Industrial Management Journal

Print ISSN: 2008-5885
Online ISSN: 2423-5369

Cost Malmquist Productivity Index Based on Piecewise Linear Cost Function in Data Envelopment Analysis

Fatemeh Mirzaeian
PhD. Candidate, Department of Mathematics, Khorramabad Branch, Islamic Azad University, Khorramabad, Iran. E-mail: f.mirzaeian@khoiau.ac.ir

Reza Fallahnejad
*Corresponding Author, Assistant Prof., Department of Mathematics, Khorramabad Branch, Islamic Azad University, Khorramabad, Iran. E-mail: r.fallahnejad@khoiau.ac.ir

Abstract

Objective: One of the effective factors in calculating the Malmquist productivity index (MPI) is to calculate cost efficiency changes. In some cases, especially when the issue of saving and observance of the consumption pattern is considered, prices are usually considered stepwise, so this research introduces a method for calculating cost Malmquist productivity index (CMPI) when the prices are stepwise and the cost function is a linear piece.

Methods: In this paper, due to the presence of stepwise prices and piecewise linear costs, the stepwise linear cost efficiency model, as well as the (CMPI), were used as the baseline models to develop the calculating method of cost Malmquist index as the prices are stepwise.

Results: By applying the proposed method to calculate the index of 14 confectionaries in the city of Islam Abad Gharb during the years of 2019 and 2020, it was found that four confectionaries had an increase in productivity and ten confectionaries had a drop in productivity; and in total the average efficiency of 2020 declined compared to 2019. Also, the main factor in the loss of productivity in units was the loss of their efficiency in 2020 compared to 2019.

Conclusion: According to the findings of the paper, the models presented in the proposed method have increased the capability of classical models to calculate (MPI) in such a way that if the costs are piecewise linear, the more acceptable and real results can be achieved with the help of proposed models than the classical models.

Keywords: Data envelopment analysis, Piecewise linear functions, Cost efficiency, Cost Malmquist productivity index

Citation: Mirzaeian, Fatemeh and Fallahnejad, Reza (2021). Cost Malmquist Productivity Index Based on Piecewise Linear Cost Function in Data Envelopment Analysis. *Industrial Management Journal*, 13(2), 300- 328. (*in Persian*)

Industrial Management Journal, 2021, Vol. 13, No.2, pp. 300- 328
https://doi.org/10.22059/IMJ.2021.322204.1007841

Published by University of Tehran, Faculty of Management

Article Type: Research Paper
Received: April 18, 2021
Accepted: July 09, 2021

شاپا چاپی: ۵۸۸۵-۲۰۰۸
شاپا الکترونیکی: ۵۳۶۹-۲۴۲۳
مدیریت صنعتی

شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای مبتنی بر تابع هزینه قطعه‌ای خطی در تحلیل پوششی داده‌ها

فاطمه میرزائیان
دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد خرم‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، خرم‌آباد، ایران. رایانامه: f.mirzaeian@khoiau.ac.ir

رضا فلاح‌نژاد
* نویسنده مسئول، استادیار، گروه ریاضی، واحد خرم‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، خرم‌آباد، ایران. رایانامه: r.fallahnejad@khoiau.ac.ir

چکیده

هدف: یکی از عوامل مؤثر در محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست (MPI)، محاسبه تغییرات کارایی هزینه است. در مواقعی، به‌ویژه هنگامی‌که موضوع صرفه‌جویی و رعایت الگوی مصرف مدنظر است، قیمت‌ها معمولاً به‌صورت پلکانی در نظر گرفته می‌شود، بنابراین، این پژوهش روشی را برای محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای (CMPI)، زمانی‌که قیمت‌ها پلکانی و تابع هزینه قطعه‌ای خطی است، معرفی می‌کند.

