 0 \end{aligned} \quad \text{رابطه ۸}$$

### مدل مفهومی پژوهش

همان‌طور که پیش از این اشاره شد، این پژوهش در یک فرایند دو مرحله‌ای به تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته می‌پردازد. در مرحله اول، عملکرد شاخص، با استفاده از رویکرد خوشه‌بندی سری‌های زمانی بازسازی می‌شود. به عبارتی در این گام، یک پرتفوی مبتنی بر شاخص (با تعداد کمتری از سهم‌های تشکیل دهنده شاخص) ایجاد می‌شود. در مرحله دوم، اوزان سهم‌های انتخاب شده در مرحله اول، به گونه‌ای محاسبه می‌شود که بازده مازاد پرتفوی نهایی نسبت به پرتفوی ردیاب شاخص ایجاد شده در مرحله اول، بیشینه شود.

مدل استفاده شده در مرحله اول، سهم‌های تشکیل دهنده شاخص را به  $q$  گروه تقسیم نموده و از هر گروه ۱ نماینده انتخاب می‌کند. به عبارتی تعداد دارایی‌های تشکیل دهنده پرتفوی، توسط تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شود. این مدل بهینه‌سازی به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} x_{ij} \quad \text{رابطه ۹}$$

Subject to

$$1) \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i. j \in \{1.2.\dots.n\}$$

$$2) \sum_{j=1}^n y_j = q \quad \forall j \in \{1.2.\dots.n\}$$

$$3) x_{ij} \leq y_j \quad \forall j \in \{1.2.\dots.n\} \quad x_{ij} \& y_j \in \{0.1\} \quad \forall i. j \in \{1.2.\dots.n\}$$

### پارامترهای مدل بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه ۹

$\rho_{ij}$ : مقدار این پارامتر، نشان‌دهنده اندازه شباهت بین دو سری زمانی بازده دارایی  $i$  و بازده دارایی  $j$  می‌باشد.

### متغیرهای مدل بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه ۹

$z_j$  می‌تواند مقادیر صفر یا ۱ را اختیار کند، نشان‌دهنده این موضوع است که آیا سهم  $j$  برای حضور در پرتفوی انتخاب می‌شود یا خیر. به عبارتی، در صورتی که سهم  $j$  برای حضور در پرتفوی انتخاب شود، این متغیر مقدار ۱ و در غیر این صورت، مقدار صفر را اختیار خواهد نمود.

$x_{ij}$  می‌تواند مقادیر صفر یا ۱ را اختیار کند، نشان‌دهنده این موضوع است که آیا سهم  $j$  به عنوان نماینده سهم  $i$  انتخاب می‌شود یا خیر. به عبارتی، اگر سهم  $j$  نماینده سهم  $i$  باشد، متغیر مذکور مقدار ۱ و در غیر این صورت، مقدار صفر را اختیار خواهد نمود.

### محدودیت‌های مدل بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه ۹

**محدودیت شماره ۱:** این مجموعه محدودیت‌ها نشان می‌دهند که هر سهم فقط می‌تواند یک نماینده داشته باشد. برای مثال به ازای  $i = 1$ ، در بردار  $\{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots\}$  فقط یکی از مولفه‌ها (مثلاً  $x_{17}$ ) برابر یک خواهد بود. که معنای آن این است که نماینده سهم ۱، سهم ۷ است. این موضوع به صورت محدودیت شماره ۱ نشان داده می‌شود.

**محدودیت شماره ۲:** این محدودیت بیانگر محدودیت تعداد سهم‌های تشکیل‌دهنده سبد سرمایه‌گذاری است که باید برابر با  $q$  باشد. از آنجاکه اعضای سبد سرمایه‌گذاری همان نماینده‌ها انتخابی از گروه‌ها هستند و متغیر  $z_j$  بیانگر انتخاب یا عدم انتخاب سهم  $j$  به عنوان نماینده است، پس محدودیت ۲ باید برقرار باشد.

**محدودیت شماره ۳:** همان طور که در تعریف متغیرهای مدل ذکر گردید متغیر  $x_{ij}$  نشان‌دهنده این است که سهم  $j$  به عنوان نماینده سهم  $i$  انتخاب می‌شود یا خیر. اگر مقدار  $z_j$  برابر ۱ باشد؛ دارایی  $j$  برای حضور در سبد سرمایه‌گذاری انتخاب شده است و نماینده برخی از دارایی‌های دیگر است. پس مقدار  $x_{ij}$  می‌تواند برابر با ۱ (در صورتی که سهم  $j$

نماینده سهم  $i$  باشد) یا صفر (در صورتی که سهم  $j$  نماینده سهم  $i$  نباشد) باشد. اما اگر مقدار  $\gamma_j$  برابر صفر باشد؛ دارایی  $j$  برای حضور در سبد سرمایه‌گذاری انتخاب نشده است و نماینده هیچ‌یک از دیگر دارایی‌ها نیست. به همین دلیل هیچ یک از متغیرهای  $x_{ij}$  نمی‌توانند مقدار ۱ را به خود تخصیص دهند.

با حل کردن مدل فوق، فرایند انتخاب سهم‌های مورد نظر برای تشکیل پرتفوی تکمیل می‌شود. گام بعدی تعیین وزن این سهم‌ها در پرتفوی یا نسبت سرمایه‌گذاری در هر کدام از این سهم‌های انتخابی است. مقدار  $k_j$  یا ارزش بازار برای هر سهم انتخاب‌شده به عنوان نماینده، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k_j = \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} \quad \text{رابطه ۱۰}$$

در رابطه فوق مقدار  $v_i$  نشان‌دهنده ارزش بازار سهم  $i$  ام است. با این توضیحات در واقع  $k_j$  مقدار بیانگر مجموع ارزش بازار سهم‌هایی است که سهم  $j$  به عنوان نماینده آن‌ها انتخاب شده است. حال که ارزش بازار هر کدام از سهم‌های انتخابی برای پرتفوی محاسبه شد، نسبت سرمایه‌گذاری در هر کدام از سهم‌ها با نماد  $\Phi_j$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_j = \frac{k_j}{\sum_{f=1}^q k_f} \quad \text{رابطه ۱۱}$$

در مرحله دوم، با استفاده از یک مدل بهینه‌سازی ریاضی، اوزان سرمایه‌گذاری در سهم‌های تشکیل دهنده پرتفوی مبتنی بر شاخص (پرتفوی خروجی مرحله اول) به گونه‌ای تعیین می‌شود که بازده مازاد پرتفوی ایجاد شده (پرتفوی شاخصی ارتقایافته) بیشینه شود. این مدل به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\max \sum_{j=1}^q r_j^e \Phi_j^e \quad \text{رابطه ۱۲}$$

st:

$$\sum_{j=1}^q \Phi_j^e = 0$$

$$\Phi_j^e \geq -\Phi_j \quad \forall i \in \{1.2 \dots q\}$$

#### پارامتر مدل بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه ۱۲

$r_j^e$  نشان‌دهنده بازده مازاد هر سهم نسبت به بازده پرتفوی شاخصی ایجاد شده در مرحله اول (نماینده شاخص) است.  $\Phi_j$  نشان‌دهنده وزن سرمایه‌گذاری هر سهم در پرتفوی ردیاب شاخص ایجاد شده در مرحله اول، نماینده شاخص) است، که از طریق رابطه ۱۱ محاسبه می‌شود.

## متغیرهای مدل بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه ۱۲

$\Phi_j^e$  وزن مازاد سرمایه‌گذاری، در دارایی  $j$  نسبت به وزن اولیه در پرتفوی شاخص است. مدل شماره ۱۲، بازده مازاد پرتفوی نسبت به پرتفوی شاخصی ایجاد شده در مرحله اول را بیشینه می‌کند. محدودیت اول مدل، بیان می‌کند که مجموع متغیرهای مدل باید برابر با صفر باشد. همچنین به منظور ایجاد محدودیت در فروش استقرایی، اوزان مازاد باید از مقدار قرینه اوزان هر سهم در پرتفوی شاخصی بزرگ‌تر باشد. (اوزان نهایی هر سهم در پرتفوی شاخصی ارتقایافته، مثبت باشد.)

