Industrial Management Journal

Print ISSN: 2008-5885
Online ISSN: 2423-5369

# Developing a Hybrid Fuzzy Possibilistic-flexible Modelling with Fuzzy TOPSIS to Solve Financial Investment Mathematical Programming Problems

**Ali Ebrahimi Kordlar**

Associate Prof., Department of Accounting, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: aebrahimi@ut.ac.ir

## Abstract

**Objective:** Uncertainty is inevitable in the real world; nonetheless, fuzzy logic is regarded as one of the approaches employed in modeling such uncertainty. Therefore, a new field of mathematical programming has been proposed that is called Fuzzy Mathematical programming. Following Bellman and Zadeh, the pioneers of the Fuzzy School of Mathematics, other researchers have developed various solutions to solve fuzzy problems considering various components of mathematical models in a fuzzy condition. The present study aims to develop a novel approach to resolve investment problems using fully fuzzy mathematical model.

**Methods:** In general, defining the degree of fuzzy numbers, which is assumed to be fixed, should be utilized to solve the full fuzzy problem. Since the given problem is fuzzy, it is better to define a fuzzy degree to solve the problem. Thus, considering that all the components are better to be seen as fuzzy components, a fully fuzzy possibilistic-flexible composite model with a degree of fuzzy definition is developed in this study.

**Results:** Finally, the proposed model used to resolve an investment problem and the results were compared to the findings of previous models. Then, the results point out a significant improvement (about 250% in intial investment) in the proposed model, which is much better than previous models.

**Conclusion:** In this study, fuzzy extent value derived from Jimenez's approach has been used to solve fully fuzzy problems. Therefore, it has provided the possibility of solving problems with multiple fuzzy objective functions and fuzzy constraints.

**Keywords:** Possibilistic fuzzy mathematical programming, Flexible fuzzy mathematical programming, Fuzzy TOPSIS, Financial investment mathematical modeling

**Citation:** Ebrahimi Kordlar, Ali (2021). Developing a Hybrid Fuzzy Possibilistic-flexible Modelling with Fuzzy TOPSIS to Solve Financial Investment Mathematical Programming Problems. *Industrial Management Journal,* 13(2), 352-369. (*in Persian*)

Industrial Management Journal, 2021, Vol. 13, No.2, pp. 352- 369
https://doi.org/10.22059/IMJ.2022.336043.1007906

Published by University of Tehran, Faculty of Management

Article Type: Research Paper
Received: December 25, 2020
Accepted: May 25, 2021

شاپا چاپی: ۵۸۸۵-۲۰۰۸
شاپا الکترونیکی: ۵۳۶۹-۲۴۲۳
مدیریت صنعتی

# ارائه مدل ترکیبی انعطافی ـ امکانی فازی با تاپسیس فازی برای مسائل برنامه‌ریزی ریاضی سرمایه‌گذاری مالی

**علی ابراهیمی کردلر**
دانشیار، گروه حسابداری، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: aebrahimi@ut.ac.ir

## چکیده

**هدف:** عدم قطعیت در دنیای واقعی، موضوعی اجتناب‌ناپذیر است. یکی از رویکردهای به‌کارگرفته‌شده برای مدل‌کردن این عدم اطمینان، منطق فازی است، از این رو، در برنامه‌ریزی ریاضی، حوزه جدیدی به نام برنامه‌ریزی ریاضی فازی شکل گرفته است. به‌دنبال بلمن و زاده، پایه‌گذاران مکتب ریاضیات فازی، پژوهشگران با در نظر گرفتن اجزای مختلف مدل‌های ریاضی به‌صورت فازی، برای حل مسائل فازی راه‌حل‌های مختلفی ارائه داده‌اند. هدف این پژوهش نیز، ارائه روشی جدید به‌منظور حل مدل ریاضی تمام فازی در مسائل سرمایه‌گذاری است.

**روش:** راه‌حلی که در پژوهش حاضر برای حل مسائل امکانی تمام فازی در نظر گرفته‌شده، استفاده از تعریف درجه بزرگی اعداد فازی است که این درجه بزرگی به‌صورت قطعی فرض شده است؛ حال آنکه مسئله تعریف‌شده، فازی است و بهتر است برای حل آن نیز درجه بزرگی فازی تعریف شود. در پژوهش پیش رو، با در نظر گرفتن این موضوع که بهتر است در مدل‌های فازی تمام اجزای فازی دیده شود، علاوه‌بر بخشی از مدل، مدل ترکیبی امکانی ـ انعطافی تمام فازی با در نظر گرفتن تعریف درجه بزرگی اعداد فازی پیشنهاد شده است.

**یافته‌ها:** در انتهای مقاله یک مسئله سرمایه‌گذاری مطرح و با مدل پیشنهادی و همچنین با مدل‌هایی که پیش‌تر ارائه شدند، حل شد. نتیجه مدل پیشنهادی، حدود ۲۵۰درصد افزایش سرمایه را نشان می‌دهد که در مقایسه با روش‌های مشابه، عملکرد خیلی بهتری دارد.

**نتیجه‌گیری:** در این پژوهش، درجه بزرگی فازی برای حل مسائل تمام فازی، برگرفته از رویکرد خمینز بوده است، از این رو، حل مسائل با توابع هدف چندگانه و محدودیت‌های فازی امکان‌پذیر است.

**کلیدواژه‌ها:** برنامه‌ریزی ریاضی امکانی فازی، برنامه‌ریزی ریاضی انعطافی فازی، تاپسیس فازی، مدل‌سازی ریاضی سرمایه‌گذاری مالی

**استناد:** ابراهیمی کردلر، علی (۱۴۰۰). ارائه مدل ترکیبی انعطافی ـ امکانی فازی با تاپسیس فازی برای مسائل برنامه‌ریزی ریاضی سرمایه‌گذاری مالی. *مدیریت صنعتی*، ۱۳(۲)، ۳۵۲- ۳۶۹.

مدیریت صنعتی، ۱۴۰۰، دوره ۱۳، شماره ۲، صص. ۳۵۲- ۳۶۹
دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۰۵، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۰۴
https://doi.org/10.22059/IMJ.2022.336043.1007906
نوع مقاله: علمی پژوهشی
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران

## مقدمه

یکی از مهم‌ترین تصمیم‌ها برای هر فرد یا سازمان، تصمیم‌گیری در خصوص نحوه سرمایه‌گذاری است. واژه سرمایه‌گذاری می‌تواند دامنه وسیعی از فعالیت‌ها را شامل شود. این واژه می‌تواند شامل سرمایه‌گذاری در گواهی سپرده، اوراق قرضه، سهام عادی یا صندوق‌های مشترک سرمایه‌گذاری باشد. اگرچه کسانی که به‌صورت حرفه‌ای به سرمایه‌گذاری می‌پردازند از دارایی‌های دیگری، از قبیل گواهی خرید، برگ اختیار خرید و فروش سهام و دارایی‌های مشهود مانند طلا و اشیای قیمتی برای انجام سرمایه‌گذاری نیز استفاده می‌کنند. سرمایه‌گذاری می‌تواند دارای درجه‌های مختلف ریسک‌پذیری باشد و هر فرد، خواه شخصی با تحصیلات دانشگاهی و خواه یک شهروند عادی، می‌تواند با توجه به شرایط خود از تصمیم‌های سرمایه‌گذاری استفاده کند.

سرمایه‌گذاری عبارت است از تبدیل وجوه مالی به یک یا چند نوع دارایی که برای مدتی در زمان آتی نگهداری خواهد شد. بنابراین، مستلزم مدیریت ثروت سرمایه‌گذاران است. این ثروت شامل مجموع درآمد فعلی و ارزش فعلی درآمدهای آتی است، بنابراین ارزش فعلی و مفهوم بهره مرکب می‌تواند در این فرایند نقش مهمی داشته باشد.

