ISSN: 1973-2873; Philosophical Thought. 2021;1(4):313-339.

Propositional Provability Logics

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Authors
Mirsanei S.A.*
Department of Philosophy, Faculty of Humanities, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
Nabavi L.
Department of Philosophy, Faculty of Humanities, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

How to cite this article
Mirsanei S A, Nabavi L. Propositional Provability Logics. Philosophical Thought. 2021;1(4):313-339.

***Correspondence**
Address: No. 94, Aalley 59, Imam St., Qom, Iran. Postal code: 3718665835
Phone: +98 (919) 4516298
Fax: +98 (25) 36500403
sa.mir@modares.ac.ir

Article History
Received: December 18, 2021
Accepted: December 27, 2021
ePublished: February 5, 2022

ABSTRACT

Discovering the differences between the various systems of modal logics was one of the advantages of inventing Kripke semantics. One of the most obvious examples is interpreting the necessity of provability in provability logic. According to Boolos in The Logic of Provability, by discovering this logic, we can say that the understanding of new issues in the field of argument was opened. In this paper, with a formal approach and with a descriptive-analytical and comparative method, the axiomatic propositional systems of the GL, Grz, and H, and their possible world semantics based on Kripke semantics are studied, as well as the sequent calculus of GL (in Peano arithmetic) and GLS (in the standard model) were introduced. Finally, the meta-theorems of soundness, consistency, and completeness of the GL were interpreted and proved.

Keywords Provability Logic; Modal Logic; Axiomatic System; Proof Theory; Possible World Semantics; Meta-Theorems

CITATION LINKS

[Avron A; 1984] On modal systems having arithmetical interpretations [Borga M; 1983] On some proof theoretical properties of the modal logic GL [Boolos G; 1993] The logic of provability [Brighton J; 2016] Cut-elimination for GLS using the terminability of its regress process [Davis M; 1958] Computability and Unsolvability [de Jongh DHJ, Montagna F; 1988] Provable fixed points [de Jongh DHJ, Montagna F; 1987] Generic generalized Rosser fixed points [Gore R, Ramanayake R; 2012] Valentini's cut-elimination for provability logic resolved [Gödel K; 1986] An Interpretation of the Intuitionistic Propositional Calculus [Grzegorczyk A; 1967] Some relational systems and the associated topological spaces [Henkin L; 1952] A problem concerning provability [Hilbert D, Bernays P; 1939] Grundlagen der mathematik II [Hughes GE, Cresswell MJ; 1997] A new introduction to modal logic [Hughes GE, Cresswell MJ; 1984] A companion to modal logic [Kushida H; 2010] The modal logic of Gödel sentences [Kushida H; 2019] A proof theory for the logic of provability in true arithmetic [Löb MH; 1955] Solution of a problem of Leon Henkin [McKinsey JCC, Tarski A; 1948] Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting [Movahed Z; 2006] Modal logic [Nabavi L; 2004] An introduction to modal logic [Negri S; 2005] Proof analysis in modal logic [Negri S; 2014] Proofs and countermodels in non-classical logics [Poggiolesi F; 2009] A purely syntactic and cut-free sequent calculus for the modal logic of provability [Sambin G; 1976] An effective fixed point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras [Sambin G, Valentini S; 1982] The modal logic of provability, the sequential approach [Sasaki K; 2001] Löb's axiom and cut-elimination theorem [Segerberg KK; 1971] An essay in classical modal logic [Solovay RM; 1976] Provability interpretations of modal logic [Smiley TJ; 1963] The logical basis of ethics [Smoryński C; 1985] Self-reference and modal logic [Shamkanov D; 2015] Nested sequents for provability logic GLP [Verbrugge R; 2017] Provability logic [Valentini S; 1983] The modal logic of provability: cut-elimination

نوع مقاله: پژوهشی اصیل

نظریه برهان منطق‌های اثبات‌پذیری

لطف‌اله نبوی
گروه فلسفه، حکمت و منطق، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
سیداحمد میرصانعی*
گروه فلسفه، حکمت و منطق، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده
کشف تفاوت‌های نظام‌های گوناگون منطق موجهات، از جمله مزایای ابداع معناشناسی کریپکی بود. یکی از نمونه‌های بارز آن، تعبیر ضرورت به اثبات‌پذیری در منطق‌های اثبات‌پذیری است و به قول بولوس، با کشف این منطق، می‌توان گفت که باب فهم مطالب جدید در زمینه برهان باز شد. در این مقاله با رویکردی فرمال و با روش توصیفی-تحلیلی و مقایسه‌ای، نظام‌های اصل موضوعی گزاره‌ای GL، Grz و H و سمانتیک جهان ممکنی آن‌ها بر مبنای سمانتیک کریپکی مورد بررسی قرار گرفته و نیز نظریه برهان حساب رشته‌ای GL (در حساب پئانو) و GLS (در مدل استاندارد) ارائه و در نهایت، فراقضایای صحت، سازگاری و تمامیت GL تقریر و اثبات شد.

کلیدواژگان: منطق‌های اثبات‌پذیری، منطق موجهات، سیستم اصل موضوعی، حساب رشته‌ای، سمانتیک جهان ممکنی، فراقضایا

*نویسنده مسئول: sa.mir@modares.ac.ir
آدرس مکاتبه: تهران، بزرگراه جلال آل احمد، دانشگاه تربیت مدرس، گروه فلسفه، حکمت و منطق
تلفن: ۰۲۵۳۶۵۰۱۴۶۹ ؛ فکس: ۰۲۵۳۶۵۰۰۴۰۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶
تاریخ انتشار: ۱۴۰۰/۱۱/۱۶

مقدمه

پیدایش منطق‌های اثبات‌پذیری به دو اثر شاخص در قرن بیستم بازمی‌گردد. اثر اول یادداشت تک‌صفحه‌ای کورت گودل در سال ۱۹۳۳ در حاشیه یک سمینار [Godel, 1986] و اثر دوم مقاله لئون هنکین در سال ۱۹۵۲ در فراریاضیات بود [Henkin, 1952].

یادداشت تک‌صفحه‌ای گودل به تنهایی منجر به حداقل ۵ حرکت بزرگ فکری در منطق فرمال شد. وی در این مقاله با ارائه تعبیری برای منطق شهودی گزاره‌ای، حدس‌ها و ایده‌های خلاقانه‌ای در زمینه منطق موجهات، منطق فازی، منطق اثبات، منطق شهودی و منطق‌های میانه ارائه داد. تز اصلی ابداعی گودل در این مقاله این است که منطق S4 لوئیس را می‌توان از توسیع منطق گزاره‌های فرگه و راسل به دست آورد و برخلاف نظر لوئیس، نیازی به حذف منطق کلاسیک و استفاده از ادات استلزام اکید به‌جای استلزام مادی نیست. با اضافه‌کردن ۳ اصل موضوع زیر و نیز قاعده میان قضایای اثبات به منطق گزاره‌های شهودی هیتینگ، منطق اثبات‌پذیری G به دست می‌آید: (اپراتور B: Beweis (اثبات))

1. $Bp \rightarrow p$

2. $Bp \rightarrow [B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq]$

3. $Bp \rightarrow BBp$

$$\frac{\vdash A}{\therefore \vdash BA}$$

به صورت مشابه اگر به‌جای B، عملگر N (ضرورت: $\Box$) را قرار دهیم، با افزودن سه اصل موضوع حاصله به همراه قاعده ضرورت به منطق کلاسیک، منطق موجهات S4 به دست می‌آید:

$$\frac{\vdash A}{\therefore \vdash \Box A}$$

این فرآیند، ترجمان گودلی از منطق اثبات‌پذیری G به منطق موجهات S4 بود و با این کار گودل نشان داد که S4 سیستم توسعه‌یافته از منطق کلاسیک است و نه بدیل و جایگزین آن. اما آیا واقعاً اولاً ترجمان این ۳ اصل G، قضیه S4 است و ثانیاً آیا قاعده ضرورت، قاعده S4 است؟ ۳۵ سال بعد از ارائه این تز، درستی آن به صورت کامل اثبات شد. ولی این حدس و خلاقیت گودل بسیار شگرف بود. بخشی از این کار در سال ۱۹۴۸ توسط مکنزی و تارسکی در مجله منطق صوری انجام شد [McKinsey & Tarski, 1948]. در این مقاله، قضیه زیر اثبات می‌شود و به حدس گودل درباره قاعده ضرورت اشاره می‌شود:

«اگر α اثبات‌پذیر (قضیه) باشد، آنگاه α ~◇~ هم اثبات‌پذیر (قضیه) خواهد بود.»

اثبات بخش دوم تز، یعنی اینکه با افزودن ۳ اصلی که گودل گفت به منطق گزاره‌ها، منطق S4 را به دست می‌دهد، ۳۵ سال بعد در سال ۱۹۶۸ در اولین چاپ کتاب هیوز و کرسول انجام شد [Hughes & Cresswell, 1997]. بنابراین تمام اصل موضوع‌های S4 به‌دست‌آمده با ترجمان گودلی و استلزام مادی (یعنی نظام G)، تماماً در S4 لوئیس استلزام اکیدی اثبات‌پذیرند؛ عکس این را هم می‌توان نشان داد. می‌توان نشان داد این دو سیستم استنتاجاً معادل هستند[۱].

گودل همچنن در همان مقاله ۱۹۳۳ برای راهکاری برای ترجمه منطق گزاره‌های شهودی به منطق موجهات گزاره‌ای S4 ارائه داد و آن اینکه ادات‌های منطق شهودی به صورت زیر ترجمه شوند [Godel, 1986]:

منطق S4		منطق گودل
$\Box A$	ترجمه شود به $\Leftrightarrow$	A
$\Box A \to \Box B$	ترجمه شود به $\Leftrightarrow$	$A \to B$
$\Box A \vee \Box B$	ترجمه شود به $\Leftrightarrow$	$A \vee B$
$A \wedge B$	ترجمه شود به $\Leftrightarrow$	$A \wedge B$

و یکی از نتایج این نظریه گودل-تارسکی-مکنزی این بود که با این ترجمان، ترجمه هر قضیه منطق گزاره‌های شهودی (I)، قضیه منطق S4 خواهد بود. منطقدان لهستانی، آندره زگورزیک نشان داد که نظریه برای یک سیستم استنتاجاً معادل با منطق اثبات‌پذیری S4Grz (که توسیع S4 است) نیز برقرار است [Grzegorczyk, 1967: 225] و بنابراین ترجمه هر قضیه منطق گزاره‌های شهودی (I)، قضیه منطق اثبات‌پذیری S4Grz نیز خواهد بود.

هنکین نیز در سال ۱۹۵۲ یک سؤال را با الهام از قضایای ناتمامیت گودل مطرح کرد [Henkin, 1952]. اولین قضیه ناتمامیت گودل بیان می‌کند که برای یک نظریه فرمال به اندازه کافی قوی مانند حساب پئانو، هر جمله‌ای که غیرقابل اثبات‌بودن خود را اظهار کند، در واقع غیرقابل اثبات است. از طرف دیگر، خارج از این نظریه فرمال می‌توان دریافت که چنین جمله‌ای در مدل استاندارد صادق است و این نشانگر یک تمایز اساسی و بنیادین بین «صدق» و «اثبات‌پذیری» است.

به صورت فرمال، اگر A[۱] عدد گودلی فرمول A باشد و Prov محمول اثبات‌پذیری در حساب پئانو باشد.

$\exists p \mathrm{Proof}(p,x)$

که در آن Proof محمول دو موضعی در حساب پئانو است:

Proof(p,x): «عدد گودلی p یک برهان درست از اصول موضوعه حساب پئانو متعلق به فرمول‌ها با عدد گودلی x را کد می‌کند.»[۲]

حال با فرض اینکه گزاره $A\leftrightarrow \mathrm{Prov}(\ulcorner A\urcorner)$ در حساب پئانو قابل اثبات باشد، A در حساب پئانو اثبات‌پذیر نخواهد بود و بنابراین این گزاره صادق خواهد بود، زیرا در واقع جمله خودارجاع A می‌گوید: «من اثبات‌پذیر نیستم.». هنکین می‌خواست بداند آیا می‌توان درباره جملاتی که اثبات‌پذیری خود را اظهار می‌کنند، می‌توان هرچیزی گفت.