با توجه به این نکته که پارامترهای این مدل (بردار  $r_j^e$ ) باید از داده‌های تاریخی تخمین زده شود و در نتیجه دارای عدم قطعیت هستند، به منظور در نظر گرفتن این عدم قطعیت از رویکرد بهینه‌سازی استوار که در رابطه ۸ مورد اشاره قرار گرفته است، استفاده می‌شود. نتیجه مدل فوق، به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\max \sum_{j=1}^q r_j^e \Phi_j^e - \Gamma p - \sum_{j=1}^q q_j \quad \text{رابطه ۱۳}$$

st:

$$p + q_j \geq s_j y_j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$$

$$-y_j \leq z_j^e \leq y_j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$$

$$\Phi_j^e \geq -\Phi_j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$$

$$p \& q_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$$

$$\sum_{i=1}^q \Phi_j^e = 0$$

تنها پارامتر مدل ارائه شده در رابطه ۱۳ که پیش از این معرفی نشده، مقدار  $s_j$  (مقدار نوسان بازده مازاد هر سهم، نسبت به مقدار بازده مازاد مورد انتظار) است. این پارامتر معادل انحراف استاندارد بازده مازاد تاریخی سهم  $j$  نظر گرفته می‌شود. (چن و روی، ۲۰۱۲) با تحلیل این مدل، وزن نهایی سرمایه‌گذاری در دارایی  $j$  ام به منظور تشکیل سبد سرمایه‌گذاری شاخصی ارتقایافته با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$W_j = \Phi_j^e + \Phi_j \quad \text{رابطه ۱۴}$$

## روش‌شناسی پژوهش

## ساختار و مدل بررسی شده در پژوهش

فرایند اجرای مدل مفهومی که در بخش قبل مورد اشاره قرار گرفت به شرح زیر قابل مطالعه است:

گام نخست: محاسبه مقادیر اندازه‌گیری شباهت بین هر زوج سری‌های زمانی که در قسمت مبانی نظری مورد اشاره قرار گرفتند به عنوان ورودی مدل بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه ۹.

**گام دوم:** تحلیل مدل بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه ۹ به ازای هر معیار شباهت و به عبارتی تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص، به ازای هر یک از معیارهای شباهت سری‌های زمانی.

**گام سوم:** محاسبه وزن سرمایه‌گذاری در هر یک از دارایی‌های انتخاب شده، با استفاده از رابطه ۱۱ (محاسبه  $\Phi_j$ ).

**گام چهارم:** محاسبه بازده مورد انتظار سهم‌های انتخاب شده برای تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص (محاسبه  $r_j^e$ ). با توجه به اینکه به منظور تحلیل مدل بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه ۱۲ به محاسبه مقدار متوسط (مورد انتظار) بازده مورد انتظار سهم‌های تشکیل دهنده پرتفوی ردیاب نسبت به شاخص نیاز است، در این مرحله این مقدار مورد انتظار با استفاده از مدل خودهم‌بستگی (AR) مورد محاسبه قرار می‌گیرد (تی سی ۲۰۱۰).

**گام پنجم:** محاسبه نوسان بازده مورد انتظار هر سهم نسبت به شاخص. (محاسبه  $S_j$ ) پارامتر دیگری که برای تحلیل رابطه (۱۳) مورد نیاز است، مقدار نوسان مجاز بازده هر سهم نسبت به میانگین پیش بینی شده با استفاده از مدل AR است. برای این منظور از مقدار انحراف استاندارد بازده مورد تاریخی سهام استفاده شده است (چن و روی، ۲۰۱۲).

**گام ششم:** تحلیل مدل بهینه‌سازی ارائه شده در رابطه ۱۳ و استخراج اوزان بازده سهام‌ها به منظور تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته (محاسبه  $\Phi_j^e$ ).

**گام هفتم:** استفاده از رابطه ۱۴ و محاسبه وزن نهایی سرمایه‌گذاری در هر دارایی به منظور تشکیل سبد شاخصی ارتقایافته (محاسبه  $W_j$ ).

#### داده‌های استفاده شده

شاخص پنجاه شرکت فعال تر، یکی از شاخص‌های پرکاربرد در بورس اوراق بهادار تهران است. ترکیب این شاخص هر ۳ ماه به روز می‌شود و سهم‌های تشکیل دهنده شاخص با توجه به معیارهای زیر انتخاب می‌شوند (راعی و پویان‌فر، ۱۳۸۴).

- نقدشوندگی سهام
- تأثیر سهام بر ارزش جاری بازار
- نسبت‌های مالی، به خصوص نسبت‌های سودآوری

با توجه به اینکه برای سنجش میزان شباهت میان دارایی‌ها، سری زمانی بازده روزانه مورد نیاز است، و با توجه به معیارهای فوق و پرمعامله بودن سهم‌های تشکیل دهنده شاخص پنجاه شرکت فعال تر، این شاخص به عنوان شاخص هدف به منظور تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص انتخاب شده است.

به منظور تحلیل مدل از اطلاعات تاریخی شاخص ۵۰ شرکت فعال تر از ابتدای بهار ۱۳۹۴ تا پایان بهار ۱۳۹۷ استفاده شده است. به عبارتی از اطلاعات ۱ سال گذشته شرکت‌های تشکیل دهنده شاخص در هر سه ماهه، برای تخمین پارامترهای مدل استفاده شده و بر اساس این پارامترها، اوزان سرمایه‌گذاری در هر سهم برای تشکیل پرتفوی شاخصی و پرتفوی شاخصی ارتقایافته مشخص می‌شوند. سپس با استفاده از اطلاعات واقعی شرکت‌های تشکیل دهنده شاخص ۵۰ شرکت فعال تر در هر ۳ ماهه، شاخص‌های ارزیابی عملکرد محاسبه شده، و سؤالات پژوهش پاسخ داده می‌شود.



### معیارهای ارزیابی عملکرد

در این قسمت معیارهای استاندارد که برای ارزیابی عملکرد پرتفوی استخراج شده از مدل مورد استفاده قرار می‌گیرند معرفی می‌شود.

به‌منظور سنجش موفقیت یک پرتفوی در ردیابی شاخص از معیار نسبت بازار استفاده می‌شود. این معیار که با استفاده از رابطه ۱۵ محاسبه می‌شود، نشان می‌دهد که آیا پرتفوی در ردیابی شاخص موفق بوده است یا خیر. مقدار مطلوب این معیار برای پرتفوی ردیاب شاخص معادل عدد ۱ است.

$$MR^i = \frac{1 + r_p^i}{1 + r_I^i} \quad \text{رابطه ۱۵}$$

در رابطه فوق،  $r_I^i$  نشان‌دهنده مقدار بازده شاخص در زمان  $i$  و  $r_p^i$  نشان‌دهنده بازده پرتفوی در زمان  $i$  است. به‌منظور مقایسه عملکرد پرتفوی‌های ردیاب از معیار خطای ردیابی استفاده می‌شود. به‌عبارتی از میان پرتفوهایی که دارای نسبت بازار برابر با یک (در سطح اطمینان مشخص) هستند، پرتفوی موفق‌تر عمل کرده است که خطای ردیابی پایین‌تری (در سطح اطمینان مشخص) نسبت به دیگری داشته باشد. خطای ردیابی که از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود، به بررسی اختلاف عملکرد بازده شاخص و بازده پرتفوی، در دوره زمانی مورد آزمون خواهد پرداخت (چن و روی، ۲۰۱۲).

$$TE^i = \frac{\sum_{i=1}^n |r_p^i - r_I^i|}{n} \quad \text{رابطه ۱۶}$$

پارامترهای موجود در رابطه فوق، معادل پارامترهای معرفی شده در خصوص رابطه (۱۵) هستند. به‌منظور سنجش موفقیت پرتفوی شاخصی ارتقایافته از معیار نسبت اطلاعاتی استفاده می‌شود. این شاخص از تقسیم بازده مازاد پرتفوی نسبت به شاخص بر انحراف استاندارد بازده مازاد محاسبه می‌شود:

$$IR^i = \frac{avg(r_p - r_I)}{stdev(r_p - r_I)} \quad \text{رابطه ۱۷}$$

پارامترهای موجود در رابطه فوق، معادل پارامترهای معرفی شده در خصوص رابطه (۱۵) هستند.