به‌طور معمول، هدف سرمایه‌گذاران، رشد و توسعه سرمایه خود و بهره‌مندی از منافع آن در آینده هست. آنها ممکن است سرمایه خود را به مدت طولانی و طی سال‌ها و دهه‌ها نگه داشته و از سوددهی آن بهره ببرند. البته سرمایه‌گذاری در بخش‌های مختلف دارای تعبیرهای مختلفی است.

یکی از شرایط کلیدی در این‌گونه مسائل که ممکن است شدنی بودن و بهینگی مدل‌ها را تحت‌تأثیر قرار دهد، عدم قطعیت پارامترهای موجود در مسئله است (محبی و نجفی، ۱۳۹۶).

برای تصمیم‌گیری بهتر و دقیق‌تر در دنیای واقعی به مدل‌سازی ریاضی مسائل نیاز داریم. پیش‌تر با ساده‌سازی واقعیت و قطعی‌کردن داده‌ها مسائل مدل می‌شدند. دنیای واقعی ما بسیار پیچیده‌تر از آن است که بتوان برای آن توصیف و تعریف دقیقی به دست آورد، بنابراین، برای یک مدل باید توصیفی تقریبی یا همان فازی معرفی شود که پذیرفته‌شده باشد و بتوان آن را تجزیه و تحلیل کرد (وانگ[1]، ۱۹۹۷). برای حل این مشکل، روش‌های بسیاری از جمله فازی‌سازی مدل‌ها ارائه داده شد (فتحی، نصراللهی و زمانیان، ۱۳۹۸).

بلمن و زاده[2] (۱۹۷۰)، برای نخستین بار تئوری مجموعه‌های فازی را در فرایند تصمیم‌گیری به‌کار گرفتند و تاناکا، اکادا و آسایی[3] (۱۹۷۳) نیز برای نخستین بار، مفهوم برنامه‌ریزی ریاضی فازی را به‌صورت کلی مطرح کردند. زیمرمن[4] (۱۹۷۸) برای نخستین بار مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی را فرموله کرد. پس از آن، در راستای بهبود روش‌های حل این مسائل تلاش‌های زیادی انجام شد (کمپس و وردگی[5]، ۱۹۸۹؛ دلگادو وردگی[6]، ۱۹۸۹؛ فنگ، هو، ونگ و وو[7]، ۱۹۹۹؛

1. Wang
2. Bellman & Zadeh
3. Tanaka & Asai
4. Zimmermann
5. Campos & Verdegay
6. Delgado & Verdegay
7. Fang, Hu, Wang & Wu

مهدوی امیری و ناصری[۱]، ۲۰۰۷؛ ملکی، تاتا و ماشینچی[۲]، ۲۰۰۰ و وردگی[۳]، ۱۹۸۴). در طبقه‌بندی اینیوگوچی و رامیک[۴] (۲۰۰۰) مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی به سه دسته طبقه‌بندی می‌شوند که عبارت‌اند از:

۱. برنامه‌ریزی ریاضی فازی انعطافی: مقدار تابع هدف یا منابع فازی است.

۲. برنامه‌ریزی ریاضی فازی امکانی:

- ضرایب قیود و ضرایب تابع هدف فازی باشد.
- متغیرها فازی باشد.
- تمامی پارامترهای مسئله و متغیرهای تصمیم فازی فرض می‌شوند (اینیوگوچی و رامیک،۲۰۰۰).

۳. برنامه‌ریزی استوار

برای حل این‌گونه مسائل تاکنون روش‌های متعددی پیشنهاد شده است. در زمینه مسائل انعطافی وردگی (۱۹۸۴)، لای و هوانگ[۵] (۱۹۹۲)، ترابی و هسینی[۶] (۲۰۰۸) و ورنر[۷] (۱۹۸۷) با توجه به تعریف تابع عضویت و مدل بلمن و زاده (۱۹۷۰)، مدل‌هایی ارائه داده‌اند. مهدوی و همکاران (۲۰۰۷)، عزتی، خرم و عنایتی[۸] (۲۰۱۵)، خمینز[۹] (۲۰۰۷)، کومار، کائور و سینگ[۱۰] (۲۰۱۰) و پیشوایی و ترابی[۱۱] (۲۰۱۰) نیز برای حل مسائل فازی امکانی، مدل‌هایی ارائه داده‌اند.

در مقاله‌های پیش، برای حل مسائل تمام فازی‌ای که در آنها از تعریف بزرگی استفاده می‌شد، درجه بزرگی به‌صورت قطعی فرض می‌شد، حال آنکه مسئله فازی است و بهتر است درجه بزرگی نیز به‌صورت فازی تعریف شود. افزون بر این مهم، باید اذعان داشت، چنانچه ادعای داشتن دیدگاهی فازی را به مسئله داریم، بهتر است ترکیبی از دو مدل امکانی و انعطافی را پیش رو قرار دهیم.

از آنجا که در مسائل سرمایه‌گذاری همراه می‌بایست چند هدف را به‌طور هم‌زمان در نظر گرفت و در این مسائل عدم اطمینان بالا وجود دارد، طراحی مدلی برای رفع این مشکلات هدف اصلی این پژوهش است. در واقع، به‌دنبال پاسخ به این پرسش هستیم که چگونه می‌توان یک مسئله چندهدفه تمام فازی در حوزه سرمایه‌گذاری مالی را حل کرد.

از این رو، در پژوهش حال حاضر مدلی ترکیبی از برنامه‌ریزی انعطافی و امکانی تمام فازی با در نظر گرفتن درجه بزرگی به‌صورت فازی ارائه شده است.

در بخش دوم، مبانی نظری و پیشینه پژوهش بیان شده است. در بخش سوم، مدل پیشنهادی طی چندین گام معرفی و تفسیر شده است. در بخش چهارم، یک مسئله سرمایه‌گذاری مالی مطرح شده و این مسئله هم از طریق مدل

1. Mahdavi-Amiri & Nasseri
2. Maleki, Tata & Mashinchi
3. Verdegay
4. Inuiguchi & Ramık
5. Lai & Hwang
6. Torabi & Hassini
7. Werners
8. Ezzati, Khorram & Enayati
9. Jiménez
10. Kumar, Kaur & Singh
11. Pishvaee & Torabi

پیشنهادی و هم از طریق سایر مدل‌های معرفی‌شده در مبانی نظری حل شده است. در بخش پایانی نیز، به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از تمام پژوهش پرداخته شده است.

## مبانی نظری و پیشینه پژوهش

### سرمایه‌گذاری مالی

یکی از دغدغه‌های مهم همیشگی سرمایه‌گذاران، انتخاب بهترین فرصت‌های سرمایه‌گذاری با بیشترین ارزش سرمایه‌گذاری است و با توجه به گزینه‌های مختلف برای سرمایه‌گذاری، تنوع‌بخشی در سبد سرمایه‌گذاری، یک استراتژی مفید و مطرح در مباحث سرمایه‌گذاری است. اما استراتژی سرمایه‌گذاری در بین دارایی‌های مختلف نظیر بورس اوراق بهادار، طلا، ارز و رمزارز نامشخص بوده و معلوم نیست که با وجود رکود و رونق موقت برخی از دارایی‌ها (مانند بورس و طلا) و همچنین تأثیرات آنها بر یکدیگر، اولویت‌بندی سرمایه‌گذاری (به‌لحاظ ریسک و بازده) بین دارایی‌های بیان‌شده چگونه تخصیص یابد (صباحی، مخاطب رفیعی و رستگار، ۱۳۹۹). مباحث انتخاب از بین چند طرح سرمایه‌گذاری، بهینه‌سازی سبد دارایی یا تشکیل سبد سهام بهینه، از جمله مسائلی هستند که پژوهشگران زیادی در این حوزه آنها را بررسی کرده‌اند. در ذیل، به چند پژوهش در این حوزه اشاره شده است.