لاب سه سال بعد به این سؤال هنکین پاسخ داد [Lob, 1955]. حتی اگر تمام جملات اثبات‌پذیر در حساب پئانو واقعاً در مورد اعداد طبیعی صادق باشند، $\mathrm{Prov}(\ulcorner B\urcorner)\rightarrow B$ تنها با استناد به این گزاره بدیهی که خود B قبلاً در پئانو اثبات می‌شود، صادق خواهد بود. این قضیه لاب پاسخی به پرسش هنکین است و صورت فرمال آن در حساب پئانو به صورت زیر است:

$$\mathrm{Prov}(\ulcorner \mathrm{Prov}(\ulcorner B\urcorner)\rightarrow B\urcorner)\rightarrow \mathrm{Prov}(\ulcorner B\urcorner).$$

سه شرط لاب برای محمول اثبات‌پذیری (Prov) عبارتند از[۳] [Verbrugge, 2017]:

۱) اگر، $\underset{PA}{\vdash} A$، آنگاه $\underset{PA}{\vdash} \mathrm{Prov}(\ulcorner A\urcorner)$.

۲) $\underset{PA}{\vdash} \mathrm{Prov}(\ulcorner \mathbf{A}\rightarrow B\urcorner)\rightarrow [\mathrm{Prov}\ (\ulcorner A\urcorner) \rightarrow \mathrm{Prov}(\ulcorner B\urcorner)]$

۳) $\underset{PA}{\vdash} \mathrm{Prov}(\ulcorner \mathbf{A}\urcorner) \rightarrow \mathrm{Prov}\ [\ulcorner \mathrm{Prov}\ (\ulcorner A\urcorner)\urcorner]$

جالب این است که علی‌رغم پیدایش قضیه لاب در حساب، اولین بار اسمایلی در سال ۱۹۶۳ [Smiley, 1963] در بحث راجع به مبانی منطقی اخلاق (که اصلاً ریاضیاتی نبود)، صورت موجهاتی اصل لاب را به صورت اصل موجهاتی ارائه داد (با جایگزینی عملگر □ به‌جای Prov):

$$\Box(\Box A\rightarrow A)\rightarrow\Box A$$

تحقیقات جدی‌تر در این زمینه، تقریباً بیست سال پس از انتشار مقاله لاب آغاز شد. توسعه «منطق اثبات‌پذیری گزاره‌ای» در اوایل دهه ۱۹۷۰ آغاز شد و چندین محقق در کشورهای مختلف به‌طور مستقل مهم‌ترین قضایا و استدلال‌ها را در منطق اثبات‌پذیری گزاره‌ای اثبات کردند. از جمله افراد تأثیرگذار در معرفی و بسط منطق اثبات‌پذیری G (گودل-لاب) و ارائه سمانتیک برای آن سالوی (به ویژه در مقاله مهم ۱۹۷۶) است [Solovay, 1976].

اولین مباحث در زمینه حساب رشته‌ها برای GL توسط والنتینی با اثبات اینکه حساب رشته‌های استاندارد برای GL با حذف قاعده ساختاری برش امکان‌پذیر است، مطرح شد [Valentini, 1983]. یعنی هر فرمول GL که در حساب رشته‌های استاندارد اثبات‌پذیری باشد، همچنین دارای یک برهان رشته‌ای GL بدون دور (without detours) است. نگری [Negri, 2005; Negri, 2014]، گوری و رامانایاک [Goré & Ramanayake, 2012]، پاجولِسی [Poggiolesi, 2009] و شمکانوف [Shamkanov, 2014] از جمله افراد مؤثر در بسط و توسعه مباحث حساب رشته‌ای GL بودند. نگری حساب رشته‌های بدون انقباض و برش برای یک خانواده بزرگ از منطق‌های موجهات نرمال (شامل تمام ساختارهای موجهه کریپکی اعمّ از جهان ممکنی و هندسی) ارائه داده

است که قابل گسترش به حساب رشته GL است. او دو حساب رشته برچسبی معادل فاقد برش و فاقد انقباض برای GL معرفی کرده است.

حذف برش منجر به خاصیت زیرفرمول (subformula property) برای GL می‌شود، زیرا تمام فرمول‌ها در یک برهان فاقد برش، زیرفرمولِ فرمول‌های رشته انتهایی هستند. نگری یک برهان نحوی برای حذف برش ارائه داده است و بر این مبنا، حتی اگر یک ویژگی زیرفرمولی کامل برای این حساب به دلیل حساب برچسبی برقرار نباشد، خاصیت زیرترمی (subterm property) و در نتیجه، نتایج معمول ویژگی زیرفرمولی برای آن برقرار خواهد بود که از جمله مفید آن، برهان مستقیم برای تمامیت این حساب رشته برچسبی GL است و اثبات تصمیم‌پذیری ویژگی مدل متناهی را امکان‌پذیر می‌سازد:

«هر فرمولی که اثبات‌پذیر نباشد، یک مدل نقض متناهی دارد»

دو نوع سمانتیک برای منطق‌های اثبات‌پذیری ارائه شده است؛ سمانتیک جهان ممکنی بر مبنای مدل کریپکی (موجهاتی) و سمانتیک توپولوژیک (حسابی). صحت GL از منظر موجهاتی در سال ۱۹۷۱ توسط سگربرگ (و صحت حسابی آن نیز در همین دهه ۱۹۷۰) و تمامیت موجهاتی GL نیز توسط سگربرگ در سال ۱۹۷۱ اثبات شد [Segerberg, 1971]. دی یونگ در ۱۹۷۵[۴] [de Jongh, 1975] و سامبین در ۱۹۷۶ [Sambin, 1976] نیز اثبات‌های دیگری برای تمامیت موجهاتی GL ارائه دادند. تمامیت حسابی GL نیز در سال ۱۹۷۶ توسط سالوی اثبات شد [Solovay, 1976].

در این مقاله به بررسی و معرفی سیستم‌های اصل موضوعی GL، Grz، S4Grz و H و نیز حساب رشته‌های GLS و GL خواهیم پرداخت. در قسمت سمانتیک نیز سمانتیک جهان ممکنی GL، Grz، S4Grz و H مطرح و پس از آن برای نمونه به مباحث فراقضایای صحت و تمامیت GL پرداخته خواهد شد.

نظریه برهان

نظریه برهان اصل موضوعی

زبان منطق اثبات‌پذیری گزاره‌ای همان زبان منطق موجهات گزاره‌ای است [Nabavi, 2004: 13-14]، با این تفاوت که اولاً ثابت ⊥ به واژگان زبان افزوده می‌شود و ثانیاً با درنظرگرفتن T به عنوان «یک نظریه فرمال به اندازه کافی قوی»، ادات ضرورت موجهاتی □ به معنای «اثبات‌پذیری در T» خواهد بود.[۵] ثابت T نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

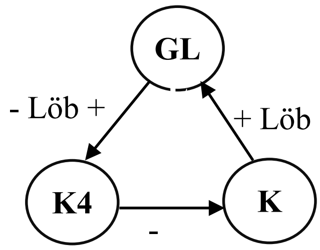
$T \stackrel{\text{def}}{=} \sim\bot$

منطق GL

نام منطق اثبات‌پذیری گزاره‌ای GL برگرفته از نام گودل (Gödel) و لاب (Löb) است. نظام اصل موضوعی این منطق با افزودن اصل گودل-لاب (اصل Löb یا W) به منطق موجهات گزاره‌ای K به دست می‌آید:

GL: K + Löb: $\Box(\Box P \supset P) \supset \Box P$

این منطق یکی از منطق‌های موجهات نرمال گزاره‌ای (غیر از ۱۵ سیستم مشهور) است، زیرا هم شامل اصول موضوعه منطق گزاره‌های کلاسیک و هم دارای اصل موضوع K و هم دارای قواعد میان قضایای وضع مقدم، ضرورت و جانشینی است. بر این سیستم نام‌های گوناگونی نهاده شده است؛ از جمله G [Godel, 1986]، L [Smiley, 1963]، KW [Cresswell & Hughes, 1984]، KW4 [Segerberg, 1971] و PrL. از آنجایی که اصل 4 نیز قضیه این سیستم است، سیستم GL را می‌توان توسیع K4 هم به حساب آورد. اما نه اصل T و نه اصل D در این سیستم قابل اثبات نیستند و بنابراین این سیستم مستقیماً توسیع K و نیز K4 است [Nabavi, 2004: 36]:



همچنین GL را می‌توان به طریقی دیگر و با افزودن صورت قاعده‌ای اصل لاب (R-Löb) به K4 به دست آورد [Boolos, 1993: 149]:

$$\frac{\vdash_{GL} \Box\phi\supset\phi}{\vdash_{GL} \phi}$$

اثبات اصل 4 در سیستم GL به صورت زیر است:

$\vdash_{GL} \Box P\supset\Box\Box P$

۱. $\Box(\Box P\supset P)\supset\Box P$	اصل GL
۲. $\Box[\Box(P\wedge\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\supset\Box(P\wedge\Box P)$	ج (۱)
۳. $P\supset[(Q\wedge R)\supset(P\wedge Q)]$	قضیه PL
٤. $P\supset[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]$	ج (۳)
٥. $\Box P\supset\Box[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]$	DR1(٤)
۶. $\Box(P\wedge Q)\equiv(\Box P\wedge\Box Q)$	T_3K
۷. $\Box(P\wedge\Box P)\equiv(\Box P\wedge\Box\Box P)$	ج (٦)
۸. $\Box P\supset\Box[\Box(P\wedge\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]$	جاگ (۷)(٥)
۹. $(P\supset Q)\supset[(Q\supset R)\supset(P\supset R)]$	قضیه PL
۱۰. $\{\Box P\supset\Box[\Box(P\wedge\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\}\supset\{\{\Box[\Box(P\wedge\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\supset\Box(P\wedge\Box P)\}\supset[\Box P\supset\Box(P\wedge\Box P)]\}$	ج(۹)
۱۱. $\{\Box[\Box(P\wedge\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\supset\Box(P\wedge\Box P)\}\supset[\Box P\supset\Box(P\wedge\Box P)]$	و.م (۸)(۱۰)

و.م (۲)(۱۱)	.۱۲ $\Box P\supset\Box(P\wedge\Box P)$
جاگ (۷)(۱۲)	.۱۳ $\Box P\supset(\Box P\wedge\Box\Box P)$
قضیه PL	.۱۴ $[P\supset(P\wedge Q)]\supset(P\supset Q)$
ج (۱٤)	۱۵. $[\Box P\supset(\Box P\wedge\Box\Box P)]\supset(\Box P\supset\Box\Box P)$
و.م (۱۲)(۱۵)	.۱۶ $\Box P\supset\Box\Box P$

علاوه بر قضایای K4، قضایای زیر در GL قابل اثباتند:[6]

$$\vdash_{GL} \Box P\vee\Diamond\Box P$$

$$\vdash_{GL} \Box{\sim}\Box P\supset\Box Q$$

$$\vdash_{GL} \Box(\Box P\supset P)\equiv\Box P$$

$$\vdash_{GL} \Box\bot\equiv\Box\Diamond P$$

$$\vdash_{GL} \Diamond T\equiv\Diamond\Box P$$

$$\vdash_{GL} {\sim}\Box\Box\bot\supset(\Box P\vee\Box{\sim}P)$$

$$\vdash_{GL} (\Diamond{\sim}P\wedge\Diamond P)\supset\Diamond\Diamond T$$

$$\vdash_{GL} \Box[(\Box P\supset P)\supset{\sim}\Box\Box\bot]\supset\Box\Box\bot$$

$$\vdash_{GL}\Box[\bigwedge_{i=0}^{n}(\Box\phi_i\supset\phi_i)\supset\Diamond^{n+1}T]\supset[\Diamond^{n+1}T\supset\bigwedge_{i=0}^{n}(\Box\phi_i\supset\phi_i)]$$