روش: در این مقاله، به‌دلیل وجود قیمت‌های پلکانی و هزینه‌های قطعه‌ای خطی، مدل کارایی هزینه قطعه‌ای خطی و شاخص مالمکوئیست هزینه‌ای، به‌عنوان مدل‌های پایه استفاده شده است تا روش محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای، به حالتی که قیمت‌ها پلکانی هستند، توسعه داده شود.

یافته‌ها: با اعمال روش پیشنهادی برای محاسبه شاخص ۱۴ قنادی در شهر اسلام‌آباد غرب، طی سال‌های ۹۸ و ۹۹ مشخص شد که تعداد ۴ قنادی رشد بهره‌وری و ۱۰ قنادی افت بهره‌وری داشته‌اند و در کل، میانگین کارایی سال ۹۹ در مقایسه با سال ۹۸ کاهش یافته است. همچنین، عامل اصلی افت بهره‌وری در واحدها، افت کارایی آنها در سال ۹۹ نسبت به سال ۹۸ است.

نتیجه‌گیری: با توجه به یافته‌های مقاله، مدل‌های ارائه‌شده در روش پیشنهادی، قابلیت مدل‌های کلاسیک را برای محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست افزایش داده است؛ به‌گونه‌ای که اگر هزینه‌ها قطعه‌ای خطی باشند، به‌کمک مدل‌های پیشنهادی می‌توان نتایج واقعی و قابل قبول‌تری در مقایسه با مدل‌های کلاسیک به‌دست آورد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، توابع قطعه‌ای خطی، کارایی هزینه، شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای

استناد: میرزائیان، فاطمه و فلاح‌نژاد، رضا (۱۴۰۰). شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای مبتنی بر تابع هزینه قطعه‌ای خطی در تحلیل پوششی داده‌ها. *مدیریت صنعتی*، ۱۳(۲)، ۳۰۰- ۳۲۸.

مدیریت صنعتی، ۱۴۰۰، دوره ۱۳، شماره ۲، صص. ۳۰۰- ۳۲۸
دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۲۹، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۱۸
https://doi.org/10.22059/IMJ.2021.322204.1007841
نوع مقاله: علمی پژوهشی
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران

مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[1] که در عمل توسط چارنز، کوپر و ردز[2] (۱۹۷۸) پایه گذاری شد، یکی از روش‌های برنامه‌ریزی خطی است که برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده (DMU)[3] با چندین ورودی و خروجی به‌کار می‌رود و از میان واحدهای تصمیم‌گیرنده حداقل یکی از آنها به‌عنوان کارا معرفی می‌شود. انواع گوناگونی از کارایی در DEA معرفی شده است و ازجمله آنها کارایی هزینه (CE)[4] است که علاوه بر اطلاعات مربوط به داده‌های ورودی و خروجی، به اطلاعاتی در مورد قیمت‌ها هم نیاز دارد (سید مرتضی میردهقان اشکذری، ۱۳۸۹). براساس مقالات انجام شده در مبحث کارایی هزینه، دو فضای کاملاً رقابتی و غیررقابتی مطرح می‌شود. در فضای کاملاً رقابتی، قیمت‌های واحدها توسط بازار تعیین شده و خود شرکت‌ها نمی‌توانند تعیین‌کننده قیمت ورودی‌های خود باشند و بنابراین در این فضا قیمت تمامی ورودی‌ها برای تمامی واحدها یکسان در نظر گرفته می‌شود. در مقابل، در فضای غیررقابتی، این واحدها هستند که قیمت‌های ورودی را تعیین می‌کنند و بنابراین این قیمت‌ها برای واحدهای مختلف، متفاوت خواهد بود.

یکی از مفاهیمی که از مدل‌های DEA برای توسعه آن استفاده می‌شود شاخص بهره‌وری مالمکوئیست (MPI)[5] است که از مهم‌ترین شاخص‌های محاسبه رشد بهره‌وری محسوب می‌شود. همچنین این شاخص را هنگامی می‌توان به‌کار برد که قیمت ورودی‌ها معلوم است و تصمیم‌گیران قصد دارند هزینه را به حداقل برسانند. بنابراین تغییرات کارایی هزینه از عوامل مؤثر در پیشرفت و پسرفت واحد تصمیم گیرنده در طی زمان است و همین علت به معرفی شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای (CMPI)[6] منجر شده است.