فهیمی و شاه‌بندرزاده (۱۴۰۰)، برای بهینه‌سازی سرمایه‌گذاری مدلی ارائه دادند که ضمن بهینه‌سازی هم‌زمان سه تابع هدف و برقراری یک بده ـ بستان بین این اهداف متناقض، نسبت به سایر مدل‌ها و همچنین سبد بازار، نمره شارپ مناسبی به دست آورده و سبد سهام مناسبی را در یک جبهه کارا (پاره‌تو فرانت)، از بین شرکت‌های با بیشینه بازده و کمینه ریسک که نمره مسئولیت اجتماعی بالایی داشته‌اند، انتخاب و معرفی کرده است و اگر مدل با توان‌های بیشتری اجرا شود، شرکت‌ها و سناریوهای بیشتری در اختیار سرمایه‌گذاران قرار می‌دهد.

صباحی و همکارانش (۱۳۹۹)، در خصوص سرمایه‌گذاری و تخصیص سهم در سبد دارایی پژوهشی انجام دادند. هدف از انجام این پژوهش، پیشنهاد اوزان بهینه سرمایه‌گذاری بین دارایی‌های بورس اوراق بهادار تهران، سکه بهار آزادی، دلار آمریکا و بیت کوین از طریق حداقل سازی ارزش در معرض ریسک شرطی با روش میانگین ـ ارزش در معرض خطر شرطی است.

شریفی، مؤمنی، مدرس یزدی و راعی (۱۳۹۴)، در پژوهش خود با تشکیل برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه که شاخص‌های مرتبط با اهداف، تصادفی و مبتنی بر توزیع نرمال هستند، از مدل برنامه‌ریزی توافقی با محدودیت تصادفی به‌منظور انتخاب سبد استفاده کردند. پس از توسعه و حل مدل، در نهایت نتایج مدل برنامه‌ریزی برای انتخاب سبد سهام در بازار بورس تهران ارائه شده است.

به‌دلیل عدم قطعیت دنیای واقعی نیاز است برای جامع بودن مدل‌سازی همه پارامترها و حتی متغیرها به‌صورت غیرقطعی در نظر گرفته شود. در ادامه مباحث نظری مدل‌سازی فازی بیان می‌شود.

## نظریه فازی

پروفسور لطفعلی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ نظریه فازی را مطرح کرد. این نظریه برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است و قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌های نادقیق و مبهم را به‌شکل ریاضی مدل‌سازی کند (سولانکی، لوهانی و ماهوری[1]، ۲۰۲۱).

### تابع عضویت و مجموعه‌های فازی

تابع نشانگر، هر زیرمجموعه x از مجموعه A را به یک مجموعه دو عضوی {۰و۱} مربوط می‌کند که در رابطه ۱ مشخص شده است، یعنی:

رابطهٔ ۱)
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

به‌عبارتی، اگر عنصری عضو مجموعه A باشد، به آن مقدار ۱ و در غیر این صورت، صفر می‌دهد. یعنی در نظریه مجموعه‌های قطعی یا عنصری متعلق به آن مجموعه وجود دارد یا نیست. حال اگر برد تابع عضویت را از مجموعه‌ی دو عضوی {۰و۱} به بازه [۱,۰] توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر عضو x از مجموعه A عددی را از بازه [۱,۰] نسبت می‌دهد که به آن تابع عضویت می‌گوییم و با $\mu_A(x)$ نشان می‌دهیم. در این صورت مجموعه قطعی به مجموعه فازی تبدیل می‌شود. بنابراین در مجموعه‌های فازی، هر عنصری ممکن است تا درجه‌ای در بازه [۱,۰] به آن مجموعه تعلق داشته باشد (مؤمنی و حسین زاده، ۱۳۹۱ و حسین، چان و خان[2]، ۲۰۲۱).

### اعداد فازی

اعداد فازی نوعی خاص از مجموعه‌های فازی هستند (حبیبی و ایزدیار، ۱۳۹۳ و فی و دنگ[3]، ۲۰۲۰). در منطق کلاسیک هر عدد یک مقدار قطعی و مشخص است، اما در منطق فازی هر عدد مقداری تقریبی است. عدد فازی یک مجموعه فازی با شرایط سه‌گانه است: ۱. نرمال باشد؛ ۲. محدب باشد؛ ۳. مجموعه پشتیبان آن محدود باشد. انواع بسیار متنوعی از اعداد فازی با نام‌ها و ویژگی‌های متفاوت ارائه‌شده و به‌کار گرفته شده است. اصل مهم در به‌کارگیری تئوری فازی، کارایی محاسباتی آن است. کار کردن با اعداد فازی مختلف دشواری‌های زیادی دارد.

### اعداد فازی مثلثی

عدد فازی مثلثی، یک عدد فازی است که با سه عدد حقیقی به‌صورت $F = (l, m, u)$ نمایش داده می‌شود. کران بالا که با $u$ نشان داده می‌شود، بیشینه مقادیری است که عدد فازی $F$ می‌تواند اختیار کند. کران پایین که با $l$ نشان داده می‌شود، کمینه مقادیری است که عدد فازی $F$ می‌تواند اختیار کند. مقدار $m$ محتمل‌ترین مقدار یک عدد فازی است. تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی به‌صورت رابطه ۲ است:

---

1. Solanki, Lohani & Muhuri
2. Hussain, Chun & Khan
3. Fei & Deng

$$\mu_f(x) = \begin{cases} \frac{x-l}{m-l} & l < x < m \\ \frac{u-x}{u-m} & m < x < u \\ o & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$ رابطهٔ ۲)

با توجه به تابع عضویت اعداد مثلثی مشخص است که اگر $x$ عددی بین $l$ و $m$ باشد، هر چه بزرگ‌تر باشد، درجه عضویت آن نیز بزرگ‌تر خواهد شد تا جایی که برای $x = m$ درجه عضویت برابر یک می‌شود. اگر $x$ بین $m$ و $u$ باشد، هرچه بزرگ‌تر باشد، درجه عضویت کوچک‌تر خواهد شد و در $x = u$ درجه عضویت صفر خواهد شد.

### عملیات جبری روی اعداد فازی مثلثی

کارایی محاسباتی اعداد فازی مثلثی به‌علت سادگی انجام عملیات ریاضی روی آن بسیار زیاد است. با فرض مثبت بودن دو عدد فازی $F_1$ و $F_2$ عملیات جبری روی اعداد فازی مثلثی به‌صورت روابط ۳ تا ۶ است:

$$F_1 = (l_1, m_1, u_1)$$
$$F_2 = (l_2, m_2, u_2)$$

$$F_1 \oplus F_2 = (l_1 \oplus l_2, m_1 \oplus m_2, u_1 \oplus u_2)$$ رابطهٔ ۳)

$$F_1 \ominus F_2 = (l_1 \ominus l_2, m_1 \ominus m_2, u_1 \ominus u_2)$$ رابطهٔ ۴)

$$F_1 \otimes F_2 = (l_1 \otimes l_2, m_1 \otimes m_2, u_1 \otimes u_2)$$ رابطهٔ ۵)

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{l_1}{u_2}, \frac{m_1}{m_2}, \frac{u_1}{l_2}\right)$$ رابطهٔ ۶)