از جمله قواعد فرعی سیستم اصل موضوعی GL می‌توان به قواعد زیر اشاره نمود ($k, n \in\mathbb{N}$):

R-Löb	RW	R_1
$\dfrac{\vdash_{GL}\Box\phi\supset\phi}{\therefore\ \vdash_{GL}\phi}$	$\dfrac{\vdash_{GL}\Box\phi\supset\phi}{\therefore\ \vdash_{GL}\Box\phi}$	$\dfrac{\vdash_{GL}(\Box\phi\wedge\phi\wedge\Box\psi)\supset\psi}{\therefore\ \vdash_{GL}\Box\phi\supset\Box\psi}$
R_2	R_3	R_4
$\dfrac{\vdash_{GL}[\bigwedge_{i=1}^{n}(\Box\phi_i\wedge\phi_i)\wedge\Box\psi]\supset\psi}{\therefore\ \vdash_{GL}\bigwedge_{i=1}^{n}\Box\phi_i\supset\Box\psi}$	$\dfrac{\vdash_{GL}[\bigwedge_{i=0}^{n}(\Box\phi_i\supset\phi_i)]\supset(\Box^k P\supset P)}{\therefore\ k\leq n+1}$	$\dfrac{\vdash_{GL}\phi\supset\Diamond^n T}{\therefore\ \vdash_{GL}{\sim}\phi}$

منطق H (KH)

در بخش مقدمه، به تلاش‌های هنکین به عنوان یکی از منطقدانان مؤثر در تأسیس منطق اثبات‌پذیری اشاره شد. منطق اثبات‌پذیری H (برگرفته از نام Henkin) یکی دیگر از منطق‌های اثبات‌پذیری است. پیش‌تر اشاره شد که هنکین می‌خواست بداند آیا می‌توان درباره جملاتی که اثبات‌پذیری خود را اظهار می‌کنند، می‌توان هرچیزی گفت؟ لاب سه سال بعد به این سؤال هنکین با اصل لاب پاسخ داد [Lob, 1955] که در منطق GL دیدیم. اما از آنجایی که حساب پئانو تحت استنتاج توتولوژیک بسته است، یکی از نتایج قضیه لاب این است

که در حساب پئانو به ازای هر جمله B، اگر «معادل‌بودن اثبات‌پذیری B با صدق B» اثبات‌پذیر باشد، آنگاه B اثبات‌پذیر است. صورت فرمال این قضیه در حساب پئانو به صورت زیر است:

$Prov(\ulcorner Prov(\ulcorner B\urcorner)\leftrightarrow B\urcorner)\to Prov(\ulcorner B\urcorner).$

و بنابراین پاسخ به سؤال هنکین «بله» است و بنابراین بولوس صورت فرمال فوق را YES می‌نامد و با برهان زیر نشان می‌دهد که قضیه لاب از YES به دست می‌آید [Boolos, 1993: 148]: (علامت‌های (i)، (ii) و (iii) نشانگر سه شرط لاب برای عملگر اثبات‌پذیری (Prov) است که در مقدمه بیان شد)

۱. $\vdash_{PA} Prov(\ulcorner A\urcorner)\to A$	فرض
۲. $\vdash_{PA} Prov(\ulcorner Prov(\ulcorner A\urcorner)\urcorner\to Prov(\ulcorner A\urcorner))$	(i)و(ii) (۱)
۳. $\vdash_{PA} Prov(\ulcorner A\urcorner) \to Prov(\ulcorner Prov(\ulcorner A\urcorner)\urcorner)$	(iii) (۲)
۴. $\vdash_{PA} Prov(\ulcorner A\urcorner) \leftrightarrow Prov(\ulcorner Prov(\ulcorner A\urcorner)\urcorner$	م& و تع$\leftrightarrow$ (۲)(۳)
۵. $\vdash_{PA} Prov(\ulcorner A\urcorner)$	YES (۴)
۵. $\vdash_{PA} A$	و.م (۱)(۵)

حال به شیوه‌ای شبیه کار اسمیلی در ۱۹۶۳، با با جایگزینی عملگر □ به‌جای Prov، اصل H به دست می‌آید:

$H: \Box(\Box P\equiv P)\supset \Box P$

سیستم اصل موضوعی H با افزودن اصل H به سیستم K به دست می‌آید:

$GL: K + H: \Box\ (\Box P\equiv P)\supset \Box P$

زبان این منطق همان زبان منطق موجهات نرمال K است، با این تفاوت که در این منطق نیز مانند GL، ادات ضرورت به صورت «اثبات‌پذیری در T» تعبیر می‌شود. این سیستم زیرسیستم GL است و سیستم GL را می‌توان با توسیع H به دست آورد. هیچ کدام از اصول 4 و Löb قضیه این سیستم نیستند:

$\nvdash_{H} \Box P\supset\Box\Box P$

$\nvdash_{H} \Box\ (\Box P\supset P)\supset\Box P$

اگر قضیه YES و Löb را به صورت دو قاعده زیر فرمول‌بندی کنیم و به ترتیب نام‌های YR و R-Löb بر آن‌ها بگذاریم، استنتاج سیستم H بسته تحت قاعده YR است، اما بسته تحت قاعده LR نیست:

R-Löb	YR
$\dfrac{\vdash_{GL} \Box\phi\supset\phi}{\therefore\ \vdash_{GL} \phi}$	$\dfrac{\vdash_{H} \Box\phi\equiv\phi}{\therefore\ \vdash_{H} \Box\phi}$

GL را می‌توان با افزودن هر یک از دو قاعده فوق به K4 یا افزودن هر یک از دو اصل Löb یا H به K4 به دست آورد. اما از آنجایی که سیستم K4 سیستمی خیلی قوی برای ساختن GL و نیز H است و در آن امکان تمایز بین دو اصل Löb و H و صورت قاعده‌ای آن‌ها (R-Löb و YR) نیست، بنابراین ضعیف‌ترین سیستم نرمال موجهاتی یعنی K برای ساخت این دو سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد [Boolos, 1993: 149].

از جمله قضایای H قضیه زیر است:

$$\vdash_{H} \Box(\Box P\supset\Box\Box P)\supset(\Box P\supset\Box\Box P)$$

برای سهولت و کوتاه‌شدن طول برهان، کوته‌نوشت تعریفی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Q =_{df} \Box(\Box P\supset\Box\Box P)$$

- برهان:

۱. $Q\supset\Box[(P\wedge\Box P)\supset(\Box P\wedge\Box\Box P)]$	قضیه K
۲. $\Box P\supset\Box[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]$	قضیه K
۳. $(P\supset R)\supset\{(S\supset T)\supset[P\supset[S\supset(R\wedge T)]]\}$	قضیهPL
٤. $\{Q\supset\Box[(P\wedge\Box P)\supset(\Box P\wedge\Box\Box P)]\}\supset\{\{\Box P\supset\Box[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\}\supset\{Q\supset\{\Box P\supset\{\Box[(P\wedge\Box P)\supset(\Box P\wedge\Box\Box P)]\wedge\Box[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\}\}\}\}$	ج (۳)
۵. $\{\Box P\supset\Box[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\}\supset\{Q\supset\{\Box P\supset\{\Box[(P\wedge\Box P)\supset(\Box P\wedge\Box\Box P)]\wedge\Box[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\}\}\}$	و.م (۱)(٤)
٦. $Q\supset\{\Box P\supset\{\Box[(P\wedge\Box P)\supset(\Box P\wedge\Box\Box P)]\wedge\Box[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\}\}$	و.م (۲)(۵)
۷. $[(P\supset R)\wedge(R\supset P)] \equiv (P \equiv R)$	قضیه PL
۸. $\{[(P\wedge\Box P)\supset(\Box P\wedge\Box\Box P)]\wedge[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\} \equiv [(P\wedge\Box P)\equiv(\Box P\wedge\Box\Box P)]$	ج(۷)
۹. $\Box\{[(P\wedge\Box P)\supset(\Box P\wedge\Box\Box P)]\wedge[(\Box P\wedge\Box\Box P)\supset(P\wedge\Box P)]\}\equiv\Box[(P\wedge\Box P)\equiv(\Box P\wedge\Box\Box P)]$	(۸) DR2
۱۰. $Q\supset\{\Box P\supset\Box[(P\wedge\Box P)\equiv(\Box P\wedge\Box\Box P)]\}$	جاگ (۹)(٦)
۱۱. $\Box(P\wedge Q) \equiv (\Box P\wedge\Box Q)$	قضیه K
۱۲. $\Box(P\wedge\Box P) \equiv (\Box P\wedge\Box\Box P)$	ج (۱٤)
۱۳. $Q\supset\{\Box P\supset\Box[(P\wedge\Box P)\equiv\Box(P\wedge\Box P)]\}$	جاگ (۱۲)(۱۰)
۱٤. $Q\supset[\Box P\supset\Box(P\wedge\Box P)]$	نتیجه (۱۳)
۱۵. $Q\supset(\Box P\supset\Box\Box P)$	نتیجه (۱٤)

منطق *Grz* و *S4Grz*

منطق اثبات‌پذیری Grz (برگرفته از نام Andrzej Grzegorczyk) یکی دیگر از منطق‌های اثبات‌پذیری است. زبان این منطق با افزودن ادات $\boxdot$ به‌جای تمام موارد $\Box$ (نقطه‌دارکردن تمام باکس‌های ضرورت) در زبان K و سایر توسیع‌هایش به دست می‌آید. تعریف این ادات به صورت زیر است:

$$\boxdot\phi =_{df} \Box\phi \wedge \phi$$

و این معنا از اثبات‌پذیری، به معنی «هم اثبات‌پذیربودن و هم صادق‌بودن» است. به عبارت دیگر، ادات □ به صورت ⊡ تعبیر می‌شود. بدیهی است که نتیجه این تعبیر از ضرورت، توتولوژی‌شدن $\boxdot P\supset P$ خواهد بود. همچنین قضایای زیر در K و K4 و نیز قاعده زیر در K4 برقرار خواهد بود:

$\vdash \boxdot P\supset P$

$\vdash_{K} \boxdot(P\supset Q)\supset(\boxdot P\supset\boxdot Q)$

$\vdash_{K4} \boxdot P\supset\boxdot\boxdot P$

$$\frac{\vdash_{K4} \phi \qquad \vdash_{K4} \Box\phi}{\therefore \vdash_{K4} \boxdot\phi}$$

همچنین هر سه قاعده ضرورت، وضع مقدم و جانشینی با نقطه‌دارکردن تمام باکس‌های ضرورت در سیستم K و توسیع‌هایش برقرارند. از جمله نتایج جالب دیگر این تعبیر از ضرورت، این است که با نقطه‌دارکردن تمام باکس‌های ضرورت، هر قضیه S4 قضیه K4 خواهد بود.