در مسائل واقعی، موارد بسیاری می‌توان یافت که در آنها قیمت‌ها به‌صورت پلکانی، تغییر می‌کنند. برای مثال، اگر میزان انرژی مصرفی را به‌عنوان یک عامل ورودی در نظر بگیریم قیمت این انرژی براساس میزان مصرف، به‌صورت پلکانی و نه یکنواخت تغییر می‌کند. همچنین اگر میزان حقوق دریافتی کارکنان در ساعات اضافه‌کاری را در نظر بگیریم، این مبلغ به میزان ساعات اضافه‌کاری کارمندان بستگی دارد و به‌صورت پلکانی و تصاعدی تغییر می‌کند. در مدل‌های کلاسیک کارایی هزینه، قیمت‌ها یکنواخت در نظر گرفته شده‌اند و نمی‌توان هزینه‌های قطعه‌ای خطی را اضافه کرد. ضمن اینکه اضافه کردن این هزینه‌ها، باعث غیرخطی شدن مدل‌ها می‌شود و لذا برای رفع این مشکل، میرزائیان و فلاح‌نژاد[7] (۲۰۲۱) مدل‌هایی متناسب با این نوع هزینه‌ها معرفی کردند. آنها در این حالت که متغیر، رفتار قطعه‌ای خطی دارد، متغیرهایی تعریف کردند که تابع هزینه به ازای هریک از این متغیرها در فاصله مربوط به آنها، خطی است.

هرچند مطالعاتی راجع به CMPI انجام گرفته است از جمله مانیاداکیس و تاناسولیس[8] (۲۰۰۴)؛ توحیدی، رضویان و

1. Data Envelopment Analysis
2. Charnes, Cooper & Rhodes
3. Decision-Making Units
4. Cost Efficiency
5. Malmquist Productivity Index
6. Cost Malmquist Productivity Index
7. Mirzaeian., Fallahnejad.
8. Maniadakis, Thanassoulis

توحیدنیا[1] (۲۰۱۲)؛ تاناسولیس، شیراز و مانیاداکیس[2] (۲۰۱۵)؛ والهیر[3] (۲۰۱۸)؛ رضایی هزاوه و فلاح نژاد[4] (۲۰۲۱)، اما مدل‌هایی که قادر به تبیین CMPI با قیمت‌های پلکانی که در بحث صرفه جویی و رعایت الگوی مصرف حائز اهمیت است، مغفول مانده‌اند. به‌طور مثال مقالات کوک و ژو[5] (۲۰۰۹)؛ لطفی، رستمی مال خلیفه و مقدس[6] (۲۰۱۰)؛ لطفی، امیرتیموری، مقدس و واعظ قاسمی[7] (۲۰۲۰) و میرزائیان و فلاح نژاد (۲۰۲۱). به همین دلیل معرفی CMPI زمانی که قیمت‌ها پلکانی و هزینه‌ها قطعه‌ای خطی است، ضروری به نظر می‌رسد. در این پژوهش ابتدا براساس مدل میرزائیان و فلاح نژاد (۲۰۲۱)، شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای برای هزینه‌های قطعه‌ای خطی توسعه داده شده و شاخص جدیدی به نام شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای قطعه‌ای خطی در فضای رقابتی و غیررقابتی معرفی می‌شود که در آن قیمت‌ها معلوم و به‌صورت پلکانی هستند و سپس مدل‌های پیشنهادی در یک نمونه واقعی، برای محاسبه شاخص بهره‌وری ۱۴ قنادی شهر اسلام آباد غرب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