### سوالات پژوهش

با توجه به موضوعات ارائه شده در فوق، این پژوهش به دنبال پاسخ دادن به این سؤال است که «استفاده از کدام یک شاخص‌های ضرایب هم‌بستگی مبتنی بر کاپولا و اطلاعات متقابل، در خوشه‌بندی سری‌های زمانی به پرتفوی ردیاب شاخص با خطای ردیابی پایین‌تر منتج خواهد شد؟». همچنین این پژوهش به دنبال پاسخ دادن به این سؤال است که «استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار به‌منظور در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترهای مدل، منجر به پرتفوی شاخصی ارتقایافته (ایجاد بازده مازاد معنادار نسبت به شاخص) خواهد شد؟». برای پاسخ‌گویی به این سؤال، بازده مازاد پرتفوی به

بازده شاخص مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در صورتی که اختلاف این دو مقدار به طور معناداری مثبت باشد، پاسخ سؤال مذکور مثبت خواهد بود.

### یافته‌های پژوهش


در مرحله نخست، پرتفوی ردیاب شاخص، برای هر یک از فصول دوره زمانی بهار ۹۴ تا پایان بهار ۹۷ تشکیل می‌شود. تعداد سهم‌های تشکیل‌دهنده پرتفوی ردیاب شاخص، معادل ۱۰ سهم در نظر گرفته شده است. به‌منظور محاسبه معیارهای ارزیابی عملکرد، بازده هفتگی پرتفوها با بازده شاخص ۵۰ شرکت فعال تر مورد مقایسه قرار گرفت. نمادهای مورد استفاده در جداول نتایج به شرح زیر هستند:

جدول ۲. نام‌گذاری پرتفویهای ردیاب شاخص

نماد پرتفوی	ویژگی
پرتفوی A	پرتفوی بهینه بر اساس شاخص «هم‌بستگی مبتنی بر کاپولای گاوسی» به عنوان معیار سنجش شباهت سری‌های زمانی
پرتفوی B	پرتفوی بهینه بر اساس شاخص «هم‌بستگی مبتنی بر کاپولای تی» به عنوان معیار سنجش شباهت سری‌های زمانی
پرتفوی C	پرتفوی بهینه بر اساس شاخص «هم‌بستگی مبتنی بر کاپولای کامل» به عنوان معیار سنجش شباهت سری‌های زمانی
پرتفوی D	پرتفوی بهینه بر اساس شاخص «هم‌بستگی مبتنی بر کاپولای فرانک» به عنوان معیار سنجش شباهت سری‌های زمانی
پرتفوی E	پرتفوی بهینه بر اساس شاخص «هم‌بستگی مبتنی بر کاپولای کلایتون» به عنوان معیار سنجش شباهت سری‌های زمانی
پرتفوی F	پرتفوی بهینه بر اساس شاخص «اطلاعات متقابل» به عنوان معیار سنجش شباهت سری‌های زمانی

در این مرحله به محاسبه مقدار نسبت بازار برای پرتفوها پرداخته می‌شود. همان طور که پیش از این اشاره گردید، مقدار مطلوب برای این معیار در خصوص پرتفوی ردیاب شاخص معادل ۱ است. به‌منظور بررسی مقادیر، از آزمون آماری سنجش مقدار میانگین جامعه به صورت زیر استفاده می‌شود:

جدول ۳. آزمون سنجش نسبت بازار

ناحیه رد شدن فرض صفر	آماره آزمون	آزمون
	$t = \frac{\bar{X}^{IR} - 1}{\left(\frac{S^{IR}}{\sqrt{n}}\right)}$	$\begin{cases} \mu_{TE} = 1 & \text{فرض صفر} \\ \mu_{TE} \neq 1 & \text{فرض یک} \end{cases}$

آماره فوق برای نسبت بازار پرتفوها محاسبه شده و با ناحیه رد فرض صفر که در سطح اطمینان ۹۹ درصد معادل بازه [۳،۰۵۴ و -۳،۰۵۴] است، مقایسه می‌شود. در صورت رد شدن فرض صفر، برابر بودن نسبت بازار با عدد ۱ اثبات می‌شود. جدول زیر مقادیر پارامترهای مربوط به آزمون فوق را مورد بررسی قرار می‌دهد:


جدول ۴. نسبت بازار پرتفویهای ردیاب شاخص

پرتفوی F	پرتفوی E	پرتفوی D	پرتفوی C	پرتفوی B	پرتفوی A	
۱/۰۰۲	۱/۰۰۲	-۰/۹۹۸	۱/۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰	نسبت بازار بهار ۹۴
-۰/۹۹۷	-۰/۹۹۷	-۰/۹۹۶	-۰/۹۹۵	-۰/۹۹۲	-۰/۹۹۲	نسبت بازار تابستان ۹۴
۱/۰۰۴	۱/۰۰۱	-۰/۹۹۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۲	۱/۰۰۳	نسبت بازار پاییز ۹۴
۱/۰۰۱	۱/۰۱۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۳	-۰/۹۹۸	-۰/۹۹۹	نسبت بازار زمستان ۹۴
۱/۰۰۴	-۰/۹۹۴	-۰/۹۹۷	-۰/۹۹۶	-۰/۹۹۶	-۰/۹۹۵	نسبت بازار بهار ۹۵
-۰/۹۹۳	-۰/۹۹۹	۱/۰۰۰	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹۷	-۰/۹۹۹	نسبت بازار تابستان ۹۵
-۰/۹۹۷	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹۷	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹۹	۱/۰۰۰	نسبت بازار پاییز ۹۵
-۰/۹۸۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۲	۱/۰۰۱	۱/۰۰۱	-۰/۹۹۸	نسبت بازار زمستان ۹۵
-۰/۹۹۸	۱/۰۰۱	-۰/۹۹۵	-۰/۹۹۵	۱/۰۰۵	۱/۰۰۵	نسبت بازار بهار ۹۶
-۰/۹۸۷	۱/۰۰۱	-۰/۹۹۸	۱/۰۰۳	۱/۰۰۵	۱/۰۰۵	نسبت بازار تابستان ۹۶
-۰/۹۹۴	۱/۰۰۲	-۰/۹۹۸	۱/۰۰۲	۱/۰۰۲	۱/۰۰۲	نسبت بازار پاییز ۹۶
۱/۰۰۸	۱/۰۰۲	-۰/۹۹۶	۱/۰۰۰	۱/۰۰۲	۱/۰۰۳	نسبت بازار زمستان ۹۶
-۰/۹۸۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۴	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰	-۰/۹۹۹	نسبت بازار بهار ۹۷
-۰/۹۹۶	۱/۰۰۱	-۰/۹۹۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	متوسط نسبت بازار
-۰/۸۰۶٪	-۰/۳۸۲٪	-۰/۲۵۹٪	-۰/۲۷۴٪	-۰/۳۶۳٪	-۰/۳۶۴٪	انحراف استاندارد نسبت بازار
-۱/۷۲۰	-۰/۶۲۲	-۲/۰۸۱	-۰/۳۹۴	-۰/۱۸۹	-۰/۰۳۷	مقدار آماره
*	*	*	*	*	*	نتیجه آزمون

\* دلیلی برای رد فرض صفر وجود ندارد.

