

Logic, measures and unbounded integration logic

Alireza Mofidi*

Abstract

Interactions between logic, measure and probability theories have always possessed significant importance in logic and model-theory. In this regard, numerous logical frameworks were introduced to connect these subjects. Integration-logic is amongst important ones of them that was first introduced by Keisler and Hoover and then developed in various works such as Bagheri-Pourmahdian paper and turned into a suitable logical framework for working with structures equipped with measures and integration operator. Also in a paper by Mofidi-Bagheri, a more abstract framework for working with operators more general than integration was introduced. Moreover, in a more recent work on connections of logic and measures, different aspects of dynamical-systems and measures in model-theory was published by Mofidi in 2018. One of the characteristics of Bagher-Pourmahdian framework is its boundedness, i.e. it is assumed that interpretation of every relation is a bounded function. Despite some advantages of this assumption (such as simplifying working with relations and proving ultraproduct and compactness theorems), it causes substantial limitations in the expressive-power of logic and its ability to interact with various mathematical structures. In this paper, we aim to resolve this limitations by strengthening and generalizing the framework of integration-logic in a way that relations be interpreted with (not-necessarily bounded) functions in L^p -spaces and furthermore, showing that fundamental results of ultraproduct and compactness theorems still hold (of course with new proofs and more subtle techniques). This generalization can provide more

* Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), mofidi@aut.ac.ir

Date received: 20/07/2021, Date of acceptance: 14/10/2021



Copyright © 2018, This is an Open Access article. This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

interactions with structures such as L^p -spaces and (not-necessarily-bounded) random-variables which are central notions in analysis and statistics.

Keywords: Unbounded integration logic; ultraproduct theorem; compactness theorem; L^p -spaces.



منطق، اندازه و رویکردی غیرکراندار به منطق انتگرال

علیرضا مفیدی*

چکیده

تعامل منطق با نظریه‌های اندازه و احتمال همواره از رویکردهای مهم مطالعات در علم منطق و نظریه مدلها بوده است. در این راستا بسترهای منطقی متعددی برای تلفیق این شاخه‌ها بوجود آمده‌اند. منطق انتگرال نمونه‌ای مهم از آنهاست که در ابتدا توسط کیسلر و هوور معرفی و بررسی گردید و سپس در مقالات مختلف از جمله مقاله باقری-پورمهدیان مطالعه‌اش تکمیلتر و تبدیل به بستری منطقی مناسب کار با ساختارهایی که انتگرال‌گیری روی اندازه‌ها در آنها حائز اهمیت‌اند شد. همچنین توسط مفیدی-باقری بستری کلی‌تر برای کار با اپراتورهای گسترده‌تر از صرفاً انتگرال به عنوان سور فراهم گردید. ضمناً در کاری موخرتر در ارتباط اندازه و منطق، در سال ۲۰۱۸ جنبه‌های مختلفی از رویکردهای سیستم‌های دینامیکی به اندازه‌ها در نظریه مدل توسط مفیدی به چاپ رسید. یکی از ویژگی‌های بستر منطقی باقری-پورمهدیان کراندار آن است بدین معنا که همواره فرض می‌شود تعبیر روابط منطقی همگی توابعی کرانداراند. این ویژگی در کنار مزایایی از قبیل راحت‌شدن کار با روابط و اثبات قضایای فراضرب و فشردگی، محدودیتهای مهمی را در قدرت بیان، اصل‌بندی ساختارها و تعامل با ساختارهای متنوع ریاضیاتی ایجاد می‌کند. در این مقاله قصد داریم این محدودیت را رفع کرده، ورژنی تعمیم‌یافته و تقویت‌شده از قالب منطق انتگرال معرفی کنیم که تعبیر روابط بتوانند توابعی (نه-لزوما-کراندار) در فضاهای LP

* عضو هیئت علمی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)،

mofidi@aut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۲۹، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۲۲



Copyright © 2018, This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International, which permits others to download this work, share it with others and Adapt the material for any purpose.

باشند و نیز قضایای بنیادی فراضرب و فشردگی نیز با فرمی قویتر (و البته اثبات‌هایی با تکنیک‌های جدید) برقرار باشند. با این تعمیم امکان تعامل بیشتر با فضاها L^p و نیز متغیرهای تصادفی نه-لزوما-کراندار (در احتمال) که بخش‌های مهمی از آنالیز و احتمالات هستند فراهم می‌گردد.

کلیدواژه‌ها: منطق انتگرال بیکران، قضیه فراضرب، قضیه فشردگی، فضاها L^p .