بخش‌های بعدی مقاله به این ترتیب هستند. در بخش بعدی به پیشینه نظری و تجربی پژوهش پرداخته می‌شود و به‌وسیلهٔ آن شکاف تحقیقاتی موجود شناسایی شده و بر مبنای آن نوآوری موجود در این پژوهش معرفی می‌گردد. بعد از بیان پیشینه پژوهش و در بخش روش شناسی پژوهش، روش پیشنهادی این مقاله ارائه می‌شود. در بخش بعدی، یافته‌های پژوهش با بیان یک مطالعه موردی در خصوص قنادی‌های شهر اسلام آباد غرب، توضیح داده می‌شود و در بخش پایانی به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادها به‌منظور تحقیقات آتی پرداخته می‌شود.

پیشینهٔ پژوهش

در این بخش مهم‌ترین مطالعات انجام گرفته در زمینه مباحث کارایی هزینه و شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را مرور می کنیم.

پیشینهٔ نظری

تحلیل پوششی داده‌ها که اولین بار توسط چارنز،کوپر و رودز (۱۹۷۸) ابداع شد، روشی ناپارامتری است که با بهره‌گیری از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی به سنجش کارایی نسبی یک واحد تصمیم‌گیرنده می‌پردازد. تحلیل پوششی داده‌ها به‌عنوان یک روش تحقیق در عملیات، امروزه مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته و مقالات وکاربردهای بسیاری از این علم در زمینه‌های مختلف به چاپ رسیده است. از جمله می‌توان به پژوهش‌های مؤمنی، خدایی و بشیری (۱۳۹۹)؛ غریب، آذر و دهقان نیری (۱۳۹۹)، علیرضایی و رفیعی ثانی (۱۳۹۵) اشاره کرد.

شاخص بهره‌وری مالمکوئیست تغییرات عملکرد نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در طول زمان اندازه می‌گیرد. اولین‌بار شاخص مالموئیست، توسط مالمکوئیست (۱۹۵۳) به‌عنوان شاخص استاندارد زندگی به‌منظور تجزیه و تحلیل

1. Tohidi, Razavyan, Tohidnia
2. Thanassoulis, Shiraz, Maniadakis
3. Walheer
4. Rezaei Hezaveh, Fallahnejad
5. Cook, Zhu
6. Lotfi, Rostay-Malhkalife, Moghaddas
7. Lotfi, Amirteimoori, Moghaddas, Vaez‑Ghasemi

مصرف منابع تولید معرفی گردید. کیوز، کریستنسن و دیورت[1] (۱۹۸۲) شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را به‌عنوان شاخص محاسبه بهره‌وری در تئوری تولید به کار بردند و فرم میانگین هندسی از شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را پیشنهادکردند. فار، گرسکوف، لیندگرن و روز[2] (۱۹۹۲) با در نظر گرفتن بازده به مقیاس ثابت، از مدل‌های DEA برای محاسبۀ تابع فاصله موجود در MPI استفاده کردند و تجزیه دو بخشی از این شاخص ارائه دادند که در این تجزیه MPI از دو عامل به‌دست آمده است: تغییرات فنی و تغییرات کارایی. فار، گرسکوف، نوریس و ژانگ[3] (۱۹۹۴) با در نظر گرفتن بازده به مقیاس متغیر این شاخص را توسعه دادند و با معرفی عاملی جدید به نام کارایی مقیاس، تجزیه‌ای سه بخشی شامل تغییرات کارایی خالص، تغییرات کارایی مقیاس و تغییرات تکنولوژی ارائه کردند. مانیاداکیس و تاناسولیس (۲۰۰۴) شاخصی را معرفی کردند که تعمیمی از MPI بود. برای این منظور آنها شاخص بهره‌وری را به‌گونه‌ای توسعه دادند که علاوه بر کارایی تکنیکی و تغییرات تکنولوژیکی، کارایی تخصیصی و اثر تغییرات قیمت ورودی‌ها را نیز در نظر بگیرد. توحیدی و همکاران (۲۰۱۱) یک شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای کلی را معرفی کردند که تغییرات بهره‌وری را با رجوع به یک مرز هزینه مشترک محاسبه می‌کرد.