سیستم استنتاجی اصل موضوعی Grz با افزودن اصل J1 به دست می‌آید:

$Grz=K+J1: \boxdot[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset P]\supset P$

T و 4 از جمله قضایای این سیستم هستند:

$\vdash_{Grz} \boxdot P\supset P$

۱. $P\supset[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset P]$	قضیه K
۲. $\boxdot P\supset\boxdot[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset P]$	DR1 (۱)
۳. $\boxdot[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset P]\supset P$	اصل1
٤. $(P\supset Q)\supset[(Q\supset R)\supset(P\supset R)]$	قضیه PL
٥. $\{\boxdot P\supset\boxdot[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset P]\}\supset\{\{\boxdot[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset P]\supset P\}\supset(\boxdot P\supset P)\}$	ج(٤)
٦. $\{\boxdot[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset P]\supset P\}\supset(\boxdot P\supset P)$	و.م (۵)(۲)
۷. $\boxdot P\supset P$	و.م (۵)(۳)

$\vdash_{Grz} \boxdot P\supset\boxdot\boxdot P$

برای اثبات این قضیه و کوتاه‌شدن طول برهان، ابتدا دو تعریف زیر را در نظر می‌گیریم:

$Q =_{df} \boxdot P\supset\boxdot\boxdot P$

$R =_{df} Q \wedge P$

و بنابراین داریم $R\supset P$ و $R\supset Q$ که در سطرهای ۳ و ۲۳ برهان زیر از آن استفاده کردیم. (*)

همچنین در K و توسیع‌هایش با تعبیر ضرورت جدید (و نیز با تعبیر عادی ضرورت) استدلال معتبر زیر را داریم: (**)

$$\vdash_K \boxdot(\phi\supset\psi)$$
$$\vdash_K \theta\supset\boxdot(\phi\supset\gamma)$$
$$\therefore \vdash_K \theta\supset\boxdot[\phi\supset(\phi\wedge\gamma)]$$

برهان:

۱. $\{[(\boxdot P\supset\boxdot\boxdot P)\wedge P]\supset\boxdot P\}\supset(P\supset\boxdot P)$	قضیه K
۲. $(R\supset\boxdot P)\supset(P\supset\boxdot P)$	ج (۱)
۳. $R\supset P$*	
٤. $\boxdot R\supset\boxdot P$	(۳)DR1
۵. $(R\supset\boxdot R)\supset(P\supset\boxdot P)$	منتج از ۳ و ۴
۶. $\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset\boxdot(P\supset\boxdot P)$	(۵)DR1
۷. $\boxdot(P\supset Q)\supset(\boxdot P\supset\boxdot Q)$	اصل K
۸. $\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset(\boxdot P\supset\boxdot\boxdot P)$	ج (۷)
۹. $(P\supset Q)\supset[(Q\supset R)\supset(P\supset R)]$	قضیه PL
۱۰. $\{\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset\boxdot(P\supset\boxdot P)\}\supset\{[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset(\boxdot P\supset\boxdot\boxdot P)]\supset[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset(\boxdot P\supset\boxdot\boxdot P)]\}$	ج(۹)
۱۱. $[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset(\boxdot P\supset\boxdot\boxdot P)]\supset[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset(\boxdot P\supset\boxdot\boxdot P)]$	و.م (۱۰) (۶)
۱۲. $\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset(\boxdot P\supset\boxdot\boxdot P)$	و.م (۱۱)(۸)
۱۳. $\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset Q$	تع
۱۴. $\boxdot[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset Q]$	ض (۱۳)
۱۵. $\boxdot P\supset\boxdot[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset P]$	قضیه K
۱٦. $\boxdot P\supset\boxdot[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset(P\wedge Q)]$	** (١٤)(١٥)
۱۷. $\boxdot P\supset\boxdot[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset R]$	تع
۱۸. $\boxdot[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset P]\supset P$	J1
۱۹. $\boxdot[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset R]\supset R$	ج (۱۸)
۲۰. $\{\boxdot P\supset\boxdot[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset R]\}\supset\{\{\boxdot[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset R]\supset R\}\supset(\boxdot P\supset R)\}$	ج(۹)
۲۱. $\{\boxdot[\boxdot(R\supset\boxdot R)\supset R]\supset R\}\supset(\boxdot P\supset R)$	و.م (۱۷)(۲۰)
۲۲. $\boxdot P\supset R$	و.م (۱۹)(۲۱)

۲۳. R⊃Q*

۲٤. R ⊃(⊡P⊃⊡⊡P) تع

.۲۵(⊡P⊃R)⊃{[R⊃(⊡P⊃⊡⊡P)]⊃[⊡P⊃(⊡P⊃⊡⊡P)]} ج (۹)

۲٦. [R⊃(⊡P⊃⊡⊡P)]⊃[⊡P⊃(⊡P⊃⊡⊡P)] و.م (۲۲)(۲۵)

۲۷. ⊡P⊃(⊡P⊃⊡⊡P) و.م (۲٤)(۲٦)

۲۸. [P⊃(P⊃Q)]⊃(P⊃Q) قضیه PL

.۲۹ [⊡P⊃(⊡P⊃⊡⊡P)]⊃(⊡P⊃⊡⊡P) ج (۲۸)

۳۰. ⊡P⊃⊡⊡P و.م (۲۷)(۲۹)

سیستم S4Grz نیز با افزودن اصل J1 به S4 و نیز نقطه‌دارکردن تمام باکس‌های ضرورت S4 به دست می‌آید. این سیستم به درستی توسیع S4 است، زیرا J1 حتی قضیه S5 هم نیست [Boolos, 1993: 156] و مدل نقض آن در بخش سمانتیک جهان ممکنی ارائه خواهد شد.

نظریه برهان حساب رشته‌ای

گودل در یادداشت ۱۹۳۳، به دنبال یک سمانتیک ریاضیاتی برای منطق شهودی (در تناظر با S4) است. منتها همان‌طور که او اشاره می‌کند که جهات در S4 قابل تعبیر به صورت اثبات‌پذیری فرمال حساب پئانو نیستند. به عنوان مثال، ⊥⊃⊥☐ یکی از قضایای S4 است که اگر نماد موجهه ضرورت (☐) را که به صورت «در حساب پئانو اثبات‌پذیر است» در نظر بگیریم، بیانگر سازگاری حساب پئانو (PA) خواهد بود و حال آنکه بر مبنای قضیه دوم ناتمامیت گودل، این سازگاری PA در PA قابل اثبات نخواهد بود. همچنین (⊥⊃⊥☐)☐ یکی از قضایای S4 است که با تعبیر فوق و بر مبنای قضیه ناتمامیت دوم گودل، بیانگر اثبات‌پذیری ادعای اثبات‌پذیری PA است که نه تنها در PA اثبات‌پذیر نیست، بلکه در مدل استاندارد حساب، صادق نیست. لااقل دو سؤال باز در این‌جا مطرح شده است:

۱) آیا سیستم تمامی هم برای PA و هم برای مدل استاندارد حساب می‌توان یافت؟

۲) آیا سمانتیک حسابی برای منطق شهودی و S4 می‌توان یافت؟

اولین سؤال که مدّ نظر ما در این بخش است، توسط سالوی در ۱۹۷۶ پاسخ داده شد [Solovay, 1976]؛ او در این مقاله، با اثبات تمامیت دو منطق موجهات GL (برای PA) و GLS (برای مدل استاندارد حساب) این مسأله را حل نمود. مسأله دوم هم در منطق برهان‌های [۷] آرتموف در کتاب Operational modal logic حل شد.

چندین حساب رشته فاقد برش برای GL در کارهای والنتینی [Valentini, 1983]، آورن [Avron, 1984]، برایتون [Brighton, 2016]، بورگا [Borga, 1983]، گوری و رامانایک [Gor´e & Ramanayak, 2012] و ساساکی [Sasaki, 2001] ارائه شده و سمانتیک آن نیز توسط سامبین و والنتینی [Sambin & Valentini, 1982] و آورن [Avron, 1984] معرفی شده است. اما در زمینه نظریه برهان GLS مطالعه‌ای انجام نشده بود تا اینکه کوشیدا [Kushida 2019] برای این منطق یک حساب رشته معرفی کرد که توسیعی از حساب رشته‌های استاندارد GL است. در این بخش به اختصار به معرفی حساب رشته‌های GLS می‌پردازیم.

حساب رشته‌های *GLS*

کوشیدا با معرفی دو نوع رشته برای محمول اثبات‌پذیری در GL و GLS این حساب رشته‌ها را طراحی نمود. واژگان زبان این حساب عبارتند از مجموعه نامتناهی و شمارا نمادهای فرمولی ... ,A, A', A'',..., B, B', B''، ادات‌های ⊃، □ و ثابت ⊥. حال اگر Γ و Δ مالتی ست‌هایی از فرمول‌های این زبان باشد، رشته‌ها دارای دو فرم $\Gamma\rightarrow\Delta$ و $\Gamma\Rightarrow\Delta$ بوده و → و ⇒ به ترتیب نمایانگر اثبات‌پذیری و نماد انتاج ⊢[8] در GL و GLS هستند. اصول موضوعه (رشته‌های آغازین) در این حساب عبارتند از:

$A \rightarrow A$

$\bot, \Gamma \rightarrow \Delta$

$A \Rightarrow A$

$\bot,\Gamma \Rightarrow \Delta$

و قواعد منطقی در این حساب با رشته‌های چند نتیجه‌ای عبارتند از:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{A \supset B\ \Gamma \rightarrow \Delta,}\ \rightarrow\supset \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, AB, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Delta}\ \supset\rightarrow$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{A \supset B\ \Gamma \Rightarrow \Delta,}\ \Rightarrow\supset \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, AB, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \supset\Rightarrow$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A\ \Gamma \rightarrow \Delta,}\ \rightarrow \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}\ \rightarrow$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A\ \Gamma \Rightarrow \Delta,}\ \Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \Rightarrow$$

$$\frac{\Box\Gamma, \Delta, \Box A \rightarrow A}{\Box\Gamma, \Box\Delta \rightarrow \Box A}\ \rightarrow\Box \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \Box\rightarrow\Rightarrow$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box A\, , \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \Box\!\Rightarrow \qquad \frac{\Box\Gamma, \Delta\, , \Box A \rightarrow A}{\Box\Gamma,\, \Box\Delta \Rightarrow \Box A}\ \rightarrow\Rightarrow\Box$$

قواعد ساختاری این حساب نیز شامل قواعد راست و چپ انقباض (c) و تضعیف (w) و قاعده برش (cut) برای هر کدام از دو نوع رشته است:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A}\ \rightarrow c \qquad \frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}\ c \rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ \Rightarrow c \qquad \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ c \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta\, , A}\ \rightarrow w \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}\ w \rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta\, , A}\ \Rightarrow w \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ w \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A A, \Pi \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Theta}\ \Rightarrow cut \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A A, \Pi \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Theta}\ \rightarrow cut$$

رشته → به معنای نماد انتاج در GL است و هرگاه یک برهان در GLS مشتمل بر کاربردی از قاعده □→ نباشد، می‌توان آن را به عنوان برهان در حساب رشته‌های GL در نظر گرفت و می‌توان هر ⇒ در برهان را به → تبدیل نمود.

جملات گودلی (Gödel sentences)، جملاتی هستند که در آن‌ها یک فرمول موجهه مانند ∇A به این صورت تعبیر می‌شود که فرمول A در مدل استاندارد صادق است، اما در PA اثبات‌پذیر نیست و بنابراین جمله گودلی است. کوشیدا (۲۰۱۰) نشان داد که به ازای هر جمله گودلی، اثبات‌پذیری هر تعبیر ریاضی آن جمله در PA منطبق بر صدق هر تعبیر ریاضی از آن جمله در مدل استاندارد است و بنابراین با استفاده از روش تبدیل برهان[9] گودلی می‌توان نشان داد حساب GLS با حذف قاعده برش، نسبت به جملات گودلی با حساب GL معادل است [Kushida, 2019: 859; Kushida, 2010: 583].

سمانتیک

سمانتیک جهان ممکنی GL

سمانتیک جهان ممکنی GL همچون سایر نظام‌های موجهاتی نرمال گزاره‌ای، همان سمانتیک کریپکی است. ساختار موجهه (فریم) GL را با نماد $\mathcal{F}_{GL}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathcal{F}_{GL} = \langle W,R \rangle$$

و مدل GL سه‌تایی زیر است:

$$M_{GL} = \langle \mathcal{F}_{GL}, R \rangle = \langle W,R,V \rangle$$

که در آن W مجموعه‌ای ناتهی از جهان‌های ممکن و V تابع ارزش‌دهی است که به ازای هر جهان عضو W، به هر متغیر گزاره‌ای یک ارزش صدق اسناد می‌دهد. R نیز رابطه دسترسی بین جهانی با ویژگی‌های «ناانعکاسی»، «تعدی» و «تناهی عام (اتصال قوی)» است. تناهی عام تعریف فرمال در زبان مرتبه اول ندارد، لیکن ترکیب «ناانعکاسی+تناهی» معادل «عکس خوش‌بنیادی رابطه R»[10] است که به صورت زیر تعریف می‌شود [Boolos, 1993: xix]:

«رابطه R خوش‌بنیاد است، اگر و تنها اگر هیچ رشته نامتناهی از $w_0, w_1, w_2, \ldots$ وجود نداشته باشد که $\ldots w_2 \mathrel{R} w_1 \mathrel{R} w_0$ »

در بعضی آثار، به‌جای اصطلاح تناهی برای ویژگی ساختار موجهه GL، از اصطلاح ساختار موجهه نوتری (Noetherian Frame) نیز استفاده شده است [Negri, 2014: 20]. یک ساختار موجهه نوتری است، اگر و تنها اگر هیچ زنجیره از جهان‌ها با رابطه دسترسی R تا ابد ادامه پیدا نکند (هر زنجیره‌ای از جهان‌ها متناهی باشد).