۱. مقدمه

ارتباط و تعامل منطق با نظریه‌های اندازه و احتمال همواره از رویکردهای مهم مطالعاتی در علم منطق بوده است. بخصوص در نظریه مدل‌ها از گذشته تاکنون به این موضوع بسیار پرداخته شده است و قالب‌ها و بسترهای منطقی مهمی برای تلفیق منطق، نظریه اندازه‌ها و احتمال بوجود آمده‌اند. منطق انتگرال یکی از این بسترهای مهم می‌باشد. این منطق در ابتدا توسط کیسلر و هوور در مقالات (Keisler, 1985) و (Hoover, 1978) معرفی و مطالعه شد و سپس توسط کیسلر و فاخاردو در (Fajardo, Keisler, 2002) برای مطالعه فرآیندهای تصادفی مورد استفاده قرار گرفت. سپس توسط باقری-پورمه‌دیان در مقاله (Bagheri-Pourmahdian, 2009) مطالعه آن تکمیلتر شد و تبدیل به بستری منطقی مناسبی برای کار با ساختارهای ریاضی که مجهز به اندازه بودند و انتگرال‌گیری روی آنها دارای اهمیت بود گردید. هم‌چنین نویسنده این مقاله و باقری در مقاله (Mofidi-Bagheri, 2011) قالب منطقی مجردتری برای کار با اپراتورهای کلی‌تر از انتگرال به عنوان سور معرفی نمودند. ضمناً نویسنده این مقاله در دو مقاله قبلی خود [Mofidi-2018] و [Mofidi-2020] جنبه‌های اندازه‌ای-دینامیکی و ترکیب‌اتی برخی ساختارهای مرتبط با نظریه مدل را مورد مطالعه قرار داده است. به‌خصوص در مقاله [Mofidi-2018] جنبه‌های مختلفی از رویکردهای دینامیکی به اندازه‌ها در نظریه مدل بررسی و به چاپ رسیده بود. خالی از لطف نیست که اشاره شود لیست افرادی که در حیطه‌های مرتبط با منطق انتگرال و کاربردهایش کار کرده‌اند علاوه بر کیسلر و هوور که مبدعان آن بودند شامل افراد متعددی از قبیل راسکوویچ، دوردویچ، فاخاردو، مارکوویچ، ایکودینویچ، باقری، پورمه‌دیان، مفیدی، خانکی، صفری و ... می‌باشد.

یکی از ویژگیهای قالب منطق انتگرال در مقالات قبل مثلا در مقاله باقری-پورمهدیان کراندار بودن آن است به این معنا که از ابتدا در تعریف ساختارها فرض می‌گردد که تعبیر روابط منطقی همگی باید توابعی کراندار باشند. این ویژگی مزایایی از قبیل راحت شدن کار با روابط و راحت شدن اثبات قضایای فراضرب و فشردگی داشته است. از سویی دیگر این فرض کراندار بودن محدودیتهای مهمی را در این منطق چه از نظر قدرت بیان و اصل‌بندی کردن ساختارها و تئوری‌ها و چه تعامل با ساختارهای متنوع ریاضیاتی مجهز به توابع بیکران ایجاد می‌کند. در واقع در ریاضیات بخصوص نظریه اندازه و احتمال، در بسیاری از مواقع با توابعی غیر کراندار مواجه هستیم که بطور طبیعی ظاهر می‌شوند (مثلا در فضاهای L^p و یا متغیرهای تصادفی غیر کراندار). در این مقاله قصد داریم این محدودیت را تا حد زیادی رفع کنیم و قالب منطق انتگرال را تعمیم داده و تقویت نماییم و ورژنی گسترش یافته از آن معرفی کنیم به گونه ای که بتواند روابط بیکران را نیز دربر گرفته و با آنها کار کند و مشخصا تعبیر روابط بتوانند توابعی نه لزوما کراندار در فضاهای L^p باشند. بطور دقیقتر این قالب را به گونه ای تقویت می‌کنیم بطوریکه بتواند توابعی که در فضاهای L^p ($p > 1$) هستند را نیز به عنوان روابط در بر بگیرد. این قالب منطقی گسترش یافته را منطق انتگرال بیکران می‌نامیم. بنابراین با این گسترش قالب منطق انتگرال، بسیاری از بخشهای ریاضی امکان ورود و تعامل با این منطق را می‌یابند. در واقع با این تعمیم امکان تعامل بیشتر و کار کردن با فضاهای L^p و نیز متبرهای تصادفی (نه لزوما کراندار) در احتمال که از نظر ریاضیات بسیار مهم هستند و بخشهای مهمی از آنالیز و احتمال و ریاضیات پیوسته را شامل می‌شوند بالا می‌رود. مثلا بطور مشخص فضاهای احتمال با متغیرهای تصادفی نه لزوما کراندار بطور کامل به عنوان مثالهایی از مفهوم ساختار در این قالب منطقی جدید قرار می‌گیرند.

از سوی دیگر پس از این تعمیم، نشان دادن اینکه خواص اصلی منطق هم‌چنان برقرار می‌ماند نیازمند تلاشی مضاعف می‌باشد چرا که وجود توابع بیکران در ساختارها به راحتی می‌تواند اثبات فرمهای کلاسیک قضیه فراضرب و فشردگی را به هم بزند. بنابراین نیاز است که با تحلیلی عمیقتر نشان دهیم که چگونه می‌توان همزمان

با اضافه کردن امکان کار با توابع بیکران همچنان این قضایا را اثبات نمود. از این رو در این مقاله اثبات‌های جدیدتری برای این قضایا ارائه می‌کنیم که نسبت به اثبات‌های کلاسیک مفصلتر هستند. در واقع اثبات‌های ما نیاز به تکنیک‌های جدیدی دارد که در اثبات‌های گذشته که فقط با توابع کراندار کار می‌کردند وجود نداشت. این تکنیک‌ها را در فصل‌های پیش رو (فصل‌های ۳ و ۴) بیان خواهیم نمود و سپس قضیه بنیادی فراضرب را ثابت خواهیم کرد که پس از آن قضیه فشردگی بصورت روتین از آن نتیجه خواهد شد.