### رتبه‌بندی اعداد فازی

برای رتبه‌بندی اعداد فازی، روش‌های مختلفی ارائه شده است که یکی از بهترین روش‌ها، روش خیمنز (۱۹۹۶) است. همان‌طور که تاناکا و همکاران (۱۹۷۳) بیان می‌کنند، برای هر دو عدد فازی $F_1$ و $F_2$ تابع درجه بزرگی $F_1$ نسبت به $F_2$ مانند زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu_M(\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}) = \begin{cases} 0 & if\ E_2^{F_1} - E_1^{F_2} < 0 \\ \frac{E_2^{F_1} - E_1^{F_2}}{E_2^{F_1} - E_1^{F_2} - (E_1^{F_1} - E_2^{F_2})} & if\ 0 \in [E_1^{F_1} - E_2^{F_2}, E_2^{F_1} - E_1^{F_2}] \\ 1 & if\ E_1^{F_1} - E_2^{F_2} > 0 \end{cases}$$ رابطهٔ ۷)

اگر مطابق رابطه ۸، عدد $F_1$ حداقل به‌اندازه β درجه از $F_2$ بزرگ‌تر باشد:

$$\mu_M(\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}) \geq \beta \quad , \qquad 0 \leq \beta \leq 1$$ رابطهٔ ۸)

بنابراین با جای‌گذاری ۸ در رابطه ۷ به روابط ۹ و ۱۰ دست می‌یابیم:

رابطهٔ ۹)
$$\frac{E_2^{F_1}-E_1^{F_2}}{E_2^{F_1}-E_1^{F_2}-\left(E_1^{F_1}-E_2^{F_2}\right)} \geq \beta$$

رابطهٔ ۱۰)
$$(1-\beta)\, E_2^{F_1}+\beta E_1^{F_1} \geq \beta E_2^{F_2}+(1-\beta)\, E_1^{F_2}$$

مطابق پیشنهاد خیمنز، با به‌کارگیری رابطه ۱۰ می‌توان به دی‌فازی کردن توابع هدف و محدودیت‌های مسائل فازی پرداخت.

## برنامه‌ریزی ریاضی انعطافی

شکل کلی برنامه‌ریزی ریاضی انعطافی فازی به‌صورت رابطه ۱۱ است.

رابطهٔ ۱۱)
$$Max(or\ Min)Z \cong CX$$
$$\text{St: } AX \lesseqqgtr b$$
$$X \geq 0$$

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، بلمن و زاده (۱۹۷۰) مدل‌های فازی را با توجه به تعریف تابع عضویت معرفی کردند. پس از آن، زیمرمن (۱۹۷۸) با در نظر گرفتن ماکزیمم اشتراک درجه عضویت تابع هدف و محدودیت‌ها راه‌حلی برای مدل‌های انعطافی ارائه داد. این، منطقی است که تاکنون حاکم بوده است. در پژوهش‌های وردگی (۱۹۸۴)؛ لای و هوانگ (۱۹۹۲)؛ ترابی و هسینی (۲۰۰۸) و ورنر (۱۹۸۷) با توجه به منطق مطرح‌شده، حل مدل‌های انعطافی بسط داده شد.

## برنامه‌ریزی ریاضی امکانی تمام فازی

در یک مدل برنامه‌ریزی خطی تمام فازی تمامی اجزای مدل، یعنی مقادیر کلیه‌ی پارامترها شامل ضرایب تابع هدف، ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها و مقادیر سمت راست و همچنین مقادیر متغیرهای تصمیم و در نتیجه مقدار تابع هدف فازی هستند که فرم عمومی نمایش آنها در رابطه ۱۲ است (کومار و دیمان[1]، ۲۰۲۱ و مؤمنی و حسین زاده، ۱۳۹۱).

رابطهٔ ۱۲)
$$Max(or\ Min)\tilde{Z} = \tilde{C} \otimes \tilde{X}$$
$$\text{St: } \tilde{A} \otimes \tilde{X} \leq \tilde{b}$$
$$\tilde{X} \geq \tilde{0}$$

برای حل مسائلی که تمام فازی هستند، روش‌های مختلفی ارائه شده است که در هر روش با توجه به تعریف بزرگی اعداد فازی از یکدیگر به مدل‌سازی مسائل پرداخته می‌شود. در ادامه، برخی از این روش‌ها ارائه می‌شوند. به بیان کومار و همکاران (۲۰۱۰)، عدد فازی‌ای که حد پایین، اختلاف حد پایین و میانی و اختلاف حد بالا و میانی بزرگ‌تری داشته باشد، بزرگ‌تر است. مدل نهایی آنها با در نظر گرفتن اعداد فازی مثلثی در رابطه ۱۳ نشان داده شده است.

1. Kumar & Dhiman

$$MaxZ = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(p_j x_j) + \frac{2}{4}\sum_{j=1}^{n}(q_j y_j) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(r_j z_j)$$ رابطهٔ ۱۳)

St:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq=\geq b_i$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \leq=\geq g_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_j \leq=\geq h_i$$

$y_j - x_j \geq 0$

$z_j - y_j \geq 0$

$x_j \geq 0$

همان‌طور که در رابطه ۱۳ مشاهده می‌شود، آنها در مدل‌سازی خود ابتدا با توجه به روش خیمنز (۲۰۰۷) به قطعی‌سازی تابع هدف پرداخته‌اند، سپس در محدودیت‌ها، بزرگ‌تر بودن اعداد فازی را نسبت به یکدیگر با روش مقایسه نظیر به نظیر حدود اعداد فازی فرموله کرده و در واقع از تعریفی که خود برای بزرگی اعداد فازی ارائه داده‌اند، استفاده نکرده‌اند.

مؤمنی و حسین زاده (۱۳۹۱) با توجه به تعریف اعداد فازی به‌صورت LR بیان کردند که عدد فازی A زمانی بزرگ‌تر است که حد وسط آن به‌سمت مثبت بی‌نهایت میل کند و پراکندگی آن حداقل باشد، با این تعریف تابع هدف و محدودیت‌ها را دی‌فازی و مدل را حل کرد.

$$Max(or\ Min)\tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n}(c_j, w_{cj}, \acute{w}_{cj}) \otimes (x_{mj}, w_j, \acute{w}_j)$$ رابطهٔ ۱۴)

St: $\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}, w_{aij}, \acute{w}_{aij}) \otimes (x_{mj}, w_j, \acute{w}_j) \leq=\geq (b_j, w_{bj}, \acute{w}_{bj})$

$\forall \mathrm{i} = 1,2, \ldots \mathrm{M}\left(x_{mj}, w_j, \acute{w}_j\right)$ غیر منفی

با انجام اعمال فازی از رابطه ۱۴ به رابطه ۱۵ دست یافته می‌شود.

$$Max(Min)Z_m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{mj}$$ رابطهٔ ۱۵)

$$\begin{aligned} Max(Min)(w_z + \acute{w}_z) &= \sum\nolimits_{j\in c_p}(c_j x_j + x_{mj} w_{cj}) + (c_j \acute{w}_j + x_{mj}\acute{w}_{cj}) \\ &+ \sum\nolimits_{j\in c_{\acute{p}}}(-c_j \acute{w}_j + x_{mj} w_{cj}) + (-c_j w_j + x_{mj}\acute{w}_{cj}) \end{aligned}$$

St: $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{mj} \leq=\geq b_i$

$$\sum\nolimits_{a_{ij}\in A_p}\left(a_{ij}w_j + x_{mj}w_{aij}\right) + \left(a_{ij}\acute{w}_j + x_{mj}\acute{w}_{aij}\right) + \sum\nolimits_{a_{ij}\in A_{\acute{p}}}\left(-a_{ij}\acute{w}_j + x_{mj}w_{aij}\right) + \left(-a_{ij}w_j + x_{mj}\acute{w}_{aij}\right) \leq= \geq w_{bi} + \acute{w}_{bi}$$