کارایی هزینه، توانایی یک واحد تصمیم‌گیرنده برای تولید خروجی جاری با کمترین هزینه را مشخص می‌کند. مفهوم کارایی هزینه به تحقیقات فارل[4] (۱۹۵۷) برمی‌گردد که بسیاری از مفاهیم کارایی را پایه‌گذاری کرد. او در مقاله خود، کارایی هزینه را به مؤلفه‌های کارایی تکنیکی و کارایی تخصیصی تجزیه کرد که این تجزیه به تجزیه فارل مشهور گشت. مفهوم کارایی هزینه که توسط فارل پیشنهاد شد، توسط توسط فار، گرسکوف و لوول[5] (۱۹۸۵) بسط داده شد و یک مدل برنامه‌ریزی برای ارزیابی کارایی هزینه ارائه گردید. این مدل برنامه‌ریزی خطی برای به‌دست آوردن کارایی هزینه به داده‌های ورودی، خروجی و هزینه ورودی‌ها نیاز دارد. تونی[6] (۲۰۰۲) خصوصیت غیرقابل‌قبول از مدل فارل را هنگامی که هزینه‌های ورودی برای DMUهای مختلف، متفاوت است، پیدا نمود. او با معرفی یک روش جدید برای محاسبه کارایی هزینه این مشکل را حل نمود. کامانهو و دایسون[7] (۲۰۰۵) نشان دادند که کارایی هزینه را می‌توان از مدل استاندارد DEA با اضافه کردن کنترل وزن به‌دست آورد. کامانهو و دایسون (۲۰۰۸) مدل کارایی هزینه را در فضای غیررقابتی ارائه دادند. جهانشاهلو، سلیمانی دامنه و مصطفایی[8] (۲۰۰۸) در مقاله‌ای به اصلاح مدل کارایی هزینه ارائه شده توسط کامانهو و دایسون پرداختند. مدل کارایی هزینه اصلاحی آنها، باعث کاهش تعداد قیود و متغیرها می‌گردد و کاهش چشمگیر محاسبات را در پی دارد. ساهو، مهدیلوزاد و تونی[9] (۲۰۱۴) با استفاده از روشی جدید بر مبنای تابع فاصله جهت‌دار، در فضای ارزیابی معرفی شده توسط تن، کارایی شرکت‌ها را محاسبه کردند.

1. Caves, Christensen, Diewert.
2. Färe, Grosskopf, Lindgren, Roos
3. Fare, Grosskopf, Norris, Zhang
4. Farrell
5. Färe, Grosskopf, Lovell
6. Tone
7. Camanho, Dyson
8. Jahanshahloo, Soleimani-Damaneh, Mostafaee
9. Sahoo, Mehdiloozad, Tone

پیشینه تجربی

فار و همکاران (۱۹۸۵) یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای اندازه‌گیری کارایی هزینه ارائه کردند. فضای در نظرگرفته شده توسط فار و همکاران کاملا رقابتی است و قیمت‌ها برای تمام DMUها ثابت و معلوم‌اند. کاهش هزینه‌ها نیز صرفاً از طریق کاهش ورودی‌ها و ثابت نگه داشتن قیمت‌ها صورت می‌گیرد. استفاده از مدل هزینه فار و همکاران به دلیل وجود قیمت‌های ثابت، در بعضی حالت‌ها نتایج غیرواقعی می‌دهد. به عبارتی در صورت متفاوت بودن مقادیر قیمت برای واحدهای تصمیم گیرنده، مقادیر کارایی نادرستی به‌دست می‌آید.