نتیجه آزمون نشان می‌دهد که هر ۶ پرتفوی در ردیابی شاخص موفق عمل نموده‌اند. در ادامه با استفاده از شاخص متوسط خطای ردیابی، پرتفویهای ردیاب شاخص را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این مرحله به محاسبه مقدار خطای ردیابی برای پرتفوها پرداخته می‌شود. همان طور که پیش از این اشاره گردید، مقدار مطلوب برای این معیار در خصوص پرتفوی ردیاب شاخص معادل صفر (کمینه) است. به‌منظور بررسی مقادیر، از آزمون آماری سنجش مقدار میانگین جامعه به صورت زیر استفاده می‌شود:

جدول ۵. آزمون میانگین خطای ردیابی پرتفویهای ردیاب شاخص

آزمون	آماره آزمون	ناحیه رد شدن فرض صفر
$\begin{cases} \mu_{TE} \neq 0: \text{فرض صفر} \\ \mu_{TE} = 0: \text{فرض یک} \end{cases}$	$t = \frac{\bar{X}^{TE}}{\left(\frac{S^{TE}}{\sqrt{n}}\right)}$	

آماره فوق برای نسبت بازار پرتفوها محاسبه شده و با ناحیه رد فرض صفر که در سطح اطمینان ۹۹ درصد معادل بازه  $[-۳،۰۵۴، ۳،۰۵۴]$  است، مقایسه می‌شود. در صورت رد شدن فرض صفر، برابر بودن خطای ردیابی با عدد صفر اثبات می‌شود. جدول زیر مقادیر پارامترهای مربوط به آزمون فوق را مورد بررسی قرار می‌دهد:

جدول ۶. خطای ردیابی پرتفویهای ردیاب شاخص

پرتفوی F	پرتفوی E	پرتفوی D	پرتفوی C	پرتفوی B	پرتفوی A	
۰/۲۵٪	۰/۱۹٪	-۰/۱۵٪	۰/۱۴٪	۰/۱۴٪	-۰/۰۱٪	خطای ردیابی بهار ۹۴
-۰/۳۱٪	-۰/۲۶٪	-۰/۴۵٪	-۰/۵۲٪	-۰/۷۶٪	-۰/۷۵٪	خطای ردیابی تابستان ۹۴
۰/۳۷٪	۰/۱۱٪	-۰/۱۵٪	-۰/۰۱٪	۰/۲۲٪	۰/۲۶٪	خطای ردیابی پاییز ۹۴
۰/۱۲٪	۱/۱۱٪	۰/۱۱٪	۰/۲۹٪	-۰/۱۷٪	-۰/۱۴٪	خطای ردیابی زمستان ۹۴
۰/۳۵٪	-۰/۶۰٪	-۰/۳۴٪	-۰/۳۷٪	-۰/۴۳٪	-۰/۴۹٪	خطای ردیابی بهار ۹۵
-۰/۶۹٪	-۰/۱۵٪	۰/۰۵٪	-۰/۰۸٪	-۰/۲۵٪	-۰/۱۱٪	خطای ردیابی تابستان ۹۵
-۰/۳۲٪	-۰/۰۹٪	-۰/۳۱٪	-۰/۰۵٪	-۰/۰۸٪	۰/۰۳٪	خطای ردیابی پاییز ۹۵
-۱/۸۳٪	-۰/۰۴٪	۰/۱۷٪	۰/۰۵٪	۰/۱۲٪	-۰/۱۹٪	خطای ردیابی زمستان ۹۵
-۰/۲۵٪	۰/۱۰٪	-۰/۵۴٪	-۰/۴۷٪	۰/۵۰٪	۰/۴۹٪	خطای ردیابی بهار ۹۶
-۱/۲۷٪	۰/۰۵٪	-۰/۱۵٪	۰/۳۴٪	۰/۵۵٪	۰/۵۴٪	خطای ردیابی تابستان ۹۶
-۰/۶۴٪	۰/۲۴٪	-۰/۱۷٪	۰/۱۶٪	۰/۱۹٪	۰/۲۵٪	خطای ردیابی پاییز ۹۶
۰/۸۳٪	۰/۲۱٪	-۰/۳۶٪	۰/۰۰٪	۰/۲۲٪	۰/۲۵٪	خطای ردیابی زمستان ۹۶
-۱/۶۵٪	۰/۰۰٪	۰/۳۶٪	۰/۱۴٪	۰/۰۱٪	-۰/۰۶٪	خطای ردیابی بهار ۹۷
-۰/۳۸۷٪	۰/۰۶۹٪	-۰/۱۴۹٪	-۰/۰۲۹٪	۰/۰۲٪	۰/۰۰۵٪	متوسط خطای ردیابی
۰/۸۱۰٪	۰/۳۸۷٪	۰/۲۷۱٪	۰/۲۷۴٪	۰/۳۶٪	۰/۳۶۴٪	انحراف استاندارد نسبت بازار
-۱/۷۲۵	۰/۶۴۰	-۱/۸۹۹	-۰/۳۷۵	۰/۱۹۸	۰/۰۴۷	مقدار آماره
*	*	*	*	*	*	نتیجه آزمون

\* دلیلی برای رد فرض صفر وجود ندارد.

در ادامه به تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته پرداخته می‌شود. به این منظور برای هر دوره زمانی ۳ ماهه، بازده مازاد هر یک از سهم‌های انتخاب شده برای حضور در پرتفوی ردیاب شاخص، نسبت به پرتفوی ردیابی شاخص، با استفاده از مدل خودهمبستگی محاسبه می‌شود. به منظور استفاده از این مدل، ابتدا تست مانایی بر روی داده‌های مورد نظر برای تخمین ضرایب مدل انجام می‌شود. برای این منظور در این پژوهش از آزمون دی‌کی‌فولر افزوده<sup>۱</sup> (تی‌سی، ۲۰۱۰) استفاده شده است که نتیجه آن در سطح اطمینان ۹۹ درصد، عدم وجود ریشه واحد و در نتیجه امکان استفاده از مدل خودهمبستگی بر روی داده‌ها است. با توجه با اینکه به ازای مقادیر مختلف  $\Gamma$  (که در رابطه ۸ مورد بررسی قرار گرفت) اوزان متفاوتی برای پرتفوی شاخصی ارتقایافته محاسبه می‌شود، پرتفوی بهینه با استفاده از شاخص نسبت

اطلاعاتی مورد انتظار بیشینه انتخاب می‌شود. به عبارتی برای هر یک از پرتفویهای محاسبه شده به ازای  $\Gamma$ های مختلف، نسبت اطلاعاتی مورد انتظار (بر اساس داده‌های گذشته) محاسبه شده و پرتفویی که نسبت اطلاعاتی مورد انتظار بیشینه دارد به عنوان پرتفوی شاخصی ارتقایافته بهینه معرفی خواهد شد. پرتفویهای ایجاد شده به صورت زیر نام‌گذاری می‌شوند:

جدول ۷. نام‌گذاری پرتفویهای شاخصی ارتقایافته

ویژگی	نماد پرتفوی
پرتفوی شاخصی ارتقایافته بر اساس پرتفوی شاخصی A	پرتفوی A'
پرتفوی شاخصی ارتقایافته بر اساس پرتفوی شاخصی B	پرتفوی B'
پرتفوی شاخصی ارتقایافته بر اساس پرتفوی شاخصی C	پرتفوی C'
پرتفوی شاخصی ارتقایافته بر اساس پرتفوی شاخصی D	پرتفوی D'
پرتفوی شاخصی ارتقایافته بر اساس پرتفوی شاخصی E	پرتفوی E'
پرتفوی شاخصی ارتقایافته بر اساس پرتفوی شاخصی F	پرتفوی F'


جدول ۸ متوسط بازده هفتگی پرتفویهای شاخصی ارتقایافته با متوسط بازده هفتگی شاخص، مقایسه شده است.