قواعد سمانتیکی ادات‌ها نیز عیناً همان قواعد سمانتیکی سیستم K است [Nabavi, 2004: 67]. منتها از آنجایی که ادات □ در GL به صورت اثبات‌پذیری تعبیر می‌شود، قاعده سمانتیکی آن ذکر می‌شود:

$$\underset{M}{\overset{w}{\vDash}} \Box\phi \text{ ا.ت.ا } \forall w' \in W(wRw' \Rightarrow \underset{M}{\overset{w'}{\vDash}} \phi)$$

که بدین معناست که ϕ اثبات‌پذیر در مدل M و جهان w است، اگر و تنها اگر به ازای هر جهانی که w به آن دسترسی دارد، ϕ در مدل M و در آن جهان صادق باشد. یکی از نتایج تریویال قاعده فوق این است که به دلیل

ساختار مشروطه این قاعده معنایی، به انتفای مقدم هم معتبر است و بنابراین اگر w به هیچ جهان دیگری دسترسی نداشته باشد، به انتفای مقدم این قاعده سمانتیکی، ϕ در w اثبات‌پذیر خواهد بود.

سمانتیک جهان ممکنی Grz و S4Grz

مدل Grz نیز مانند GL به صورت سه‌تایی مرتب زیر است:

$M_{Grz} = \langle \mathcal{F}_{Grz}, R\rangle = \langle W,R,V\rangle$

ویژگی‌های R «انعکاسی»، «تعدی» و «تناهی عام» و «ضدتقارنی» است. تعریف ویژگی ضدتقارنی به صورت زیر است:

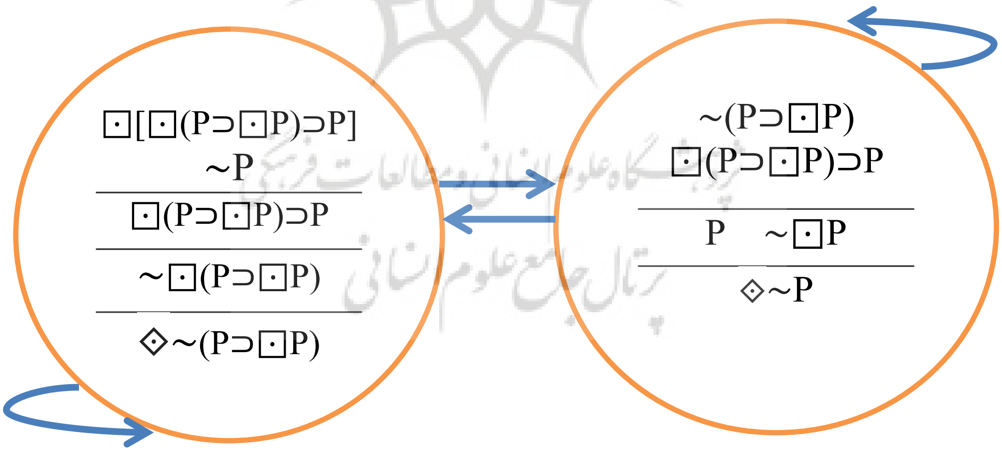
$\forall w \in W\ \forall w' \in W[(wRw' \,\&\, w'Rw) \Rightarrow w = w']$

به مجموع دو ویژگی «تناهی» و «ضدتقارنی»، عکس خوش‌بنیادی ضعیف (Converse Weakly Wellfounded) گفته می‌شود: «رابطه R دارای ویژگی عکس خوش‌بنیادی ضعیف است اگر به ازای هر مجموعه غیرتهی X، یک عضو R-ماگزیمال از X وجود داشته باشد» و عضو R-ماگزیمال از X هم عبارت است از: «عضو w از X که به ازای هیچ عضو x از X به‌جز w نداشته باشیم wRx.» [Boolos, 1993: 56].

مدل سیستم S4Grz دقیقاً مشابه Grz است و این دو سیستم استنتاجاً معادل هستند. پیش‌تر در بخش اصل موضوعی گفته شد $\boxdot[\boxdot(P\supset\boxdot P)\supset P]\supset P$ نه تنها قضیه S4 نیست، بلکه قضیه S5 هم نیست. مدل نقض این اصل در S5، مدل هم‌ارزی به صورت زیر است:

W: $\{w_1, w_2\}$

R: $\{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_2, w_2\rangle\}$



سمانتیک جهان ممکنی H

ساختار موجهه و مدل سیستم H، دقیقاً مانند مدل GL است و رابطه R نیز در این سیستم مانند GL دارای ویژگی‌های «عکس خوش‌بنیادی» و «متعدی» است.

H و GL در ساختار موجهه‌های یکسانی معتبرند. یعنی «هر ساختار موجهه H، ساختار موجهه GL است و بالعکس». سمت اول بدیهی است و مشخص است که در هر ساختار موجهی که $\Box(\Box P\equiv P)\supset\Box P$ معتبر

است، $\Box(\Box P\supset P)\supset\Box P$ نیز معتبر است. اما طرف دوم نیاز به اثبات دارد که در اثبات ناتمامیت H به آن پرداخته می‌شود [Boolos, 1993: 150-153].

فراقضایا

فراقضایا احکامی در مورد یک سیستم فرمال هستند که در فرازبان اثبات می‌شوند. برخلاف قضایا که در یک سیستم مشخص فرمال اثبات می‌شوند، فراقضایا در چارچوب یک فرانظریه اثبات می‌شوند.

از جمله فراقضایای مهم در منطق، فراقضایای صحت (و فراقضیه فرعی سازگاری)، تمامیت و تصمیم‌پذیری است. هر سه سیستم GL، H و Grz (و نیز S4Grz) سازگار و صحیح هستند. در این بخش ابتدا برای نمونه اثبات فراقضیه صحت GL و سازگاری آن ارائه خواهد شد و پس از آن اثبات تمامیت GL تقریر خواهد شد.

صحت و سازگاری

هر سه سیستم GL، H و Grz (و نیز S4Grz) سازگار و صحیح هستند. در این بخش برای اختصار تنها اثبات صحت GL و سازگاری آن ذکر می‌شود [Boolos, 1993]. اما سایر سیستم‌ها هم اثبات مشابهی بر اساس ویژگی ساختار موجهه خود خواهند داشت. برای مثال، اثبات صحت H به دلیل ویژگی ساختار موجهه یکسان با GL مشابه با اثبات GL خواهد بود. فراقضیه صحت Grz نیز بر مبنای ویژگی‌های ساختاری «انعکاسی»، «تعدی» و «عکس خوش‌بنیادی ضعیف» تا حد زیادی مشابه با GL است.

صحت *GL*

راه‌کار اثبات صحت GL (و H)، با استقراء بر عکس رابطه R است [Boolos, 1993: 75].

رابطه R خوش‌بنیاد است، اگر به ازای هر مجموعه ناتهی X، یک عضو R-حداقل از X وجود داشته باشد؛ یعنی عضو w از X که به ازای هیچ x از اعضای X، xRw. رابطه R خوش‌بنیاد عکس است، اگر به ازای هر مجموعه ناتهی X، یک عضو R-حداکثر از X وجود داشته باشد؛ یعنی عضو w از X که به ازای هیچ x از اعضای X، wRx. در نتیجه، اگر R خوش‌بنیاد عکس باشد، R غیرانعکاسی خواهد بود، زیرا اگر wRw، مجموعه {w} یک مجموعه ناتهی با هیچ عضو R-حداکثر است.

فراقضیه صحت GL: «اگر $\vdash_{GL}\phi$، آنگاهϕ در هر ساختار متعدی و عکس خوش‌بنیادی معتبر است و همچنین ϕ در هر ساختار متناهی متعدی و غیرانعکاسی معتبر است.»

اثبات: با اثبات دو قضیه I و II زیر، صحت GL اثبات می‌شود.

فرا قضیه I: «$\Box(\Box P\supset P)\supset\Box P$ در ساختار موجهه $\langle W,R\rangle$ معتبر است، اگر و تنها اگر R دارای ویژگی‌های تعدی و عکس خوش‌بنیادی باشد.»

اثبات طرف اول:

برای تعدی: فرض می‌کنیم که $\Box(\Box P\supset P)\supset\Box P$ (برای جمله‌نشانه‌ها که اتمی هستند) در $\langle W,R\rangle$ معتبر است. پس با قاعده جانشنی (که اعتبارنگه‌دار است)، تمام گزاره‌های $\Box(\Box\phi\supset\phi)\supset\Box\phi$ در این ساختار معتبر

بوده و بنابراین تمام قضایای GL در ساختار موجهه ⟨W,R⟩ معتبرند. حال از آنجایی که 4 قضیه GL است، $\Box P \supset \Box\Box P$ در این ساختار معتبر است و بنابراین این ساختار متعدّی خواهد بود.

برای عکس خوش‌بنیادی: فرض می‌کنیم که یک مجموعه ناتهی X با هیچ عضو R-حداکثر وجود دارد. فرض می‌کنیم w∈X و V تابع ارزش‌دهی بر روی W باشد (در مدل M=⟨W,R,V⟩) که به هر جهان a∈W یک گزاره اتمی P اسناد می‌دهد که: $\overset{M}{\underset{a}{\vDash}} P$ ا.ت.ا a∉W. حال با برهان خلف نشان می‌دهیم که فرض $\underset{w}{\vDash} \Box(\Box P \supset P)$ و $\underset{w}{\nvDash} \Box P$، با اعتبار $\Box(\Box P \supset P) \supset \Box P$ در ساختار موجهه ⟨W,R⟩ به تناقض می‌انجامد.

با فرض اینکه wRx، نتیجه می‌شود: w∈W. با فرض اینکه $\underset{x}{\nvDash} P$، آنگاه چنین نیست که $\overset{M}{\underset{x}{\vDash}} P$ و x∈X. بنابراین به ازای لااقل یک y∈X که xRy و y∈W، چنین نخواهد بود که: $\overset{M}{\underset{y}{\vDash}} P$ و $\underset{y}{\nvDash} P$؛ بنابراین $\underset{x}{\nvDash} \Box P$. در نتیجه خواهیم داشت: $\underset{x}{\vDash} \Box P \supset P$ و $\underset{w}{\vDash} \Box(\Box P \supset P)$.

حال از آنجایی که w∈X، به ازای لااقل یک x∈X خواهیم داشت: wRx و x∈W. بنابراین چنین نخواهد بود که: $\overset{M}{\underset{x}{\vDash}} P$ و $\underset{x}{\nvDash} P$ و بنابراین خواهیم داشت: $\underset{w}{\nvDash} \Box P$.

اثبات طرف دوم:

فرض می‌کنیم که ⟨W,R⟩ ساختار موجهه متعدی و خوش‌بنیاد عکس باشد و در مدل M=⟨W,R,V⟩ داریم: $\underset{w}{\nvDash} \Box P$. همچنین فرض می‌کنیم $X=\{x \in W: wRx \;\&\; \underset{x}{\nvDash} P\}$. از آنجایی که $\underset{w}{\nvDash} \Box P$، به ازای لااقل یک z داریم wRz و $\underset{z}{\nvDash} P$. بنابراین z∈X و X هم می‌دانیم که ناتهی است و بنابراین بر اساس عکس خوش‌بنیادی خواهیم داشت: به ازای لااقل یک x∈X، به ازای هیچ y در X نخواهیم داشت xRy. از آنجایی که x∈X، خواهیم داشت: wRx و $\underset{x}{\nvDash} P$.