۲. تعاریف و پیش‌نیازها

در ذیل به بیان برخی مقدمات و تعاریف مورد نیاز در مقاله می‌پردازیم.

تعریف ۱: در یک فضای اندازه (X, \mathcal{B}, μ) و تابع اندازه پذیر $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ و عدد حقیقی $0 < p < \infty$ ، منظور از p -نرم f مقدار زیر است:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

همچنین اگر $p = \infty$ ، آنگاه p -نرم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_\infty = \inf \{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

فضای همه توابع اندازه پذیر روی X با p -نرم $(\infty$ -نرم) متناهی با $(L^\infty(X))$ نشان داده می‌شود.

لم زیر در اثبات گزاره‌های مقاله مورد نیاز خواهد بود:

لم ۲ (از کتاب (Folland, 1999): اگر $\mu(X) < \infty$ و $0 < r < s \leq \infty$ ، آنگاه $L^s(\mu) \subseteq L^r(\mu)$ و نیز

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \cdot \mu(X)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}.$$

توجه: در این مقاله هرگاه از کلمه بیکران برای یک تابع استفاده می‌گردد منظور "نه لزوماً کراندار" می‌باشد. تابعی حقیقی-مقدار مثل $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ را کراندار گوئیم

هرگاه عدد حقیقی ای مانند $c \in \mathbb{R}$ به گونه ای موجود باشد که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $|f(x)| \leq c$.

توجه: وقتی در کار با یک فضای اندازه از عبارت "تقریباً برای هر نقطه" در مورد آن فضا استفاده می شود منظور این است که "برای هر نقطه به جز نقاط زیر مجموعه ای از اندازه صفر".

۳. معرفی منطق انتگرال بیکران (زبان، فرمولها و ساختارها)

در این فصل به عنوان یکی اهداف اصلی مقاله، به معرفی "منطق انتگرال بیکران" که گسترش و تقویت ای از منطق انتگرال کلاسیک خواهد بود می پردازیم و با این کار زمینه ای را برای تعامل روابط نه لزوماً کراندار ساختارهای ریاضیاتی با منطق از طریق منطق انتگرال فراهم می آوریم. در ذیل شروع به معرفی ساختار نحوی (زبان و فرمولها) و معنایی (ساختارها) این منطق گسترش یافته می نماییم.

فرض کنید L زبانی مرتبه اول شامل نمادهای ثابت و رابطه ای و تابعی با تعداد مواضع دلخواه باشد. همواره فرض می کنیم که L دارای یک نماد رابطه ای متمایز برای تساوی مثل e برمی باشد. همچنین به هر نماد رابطه ای R یک سه تایی (p_R, b_R, c_R) از اعداد حقیقی نامنفی نظیر می شود که به p_R سطح، به b_R کران، و به c_R سوپریمم نرم R گوئیم در حالی که $p_R > 1$ و نیز b_R و c_R نامنفی هستند و همچنین p_R و c_R می توانند ∞ هم باشند. این پارامترها که جدید بوده و متناظری در منطق انتگرال کلاسیک ندارند عناصر فنی مهمی هستند که در اثباتهای قضایا کمک کننده خواهند بود.

در این منطق مجموعه اعداد حقیقی فضای ارزش است. عطف ها مشابه منطق انتگرال کلاسیک شامل $+$ ، \wedge و \vee (یعنی ماکزیمم و مینیمم) و نیز قدر مطلق $| \cdot |$ و نیز r

برای هر عدد حقیقی می‌باشند. همچنین عمل ضرب بین هر دو فرمول که حداقل یکیشان دارای سوپریمم-نرم متناهی باشد به عنوان عطف تعریف می‌شود. نماد \wedge نیز همانند گذشته به عنوان سور استفاده می‌گردد. همچنین لیست نامتناهی x, y, z, \dots از متغیرها داریم. تعبیر هر نماد رابطه‌ای روی ساختار M تابعی مثل $\xi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد. تعریف ۳: مجموعه فرمولها در یک زبان مثل \mathcal{L} بصورت استقرایی بصورت زیر تعریف می‌شود (ترم‌های زبان مثل حالت معمول تعریف می‌شوند):

۱. اگر R یک نماد رابطه‌ای n -موضعی باشد و x_1, \dots, x_n نمادهای متغیری باشند در این صورت $R(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول اتمی با سطح p_R کران b_R و سوپریمم-نرم c_R است. همچنین اگر $c_R < \infty$ و نیز t_1, \dots, t_n ترم باشند، در اینصورت $R(t_1, \dots, t_n)$ یک فرمول اتمی با سطح p_R و کران و سوپریمم-نرم c_R می‌باشد. بطور خاص رابطه تساوی $e(x, y)$ یک فرمول اتمی است.