جدول ۸. متوسط بازده هفتگی شاخص و پرتفویهای ارتقایافته

شاخص	پرتفوی A'	پرتفوی B'	پرتفوی C'	پرتفوی D'	پرتفوی E'	پرتفوی F'	
متوسط بازده هفتگی در بهار ۹۴	۰/۵۴٪	۰/۵۴٪	۰/۵۸٪	۰/۲۷٪	۰/۹۱٪	۱/۷۲٪	۰/۰۲٪
متوسط بازده هفتگی تابستان ۹۴	۰/۵۸٪	۰/۵۸٪	۰/۶۵٪	۰/۶۶٪	۰/۸۳٪	-۰/۲۵٪	-۰/۳۳٪
متوسط بازده هفتگی پاییز ۹۴	۰/۱۱٪	-۰/۰۳٪	-۰/۰۸٪	-۰/۱۴٪	۰/۳۳٪	-۰/۵۴٪	-۰/۰۲٪
متوسط بازده هفتگی زمستان ۹۴	۴/۷۱٪	۴/۷۱٪	۴/۳۴٪	۳/۲۰٪	۴/۶۳٪	۲/۶۸٪	۲/۲۷٪
متوسط بازده هفتگی بهار ۹۵	-۰/۸۹٪	-۰/۸۳٪	-۱/۰۸٪	-۰/۸۷٪	-۱/۰۳٪	-۰/۸۶٪	-۱/۱۰٪
متوسط بازده هفتگی تابستان ۹۵	۰/۴۵٪	۰/۲۳٪	۰/۳۰٪	۰/۵۳٪	۰/۸۸٪	۰/۰۲٪	۰/۳۲٪
متوسط بازده هفتگی پاییز ۹۵	۰/۲۶٪	۰/۲۲٪	۰/۱۸٪	۰/۱۰٪	۰/۲۵٪	۰/۱۸٪	۰/۴۴٪
متوسط بازده هفتگی زمستان ۹۵	-۰/۲۲٪	۰/۰۴٪	-۰/۱۳٪	-۰/۰۱٪	-۰/۱۹٪	-۰/۴۸٪	-۰/۲۱٪
متوسط بازده هفتگی بهار ۹۶	۰/۹۸٪	۱/۰۹٪	۰/۴۴٪	۰/۱۴٪	۰/۶۱٪	۱/۰۳٪	۰/۲۷٪
متوسط بازده هفتگی تابستان ۹۶	۱/۶۵٪	۱/۶۶٪	۱/۳۶٪	۰/۸۱٪	۱/۱۲٪	۰/۴۵٪	۰/۸۹٪
متوسط بازده هفتگی پاییز ۹۶	۱/۴۳٪	۱/۴۳٪	۱/۱۲٪	۱/۱۴٪	۱/۱۶٪	۰/۷۶٪	۱/۲۲٪
متوسط بازده هفتگی زمستان ۹۶	۰/۷۱٪	۰/۶۹٪	۰/۵۳٪	۰/۲۶٪	۰/۶۵٪	۰/۵۲٪	۰/۲۹٪
متوسط بازده هفتگی بهار ۹۷	۱/۹۵٪	۲/۲۵٪	۲/۱۳٪	۱/۱۲٪	۲/۰۳٪	۰/۳۶٪	۱/۲۶٪
میانگین	۰/۹۴٪	۰/۹۷٪	۰/۷۹٪	۰/۵۶٪	۰/۹۴٪	۰/۴۳٪	۰/۴۱٪

به منظور سنجش موفقیت پرتفوها در ایجاد بازدهی مثبت نسبت به شاخص آزمون فرضیه مثبت بودن خطای ردیابی (متوسط اختلاف بازده پرتفوها و شاخص) انجام می‌شود. این آزمون به صورت زیر انجام می‌شود:

جدول ۹. آزمون معناداری خطای ردیابی

ناحیه رد شدن فرض صفر	آماره آزمون	آزمون
	$t = \frac{\bar{X}^{TE}}{\left(\frac{SIR}{\sqrt{n}}\right)}$	$\begin{cases} \mu_{TE} \leq 0: \text{فرض صفر} \\ \mu_{TE} > 0: \text{فرض یک} \end{cases}$

آماره فوق برای نسبت بازار پرتفوها محاسبه شده و با ناحیه رد فرض صفر که در سطح اطمینان ۹۹ درصد معادل بازه  $[+2/68, \dots]$  است، مقایسه می‌شود. در صورت رد شدن فرض صفر، مثبت بودن مقدار خطای ردیابی اثبات می‌شود که نشان دهنده ایجاد بازده مازاد نسبت به شاخص توسط پرتفوی است. جدول زیر مقادیر پارامترهای مربوط به آزمون فوق را مورد بررسی قرار می‌دهد:

جدول ۱۰. نتایج آزمون معناداری خطای ردیابی

پرتفوی A'	پرتفوی B'	پرتفوی C'	پرتفوی D'	پرتفوی E'	پرتفوی F'	
۰/۵۲٪	۰/۵۲٪	۰/۵۶٪	۰/۲۶٪	۰/۸۹٪	۰/۷۰٪	خطای ردیابی بهار ۹۴
۰/۹۱٪	۰/۹۰٪	۰/۹۸٪	۰/۹۹٪	۱/۱۵٪	۰/۰۵٪	خطای ردیابی تابستان ۹۴
۰/۱۳٪	-۰/۰۲٪	-۰/۰۶٪	-۰/۱۲٪	۰/۳۵٪	-۰/۲۸٪	خطای ردیابی پاییز ۹۴
۲/۴۵٪	۲/۴۵٪	۲/۰۷٪	۰/۹۳٪	۲/۳۶٪	۰/۳۷٪	خطای ردیابی زمستان ۹۴
۰/۲۱٪	۰/۲۷٪	۰/۰۲٪	۰/۲۳٪	۰/۰۷٪	۰/۳۱٪	خطای ردیابی بهار ۹۵
۰/۱۴٪	-۰/۰۹٪	-۰/۰۲٪	۰/۲۱٪	۰/۵۶٪	-۰/۳۴٪	خطای ردیابی تابستان ۹۵
-۰/۱۸٪	-۰/۲۲٪	-۰/۲۶٪	-۰/۳۴٪	-۰/۱۹٪	-۰/۲۶٪	خطای ردیابی پاییز ۹۵
-۰/۰۶٪	۰/۲۶٪	۰/۰۹٪	۰/۲۱٪	۰/۰۳٪	-۰/۱۹٪	خطای ردیابی زمستان ۹۵
۰/۷۲٪	۰/۸۳٪	۰/۱۷٪	-۰/۱۲٪	۰/۳۴٪	۰/۷۶٪	خطای ردیابی بهار ۹۶
۰/۷۶٪	۰/۷۶٪	۰/۴۷٪	-۰/۰۸٪	۰/۲۳٪	-۰/۴۰٪	خطای ردیابی تابستان ۹۶
۰/۲۱٪	۰/۲۱٪	-۰/۰۹٪	-۰/۰۷٪	-۰/۰۵٪	-۰/۲۵٪	خطای ردیابی پاییز ۹۶
۰/۴۲٪	۰/۴۱٪	۰/۲۴٪	-۰/۰۲٪	۰/۳۷٪	۰/۴۱٪	خطای ردیابی زمستان ۹۶
۰/۶۹٪	۰/۹۸٪	۰/۸۷٪	-۰/۱۴٪	۰/۷۶٪	-۰/۱۳٪	خطای ردیابی بهار ۹۷
۰/۵۳٪	۰/۵۶٪	۰/۳۹٪	۰/۱۵٪	۰/۵۳٪	۰/۰۶٪	متوسط خطای ردیابی
۰/۶۶٪	۰/۶۹٪	۰/۶۳٪	۰/۴۰٪	۰/۶۷٪	۰/۴۰٪	انحراف استاندارد نسبت بازار
۲/۹۱۴	۲/۹۳۸	۲/۲۰۷	۱/۳۳۰	۲/۸۲۸	۰/۵۱۲	مقدار آماره
**	**	*	*	**	*	نتیجه آزمون

\* دلیلی برای رد فرض صفر وجود ندارد.

\*\* فرض صفر رد می‌شود.


با توجه به نتایج آزمون، ۳ پرتفوی A'، B' و E' در ایجاد بازدهی مازاد نسبت به شاخص موفق عمل نموده‌اند. می‌توان موفقیت این سه پرتفوی را با استفاده شاخص نسبت اطلاعاتی (که علاوه بر بازده مازاد نسبت به شاخص، نوسان بازده مازاد را نیز در نظر می‌گیرد)، مورد مقایسه قرار داد. نسبت اطلاعاتی ۳ پرتفوی، به صورت زیر قابل بررسی است.