$\forall i = 1,2, \dots M$

به‌طوری که:

$$c_p = \left\{j\middle|\widetilde{c_j}\text{منفی غیر است}\right\},\quad c_{\acute{p}} = \left\{j\middle|\widetilde{c_j}\text{منفی است}\right\}$$

$$A_p = \left\{j\middle|\widetilde{a_{ij}}\text{منفی غیر است}\right\},\quad A_{\acute{p}} = \left\{j\middle|\widetilde{a_{ij}}\text{منفی است}\right\}$$

عزتی و همکاران (۲۰۱۵) از بزرگی اعداد فازی تعریف دیگری ارائه داده‌اند. عدد بزرگ فازی عددی است که پراکندگی کمتری داشته باشد و کل عدد به‌سمت بی‌نهایت میل کند. آنها برای مدل‌سازی با توجه به تعاریف بیان‌شده تابع هدف فازی اصلی را به سه تابع هدف قطعی تبدیل کردند، اما در دی‌فازی‌کردن محدودیت‌ها همچنان از روش کومار استفاده کرده و همچنان نقص مدل وی را دارد. مدل ارائه‌شده آنها به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{Max}Z_1 = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j y_j\right)$$

$$\mathrm{Min}Z_2 = \sum_{j=1}^{n}\left(r_j z_j\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(p_j x_j\right)$$

$$\mathrm{Max}Z_3 = \sum_{j=1}^{n}\left(r_j z_j\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(p_j x_j\right)$$

St:

رابطهٔ ۱۶)

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq=\geq b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j \leq=\geq g_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}z_j \leq=\geq h_i$$

$$y_j - x_j \geq 0$$

$$z_j - y_j \geq 0$$

$$x_j \geq 0$$

## روش‌شناسی پژوهش

پژوهش‌های کاربردی برای یافتن راه‌حلی درباره یک مشکل مهم در جامعه، یک سازمان صنعتی یا اداری انجام می‌شوند. پژوهش و توسعه، فرایندی است که به‌منظور تدوین و تشخیص مناسب بودن یک فرآورده انجام می‌شود (سرمد و همکاران، ۱۳۸۵). با توجه به تعاریف بیان‌شده، پژوهش پیش رو بر اساس هدف، یک پژوهش توسعه‌ای ـ کاربردی است.

پژوهش حاضر از بعد هدف، کاربردی بوده و از لحاظ بازه زمانی داده‌ها کمی و مقطعی جمع‌آوری شـده اسـت. گـام‌هـای اجرای پژوهش حاضر به‌ترتیب زیر است:

- بررسی ادبیات موضوع و مبانی نظری در حوزه مدل‌سازی فازی و سرمایه‌گذاری مالی.
- طراحی و مدل‌سازی ریاضی مدل پیشنهادی.
- گردآوری داده‌ها و طراحی مدل سرمایه‌گذاری مالی.
- حل مسئله طراحی شده با روش پیشنهادی.
- حل مسئه با سه مدل تمام فازی بیان‌شده در ادبیات موضوع به‌منظور مقایسه با مدل پیشنهادی.
- مقایسه عملکرد مدل پیشنهادی.

## مدل پیشنهادی

مدل پیشنهادشده یک مدل تمام فازی با محدودیت‌های انعطافی است، در واقع مدل ارائه‌شده مدل ترکیبی فازی انعطافی و امکانی است. مدل ریاضی پیشنهادی به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

رابطهٔ ۱۷)

$$
\begin{aligned}
&Max\tilde{Z} = \tilde{C} \otimes \tilde{X} \\
&\text{St: } \tilde{A} \otimes \tilde{X} \lesseqqgtr \tilde{b} \\
&\tilde{X} \geq \tilde{0}
\end{aligned}
$$

### گام نخست: تشکیل مدل فازی مثلثی

عددهای فازی رابطه ۱۷ به‌صورت عدد فازی مثلثی در نظر گرفته شده و رابطه ۱۸ ایجاد شد.

رابطهٔ ۱۸)

$$
\begin{aligned}
&Max\tilde{Z} = (p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, z_j) \\
&\text{St: } (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, z_j) \lesseqqgtr (b_i, g_i, h_i) \\
&y_j - x_j \geq 0 \\
&z_j - y_j \geq 0 \\
&x_j \geq 0
\end{aligned}
$$

### گام دوم: دی‌فازی‌کردن تابع هدف و محدودیت‌ها

در ادامه با توجه به تعریف خیمنز (۲۰۰۷) از درجه بزرگی اعداد فازی تابع هدف و محدودیت‌های رابطه ۱۸ بـه‌ترتیـب در رابطه‌های ۱۹ و ۲۰ دی‌فازی می‌شوند.

رابطهٔ ۱۹)

$$
\begin{aligned}
&MaxZ = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(p_j x_j) + \frac{2}{4}\sum_{j=1}^{n}(q_j y_j) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(r_j z_j) \\
&\text{St:} \\
&(\beta EI_U^{Ai} + (1-\beta)EI_l^{Ai}) \otimes (x_j, y_j, z_j) \lesseqqgtr ((1-\beta)EI_U^{bi} + \beta EI_l^{bi}) \\
&y_j - x_j \geq 0 \\
&z_j - y_j \geq 0 \\
&x_j \geq 0
\end{aligned}
$$

و

رابطهٔ ۲۰)

$$MaxZ = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(p_j x_j) + \frac{2}{4}\sum_{j=1}^{n}(q_j y_j) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(r_j z_j)$$

St:

$$((\beta EI_U^{Ai} + (1-\beta)EI_l^{Ai})x_j, (\beta EI_U^{Ai} + (1-\beta)EI_l^{Ai})y_j, (\beta EI_U^{Ai} + (1-\beta)EI_l^{Ai})z_j) \lesseqgtr ((1-\beta)EI_U^{bi} + \beta EI_l^{bi})$$

$$y_j - x_j \geq 0$$

$$z_j - y_j \geq 0$$

$$x_j \geq 0$$

**گام سوم: تبدیل مدل انعطافی به مدل قطعی**

با توجه به اینکه رابطه ۲۰ یک مدل انعطافی در محدودیت‌ها است، با اضافه کردن یک صفر فازی مدل قطعی می‌شود.

رابطهٔ ۲۱)

$$Max\ Z = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(p_j x_j) + \frac{2}{4}\sum_{j=1}^{n}(q_j y_j) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(r_j z_j)$$

St:

$$\left(\beta EI_U^{Ai} + (1-\beta)EI_l^{Ai}\right)x_j \leq \left((1-\beta)EI_U^{bi} + \beta EI_l^{bi}\right) - \varepsilon$$

$$\left(\beta EI_U^{Ai} + (1-\beta)EI_l^{Ai}\right)y_j \leq ((1-\beta)EI_U^{bi} + \beta EI_l^{bi})$$

$$(\beta EI_U^{Ai} + (1-\beta)EI_l^{Ai})z_j \leq ((1-\beta)EI_U^{bi} + \beta EI_l^{bi}) + \varepsilon$$

$$y_j - x_j \geq 0$$

$$z_j - y_j \geq 0$$

$$x_j \geq 0$$

$$0 \leq \beta \leq 1$$

با حل رابطه ۲۱ به‌ازای هر $\beta$ مقدار تابع هدف $Z^*$ و متغیرهای $(x_j^*, y_j^*, z_j^*)$ مختلفی به دست می‌آید که باید از میان آنها جواب بهینه انتخاب شود.

**گام چهارم: تشکیل ماتریس تصمیم**

در این گام ابتدا با استفاده از روش لای و هوانگ (۱۹۹۲) سه شاخص $z_1, z_2, z_3$ محاسبه می‌شود.