تن (۲۰۰۲) نشان داد که مدل ارزیابی کارایی معرفی شده توسط فار و همکاران دچار ضعف و مشکلاتی است. در واقع تن اشاره کرد که اگر دو شرکت دارای مقادیر ورودی و خروجی مشاهده شده یکسانی باشند و هزینه متحمل شده یکی از این دو شرکت دو برابر دیگری باشد در این صورت کارایی هزینه دو شرکت با هم برابر هستند. بنابراین، تن این فرض فار را که واحد ورودی i ام در تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای هزینه یکسان c_i است، کنار گذاشت و حالتی را در نظر گرفت که قیمت‌ها از یک DMU به DMU دیگر متفاوت است و کارایی DMUها را در فضای هزینه ارزیابی کرد. این فضا غیررقابتی است و تصمیم گیرنده می‌تواند برای کالایی با کیفیت بالاتر، هزینه بیشتری بپردازد. برخلاف روش فار، در روش تن هزینه‌ها نقش تعیین کننده دارند نه حداقل ورودی‌ها.

کامانهو و دایسون (۲۰۰۸) با معرفی روشی برای محاسبه کارایی در فضای هزینه، تجزیه‌ای از کارایی هزینه متشکل از کارایی قیمت، کارایی تخصیصی و کارایی تکنیکی بیان نمودند و برای ورودی‌ها با قیمت‌های متفاوت، استفاده از کارایی اقتصادی پیشنهاد کردند که از نظریه پاراتو پیروی می‌کند و تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که در شرایط یکسانی از بازار قرار دارد را مورد ارزیابی قرار می‌دهد.

در صورتی که اطلاعات قیمت‌ها در هر DMU به طور کامل در دسترس باشند، پیرو مطالبی که پیش از این ارائه گردید، کارایی هزینه‌ای به‌صورت دقیق مشخص می‌شود، ولی در کاربردهای عملی کارایی هزینه‌ای، اغلب یا اطلاعات ناقصی از قیمت‌ها در دست است یا قیمت‌ها در یک بازهٔ زمانی کوتاه می‌توانند تغییر کنند و فقط کران‌های بالا و پایین قیمت‌ها قابل تعیین‌اند، به عبارت دیگر هزینهٔ هر کدام از ورودی‌ها در هرDMU به‌صورت یک بازه بیان می‌شوند. در این صورت به خاطر عدم قطعیت در بیان قیمت‌ها، کارایی هزینه‌ای مانند حالت قبل یک عدد خاص نیست. مسئله اصلی در این قسمت تخمین کارایی هزینه‌ای در پرتو مطلوب‌ترین قیمت‌ها یا خوش‌بینانه‌ترین وضعیت و همچنین نامطلوبترین قیمت‌ها یا بدبینانه‌ترین وضعیت است. حال به بیان و شرح روش‌هایی در تخمین کارایی هزینه‌ای با وجود اطلاعات ناکامل هزینه‌ها می‌پردازیم:

کاسمانن و پست (۲۰۰۱و۲۰۰۳) نشان دادند که چگونه یک Lp می‌تواند تخمینی برای کران‌های کارایی هزینه‌ای به‌دست آورد. قضایا و مطالبی که در این مقاله آورده شده مربوط به تکنولوژی خاصی از تولید در ایجاد PPS نیست و می‌تواند قابل استفاده برای هر فعالیت با هر نوع خصوصیتی باشد. علاوه بر آن فرض شده که دامنه قیمت‌ها یک مخروط چند وجهی محدب است که این فرض محاسبات را آسان‌تر می نماید. آنها با استفاده از تجزیهٔ فارل و به‌کارگیری کران بالا و پایین کارایی هزینه‌ای، توانستند کارایی تخصیصی را به‌صورت بازه‌ای بیان نمایند.