حال با فرض xRy خواهیم داشت y∉X و بنابراین از آنجایی که wRy بر اساس ویژگی تعدی خواهیم داشت: $\underset{y}{\vDash} P$. بنابراین خواهیم داشت: $\underset{x}{\vDash} \Box P$، $\underset{x}{\nvDash} \Box P \supset P$ و $\underset{w}{\nvDash} \Box(\Box P \supset P)$. در نتیجه اثبات می‌شود که $\Box(\Box P \supset P) \supset \Box P$ در ساختار موجهه ⟨W,R⟩ معتبر است.

فرا قضیه II: فرض کنید ساختار موجهه F=⟨W,R⟩ دارای ویژگی‌های تناهی و تعدّی باشد. آنگاه F ناانعکاسی است، اگر و تنها اگر دارای ویژگی عکس خوش‌بنیادی باشد.»

اثبات طرف اول:

پیش‌تر دیدیم اگر R خوش‌بنیاد عکس باشد، R غیرانعکاسی خواهد بود، زیرا اگر wRw، مجموعه {w} یک مجموعه ناتهی با هیچ عضو R-حداکثر است.

اثبات طرف دوم:

فرض می‌کنیم F ساختار ناانعکاسی باشد. حال اگر $x_1,\dots, x_n$ رشته‌ای از اعضای W باشد که به ازای هر $i < n$، x_iRx_{i+1}، آنگاه اگر $i < j$، $x_i \neq x_j$. در غیر این صورت، $x_j = x_i$ که بر اساس تعدی خواهیم داشت که x_iRx_j،

متناقض با ویژگی ناانعکاسی است. حال فرض می‌کنیم F دارای ویژگی عکس خوش‌بنیادی نباشد. فرض می‌کنیم X یک زیرمجموعه ناتهی از W باشد به‌طوری که:

$$\forall w \in X\ \exists x \in X\ (wRx)$$

بنابراین با استقراء روشن می‌شود که به ازای هر n مثبت، یک رشته $x_1, \dots, x_n$ از اعضای X وجود دارد که به ازای هر $i < n$، $x_i R x_{i+1}$. بنابراین به ازای هر n، لااقل تعداد n عضو از $X \subseteq W$ وجود دارد. بنابراین W نامتناهی خواهد بود که تناقض است.

□

سازگاری *GL*

کرسول و هیوز به سه معنا از سازگاری در سیستم‌های اصل موضوعی اشاره می‌کنند [Hughes & Cresswell, 1997]:

تعریف اول: یک سیستم اصل موضوعی سازگار است، ا.ت.ا چنین نباشد که هر فرمول خوش‌ساختی (فخس) قضیه آن باشد (: لااقل یک فخس قضیه آن نباشد.) و یک سیستم ناسازگار است، ا.ت.ا تمام فخس‌ها قضایای آن باشند.

تعریف دوم: یک سیستم سازگار است، ا.ت.ا هیچ متغیّری در آن قضیه نباشد.

تعریف سوم: یک سیستم سازگار است، ا.ت.ا هیچ فخس و نقیض آن توأمان قضیه آن سیستم نباشند.

کرسول و هیوز تعریف اول را انتخاب نموده و نشان می‌دهند دو تعریف دیگر ارائه شده برای سیستم‌های مشتمل بر اصول موضوعه PC و نیز قواعد جانشینی و وضع مقدم، معادل با تعریف اول است.

دلیل معادل‌بودن تعریف دوم با تعریف اول این است که اولاً اگر یک متغیر قضیه باشد، بر اساس قاعده جانشینی هر فرمول خوش‌ساختی قضیه خواهد بود و ثانیاً اگر هر فخسی قضیه باشد، آنگاه هر جمله نشانه‌ای قضیه خواهد بود، زیرا یک فخس است.

دلیل معادل‌بودن تعریف سوم با تعریف اول نیز این است که اولاً اگر ϕ و $\sim\phi$ هر دو قضیه یک سیستم باشند، با جانشینی ϕ به‌جای P و هر فخس ψ به‌جای Q در فرمول معتبر کلاسیک $P \supset (\sim P \supset Q)$، می‌توان هر فخس با هر طول فرمولی را به عنوان قضیه به دست آورد. ثانیاً، اگر هر فخسی قضیه باشد، به وضوح هر فخس و نقیض آن قضیه خواهد بود.

از آنجایی که GL (و نیز H و Grz) صحیح هستند، سازگاری GL (و نیز H و Grz) از جمله نتایج صحت آن خواهد بود. بر اساس فراقضیه صحت، به ازای هر قضیه در GL داریم:

$$\underset{GL}{\vdash} \phi \Rightarrow \underset{GL}{\vDash} \phi$$

با جانشینی $\psi \wedge \sim\psi$ به جای ϕ خواهیم داشت:

$$\underset{GL}{\vdash} \psi \wedge \sim \psi \Rightarrow \underset{GL}{\vDash} \psi \wedge \sim \psi$$

و بر مبنای سمانتیک GL می‌دانیم $\underset{\mathrm{GL}}{\nvDash} \psi \wedge\sim \psi$ و بنابراین بر اساس عکس نقیض در شرطی فرازبان ⇐ خواهیم داشت:

$$\underset{\mathrm{GL}}{\nvdash} \psi \wedge\sim \psi$$

تمامیت

سیستم‌های GL و Grz (و نیز S4Grz) تمام هستند و منطق H منطقی ناتمام است. در این بخش برای نمونه اثبات تمامیت GL تقریر خواهد شد.[۱۱]

تمامیت GL

برخلاف بیشتر سیستم‌های موجهات نرمال، GL مدل معیار[۱۲] ندارد و بنابراین روش اثبات تمامیت آن متفاوت خواهد بود. در زیر ابتدا به اثبات این خواهیم پرداخت که GL فاقد مدل معیار است و پس از آن اثبات تمامیت GL بر مبنای ویژگی مدل متناهی ارائه خواهد شد.

<u>فاقد مدل معیاربودن GL</u>

یک سیستم S دارای مدل معیار است، اگر و تنها اگر ساختار موجهه مدل معیار S، ساختار موجهه خود S باشد. اما در مورد GL، هرچند هر قضیه به وضوح در مدل معیار خود معتبر است، اما با تغییر ارزش‌دهی در همان ساختار، دیگر آن قضیه معتبر نخواهد بود.

فراقضیه III. «GL مدل معیار ندارد.»

اثبات: مدل معیار $M=\langle W,R,V\rangle$ و نیز مدل جدید $M^{+}=\langle W^{+},R^{+},V^{+}\rangle$ را برای GL در نظر می‌گیریم:

$W^{+}: W\cup\{w^{*}\}\ ,\ w^{*}\notin W$

$R^{+}: R\cup\{\langle w^{*}, w\rangle: w\in W\}$ (w^{*} به هر $w\in W$ دسترسی دارد.)

$$\overset{M^{+}}{\underset{w}{\vDash}} P \Leftrightarrow \overset{M}{\underset{w}{\vDash}} P,\ w\in W$$

ارزش اسنادی V^{+} نیز به P در جهان w^{*} دلبخواهی خواهد بود. حال از آنجایی که هر $w\in W$ با R^{+} نیز به همان جهان‌ها و تنها همان جهان‌هایی دسترسی دارد که با R نیز دسترسی داشت، با یک استقراء ساده می‌توان نشان داد که به ازای هر ϕ و هر $w\in W$ داریم:

$$\overset{M^{+}}{\underset{w}{\vDash}} \phi \Leftrightarrow \overset{M}{\underset{w}{\vDash}} \phi$$

$$(A)\ \overset{M}{\underset{w^{*}}{\vDash}} \Box\phi \Rightarrow \underset{\mathrm{GL}}{\vdash} \phi$$

(B) $\langle W^{+},R^{+},V^{+}\rangle$ مدلی برای GL است.

اثبات (A): اگر $\overset{M^{+}}{\underset{w^{*}}{\vDash}} \Box\phi$، آنگاه به ازای هر $w\in W$، $\overset{M^{+}}{\underset{w}{\vDash}} \phi$. بنابراین به ازای هر $w\in W$، $\overset{M}{\underset{w}{\vDash}} \phi$. در نتیجه از آنجایی که بنا بر فرض $\langle W,R,V\rangle$ مدل معیار GL است، $\underset{\mathrm{GL}}{\vdash} \phi$.

اثبات (B): از آنجایی که بنا بر فرض $\langle W,R,V\rangle$ مدل معیار GL است، به ازای هر فخس ψ خواهیم داشت:

$$\overset{M}{\underset{w}{\vDash}} \Box(\Box\psi \supset \psi) \supset \Box\psi$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$\overset{M^+}{\underset{w}{\vDash}} \Box(\Box\psi \supset \psi) \supset \Box\psi$$

حال کافی است، نشان دهیم: $\overset{M}{\underset{w^*}{\vDash}} \Box(\Box\psi\supset\psi)\supset\Box\psi$. بنابراین فرض می‌کنیم $\overset{M}{\underset{w^*}{\vDash}} \Box(\Box\psi\supset\psi)$ که بر اساس A خواهیم داشت: $\underset{GL}{\vdash} \Box\psi\supset\psi$:

۱. $\underset{GL}{\vdash} \Box\psi\supset\psi$

۲. $\underset{GL}{\vdash} \Box(\Box\psi\supset\psi)$ ض (۱)

۳. $\underset{GL}{\vdash} \Box(\Box\psi\supset\psi)\supset\Box\psi$ اصل Löb

۴. $\underset{GL}{\vdash} \Box\psi$ (۳)(۲) و.م

۵. $\underset{GL}{\vdash} \psi$ (۱)(۴) و.م

بنابراین به ازای هر w∈W، $\overset{M}{\underset{w}{\vDash}} \psi$ و بنابراین $\overset{M^+}{\underset{w}{\vDash}} \psi$ (به ازای هر w که w^*R^+w). بنابراین: $\overset{M}{\underset{w^*}{\vDash}} \Box\psi$.

حال باید نشان دهیم که GL در هر ساختار موجهه شامل یک جهان انعکاسی نامعتبر است. فرض می‌کنیم F چنین ساختاری و w^* یک جهان انعکاسی در این ساختار باشد. مدل $M^*=\langle F,V\rangle$ که در آن به ازای هر w∈W به‌جز w^*، $\overset{M^*}{\underset{w^*}{\nvDash}} P$ و $\overset{M^*}{\underset{w}{\vDash}} P$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین خواهیم داشت:

(i). $\overset{M^*}{\underset{w^*}{\nvDash}} \Box P$

و بنابراین به انتفای مقدم خواهیم داشت:

(ii). $\overset{M^*}{\underset{w^*}{\vDash}} \Box P\supset P$

از جهتی از آنجایی که P در تمام جهان‌ها به‌جز w^* صادق است، در تمام جهان‌ها به‌جز w^* خواهیم داشت:

(iii). $\overset{M^*}{\underset{w}{\vDash}} \Box P\supset P$

و بر مبنای ii و iii، فرمول $\Box P\supset P$ در تمام جهان‌های w∈W صادق خواهد بود و بنابراین خواهیم داشت:

(iv). $\overset{M^*}{\underset{w^*}{\vDash}} \Box(\Box P\supset P)$

و این در حالی است که بر مبنای i و iv، GL در w^* کاذب است. حال از آنجایی که ساختار موجهه مدل معیار GL شامل جهان انعکاسی هم می‌شود و F نیز چنین ساختار موجهه‌ای بود، در اینجا نشان دادیم که «GL در ساختار موجهه ساختار موجهه خود معتبر نیست!»