رابطهٔ ۲۲)

$$Z_1 = (C_{j\beta}^M - C_{j\beta}^L)(x_j^*, y_j^*, z_j^*)$$

$$Z_2 = (C_{j\beta}^M)(x_j^*, y_j^*, z_j^*)$$

$$Z_3 = (C_{j\beta}^U - C_{j\beta}^M)(x_j^*, y_j^*, z_j^*)$$

اگر تابع هدف اصلی مسئله بیشینه‌سازی باشد، باید شاخص $z_1$ شاخصی منفی و دو شاخص $z_2, z_3$ شاخص‌هایی مثبت در نظر گرفته شوند. در مسائل کمینه‌سازی وضعیت برعکس می‌شود. سپس با در نظر گرفتن $\beta$ به‌عنوان گزینه‌های انتخابی و سه شاخص نام‌برده ماتریس تصمیم‌گیری مانند جدول ۱ ساخته می‌شود.

**جدول ۱. ماتریس تصمیم‌گیری**

| β | $Z_0$ | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | | | | |
| ۰/۱ | | | | |
| ۰/۲ | | | | |
| ... | | | | |
| ۱ | | | | |

در ماتریس تصمیم بالا، $Z_0$ معادل مقدار بهینه تابع هدف از گام قبل است.

### گام پنجم: محاسبه جواب نهایی

در نهایت می‌بایست از میان جواب‌هایی که برای هر β به‌عنوان شاخص معرفی شد بهترین جواب را یافت، برای دستیابی به این هدف با اولویت‌بندی گزینه‌ها از روش TOPSIS مقدار ضریب نزدیکی (CC)[۱] را محاسبه می‌کنیم. شایان ذکر است، هرچه میزان CC بیشتر شود، گزینه مد نظر از اولویت بالاتری برخوردار بوده و به‌عنوان جواب نهایی انتخاب می‌شود.

## تحلیل داده‌ها

در یک مسئله سرمایه‌گذاری که برنامه‌ریزی آن مربوط به یک دوره پنج‌ساله است، یک سرمایه‌گذار به‌دنبال حداکثر کردن سرمایه ۱۰۰۰ واحدی خود است. وی می‌تواند سه گزینه را به‌ترتیب زیر انتخاب کند:

الف) سرمایه‌گذاری سالانه که در آن صورت در ابتدای سال بعد، حدود ۲۰ درصد سود برداشت خواهد کرد.

ب) سرمایه‌گذاری در سال اول و حدود دو برابر آن در سال دوم که در آن صورت تقریباً ۴۰ درصد سود برداشت خواهد کرد.

ج) سرمایه‌گذاری در سال اول، حدود نصف آن در سال دوم و حدود یک سوم آن در سال سوم که در آن صورت تقریباً ۳۰ درصد برداشت خواهد کرد.

با توجه مسئله بیان‌شده، متغیرهای تصمیم فازی به‌ترتیب زیر تعریف می‌شوند.

$\tilde{x}_i$ میزان تقریبی سرمایه‌گذاری در سال iام که معادل گزینه اول تصمیم است.

$\tilde{y}_i$ میزان تقریبی سرمایه‌گذاری در سال iام که معادل گزینه دوم تصمیم است.

$\tilde{z}_i$ میزان تقریبی سرمایه‌گذاری در سال iام که معادل گزینه سوم تصمیم است.

$\tilde{s}_i$ میزان تقریبی سرمایه‌گذاری در سال iام که معادل گزینه چهارم تصمیم است.

---

1. Coefficient of Closeness

پارامترهای مسئله نیز به‌ترتیب زیر هستند.

$\tilde{c}_i$ سود تقریبی سرمایه‌گذاری در گزینه اول در سال iام (۱/۲۱ ، ۱/۲۰ ، ۱/۱۹)

$\tilde{d}_i$ سود تقریبی سرمایه‌گذاری در گزینه دوم در سال iام (۱/۴۲ ، ۱/۴۰ ، ۱/۳۸)

$\tilde{e}_i$ سود تقریبی سرمایه‌گذاری در گزینه سوم در سال iام (۱/۳۱ ، ۱/۳۰ ، ۱/۲۹)

$\tilde{f}_i$ ضریب تقریبی سرمایه‌گذاری در دوره دوم سرمایه‌گذار در گزینه دوم در سال iام (۲/۱ ، ۲/۰ ، ۱/۹)

$\tilde{g}_i$ ضریب تقریبی سرمایه‌گذاری در دوره دوم سرمایه‌گذار در گزینه سوم در سال iام (۰/۵۱ ، ۰/۵ ، ۰/۴۹)

$\tilde{h}_i$ ضریب تقریبی سرمایه‌گذاری در دوره سوم سرمایه‌گذار در گزینه سوم در سال iام (۰/۳۴ ، ۰/۳۳ ، ۰/۳۲)

با توجه به تعریف متغیرها و پارامترهای فازی بیان‌شده، مدل ریاضی امکانی انعطافی فازی به‌ترتیب زیر است. در این مسئله، تابع هدف، حداکثر کردن سرمایه در انتهای کل دوره بوده و هر محدودیت کارکردی معادل جریان نقدی ورودی و خروجی هر دوره است.

رابطهٔ ۲۳)

$$Max\ \widetilde{Z_0} = \widetilde{c_5}\widetilde{x_5} \oplus \widetilde{d_4}\widetilde{y_4} \oplus \widetilde{e_3}\widetilde{z_3} \oplus \widetilde{s_5}$$

Subject to:

$$\widetilde{s_1} \oplus \widetilde{x_1} \oplus \widetilde{y_1} \oplus \widetilde{z_1} \cong \widetilde{1000}$$

$$\widetilde{s_1} \oplus \widetilde{c_1}\widetilde{x_1} \cong \widetilde{x_2} \oplus \widetilde{d_1}\widetilde{y_1} \oplus \widetilde{y_2} \oplus \widetilde{e_1}\widetilde{z_1} \oplus \widetilde{z_2} \oplus \widetilde{s_2}$$

$$\widetilde{s_2} \oplus \widetilde{c_2}\widetilde{x_2} \oplus \widetilde{d_1}\widetilde{y_1} \cong \widetilde{x_3} \oplus \widetilde{d_2}\widetilde{y_2} \oplus \widetilde{y_3} \oplus \widetilde{f_1}\widetilde{z_1} \oplus \widetilde{e_2}\widetilde{z_2} \oplus \widetilde{z_3} \oplus \widetilde{s_3}$$

$$\widetilde{s_3} \oplus \widetilde{c_3}\widetilde{x_3} \oplus \widetilde{d_2}\widetilde{y_2} \oplus \widetilde{e_1}\widetilde{z_1} \cong \widetilde{x_4} \oplus \widetilde{d_3}\widetilde{y_3} \oplus \widetilde{y_4} \oplus \widetilde{f_2}\widetilde{z_2} \oplus \widetilde{e_3}\widetilde{z_3} \oplus \widetilde{s_4}$$

$$\widetilde{s_4} \oplus \widetilde{c_4}\widetilde{x_4} \oplus \widetilde{d_3}\widetilde{y_3} \oplus \widetilde{e_2}\widetilde{z_2} \cong \widetilde{x_5} \oplus \widetilde{d_4}\widetilde{y_4} \oplus \widetilde{f_3}\widetilde{z_3} \oplus \widetilde{s_5}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در گام نخست تابع هدف و محدودیت‌های مسئله، دارای پارامترهایی با اعداد فازی مثلثی هستند، مطابق با تعریف خیمنز از درجه بزرگی، دی‌فازی شدند. در گام دوم چون مسئله از نوع انعطافی است، با به‌کارگیری یک صفر فازی در محدودیت‌ها، مدل به‌صورت قطعی نوشته شد. در ادامه و مطابق رابطه ۲۱، مسئله به‌ازای βهای مختلف (در بازه صفر تا ۱) حل می‌شود.