۲. هر عدد حقیقی r یک فرمول با $c_r = |r|$ و $b_r = |r|$ و $p_r = \infty$ می‌باشد.

۳. فرض کنید ϕ و ψ فرمولهایی باشند و r عددی حقیقی. در آنصورت $\xi = \phi + \psi$ نیز فرمولی با سطح تعریف شده با $p_\xi = \min\{p_\phi, p_\psi\}$ و کران $b_\xi = b_\phi + b_\psi$ و نیز سوپریمم-نرم $c_\xi = c_\phi + c_\psi$ می‌باشد. همچنین $r\phi$ نیز فرمولی با سطح p_ϕ و کران $|r|b_\phi$ و سوپریمم-نرم rc_ϕ می‌باشد.

۴. اگر ϕ و ψ فرمولهایی باشند، آنگاه $\phi \wedge \psi$ و $\phi \vee \psi$ نیز فرمولهایی با سطح $\min\{p_\phi, p_\psi\}$ کران $b_\phi + b_\psi$ و سوپریمم-نرم $\max\{c_\phi, c_\psi\}$ هستند.

۵. اگر ϕ و ψ فرمولهایی باشند بطوریکه $c_\phi, c_\psi < \infty$ آنگاه $\phi \cdot \psi$ فرمولی با سطح $\min\{p_\phi, p_\psi\}$ و کران $b_\phi \cdot b_\psi$ و سوپریمم-نرم $c_\phi \cdot c_\psi$ است.

۶. اگر ϕ فرمول باشند آنگاه $\int \phi(x, y) dy$ نیز یک فرمول با سطح p_ϕ کران b_ϕ و سوپریمم-نرم c_ϕ است.

در زیر تعریف ساختارها در قالب منطقی‌مان را ارائه می‌دهیم که تفاوتش با تعریف کلاسیک مقاله (Bagheri-Pourmahdian, 2009) در آیتمهای ۱ و ۴ است که اجازه می‌دهد تعبیر روابط بیکران نیز باشند و پارامترهای جدید p_R, b_R و c_R را وارد می‌کند.

تعریف ۴: در یک زبان \mathcal{L} ، منظور از یک \mathcal{L} -ساختار بیکران ساختاری بصورت $(M, B^n, \mu_n)_{n \in \omega}$ است که عبارات زیر برقرار باشند (لازم به ذکر است که در نمادگذاری بالا منظور از B^n و μ_n ها سیگما جبرها و اندازه‌هایی روی توانهای M^n می باشد):

۱. M یک ساختار مرتبه اول است با این نکته که تعبیر هر نماد رابطه ای n -موضعی مثل R تابعی به صورت $R^M: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ است که $\sup |R^M| \leq c_R$ (ضمناً یادآوری می کنیم که c_R می تواند ∞ هم باشد).

۲. برای هر n طبیعی، (M^n, B^n, μ_n) یک فضای اندازه است و $\mu_1(M) \leq 1$.

۳. تعبیر هر ترم $t(\bar{x})$ ای یک تابع اندازه پذیر $t^M: M^n \rightarrow M$ است.

۴. برای هر مجموعه ترم $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$ ، تابع $\bar{x} \mapsto (t_1^M(\bar{x}), \dots, t_k^M(\bar{x}))$ اندازه پذیر است. همچنین تعبیر هر نماد رابطه ای R اندازه پذیر است و نیز $\|R^M\|_{PR} \leq b_R$.

۵. برای هر m, n ای μ_{m+n} گسترشی از اندازه ضربی $\mu_m \times \mu_n$ است.

۶. هر μ_n ای نسبت به جابجایی متغیرها پایدار است.

۷. خاصیت فوینی برقرار است به این معنا که اگر B یک مجموعه اندازه پذیر به نسبت اندازه $\mu_m \times \mu_n$ باشد آنگاه برای هر $\bar{a} \in M^m$ مجموعه $B_{\bar{a}} = \{\bar{b} \in M^n \mid (\bar{a}, \bar{b}) \in B\}$ اندازه پذیر است. همچنین تابع $\bar{x} \mapsto \mu_n(B_{\bar{x}})$ اندازه پذیر است. همچنین $\int \mu_n(B_{\bar{x}}) d\mu_m = \mu_{m+n}(B)$ برقرار است.

تعبیر فرمولها در ساختارها به شیوه طبیعی و به صورت استقرایی انجام می شود. برای مثال اگر M یک \mathcal{L} -ساختار و $\phi(\bar{x}), \theta(\bar{x})$ و $\psi(\bar{x}, y)$ فرمول باشند و $\bar{a} \in M$ ، در اینصورت ارزش $(\phi + \theta)(\bar{a})$ و $(\int \psi(\bar{x}, y) dy)(\bar{a})$ در M که با $(\phi + \theta)^M(\bar{a})$ و $(\int \psi(\bar{x}, y) dy)^M(\bar{a})$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} (\phi + \theta)^M(\bar{a}) &= \phi^M(\bar{a}) + \theta^M(\bar{a}), \\ (\int \psi(\bar{x}, y) dy)^M(\bar{a}) &= \int \psi^M(\bar{a}, y) dy. \end{aligned}$$