جدول ۱۱. نسبت اطلاعاتی پرتفوی‌های ارتقایافته معنادار

پرتفوی E'	پرتفوی B'	پرتفوی A'	
۴۲/۹۹٪	۴۶/۳۷٪	۴۶/۲۰٪	نسبت اطلاعاتی بهار ۹۴
۷۱/۳۷٪	۳۹/۴۴٪	۳۹/۴۴٪	نسبت اطلاعاتی تابستان ۹۴
۴۵/۳۷٪	-۰/۹۷٪	۱۳/۹۲٪	نسبت اطلاعاتی پاییز ۹۴
۱۲۰/۹۵٪	۷۰/۳۵٪	۷۰/۳۵٪	نسبت اطلاعاتی زمستان ۹۴
۸/۴۴٪	۲۳/۲۲٪	۲۵/۴۸٪	نسبت اطلاعاتی بهار ۹۵
۲۷/۴۱٪	-۱۰/۰۰٪	۱۳/۷۷٪	نسبت اطلاعاتی تابستان ۹۵
-۳۶/۶۱٪	-۳۰/۹۰٪	-۱۹/۰۴٪	نسبت اطلاعاتی پاییز ۹۵
۳/۹۳٪	۲۹/۸۸٪	-۱/۱۱٪	نسبت اطلاعاتی زمستان ۹۵
۱۴/۰۰٪	۴۲/۱۰٪	۲۸/۱۷٪	نسبت اطلاعاتی بهار ۹۶
۴۲/۰۳٪	۷۰/۶۰٪	۷۰/۴۹٪	نسبت اطلاعاتی تابستان ۹۶
-۲/۸۹٪	۲۰/۳۷٪	۲۰/۵۶٪	نسبت اطلاعاتی پاییز ۹۶
۴۴/۲۴٪	۳۳/۰۱٪	۴۱/۳۵٪	نسبت اطلاعاتی زمستان ۹۶
۸۲/۲۸٪	۸۲/۲۱٪	۵۷/۱۱٪	نسبت اطلاعاتی بهار ۹۷

به‌منظور مقایسه عملکرد ۳ پرتفوی، می‌توان از آزمون مقایسات زوجی استفاده نمود. این آزمون نسبت اطلاعاتی ۳ پرتفوی فوق را به صورت دو به دو مورد مقایسه قرار می‌دهد. و به صورت زیر انجام می‌شود:

جدول ۱۲. آزمون مقایسه نسبت اطلاعاتی

آزمون	آماره آزمون	ناحیه رد شدن فرض صفر
$\begin{cases} \text{فرض صفر} : IR_A \leq IR_B \\ \text{فرض یک} : IR_A > IR_B \end{cases}$	$D_i^{A,B} = TE_i^A - TE_i^B$ $t = \frac{\bar{D}^{A,B}}{\left(\frac{S^{A,B}}{\sqrt{n}}\right)}$	

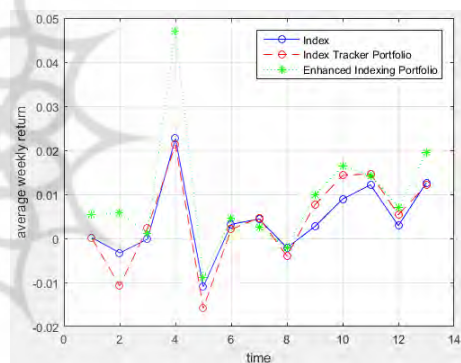
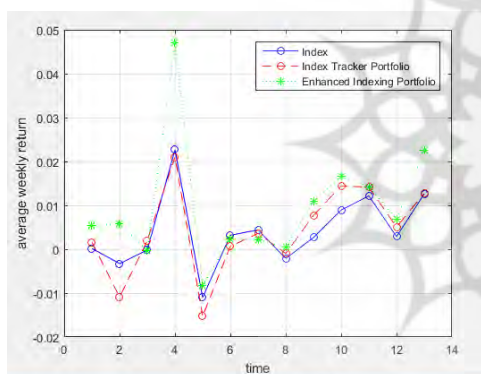
رد شدن فرض صفر در این آزمون نشان‌دهنده این موضوع است که مقدار نسبت اطلاعاتی پرتفوی A به طور معناداری از پرتفوی B بزرگتر است. نتیجه این آزمون به صرح زیر قابل ارائه است:



جدول ۱۳. نتایج آزمون مقایسات زوجی پرتفویهای شاخصی ارتقایافته

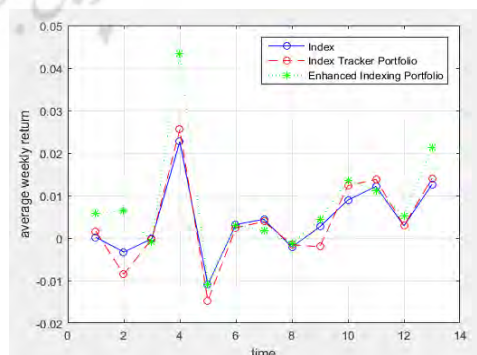
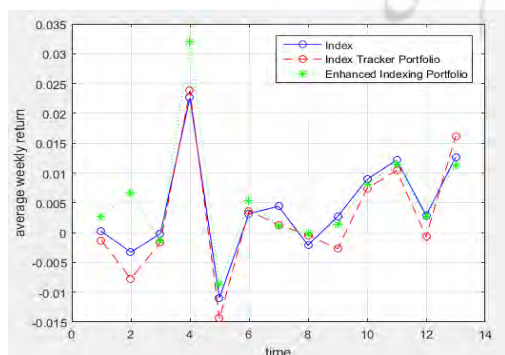
پرتفوی A'		پرتفوی B'		پرتفوی E'	
آماره	۰/۱۷۳	آماره	۰/۱۲۳		پرتفوی E'
دلیلی بر برتری پرتفوی E' بر A' وجود ندارد		دلیلی بر برتری پرتفوی E' بر B' وجود ندارد			
آماره	۰/۰۴۶				پرتفوی B'
دلیلی بر برتری پرتفوی B' بر A' وجود ندارد					

در جدول فوق، واضح است که برتری معنادار پرتفوی‌ها شاخصی ارتقایافته نسبت به یکدیگر وجود ندارد. نمودارهای زیر، بازده متوسط هفتگی شاخص (با رنگ آبی)، بازده متوسط هفتگی پرتفوی شاخصی (با رنگ قرمز) و بازده متوسط هفتگی پرتفوی شاخصی ارتقایافته (با رنگ سبز) را برای هر یک از فصول بهار ۹۴ تا بهار ۹۷ نشان می‌دهد.



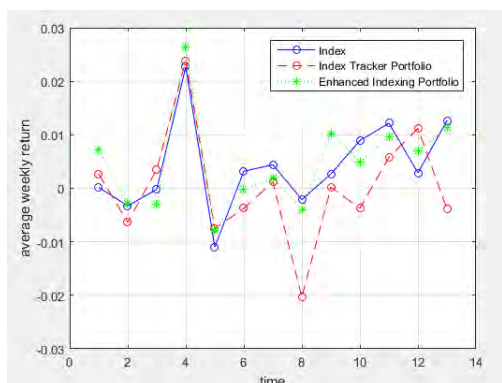
شکل ۲. بازده شاخص، پرتفوی شاخصی، و پرتفوی شاخصی ارتقایافته مبتنی بر کاپولای تی استودنت

شکل ۱. بازده شاخص، پرتفوی شاخصی، و پرتفوی شاخصی ارتقایافته مبتنی بر کاپولای گوسی

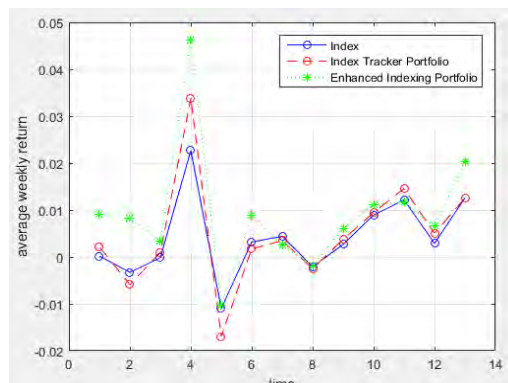


شکل ۴. بازده شاخص، پرتفوی شاخصی، و پرتفوی شاخصی ارتقایافته مبتنی بر کاپولای فرانک