با حل این مسئله، بهترین جواب به‌ازای ۱ = β حاصل شد. جواب مربوطه به‌ترتیب زیر است.

| | |
|---|---|
| $Z_0^* =$ ۲۴۸۸ | $x_3^* =$ ۱۴۴۰ |
| $x_1^* =$ ۱۰۰۰ | $x_4^* =$ ۱۷۲۸ |
| $x_2^* =$ ۱۲۰۰ | $x_5^* =$ ۲۰۷۳/۶ |

در ادامه و مطابق گام چهارم، جواب‌های به‌دست‌آمده به‌ازای βهای مختلف (در بازه صفر تا ۱)، Zهای متناسب با مدل لای و هوانگ تعریف شده و ماتریس تصمیم به‌ترتیب جدول ۲ تعریف می‌شود.

جدول ۲. نتایج مدل به‌ازای β متفاوت

| β | $Z_0$ | $Z_1 = (C_{j\beta}^{M} - C_{j\beta}^{L})\tilde{x}_j$ | $Z_2 = (C_{j\beta}^{M})\tilde{x}_j$ | $Z_3 = (C_{j\beta}^{U} - C_{j\beta}^{M})\tilde{x}_j$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۲۴۴۷/۰۱ | ۲۲۱ | ۲۶۵۲۷/۶ | ۲۲۱/۱ |
| ۰/۱ | ۲۴۵۱/۲ | ۱۹۹/۱ | ۲۶۵۵۳/۶ | ۱۹۹/۱ |
| ۰/۲ | ۲۴۵۵/۳ | ۱۷۷/۲ | ۲۶۵۷۹/۸ | ۱۷۷/۲ |
| ۰/۳ | ۲۴۵۹/۴ | ۱۵۵/۲ | ۲۶۶۰۵/۹ | ۱۵۵/۲ |
| ۰/۴ | ۲۴۶۳/۵ | ۱۳۳/۱ | ۲۶۶۳۲/۱ | ۱۳۳/۱ |
| ۰/۵ | ۲۴۶۷/۶ | ۱۱۱/۱۷ | ۲۶۶۵۸/۴ | ۱۱۱ |
| ۰/۶ | ۲۴۷۱/۷ | ۸۸/۹ | ۲۶۶۸۴/۶ | ۸۸/۹ |
| ۰/۷ | ۲۴۷۵/۹ | ۶۶/۷ | ۲۶۷۱۰/۸ | ۶۶/۷ |
| ۰/۸ | ۲۴۸۰ | ۴۴/۵ | ۲۶۷۳۷/۱ | ۴۴/۵ |
| ۰/۹ | ۲۴۸۴/۲ | ۲۲/۳ | ۲۶۷۶۳/۴ | ۲۲/۳ |
| ۱ | ۲۴۸۸/۳ | ۰ | ۲۶۷۸۹/۷ | ۰ |
| $Wj$ | ۰/۷ | ۰/۰۵ | ۰/۱۵ | ۰/۱ |

مطابق گام پنجم روش پیشنهادی، ماتریس تصمیم بالا با استفاده از TOPSIS حـل شـده و نتیجـه آن بـه‌ترتیـب جدول ۳ است.

جدول ۳. نتایج روش TOPSIS

| β | $d^{+}$ | $d^{-}$ | $CC$ |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰/۵۰۴ | ۰/۰۲۶ | ۰/۱۰۰ |
| ۰/۱ | ۰/۴۹۴ | ۰/۰۵۹ | ۰/۱۰۶ |
| ۰/۲ | ۰/۴۸۲ | ۰/۰۶۴ | ۰/۱۱۷ |
| ۰/۳ | ۰/۴۶۶ | ۰/۰۷۲ | ۰/۱۳۵ |
| ۰/۴ | ۰/۴۴۹ | ۰/۰۸۵ | ۰/۱۶ |
| ۰/۵ | ۰/۴۲۷ | ۰/۱ | ۰/۱۹۵ |
| ۰/۶ | ۰/۳۹۹ | ۰/۱۲ | ۰/۲۴۳ |
| ۰/۷ | ۰/۳۶۱ | ۰/۱۶ | ۰/۳۱۲ |
| ۰/۸ | ۰/۳۰۶ | ۰/۲۱۷ | ۰/۴۱۵ |
| ۰/۹ | ۰/۲۱۵ | ۰/۳۰۸ | ۰/۵۸۸ |
| ۱ | ۰/۰۹۹ | ۰/۵۰۴ | ۰/۸۳۴ |

با توجه به جدول بالا، جواب ۱ =β، دارای بهترین جواب است. مسئله بیان‌شـده بـا روش‌هـای کومـار و همکـاران (۲۰۱۰)، عزتی و همکاران (۲۰۱۵) و مؤمنی و حسین زاده (۱۳۹۱) نیز حل شده و جواب نهایی آنها بـا مـدل پیشـنهادی مقایسه شد. نتایج در جدول ۴ ارائه شده است.

**جدول ٤. نتایج اجرای مدل‌ها روی مثال عددی**

| نام مدل | Z |
|---|---|
| کومار و همکاران (۲۰۱۰) | ۲۱۶۰/۷۶ |
| عزتی و همکاران (۲۰۱۵) | ۱۸۹۰/۵۶ |
| مؤمنی و حسین زاده (۱۳۹۱) | ۲۱۳۰/۳۲ |
| مدل پیشنهادی | ۲۴۸۸ |

همان‌طور که در جدول بالا مشاهده می‌شود، مقدار تابع هدف در مدل پیشنهادی از سایر روش‌های پیشین، بهتر است.

## نتیجه‌گیری

با وجود عدم قطعیت فراوانی که امروزه در واقعیت وجود دارد، برای حل مسائل نمی‌توان از رویکردی کاملاً قطعی استفاده کرد. از این رو، استفاده از رویکردهایی که عدم قطعیت را در نظر بگیرند مانند روش‌های فازی کاربردی‌تر است. طی زمان روش‌های فازی فراوانی برای برنامه‌ریزی ریاضی فازی ارائه شده است که هر یک سعی در برطرف کردن ضعف یکدیگر دارند.

در پژوهش‌های پیشین برای حل مسائل تمام فازی راه‌های مختلفی از جمله استفاده از تعریف بزرگی اعداد فازی پیشنهاد شد. در این راه‌حل‌ها درجه بزرگی به‌صورت قطعی فرض می‌شد، حال آنکه مسئله، فازی است و بهتر است درجه بزرگی نیز به‌صورت فازی تعریف شود. در این پژوهش، تعریف بزرگی مطابق پیشنهاد خیمنز به‌صورت درجه بزرگی فازی به‌کار گرفته شد. برخلاف مدل‌های دیگر در مدل پیشنهادی هم تابع هدف و هم محدودیت‌ها به این روش دی‌فازی شدند. به‌علاوه، این مدل قابلیت حل مسائل محدودیت‌های مساوی، بزرگ‌تر و کوچک‌تر مساوی با پارامترهای مثبت یا منفی را نیز دارا است. همان‌طور که از نتایج مقایسه مدل پیشنهادی و سایر پژوهش‌های این حوزه مشخص است، مدل پیشنهادی بهبودی شایان توجهی در جواب نهایی مسئله ایجاد می‌کند. روش پیشنهادی در مدل‌های سرمایه‌گذاری و مالی به‌کار گرفته شد که نتیجه آن با سایر روش‌ها محسوس بود.

پیشنهاد می‌شود برای پژوهش‌های آتی، به جای در نظر گرفتن رویکرد فازی، از رویکرد فازی ـ تصادفی برای مدل‌سازی و حل این گونه مسائل استفاده شده و نتایج نیز با یکدیگر مقایسه شوند.