مشاهده زیر برقرار است و تایید درستی آن خیلی مشکل نمی باشد:

مشاهده ۵: تعبیر هر فرمول در هر \mathcal{L} -ساختاری مثل M یک تابع اندازه پذیر است. همچنین برای هر فرمول $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ داریم

$$\int_{M^m} \left(\int_{M^n} \phi^M(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} \right) d\bar{y} = \int_{M^{n+m}} \phi^M(\bar{x}, \bar{y}) d(\bar{x}\bar{y}).$$

به علاوه، برای هر پارامتر $\bar{a} \in M^m$ ، فرمول با پارامتر $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ ای نیز اندازه پذیر است. همچنین برای هر فرمول $\phi(\bar{x})$ داریم:

$$\begin{aligned} \phi^M(\bar{x}) &\in L^p \phi(M^n), \\ \|\phi^M\|_{p_\phi} &\leq b_\phi, \\ \sup |\phi^M| &\leq c_\phi. \end{aligned}$$

مثال: یک فضای احتمال دلخواه و مجموعه ای از متغیرهای تصادفی (نه لزوماً کراندار) روی آن که توابعی در L^p های ($p > 1$) آن فضا باشند را در نظر بگیرید. این فضایی بسیار رایج و مهم در ریاضیات و نظریه احتمال می باشد. به راحتی می توان مشاهده نمود که این فضا در واقع یک مثال و نمونه از مفهوم \mathcal{L} -ساختارهای منطقی (در منطق انتگرال بیکران) معرفی شده در این مقاله می باشد. در واقع کفایت متناظر با هر متغیر تصادفی یک نماد رابطه ای در زبان \mathcal{L} قرار دهیم. در اینصورت به راحتی از فضای ما یک \mathcal{L} -ساختار به طور طبیعی استخراج خواهد شد.

۴. قضیه های بنیادی فراضرب و فشردگی در منطق انتگرال (ورژن بیکران)

در فصل قبل منطق انتگرال بیکران به صورت تعمیم و تقویتی از منطق انتگرال کلاسیک معرفی گردید که اجازه می داد تعبیر نمادهای رابطه ای توابعی بیکران باشند. همانگونه که در مقدمه نیز اشاره شد وجود توابع بیکران در ساختارها به راحتی می تواند اثبات فرم های کلاسیک قضیه فراضرب و فشردگی را به هم بزند. فراضرب یک خانواده از \mathcal{L} -ساختارهای بیکران مشابه آنچه که در منطق انتگرال کلاسیک (مثلاً در مقاله (Bagheri-Pourmahdian, 2009)) انجام شده است انجام می گیرد و ما آن را در چند پاراگراف زیر یادآوری می کنیم. ولی نکته مهم و کلیدی این است که اثبات قضیه بنیادی فراضرب موجود در مقاله مذکور و سایر مقالات کلاسیک، برای رویکرد بیکران

و تعمیم یافته ما دیگر کار نمی کنند. چرا که در آن مقالات فرض بسیار اساسی کراندار بودن روابط از ابتدا مفروض است و با برداشتن آن فرض، تکنیکهای موجود در اثباتها به هم می خورد. هدف این فصل این است که نشان دهد که با تحلیلی عمیقتر می توان همزمان با اضافه کردن امکان کار با توابع بیکران هم چنان این قضایا را اثبات نمود. در واقع با توجه به تعمیم روابط و امکان بیکران بودن، ما نیازمند به ارائه اثباتی مفصل تر و کلیتر نسبت به اثباتهای کلاسیک هستیم که این در واقع نتیجه ای است که در این مقاله و در "قضیه فراضرب ورژن بیکران" در زیر در ادامه این فصل بدست می آید و یکی از اهداف اصلی این مقاله می باشد. همچنین نیازمند به تکنیکهای جدیدی هستیم که قبلا وجود نداشته است. در نهایت با کمک این تکنیکها قضیه بنیادی فراضرب را ثابت خواهیم کرد. پس از آن قضیه فشردگی بصورت روتین از قضیه بنیادی فراضرب نتیجه خواهد شد. همانطور که قبلا هم ذکر شد تعمیم و تقویت به حیطه بیکران باعث می شود بخشهای بسیار بیشتری از ریاضیات بخصوص فضاهای L^p و متغیرهای تصادفی نه لزوما کراندار، بیشتر در تعامل با بستر منطقی تعمیم یافته ما قرار بگیرند.