تمامیت GL

از آنجایی که مدل معیار در اثبات تمامیت GL کارآیی ندارد، از این ویژگی مدل متناهی[13] برای اثبات تمامیت آن استفاده خواهد شد. سیستم‌هایی که صحت و تمامیت آن‌ها با نظر به یک کلاس از ساختارهای موجهه متناهی اثبات می‌شود را سیستم‌های دارای ویژگی مدل متناهی می‌گویند. سیستم‌های نرمال K، D، T، S4، S5 و GL از جمله سیستم‌های دارای ویژگی مدل متناهی هستند.

راه‌کار اثبات تمامیت GL منطبق بر روش مورد استفاده کرسول و هیوز در کتاب A New Introduction to Moda Logic خواهد بود [Hughes & Cresswell, 1997]. در این روش نشان می‌دهیم اگر هر فرمول درست ساخت ϕ در کلاس C از ساختارهای موجهه ناانعکاسی، متعدی و متناهی معتبر باشد، آنگاه $\underset{GL}{\vdash} \phi$. به صورت معادل (با عکس نقیض) باید نشان دهیم که اگر ϕ قضیه GL نباشد ($\underset{GL}{\nvdash} \phi$)، آنگاه مدلی مانند M مبتنی بر لااقل یکی از ساختارهای کلاس C وجود دارد که در آن به ازای لااقل یک جهان w∈W، ϕ نامعتبر است ($\overset{M}{\underset{w}{\nvDash}} \phi$).

از آنجایی که در بخش قبل هم دیدیم که مدل معیار دارای ویژگی متناهی نیست و نیز از آنجایی که صرفاً هدف کاذب ساختن ϕ است و نه تمام فرمول‌های درست ساخت منطق موجهات، در اینجا با استفاده از بخش‌های درست‌ساخت[14] فرمول ϕ، یک «مدل معیار کوچک»[15] خواهیم ساخت. علت توجه به بخش‌های درست ساخت فرمول نیز این است که ارزش صدق یک فرمول درست ساخت مانند ϕ در منطق موجهات مبتنی بر بخش‌های درست‌ساخت آن، یا زیرفرمول‌های آن است. برای مثال در فخس □(□P⊃P)⊃□P بخش‌های درست‌ساخت علاوه بر خود فرمول، عبارتند از:

□(□P⊃P) , □P⊃P , P , □P

اما مثلاً ⊃□P)□ یک بخش غیرخوش‌ساخت است. خود فرمول هم یک بخش درست[16] از خودش است.

به ازای هر ϕ، مدل معیار کوچک M=⟨W,R,V⟩ متناهی خواهد بود. این مدل معیار کوچک بر مبنای فرمول ϕ به صورت زیر تعریف می‌شود:

W: مجموعه تمام مجموعه فرمول‌های ϕ-پُرِ GL-سازگار (mc)[17] از فرمول‌های خوش‌ساخت

R : به ازای هر w, w'∈W، wRw' اگر و تنها اگر:

۱) به ازای هر □θ ∈w، داشته باشیم: □θ, θ ∈w'.

۲) به ازای لااقل یک □ψ ∉w'، داشته باشیم: □ψ ∈w.

دو مجموعه فرمول متناهی Φ_ϕ و Φ_ϕ^+ را نیز که به ترتیب مجموعه تمام زیرفرمول‌های ϕ و مجموعه تمام زیرفرمول‌های ϕ و نقیض‌شان هستند را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(w^* به هر w∈W دسترسی دارد.) Φ_ϕ: {ψ: ψ زیرفرمول ϕ است}

$\Phi^+_\phi: \Phi_\phi \cup \{\sim\psi: \psi\in\Phi_\phi\}$

در سیستم S دارای ویژگی مدل متناهی، مجموعه Γ از فخس‌ها، ϕ-پُرِ S-سازگار (mc) است، اگر و تنها اگر:

۱) $\Gamma \subseteq \Phi^+_\phi$

۲) «ϕ-پُربودن Γ»: به ازای هر $\psi\in\Phi_\phi$، یا $\psi\in\Gamma$ است یا $\sim\psi\in\Gamma$.

۳) «S-سازگاربودن Γ»: اگر $\{\theta_1, ..., \theta_n\}:\Gamma$، آنگاه $\nvdash_S \sim(\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_n)$.

لازم به ذکر است در این مدل اگر $\Box\theta \in w$ و $\Box\psi \in w'$، آنگاه $\Box\psi \in \Phi_\phi$ و $\Box\theta \in \Phi_\phi$. در مورد متغیرهای گزاره‌ای نیز خواهیم داشت:

۱) برای $P\in\Phi_\phi$: «$\vDash^M_w P$ ا.ت.ا $P \in w$»

۲) برای $P\notin\Phi_\phi$: تعریف دلبخواهی خواهد بود.

حال با فرض اینکه ϕ قضیه GL نباشد، یک مدل مبتنی بر یک ساختار موجهه در کلاس C از ساختارهای موجهه ناانعکاسی، متعدی و متناهی ساخته و نشان می‌دهیم که ϕ در این مدل نامعتبر است:

$\langle W_\phi, R_\phi, V_\phi\rangle$

اثبات تمامیت GL با اثبات سه لم «الف»، «ب» و «ج» و قضیه IV حاصل می‌شود:

لم «الف»: «اگر $\psi\in\Phi_\phi$، آنگاه دقیقاً یکی از ψ یا ~ψ عضو خواهد بود.»

اثبات: بر مبنای ϕ-پُرِ S-سازگار Γ، خواهیم داشت: $\nvdash_S \sim(\psi \wedge \sim\psi)$

لم «ب»: «اگر $(\psi \vee \theta)\in\Phi_\phi$، آنگاه، $(\psi \vee \theta)\in \Gamma$ اگر و تنها اگر یا $\psi\in \Gamma$ یا $\theta\in \Gamma$.»

اثبات طرف اول: اگر $(\psi \vee \theta)\in \Gamma$ اما $\psi\notin \Gamma$ و $\theta\notin \Gamma$، آنگاه اگر $(\psi \vee \theta)\in\Phi_\phi$، آنگاه هم $\psi\in\Phi_\phi$ و هم $\theta\in\Phi_\phi$ و بنابراین $\sim\psi\in \Gamma$ و $\sim\theta\in \Gamma$. اما در این صورت خواهیم داشت:

$\{\sim\psi , \sim\theta , \psi \vee \theta\}\subseteq \Gamma$

و بنابراین $\nvdash_S \sim(\sim\psi \wedge \sim\theta \wedge (\psi \vee \theta))$ که منجر به ناسازگاری Γ می‌شود، در حالی که می‌دانیم Γ سازگار است.

اثبات طرف دوم: اگر $(\psi \vee \theta)\notin\Gamma$، از آنجایی که $(\psi \vee \theta)\in\Phi_\phi$، $\sim(\psi \vee \theta) \in \Gamma$. حال اگر $\psi\in\Gamma$ خواهیم داشت:

$\{\psi , \sim(\psi \vee \theta)\}\subseteq \Gamma$

و بنابراین $\nvdash_S \sim(\psi \wedge \sim(\psi \vee \theta))$ که نتیجه‌اش $\psi\notin \Gamma$ می‌شود. اگر $\theta\in\Gamma$ خواهیم داشت:

$\{\theta , \sim(\psi \vee \theta)\}\subseteq \Gamma$

و بنابراین $\nvdash_S \sim(\theta \wedge \sim(\psi \vee \theta))$ که نتیجه‌اش $\theta\notin \Gamma$ می‌شود.

لم «ج»: «اگر $\Lambda \subseteq \Phi^+_\phi$ و Λ مجموعه‌ای S-سازگار باشد، آنگاه یک Γ ِ ϕ-پُرِ S-سازگار وجود دارد که $\Gamma\subseteq\Lambda$.»

اثبات: اثبات این لم با استقراء بر ساختار Γ است. فخس Φ_{ϕ}^{+} را به صورت رشته ψ_n ,..., ψ_1 مرتب می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\Lambda=\Gamma_0$ و به ازای $0 \leq k < n$، فرض می‌کنیم:

$$\Gamma_{k+1}=\begin{cases} \Gamma_k \cup \{\psi_{k+1}\} & \text{اگر سازگار باشد:} \\ \Gamma_k \cup \{\sim\psi_{k+1}\} & \text{در غیر این‌صورت:} \end{cases}$$

اگر هیچ‌کدام یک از $\Gamma_k \cup \{\psi_{k+1}\}$ و $\Gamma_k \cup \{\sim\psi_{k+1}\}$ سازگار نباشند، آنگاه اگر ψ_0 را به صورت عطف فخس‌ها در Λ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\underset{S}{\vdash} (\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_k) \supset \psi_{k+1}$$

و

$$\underset{S}{\vdash} (\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_k) \supset \sim\psi_{k+1}$$

و بنابراین:

$$\underset{S}{\vdash} \sim(\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_k)$$

و این یعنی Γ_k ناسازگار است. بنابراین با فرض اینکه Γ_0 مجموعه‌ای سازگار است، Γ_n نیز مجموعه‌ای سازگار است. لیکن Γ_n یک مجموعه ϕ-پُرِ S-سازگار است.

قضیه IV: به ازای $\psi \in \Phi_{\phi}$ و مدل $M=\langle W,R,V \rangle$ و $w \in W$، $\underset{w}{\overset{M}{\vDash}} \psi$ اگر و تنها اگر $\psi \in w$.

اثبات: روشن است که در منطق کلاسیک این قضیه برای متغیرهای گزاره‌ای برقرار است و نیز برای فخس‌های غیرموجهه شامل ~ و ⊃. حال به اثبات این قضیه برای □ می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم $\Box\psi \in w$ و wRw'. بنابراین $\psi \in w'$ و در نتیجه $\psi \in \Phi_{\phi}$. بنابراین $\underset{w'}{\overset{M}{\vDash}} \psi$. پس $\underset{w}{\overset{M}{\vDash}} \Box\psi$.

همچنین فرض می‌کنیم $\Box\psi \notin w$، اما $\Box\psi \in \Phi_{\phi}$. بنابراین $\sim\Box\psi \in w$.

حال نشان خواهیم داد که مجموعه زیر GL-سازگار است:

$$\Lambda=\{\Box\theta: \Box\theta \in w\} \cup \{\theta: \Box\theta \in w\} \cup \{\Box\psi, \sim\psi\}$$

تمام اعضای Λ عضو Φ_{ϕ} خواهند بود، به‌جز احتمالاً $\sim\psi$. از جهتی هم دیدیم $\psi \in \Phi_{\phi}$. بنابراین اگر Λ سازگار باشد، بر اساس لم «ج» یک w' ϕ-پُرِ GL-سازگار وجود خواهد داشت که $\Lambda \subseteq w'$. برای چنین جهان w' شرایط زیر برقرار است که تضمین می‌کنند wRw':

۱) اگر $\Box\theta \in w$، آنگاه $\Box\theta \in w'$.

۲) اگر $\Box\theta \in w$، آنگاه $\theta \in w'$.

۳) $\Box\psi \in w'$، اما $\Box\psi \notin w$.