از آنجا که نتایج نشان‌دهنده عملکرد مناسب مدل پیشنهادی است، پیشنهاد می‌شود در سایر حوزه‌های بهینه‌سازی از مدل پیشنهادی استفاده شده و عملکرد مدل سنجیده شود.

## منابع

حبیبی، آرش؛ ایزدیار، صدیقه (۱۳۹۳). *تصمیم‌گیری چندمعیاره فازی* (چاپ اول). تهران: انتشارات کتیبه گیل.

سرمد، زهره؛ بازرگان، عباس؛ حجازی، الهه (۱۴۰۰). *روش‌های تحقیق در علوم رفتاری* (چاپ ۳۷). تهران: انتشارات آگه.

شریفی سلیم، علیرضا؛ مؤمنی، منصور؛ مدرس یزدی، محمد؛ راعی، رضا (۱۳۹۴). برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه برای انتخاب سبد سهام. *مدیریت صنعتی*، ۷ (۳)، ۴۸۹-۵۱۰.

صباحی، سوده؛ مخاطب رفیعی، فریماه؛ رستگار، محمد علی (۱۳۹۹). بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با دارایی‌های متنوع. *اقتصاد پولی مالی*، ۲۷(۱۹)، ۲۴۹-۲۷۸.

فتحی، محمد رضا؛ نصراللهی، مهدی؛ زمانیان، علی (۱۳۹۸). مدل‌سازی ریاضی شبکه زنجیره تأمین پایدار در وضعیت عدم قطعیت و حل آن با استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری. *مدیریت صنعتی*. ۱۱(۴)، ۶۲۱-۶۵۲

فهیمی، افشین؛ شاه‌بندرزاده، حمید (۱۴۰۰). توسعه مدل بهینه‌سازی سبد سهام مارکوییتز با توجه به ملاحظات غیرمالی سرمایه‌گذار و حمایت از تولیدات داخلی. *مدیریت صنعتی*، ۱۳(۱)، ۵۳-۷۹.

محبی، نگین؛ نجفی، امیرعباس (۱۳۹۷). بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چنددوره‌ای با رویکرد برنامه‌ریزی پویا. *مطالعات مدیریت صنعتی*، ۱۶(۵۰)، ۱-۲۶.

مؤمنی، منصور؛ حسین‌زاده، مهناز (۱۳۹۱). ارائه رویکردی جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تمام فازی با استفاده از مفهوم رتبه‌بندی فازی. *پژوهش‌های مدیریت در ایران*، ۱۶(۴)، ۱۷۱ - ۱۸۸.

## References

Bellman, R.E., Zadeh, L.A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science*, 17(4), 141-164.

Campos, L. & Verdegay, J. (1989). Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 32(1), 1-11.

Delgado, M., Verdegay, J.L., Vila, M. (1989). A general model for fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and systems*, 29(1), 21-29.

Ezzati, R., Khorram, E. & Enayati, R. (2015). A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem. *Applied mathematical modelling*, 39(12), 3183-3193.

Fahimi, A., Shahbandarzadeh, H. (2021). Developing the Markowitz Portfolio Optimization Model Concerning Investor Non - financial Considerations and Supporting Domestic Products. *Industrial Management Journal*, 13(1), 53-79. (*in Persian*)

Fang, S.C., Hu, C.F., Wang, H.F. & Wu, S.Y. (1999). Linear programming with fuzzy coefficients in constraints. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(10), 63-76.

Fathi, M., Nasrollahi, M., Zamanian, A. (2020). Mathematical Modeling of Sustainable Supply Chain Networks under Uncertainty and Solving It Using Metaheuristic Algorithms. *Industrial Management Journal*, 11(4), 621-652. (*in Persian*)

Fei, L., & Deng, Y. (2020). Multi-criteria decision making in Pythagorean fuzzy environment. *Applied Intelligence*, 50(2), 537-561.

Habibi, A. & Izadyar, S. (2014). *Fuzzy Multi Criteria Decision Making*, Tehran: Katibeh Gill. (*in Persian*)

Hussain, A., Chun, J., & Khan, M. (2021). A novel multicriteria decision making (MCDM) approach for precise decision making under a fuzzy environment. *Soft Computing*, 25(7), 5645-5661.

Inuiguchi, M. and Ramık, J. (2000). Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem. *Fuzzy sets and Systems*, 111(1), 3-28.

Jiménez, M. (2007). Linear programming with fuzzy parameters: an interactive method resolution. *European Journal of Operational Research*, 177(3), 1599-1609.

Kumar, A., Kaur, J. & Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. *Applied Mathematical Modelling*, 35(2), 817-823.

Kumar, A., Kaur, J. and Singh, P. (2010). Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear programming problems with inequality constraints. *International Journal of Mathematics and Computer Scinece*, 6, 37-41.

Kumar, R., & Dhiman, G. (2021). A comparative study of fuzzy optimization through fuzzy number. *International Journal of Modern Research*, 1(1), 1-14.

Lai, Y.J. & Hwang, C.L. (1992). A new approach to some possibilistic linear programming problems. *Fuzzy sets and systems*, 49(2), 121-133.

Mahdavi-Amiri, N. and Nasseri, S. (2006). Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function. *Applied Mathematics and Computation*, 180(1),206-216.

Mahdavi-Amiri, N. and Nasseri, S.H. (2007). Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables. *Fuzzy sets and systems*, 158(17), 1961-1978.

Maleki, H.R., Tata, M. & Mashinchi, M. (2000). Linear programming with fuzzy variables. *Fuzzy sets and systems*, 109(1), 21-33.

Mohebbi, N., Najafi, A. (2018). Multi-Period Portfolio Optimization Using Dynamic Programming Approach. *Industrial Management Studies*, 16(50), 1-26. (*in Persian*)

Momeni, M. & Hosseinzadeh, M. (2012) A New approach for Solving Full Fuzzy Linear Programming Problems through Fuzzy Ranking Concept, *Management Research in Iran*, 16(4), 171-188. (*in Persian*)

Pishvaee, M.S. & Torabi, S.A. (2010). A possibilistic programming approach for closed-loop supply chain network design under uncertainty. *Fuzzy sets and systems*, 161(20), 2668-2683.

Sabahi, S., Mokhatab Rafiei, F. and Rastegar, M.A. (2021). Mixed- Asset Portfolio Optimization. *Monetary & Financial Economics*, 27(19), 249- 278. (*in Persian*)

Sarmad, Z., Bazargan, A., Hejazi, E. (2021). *Reseach Methods in Behaviour Sciences*, 37th Edition, Tehran: Agah. (*in Persian*)

Sharifi Salim, A., Momeni, M., Modarres Yazdi, M., Raei, R. (2015). Multi Objective Stochhastic Programming for Stock Portfolio Selection. *Journal Industrial Management*, 7(3), 489-510. (*in Persian*)

Solanki, R., Lohani, Q. D., & Muhuri, P. K. (2021). Probabilistic Intuitionistic Fuzzy Decision Making Algorithms. *IEEE Access*, 9, 99651-99666.

Tanaka, H., Okuda, T. & Asai, K. (1973). On fuzzy mathematical programming. *Cybernetics Systems*, 3, 45-61.

Torabi, S.A. & Hassini, E. (2008). An interactive possibilistic programming approach for multiple objective supply chain master planning. *Fuzzy sets and systems*, 159(2), 193-214.

Verdegay, J.L. (1984). A Dual approach to solve the fuzzy linear programming problem. *Fuzzy sets and systems*, 14(2), 131-141.

Wang, L.X. (1997). *A course in fuzzy systems and control.* Prentice-Hall International.

Werners, B. (1987). Interactive multiple objective programming subject to flexible constraints. *European Journal of Operational Research*, 31(3), 342-349.

Zimmermann, H.J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy sets and systems*, 1(1), 45-55.