ابتدا تعریف کلاسیک فراضرب ساختارهای اندازه ای را مرور مختصری می کنیم. فرض کنید $M_i = (M_i, B_i, \mu_i)$ (برای $i \in I$) یک خانواده اندیسدار از \mathcal{L} -ساختارهایی بیکران و نیز \mathcal{D} یک فرائیلتر روی I باشد (بطور دقیقتر، هر یک از توانهای هر M_i ای هم مجهز به سیگما-جبری مثل B_i^n ای و اندازه ای مثل μ_i^n است که مشابه آنچه در تعریف \mathcal{L} -ساخت آمد به یکدیگر مربوط اند. ما فقط با توان اول کار می کنیم و بقیه مشابه است). مجموعه $N = \prod_{\mathcal{D}} M_i$ را فراضرب مجموعه ای معمولی در نظر بگیرید. یادآوری می کنیم که عناصر M کلاسه های رابطه هم ارزی \sim روی $\prod_i M_i$ هستند که اینطور تعریف می شود که $(x_i) \sim (y_i)$ اگر و تنها اگر $\{i | x_i = y_i\} \in \mathcal{D}$. فرض کنید $[a_i]$ کلاس هم ارزی عنصر (a_i) در ضرب باشد. روی N ساختاری به صورت زیر تعریف می کنیم:

- برای هر نماد ثابت c در زبان قرار می دهیم $[c^{M_i}] = c^N$.

- برای هر نماد تابعی F در زبان تعریف می کنیم:

$$F^N([a_i^1], \dots, [a_i^n]) = [F^{M_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)].$$

- برای هر نماد رابطه ای R در زبان تعریف می کنیم:

$$R^N([a_i^1], \dots, [a_i^n]) = \lim_{\mathcal{D}}([R^{M_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)]).$$

تا اینجا ساختارهای رابطه ای و تابعی و ثوابت روی N تعریف شدند. حال یک اندازه روی N تعریف می کنیم. اگر برای هر i ای $A_i \subseteq M_i$ مجموعه های اندازه پذیر باشند، آن گاه

$$[A_i] = \{[a_i] \mid \{i \mid a_i \in A_i\} \in \mathcal{D}\} \subseteq N$$

را یک مجموعه اندازه پذیر روی N تلقی می کنیم (و لازم به ذکر است که اینها تشکیل جبر بول می دهند) و اندازه اختصاص داده شده به آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\rho_n([A_i]) = \lim_{\mathcal{D}}([\mu_{in}(A_i)]).$$

حال ρ_n با قضیه کاراتنودوری قابل گسترش به اندازه ای منحصر به فرد روی سیگما جبر \mathcal{A} روی N (تولید شده توسط اندازه پذیرهای پایه ای) می شود که آن را با μ (یا μ_1) نشان می دهیم. بنابراین تاکنون فضای اندازه (N, \mathcal{A}, μ) را ساخته ایم و N را به اندازه مناسب هم مجهز کردیم. مشابهها در مورد توانهای N^n نیز روی سیگما جبر \mathcal{A}^n روی N^n می توانیم اندازه های مربوطه را بسازیم و آن را با μ_n نشان دهیم و با اینکار فضای اندازه $(N^n, \mathcal{A}^n, \mu_n)$ را ساخته ایم. حال می توان به راحتی مشاهده نمود که اگر برای هر $i \in I$ ای $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر و کراندار باشد آنگاه تساوی زیر برقرار است:

$$\int_N \lim_{\mathcal{D}}(f_i) = \lim_{\mathcal{D}}(\int_{M_i} f_i).$$

همچنین برای هر $\alpha > 0$ ، مجموعه $\{\bar{x} \mid |R(\bar{x})| > \alpha\}$ در هر M_i ای دارای اندازه $(\frac{\beta_R}{\alpha})^{p_R}$ است. ضمناً خیلی سخت نیست مشاهده شود که $N = (N, \mathcal{A}^n, \mu_n)$ خود یک \mathcal{L} -ساختار بیکران است.

گزاره ۶ (گزاره کلیدی): فرض کنید $\beta > 0, p > 1$ و برای هر $i \in I$ ای $(M_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ یک فضای اندازه باشد بگونه ای که $\mu_i(M_i) \leq \beta$ و نیز $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر باشد. فرض کنید (N, \mathcal{B}, ν) فضا ضرب این ساختارها باشد. همچنین فرض کنید $\lim_{\mathcal{D}} (\|f_i\|_p) \leq \beta$ در اینصورت داریم:

$$\int_N \lim_{\mathcal{D}} f_i d\nu = \lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i d\mu_i.$$

اثبات: تابع $\lim_{\mathcal{D}} f_i$ را با f نشان می‌دهیم. با استفاده از لم ۲ و با توجه به اینکه طبق تعریف \mathcal{L} -ساختارها، برای هر i ای $\mu_i(M_i) \leq 1$ خواهیم داشت $\|f_i\|_1 \leq \|f_i\|_p$. بنابراین $\lim_{\mathcal{D}} (\|f_i\|_1) \leq \beta$ توجه شود که $\lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i \leq \lim_{\mathcal{D}} \|f_i\|_1 \leq \beta$. ابتدا گزاره را برای f و f_i های $(i \in I)$ نامنفی نشان می‌دهیم و سپس برای f و f_i های دلخواه این‌طور قرار می‌دهیم $f = f^+ - f^-$ که $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ و $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. حال داریم $f^+ = \lim_{\mathcal{D}} f_i^+$ و $f^- = \lim_{\mathcal{D}} f_i^-$. چون هر دوی f^+ و f^- نامنفی هستند داریم:

$$\int f = \int f^+ - \int f^- = \lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i^+ - \lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i^- = \lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i.$$

بنابراین فرض کنیم که f و f_i ها نامنفی اند. نشان خواهیم داد که $\int_N f d\nu \geq \lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i d\mu_i$ فرض خلف کنید که $t_1 = \int_N f d\nu < \lim_{\mathcal{D}} \int_{M_i} f_i d\mu_i = t_2$. قرار دهید $\delta = \frac{t_2 - t_1}{8}$ و نیز برای هر n طبیعی تعریف کنید $A_{i,n} = \{x \in M_i: f_i(x) > n\}$ و $B_{i,n} = A_{i,n}^c$.