شکل ۳. بازده شاخص، پرتفوی شاخصی، و پرتفوی شاخصی ارتقایافته مبتنی بر کاپولای گامبل



شکل ۶. بازده شاخص، پرتفوی شاخصی، و پرتفوی شاخصی ارتقایافته مبتنی بر اطلاعات متقابل



شکل ۵. بازده شاخص، پرتفوی شاخصی، و پرتفوی شاخصی ارتقایافته مبتنی بر کاپولای کلایتون

### بحث، نتیجه‌گیری و پیشنهادها

این پژوهش در دو مرحله به تشکیل پرتفوی شاخصی ارتقایافته پرداخته است. پرتفوی شاخصی ارتقایافته، پرتفویی است که ضمن ایجاد بازدهی مازاد مثبت نسبت به شاخص، این مقدار بازدهی مثبت را در طول زمان حفظ نماید. این پژوهش در مرحله نخست، به ایجاد یک پرتفوی ردیاب شاخص، با استفاده از تکنیک خوشه‌بندی سری‌های زمانی بر اساس شباهت می‌پردازد. ضرایب همبستگی مبتنی بر کاپولا و شاخص اطلاعات متقابل به عنوان معیارهای شباهت سری‌های زمانی در این مرحله مورد استفاده قرار گرفته‌اند. خروجی این مرحله یک پرتفوی ردیاب شاخص، که با تعداد کمتری از سهم‌های تشکیل دهنده شاخص عملکرد آن را بازسازی می‌کند. در مرحله دوم، اوزان سرمایه‌گذاری در سهم‌های تشکیل دهنده پرتفوی ردیاب به گونه‌ای محاسبه می‌شوند که، که بازده مازاد پرتفوی حاصل شده، بیشینه شود. به منظور پیش‌بینی بازده مازاد سهم‌های تشکیل دهنده پرتفوی ردیاب شاخص از مدل‌های خودهمبستگی استفاده شده است. همچنین با توجه به اینکه بازده‌های مازاد محاسبه شده از مدل خودهمبستگی دارای عدم قطعیت هستند، به منظور در نظر گرفتن این عدم قطعیت، از رویکرد بهینه‌سازی استوار استفاده گردید. نتایج این پژوهش، به شرح زیر قابل بررسی است.

پرتفوی‌های ایجاد شده با استفاده از روش خوشه‌بندی بر اساس معیارهای شباهت (شامل ضرایب همبستگی مبتنی بر کاپولای نرمال، تی، گامبل، فرانک و کلایتون و همچنین معیار اطلاعات متقابل) بر اساس شاخص‌های ارزیابی عملکرد نسبت بازار و خطای ردیابی، موفق به بازسازی عملکرد شاخص شده‌اند. به گونه‌ای که در سطح اطمینان ۹۹ درصد، دلیلی برای رد کردن این فرضیه که نسبت بازار پرتفوها معادل ۱ و خطای ردیابی پرتفوها معادل صفر است، وجود ندارد. به این دلیل می‌توان از این پرتفوها در ایجاد پرتفوی شاخصی ارتقایافته استفاده نمود. در خصوص معیار اطلاعات متقابل توجه به نکاتی چند، مطلوب به نظر می‌رسد. مقدار خطای ردیابی پرتفوی مبتنی بر معیار اطلاعات متقابل، نسبت به دیگر پرتوها، بالاتر است. با توجه به اینکه، معیار اطلاعات متقابل، روابط غیرخطی میان دو سری زمانی را نیز در تحلیل شباهت دخیل می‌کند، اما خطای ردیابی بیشتری را ایجاد نموده است. علت اصلی این موضوع در این نکته نهفته است که، در

خوشه‌بندی بر اساس شباهت به‌منظور تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص، تنها رابطه خطی متغیرهای اهمیت دارد. به‌عبارتی، سهم‌هایی که ارتباط خطی هم‌جهت دارند، برای تشکیل خوشه‌ها مناسب هستند. از این رو، در نظر گرفتن ارتباط غیرخطی میان متغیرها، بالینکه، ممکن است جذابیت‌های تئوریک مدل را افزایش دهد، لیکن الزاما به ایجاد پرتفوی ردیاب شاخص موفق‌تر منتج نخواهد شد. چیزی که در این پژوهش نیز حاصل شده است.

چن و روی (۲۰۱۲) و همچنین فلاح‌پور و تندنویس (۱۳۹۴) در اجرای مدل مذکور، به‌منظور تشکیل پرتفوی مبتنی بر شاخص، از شاخص ضریب هم‌بستگی خطی استفاده نمودند که در سطح اطمینان ۹۷/۵ درصد موفق به تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص شده‌است. استفاده از رویکردهای ارائه شده در این پژوهش سطح اطمینان تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص را تا ۹۹ درصد افزایش داده‌است.

پرتفوی‌های شاخصی ارتقایافته که بر اساس پرتفوی‌های شاخصی مبتنی بر کاپولای نرمال، تی و کلایتون ایجاد شده‌اند، توانستند در سطح اطمینان ۹۹ درصد، اختلاف بازدهی معنادار مثبتی با شاخص ایجاد کنند. این موضوع نشان از توانایی دقیق‌تر این رویکردها در تشخیص شباهت میان سری‌های زمانی و مدل‌سازی وابستگی دنباله‌ای در بازه زمانی پژوهش دارند. لیکن آزمون مقایسات زوجی بین نسبت اطلاعاتی این پرتفوها برتری هیچ یک از پرتفوی‌های شاخصی ارتقایافته نسبت به دیگری را نشان نمی‌دهد. به‌عبارتی استفاده از این رویکردها در سنجش شباهت سری‌های زمانی تفاوت معناداری در معیارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی شاخصی ارتقایافته ایجاد نمی‌کند.

بررسی عدم‌قطعیت شاخص‌های سنجش شباهت در مدل مرحله اول (خوشه‌بندی و تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص) و همچنین استفاده از مدل‌های پیش‌بینی واریانس در مدل مرحله دوم، به‌منظور محاسبه مقدار مجاز نوسان بازده مازاد سهم‌ها به عنوان پیشنهادی برای پژوهش‌های آتی معرفی می‌شود.

## منابع

- امیری، مقصود؛ کرمی، شایان؛ ناصرپور، علیرضا (۱۳۹۵). ردیابی شاخص بورس اوراق بهادار با در نظر گرفتن محدودیت زیان‌گریزی با استفاده از رویکرد جدید بیگ بنگ کرانچ. *دانش سرمایه‌گذاری*، ۱۹(۵)، ۸۳-۱۰۵.
- راعی، رضا؛ پویان‌فر، احمدرضا (۱۳۸۴). *مدیریت سرمایه‌گذاری پیشرفته*، انتشارات سمت، تهران.
- سجادی، سیدجعفر؛ سجادی، سیدمجتبی؛ سبزواری، ملیحه (۱۳۹۴). حل مسئله ردیابی شاخص با استفاده از الگوریتم فراابتکاری ترکیبی کرم شب تاب. *مدیریت مهندسی و رایانش نرم*، ۱(۱)، ۱۲۵-۱۴۳.
- عیوضلو، رضا؛ شفیع‌زاده، مجتبی؛ قهرمانی، علی (۱۳۹۶). ردیابی شاخص و شاخص بهبودیافته با استفاده از رویکردهای هم‌انباشتگی و هم‌بستگی. *تحقیقات مالی*، ۱۹(۳)، ۴۵۷-۴۷۴.
- فلاح‌پور، سعید؛ تندنویس، فرید؛ هاشمی، سید محمد امیر (۱۳۹۴). بهینه‌سازی پرتفوی ردیاب شاخص با استفاده از مدل تک شاخصی پایدار بر مبنای شاخص ۵۰ شرکت فعال تر بورس اوراق بهادار تهران. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۲۴(۶)، ۱۱۵-۱۳۴.