فرض می‌کنیم $\Box\theta_n$,...,$\Box\theta_1$ رشته تمام فخس‌های w باشد که با □ آغاز می‌شوند. آنگاه اگر Λ ناسازگار باشد، خواهیم داشت:

۱. $\vdash_{GL} \sim(\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n \wedge \theta_1 \wedge ... \wedge \theta_n \wedge \Box\psi \wedge \sim\psi)$

۲. $\vdash_{GL} (\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n \wedge \theta_1 \wedge ... \wedge \theta_n) \supset (\Box\psi \supset \psi)$ دم و اس (۱)

۳. $\vdash_{GL} \Box(\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n \wedge \theta_1 \wedge ... \wedge \theta_n) \supset \Box(\Box\psi \supset \psi)$ (۲) DR1

۴. $\vdash_{GL} (\Box\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\Box\theta_n \wedge \Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n) \supset \Box(\Box\psi \supset \psi)$ قضیهK (۳) و جاگ

۵. $\vdash_{GL} \Box P \supset \Box\Box P$ قضیهGL

۶. $\vdash_{GL} (\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n) \supset \Box(\Box\psi \supset \psi)$ نتیجه
(۵)(۴)

۷. $\vdash_{GL} \Box(\Box P \supset P) \supset \Box P$ اصل Löb

۸. $\vdash_{GL} (\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n) \supset \Box\psi$ ج، قضیه PLو و.م(۵)(۷)

۹. $\vdash_{GL} \sim(\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n \wedge \sim\Box\psi)$ دم و اس (۸)

لیکن $\{\Box\theta_1,...,\Box\theta_n,\sim\Box\psi\} \subseteq w$ و بنابراین w ناسازگار خواهد بود. از جهتی، از آنجایی که wRw' و $\sim\psi \in w'$، پس $\psi \notin w'$. اما از آنجایی که $\Box\psi \in \Phi_\phi$، پس $\psi \in \Phi_\phi$. بنابراین $\nvDash^{M}_{w'} \psi$ و $\nvDash^{M}_{w} \Box\psi$.

بنابراین با اثبات قضیه IV و سه لم الف، ب و ج، تمامیت GL اثبات می‌شود. زیرا از آنجایی که $\phi \in \Phi_\phi$ و $\nvdash_{GL} \phi$، پس مجموعه $\{\sim\phi\}$ ناسازگار است. بنابراین به ازای لااقل یک $w \in W$، $\sim\phi \in w$. بنابراین $\nvDash^{M}_{w} \phi$. پس روشن است که مدل $\langle W_\phi, R_\phi, V_\phi \rangle$، متناهی، ناانعکاسی و متعدی خواهد بود و ϕ در چنین مدلی نامعتبر است.

نتیجه‌گیری

مسائل باز و نیز موضوعات پژوهشی بسیاری در منطق‌های توسعه‌یافته و غیرکلاسیک وجود دارد. منطق‌های اثبات‌پذیری نیز از این قاعده مستثنی نیستند. با حل بعضی از مسائل باز در منطق‌های اثبات‌پذیری و برای مثال، معرفی نظریه برهان‌های حساب رشته‌ای و نیز سیستم‌های اصل موضوعی جدید در دو دهه اخیر، تقریر دقیق و بررسی مقایسه‌ای و کشف تفاوت‌های نظام‌های گوناگون منطق اثبات‌پذیری با استفاده از روش‌هایی همچون ترجمان گودلی، به ویژه در ساحت پژوهش‌های منطق فلسفی داخل کشور که هنوز در ساحت مباحث فرمال بسیار نوپا است، از ارزش پژوهشی بسزایی برخوردار است. در این نوشتار در بخش نحو و نظریه برهان، به بررسی مقایسه‌ای و معرفی سیستم‌های اصل موضوعی GL، Grz، S4Grz و H و نیز حساب رشته‌های GLS و GL و در بخش معناشناسی نیز سمانتیک جهان ممکنی GL، Grz، S4Grz و H پرداخته شده است و فراقضایای صحت و تمامیت GL تقریر و اثبات شد.

تشکر و قدردانی: موردی برای گزارش وجود ندارد.
تاییدیه اخلاقی: موردی برای گزارش وجود ندارد.
تعارض منافع: موردی برای گزارش وجود ندارد.
سهم نویسندگان: لطف‌اله نبوی (نویسنده اول)، نگارنده مقاله/روش‌شناس (۲۵%)؛ سیداحمد میرصانعی (نویسنده دوم)، نگارنده مقاله/پژوهشگر اصلی (۷۵%).

منابع مالی: موردی برای گزارش وجود ندارد.

منابع

-Avron A (1984). On modal systems having arithmetical interpretations. Journal of Symbolic Logic. 49(3):935-942.
-Borga M (1983). On some proof theoretical properties of the modal logic GL. Studia Logica. 42:453-459.
- Boolos G (1993). The logic of provability. Cambridge: Cambridge University press.
-Brighton J (2016). Cut-elimination for GLS using the terminability of its regress process. Journal of Philosophical Logic. 45:147-153.
-Davis M (1958). Computability and Unsolvability. New York: Dover.
- de Jongh DHJ, Montagna F (1988). Provable fixed points. Mathematical Logic Quarterly. 34(3):229-250.
-de Jongh DHJ, Montagna F (1987). Generic generalized Rosser fixed points. Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic. 46(2):193-203.
-Gore R, Ramanayake R (2012). Valentini's cut-elimination for provability logic resolved. The Review of Symbolic Logic. 5(2):212-238.
- Gödel K (1986). An Interpretation of the Intuitionistic Propositional Calculus. In: Feferman S, et al, editors. K. Gödel Collected Works. Volume 1. New York: Oxford University Press. pp. 300–302. [German]
- Grzegorczyk A (1967). Some relational systems and the associated topological spaces. Fundamenta Mathematicae. 60:223-231.
- Henkin L (1952). A problem concerning provability. Journal of Symbolic Logic. 17: 160.
-Hilbert D, Bernays P (1939). Grundlagen der mathematik II. Berlin: Julius Springer.
- Hughes GE, Cresswell MJ (1997). A new introduction to modal logic. London: Routledge.
-Hughes GE, Cresswell MJ (1984). A companion to modal logic. London: Methuen.
- Kushida H (2010). The modal logic of Gödel sentences. Journal of Philosophical Logic. 39:577-590.
- Kushida H (2019). A proof theory for the logic of provability in true arithmetic. Studia Logica. 108: 857-875.
- Löb MH (1955). Solution of a problem of Leon Henkin. Journal of Symbolic Logic, 20:115-118.
- McKinsey JCC, Tarski A (1948). Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. The Journal of Symbolic Logic. 13(1):1-15.
- Movahed Z (2006). Modal logic. Tehran: Hermes press.
- Nabavi L (2004). An introduction to modal logic. 1st edition. Tehran: TMU Press. [Persian]
- Negri S (2005). Proof analysis in modal logic. Journal of Philosophical Logic. 50:507-544.
- Negri S (2014). Proofs and countermodels in non-classical logics. Logica Universalis. 8(1):25-60.
-Poggiolesi F (2009). A purely syntactic and cut-free sequent calculus for the modal logic of provability. Review of Symbolic Logic. 2(4):593-611.
- Sambin G (1976). An effective fixed point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras. Studia Logica 35(4):345-361.
- Sambin G, Valentini S (1982). The modal logic of provability, the sequential approach. Journal of Philosophical Logic. 11(3):311-342.
-Sasaki K (2001). Löb's axiom and cut-elimination theorem. Mathematical Sciences and Information Engineering: Journal of the Nanzan Academic Society. 1:91-98.
- Segerberg KK (1971). An essay in classical modal logic [dissertation]. Stanford: Stanford University.
- Solovay RM (1976). Provability interpretations of modal logic. Israel Journal of Mathematics. 25:287-304.

-Smiley TJ (1963). The logical basis of ethics. Acta Philosophica Fennica. 16:237-246.
-Smoryński C (1985). Self-reference and modal logic. Vrlag: Springer.
-Shamkanov D (2015). Nested sequents for provability logic GLP. Logic Journal of the IGPL. 23(5):789-815.
- Verbrugge R (2017). Provability logic. In: Zalta EN, editor. The Stanford Encyclopedia of Philosophy.
-Valentini S (1983). The modal logic of provability: cut-elimination. Journal of Philosophical Logic. 12:471-476.

پی‌نوشت

---

۱. اگر دو سیستم اصل موضوعی S و 'S دارای اصول موضوعه و قواعد مختلفی باشند، اما دقیقاً قضایای یکسانی داشته باشند، خواهیم گفت که S و 'S استنتاجاً معادل (deductively equivalent) هستند. اگر هر قضیه S قضیه 'S نیز باشد (خواه 'S نیز شامل قضایای دیگری باشد یا نه)، خواهیم گفت که 'S مشتمل بر S است؛ بنابراین: «دو سیستم استنتاجاً معادل هستند، اگر و تنها اگر، هر کدام مشتمل بر دیگری باشد.» [Cresswell & Hughes, 1997].

۲. برای فرمول‌بندی دقیق‌تر رجوع شود به Smoryński (1985) و Davis (1958).

۳. این سه شرط در واقع اصلاح شرایط پیچیده‌ای است که هیلبرت و برنیز در سال ۱۹۳۹ [Hilber & Bernays, 1939] برای اثبات دومین قضیه ناتمامیت گودل معرفی کردند.

۴. D. de Jongh؛ دی یونگ بر مبنای قضیه نقطه ثابت (The fixed point theorem) این اثبات را انجام داد. این نظریه علاوه بر کاربرد در اثبات تمامیت GL، تعبیر دیگری از فراقضیه دوم ناتمامیت گودل در چارچوب منطق GL نیز از آن به دست می‌آید. توضیح مطلب این که بر مبنای قضیه نقطه ثابت در GL داریم:

$\vdash_{GL} \Box\bot \leftrightarrow \Box(\Box\bot)$.

که طرف چپ به راست آن $(\Box\bot \rightarrow \Box(\Box\bot))$ در منطق GL با درنظرگرفتن با قراردادن حساب پئانو (PA) (به عنوان یک نظریه فرمال حساب به اندازه کافی قوی) به جای T، به این صورت قابل تعبیر است: «اگر حساب پئانو سازگار باشد، سازگاری آن اثبات‌پذیر نیست.» و این تعبیر دیگری از فراقضیه ناتمامیت دوم گودل است که «اگر علم حساب سازگار است، آن‌گاه ناتمام است.» [Boolos, 1993: Ch 8; Nabavi, 2004: 86-87].

۵. برای مثال با قراردادن حساب پئانو (PA) (به عنوان یک نظریه فرمال حساب به اندازه کافی قوی) به جای T، ادات □ به معنای «اثبات‌پذیر در حساب پئانو»، یا با قراردادن ZFC، به معنای «اثبات‌پذیر در ZFC» خواهد بود.

۶. تعریف کوته‌نوشت‌های $\bigwedge_{i=m}^{n}$ و $\Diamond^n$ به صورت زیر است $(m,n \in \mathbb{N})$: (و به صورت مشابه در مورد ادات‌های ضرورت و فصل)

$$\bigwedge_{i=m}^{n} \phi_i \stackrel{\text{def}}{=} \phi_m \wedge \ldots \wedge \phi_n$$

$$\Diamond^0\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi \quad , \quad \Diamond^{n+1}\phi \stackrel{\text{def}}{=} \Diamond\Diamond^n\phi$$

7. Logic of Proofs

8. Turnstile

9. Proof-transformation method

10. The converse of R is wellfounded

نتیجه خوش‌بنیادبودن جهت عکس رابطه R این است که R «ناانعکاسی» است. سگربرگ در رساله دکترای خود اثبات کرد که قضایای GL (KW) در مدل‌هایی که R متعدی و عکس خوش‌بنیادی است معتبرند [Segerberg, 1971: 33].

۱۱. برای اثبات ناتمامیت H رجوع شود به [Cresswell & Hughes, 1997] و نیز [Boolos, 1993: 150-153]. برای اثبات تمامیت Grz نیز رجوع شود به [Boolos, 1993: 158-159].

۱۲. مدل معیار یا Canonical Model سه تایی مرتب <W,R,V> است که در آن [Cresswell & Hughes, 1997]:

الف) W مجموعه تمام مجموعه‌های S-سازگار پر است.

ب) $\Gamma R \Delta$ ا.ت.ا $L^{-}(\Gamma) \subseteq \Delta$

(یعنی دسترسیΓ به Δ معادل است با این که کلاس فخس‌های ضروری Γ با حذف جهت ضرورت از آن‌ها، زیر کلاسِ Δ است.)

ج) $V(p,w)=1$ ا.ت.ا $p \in w$

(یعنی صدق یک متغیر گزاره‌ای p در یک جهان، معادل با عضویت آن متغیر در آن جهان است.)

13. Finite model property

14. Well-formed parts

15. Mini canonical model

16. Proper part

17. ϕ-maximal S-consistence