مشاهده A: برای هر n داریم $\{i \in I: \int_{B_{i,n}} f_i d\mu_i \geq t_2 - \delta\} \notin \mathcal{D}$

مشاهده B: فرض کنید $\epsilon > 0$ ، فیکس باشد. در اینصورت برای تقریبا هر $i \in I$ مجموعه اندازه‌پذیر $U_{i,\epsilon} \subseteq M_i$ موجود است به طوری که $\mu_i(U_{i,\epsilon}) \leq \epsilon$ و نیز $\int_{U_{i,\epsilon}} f_i d\mu_i \geq \frac{\delta}{2}$.

حال برای هر $\epsilon > 0$ ای با استفاده از مشاهده B بالا، $J \in \mathcal{D}$ ای و نیز برای هر $j \in J$ ، مجموعه معرفی شده در مشاهده B را می‌یابیم. حال با کمک لم ۲، برای هر $i \in J$ داریم:

$$\|f_i\|_p \geq \|f_i|_{U_{i,\epsilon}}\|_p \geq \frac{\|f_i|_{U_{i,\epsilon}}\|_1}{\mu(U_{i,\epsilon})^{1-\frac{1}{p}}} \geq \frac{\delta}{2\epsilon^{1-\frac{1}{p}}}$$

اما آخرین عبارت با میل کردن ϵ به صفر به سمت ∞ میل می کند. بنابراین با انتخاب ϵ مناسب، برای تقریباً همه i ها خواهیم داشت $\|f_i\|_p > 2\beta$. این نتیجه می دهد که $\lim_D(\|f_i\|_p) > \beta$ که تناقض است.

حال برای برعکس باید ثابت کنیم که $\int_N f \leq \lim_D \int_{M_i} f_i$. یک $\epsilon > 0$ را فیکس کنید. می توان برای هر z صحیح مثبت یا صفر، c_j را به گونه ای یافت که ویژگی های زیر برقرار باشند:

$$c_0 = 0 -$$

$$- \text{ برای هر } j \text{ ای } c_j < c_{j+1} \text{ و } c_{j+1} - c_j < \epsilon -$$

$$- \mathbb{R}^{>0} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^{>0}} [c_j, c_{j+1}] -$$

$$- \text{ برای هر } j, v(V_j) = 0 \text{ که } V_j := f^{-1}(c_j) -$$

با قرار دادن $U_j = \{x \in N, c_{j-1} < f(x) < c_j\}$ داریم:

$$\int_N f dv \leq \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot v(V_j) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot v(U_j).$$

اما اگر قرار دهیم $B_j^i = \{x \in M_i, c_{j-1} < f_i(x) < c_j\}$ آنگاه $U_j \subseteq [B_j^i]$. بنابراین از آن جا که برای هر j ای $v(V_j) = 0$ ، نتیجه می گیریم که:

$$\int_N f dv \leq \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \lim_D(\mu_i(B_j^i)) \leq \lim_D(\sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \mu_i(B_j^i))$$

از آن جا که ϵ دلخواه بود خواهیم داشت:

$$\int_N f dv \leq \lim_D \int_{M_i} f_i d\mu_i.$$

به این ترتیب حکم به اثبات می رسد. ■ قضیه ۷ (قضیه فواضرب ورژن بیکران):

برای هر فرمول $\phi(\bar{x})$ و تقریباً هر (تقریباً به نسبت اندازه) $([a_i^1], \dots, [a_i^n]) \in N^n$ داریم:

$$\phi^N([a_i^1], \dots, [a_i^n]) = \lim_D[\phi^{M_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)].$$

اثبات: با استفاده از تعاریف حکم برای فرمولهای اتمی برقرار اند. همچنین بوضوح اگر دو فرمول برقرار باشد آنگاه برای هر ترکیب لاتینسی و جبری (جمع و ضرب اسکالر و ...) نیز برقرار خواهد بود. فرض کنید حکم برای $\phi(x, \bar{y})$ برقرار باشد. اگر \bar{y} تهی باشد آنگاه با استفاده از "گزاره کلیدی" اثبات شده در بالا و نیز استفاده از این نکته که $\|\phi^{M_i}\|_{p_\phi} \leq b_\phi (i \in I)$ خواهیم داشت:

$$\int \phi^N(x) dx = \int \lim_D \phi^{M_i}(x) dx = \lim_D \int \phi^{M_i}(x) dx.$$