- فلاح‌پور، سعید؛ تندنویس، فردیس (۱۳۹۴). کاربرد رویکرد بهینه‌سازی استوار در تشکیل پرتفوی سهام مبتنی بر شاخص با در نظر گرفتن ردیاب پارامترها. *تحقیقات مالی*، ۱۷(۲)، ۳۲۵-۳۴۰.
- کشاوری حداد، غلامرضا؛ حیرانی، مهرداد (۱۳۹۳). برآورد ارزش در معرض ریسک با وجود ساختار وابستگی بین بازدهی‌های مالی: رهیافت مبتنی بر توابع کاپولا. *تحقیقات اقتصادی*، ۴۹(۴)، ۸۶۹-۹۰۲.

## References

- Alexander, G., Baptista, A. (2010). Active portfolio management with benchmarking: a frontier based on alpha. *Journal of Banking & Finance*, 34(9), 2185-2197.
- Amiri, M., Karami, Sh., Naserpour, A. (2107). Tracking Stock Exchange Index with considering the limitation of loss aversion with using the new approach of Big Bang – Big Crunch. *Investment Knowledg*, 5(19), 83-105. (in Persian)
- Beasley, J., Meade, N. and Chang, T. (2003). An evolutionary heuristic for the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, 148(3), 621-643.
- BenTal, A., ElGhaoui, L. and Nemirovski, A. (2004). *Robust optimization*. Princeton University Press.
- Berndt, D. and Clifford, J. (1994). Using dynamic time warping to find patterns in time series. *Proceedings of the 3rd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, July 1994.
- Bertsimas, D. and Sim, M. (2004) The price of robustness. *Operations Research*, 52(1), 35- 53.
- Bertsimas, D., Thiele, A. (2006). Robust and data-driven optimization: modern decision-making under uncertainty. *Tutorials in Operations Research*, 4, 95-122.
- Chen, C. and Roy, H. (2012). Robust portfolio selection for index tracking. *Computers & Operations Research*, 39(4), 829-837.
- Clarke, R., Krase, C. and Statman, M. (1994). Tracking error, regret and tactical asset allocation. *The Journal of Portfolio Management*, 20, 16-24.
- Corielli, F. and Marcellino, M. (2006). Factor based index tracking. *Journal of Banking & Finance*, 30(8), 2215-2233.
- Cornuejols, G. and Tutuncu, R. (2005). *Optimization Methods in Finance*. Carnegie Mellon University.
- Dose, C. and Cincotti, S. (2005). Clustering of Financial time series with application to index and enhanced-index tracking portfolio. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 355(1), 145-151.
- Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge.
- Erdogan, E., Goldfarb, D. and Iyengar, G. (2004). *Robust portfolio management*. CORC Technical Report TR,” Columbia University.

- Eyvazloo, R., Shafizade, M. & Ghahremani, A. (2017). Index Tracking and Enhanced Indexing Using Co-integration and Correlation Approaches. *Financial Researches*, 19(3), 457-474. (in Persian)
- Fallahpor, S., Tondnevis, F., Hashemi, M.A. (2016). Index tracking portfolio optimization by robust sigle factor model based on 50 more active company index of TSE. *Financial Engineering and security Management*, 6(24), 115-134. (in Persian)
- Fallahpor, S. and Tondnevis, F. (2015). Application of an optimization model for constructing an index tracker portfolio and considering the uncertainty of model parameters by using of robust optimization approach. *Financial Researches*, 17(2), 325-340. (in Persian)
- Focardi, S. and Fabozzi, F. (2004). A methodology for index tracking based on timeseries clustering. *Quantitative Finance*, 4(4), 417-425.
- García, F., Guijarro, F. and Oliver, J. (2017). Index tracking optimization with cardinality constraint: a performance comparison of genetic algorithms and tabu search heuristics. *Neural Computing and Applications*, 30, 2625-2641.
- Gilli, M. and Kellezi, E. (2002). The threshold accepting heuristic for index tracking. In *Financial engineering, e-commerce, and supply chain*. Kluwer In: Pardalos P, Tsitsiringos VK, editors.
- Jeng, Y., Lee, C.J., and Tzang, S.W. (2013). Application of a multifactor model in enhanced index fund: Performance analysis in China. *Emerging Markets Finance and Trade*, 49(4), 163-183.
- Keshavarz Haddad, Gh., Heyrani, M. (2015). Estimation of Value at Risk in the Presence of Dependence Structure in Financial Returns: A Copula Based Approach. *Economic Researches*, 49(4), 869-902. (in Persian)
- Kharoubi, C. and Maurer, F. (2013). Copulas In Finance Ten Years Later. *Journal of Applied Business Research*, 29(5), 1555-1566.
- Konno, H. and Wijayanayake, A. (2001). Minimal cost index tracking under nonlinear transaction costs and minimal transaction unit constraints. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4(6), 939-958.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Yale university press.
- Meade, N. and Salkin, G. (1989). Index funds-construction and performance measurement. *J. Opl Res. Soc.*, 40, 871-879.
- Meade, N. and Salkin, G. (1990). Developing and maintaining an equity index fund. *Journal of the Operational Research Society*, 41(7), 599-607.
- Meihua, W., Chengxian, X., Fengmin, X. and Hong, X. (2011). A mixed 0-1 LP for index tracking problem with CvaR risk constraints. *Annals of Operations Research*, 196(1). DOI:10.1007/s10479-011-1042-9
- Mrkowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.

- Patton, A. (2007). Copula-Based Models for Financial Time Series. *Handbook of Financial Time Series*, University of Oxford.
- Raei, R., Pouyanfar, A. (2006). *Advanced Investment*. Samt publication. (in Persian)
- Rohweder, H. (1998). Implementing stock selection ideas: does tracking error optimization do any good? *Journal of Portfolio Management*, 24(3), 49–59.
- Roll, J. and Ronald, D. (2002). Optimal benchmark tracking with small portfolios. *Journal of Portfolio Management*, 28(2), 9-33.
- Roll, R. (1992). A mean/variance analysis of tracking error. *Journal of Portfolio Management*, 18, 13–22.
- Roy, K., Dexiang, W. (2016). Factor-based robust index tracking. *Optimization and Engineering*, 443-466.
- Rudd, A. (1980). Optimal selection of passive portfolios. *Financial Management*, 9(1), 57–66.
- Rudolf, M., Wolter, H.J and Zimmermann, H. (1999). A linear model for tracking error minimization. *Journal of Banking & Finance*, 23(1), 85–103.
- Saant'Anna, L. R., Filomena, T.P. and Caldeira, J.F. (2017). Index tracking and enhanced indexing using cointegration and correlation with endogenous portfolio selection. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 65, 146-157.
- Saant'Anna, L.R., Filomena, T.P., Guedes, P.C. and Borenstein, D. (2017). Index tracking with controlled number of assets using a hybrid heuristic combining genetic algorithm and non-linear programming. *Annals of Operations Research* 258, 849-867.
- Sajjadi, S., Sajjadi, S. and Sabzevari, M. (2016). Index tracking problem solving using metaheuristic firefly algorithm". *Engineering management and soft computing*, 1(1), 125-143. (in Persian)
- Sharpe, W. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management science*, 9, 277-293.
- Sklar, A. (1959). *Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges*. Publication de Institut de Statistique de Universite de , Paris.
- Song, P.X. (2000). Multivariate dispersion models generated from gaussian copula. *Scandinavian Journal of Statistics*, 27(2), 305–320.
- Štulajter, F. (2008). *Introduction to copula functions and their application in portfolio and risk management*. VŠB-TU Ostrava, Ekonomická fakulta, katedra Financí.
- Wanderlei, L., Estela, M., Oswaldo, L. (2016). Enhanced index tracking optimal portfolio selection. *Finance Research Letters*, 16, 93–102.
- Wang, X., Mueen, A., Ding, H., Trajcevski, G., Scheuermann, P. and Keogh, E. J. (2013). Experimental comparison of representation methods and distance measures for time series data. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 26, 275–309.
- Yao, D.D., Zhang, S., Zhou, X.Y. (2006). Tracking a financial benchmark using a few assets. *Operations Research*, 54(2), 232-246.