حال فرض کنیم \bar{y} ناتهی باشد. می خواهیم قضیه را برای فرمول $\int \phi(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$ به اثبات برسانیم. بدون کاستن از کلیت می توان فرض کرد که \bar{x}, \bar{y} تک موضعی هستند و با x, y نشانشان می دهیم. هر $y \in N$ بصورت $[y_i]$ قابل نمایش است که برای هر $i \in I$ ای $y_i \in M_i$ تعریف کنید:

$$A := \{[a_i] \in N : \int_N (\lim_D \phi^{M_i}(a_i, y_i)) dy \neq \lim_D \int_{M_i} \phi^{M_i}(a_i, y) dy\}.$$

با فرض استقرا می توان دید که برای تقریباً همه $[x_i] \in N$ ها دو تابع $\phi^N([x_i], [y_i])$ و $\lim_D \phi^{M_i}(x_i, y_i)$ برای تقریباً همه $[y_i] \in N$ ها با هم مساویند. بنابراین تنها کفایت نشان دهیم $v(A) = 0$. فرض خلف کنید که $\delta := v(A) > 0$. تعریف کنید $\theta := b_\phi \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{p_\phi}}$. هم چنین برای هر $i \in I$ ای تعریف کنید $C_i = \{a \in M_i : \|\phi^{M_i}(a, y)\|_{p_\phi} > \theta\}$ با کمک "گزاره ۶ (گزاره کلیدی)"، برای هر $[a_i] \in A$ داریم $\lim_D (\|\phi^{M_i}(a_i, y)\|_{p_\phi}) = \infty$ بنابراین $[a_i] \in [C_i]$. پس $A \subseteq [C_i]$ و $v([C_i]) \geq \delta$. نتیجه می شود که $k \in I$ ای موجود است به گونه ای که $\mu_k(C_k) > \frac{\delta}{2}$. حال با کمک مشاهده ۵ فصل قبل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (\|\phi^{M_k}(x, y)\|_{p_\phi})^{p_\phi} &\geq \int_{C_k} (\int_{M_k} |\phi^{M_k}(x, y)|^{p_\phi} dy) dx = \\ \int_{C_k} (\|\phi^{M_k}(x, y)\|_{p_\phi})^{p_\phi} dx &\geq \theta^{p_\phi} \cdot \mu(C_k) > b_\phi^{p_\phi} \end{aligned}$$

که یک تناقض است. به این ترتیب اثبات قضیه بنیادی فراضرب به اتمام می رسد. ■

نکته ۸: حال با اثبات قضیه بنیادی فراضرب در بالا، قضیه فشردگی (نتیجه زیر) از روی آن به طور طبیعی و روتین و با همان روش مقاله (Bagheri-Pourmahdian, 2009) (قضیه ۷، ۸) و مشابه روش کلاسیک بدست می آید.

نتیجه ۹ (قضیه فشردگی - ورژن بیکران): هر تئوری متناهی ارضاپذیر ارضاپذیر می باشد.

۵. نتیجه گیری

منطق انتگرال بستر منطقی مهمی برای تلفیق منطق با نظریه های اندازه و احتمال می باشد. در این مقاله، ورژنی تعمیم یافته و تقویت شده از منطق انتگرال معرفی گردید که در آن تعبیر روابط می توانند توابعی در فضاهای L^p که لزوما کراندار هم نیستند باشند و نیز قضایای بنیادی فراضرب و فشردگی نیز با فرمی قویتر و اثباتهایی با تکنیکهای جدید برقرار باشند. با این تعمیم امکان تعامل بیشتر منطق با فضاهای L^p و نیز متغیرهای تصادفی نه لزوما کراندار در احتمال که بخشهای مهمی از آنالیز و احتمالات هستند فراهم می گردد. این تعمیم بسیاری از محدودیتهایی که در ورژن کلاسیک منطق انتگرال در قدرت بیان، اصل بندی ساختارها و تعامل با ساختارهای ریاضیاتی وجود داشت را رفع می کند و امکان ایجاد کاربردهای بیشتر در تئوری فضاهای تابعی و نظریه احتمالات را فراهم می نماید. یافتن هر چه بیشتر کاربردهای این بستر منطقی جدید در بخشهای مختلف ریاضیات می تواند از مسایل مورد توجه برای مطالعات آینده در این زمینه باشد.

کتابنامه

- Bagheri S.M, Pourmahdian M. (2009), The logic of integration, Arch. Math. Logic 48:465-492.
- Fajardo S., Keisler H.J. (2002), Model theory of stochastic processes, Lecture Notes in Logic 14 ASL.
- Folland G.B (1999), Real analysis, Modern techniques and their applications, second edition.
- Hoover D.N (1978), Probability logic, Annals of Mathematical Logic 14, 287-313.

منطق، اندازه و رویکردی غیرکراندار به منطق انتگرال (علیرضا مفیدی) ۲۵۱

Keisler H.J. (1985), Probability quantifiers, in Model Theoretic Logic, edited by J. Barwise and S. Feferman, Springer-Verlag.

Mofidi, A. (2018), On some dynamical aspects of NIP theories, Arch. Math. Logic 57 (1-2) 37–71.

Mofidi, A. (2020), On partial cubes, well-graded families and their duals with some applications in graphs, Discrete Appl. Math, 283, 207–230.

Mofidi A, Bagheri S.M (2011), Quantified universes and ultraproduct, math. logic quarterly.