مصطفایی و سلجوقی[1] (۲۰۱۰) نشان دادند در شرایطی که اطلاعات ورودی‌ها و خروجی‌ها نامعین و به‌صورت بازه‌ای است، اندازهٔ کارایی هزینه‌ای محاسبه شده از این اطلاعات نیز نامعین بوده و برای به‌دست آوردن کران‌های بالا و پایین کارایی هزینه در حضور داده‌ها با قیمت‌های نادقیق از یک زوج مسئله برنامه‌ریزی دو سطحی استفاده کرد و ادعا کردند زمانی که قیمت های ورودی توسط مجموعه محدب نشان داده شوند کران بالا و پایین در نقاط رأسی اتفاق می‌افتد.

در حالت ناکامل بودن اطلاعات هزینه‌ها، کامانهو و دایسون (۲۰۰۵) فرض کردند هزینه‌های حقیقی هر یک از DMUهای مشاهده شده در یک بازهٔ بسته قرار می‌گیرند. اندازهٔ کارایی هزینه خوش‌بینانه با بهترین ترکیب وزن‌ها به‌دست می‌آید، و همچنین در به‌دست آوردن کارایی هزینه بدبینانه بدترین ترکیب وزن‌ها را درنظر گرفتند.

در مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، مجموع خروجی تابعی خطی از خروجی‌ها تعریف می‌شود. به‌طور مثال اگر DMU_1 دو برابر DMU_2 خروجی تولید کند، آنگاه DMU_1 دو برابر DMU_2 اعتبار مالی کسب می‌کند. در بسیاری از شرایط ممکن است قیمت گذاری خطی به طور کافی نشان دهنده تفاوت میان ارزش خروجی‌های تولید شده نباشد. از این رو کوک و ژو (۲۰۰۹) در مقاله‌ای مدل قطعه‌ای خطی DEA را ارائه کردند. در مدل پیشنهادی کوک و ژو دو نوع محدودیت به به مسئله اعمال شده است. آنها به ارزیابی عملکرد ۲۰ واحد گشت راهداری حفاظت ایالات آنتاریوی کانادا در حضور خروجی‌ای از نوع DMV پرداختند. خروجی که از نوع DMV در نظرگرفته شد درجه‌بندی شرایط آسفالت است که رابطه‌ای غیرخطی بین این خروجی و هزینه مصرف وجود دارد.

در سال ۲۰۱۰ حسین زاده و همکاران نشان دادند که مدل ارائه شده توسط کوک و ژو کارایی واحدها را به درستی ارزیابی نمی‌کند. بنابراین مدل اصلاح شده قطعه‌ای خطی را ارائه دادند که در دو فاز کارایی را محاسبه می‌کند و الگو را به درستی نمایش می‌دهد.

حسین زاده و همکاران (۲۰۲۰) بیان کردند که فرض قیمت‌های ثابت نمی تواند موقعیت‌های واقعی را منعکس کند. زیرا در صورتی که مقادیر بیشتری از یک محصول خریداری شود، بازار مجبور خواهد شد قیمت های کمتری بپردازد. می‌توان گفت که تخفیفات در این شرایط به طور خودکار در نظر گرفته می‌شوند. برای این منظور، آنها یک ایده نوآورانه برای اصلاح مدل کارایی هزینه کلاسیک به منظور بررسی موقعیت‌های بازارهای واقعی در نظر گرفتند. سپس با یک مثال تجربی، مقایسه‌ای بین رویکرد پیشنهادی و مدل کلاسیک کارایی هزینه ارائه دادند.

میرزائیان و فلاح نژاد (۲۰۲۱) با این ادعا که مدل‌های کلاسیک کارایی هزینه زمانی که قیمت‌ها به‌صورت پلکانی باشند، قابل استفاده نخواهند بود و این مدل‌ها صرفاً زمانی به کار می‌روند که قیمت‌ها به‌صورت ثابت، متغیر یا نادقیق باشند؛ مدلی برای رفع ضعف‌های مدل کلاسیک ارائه نمودند و مدل ارائه شده را در ارزیابی ۱۵ قنادی شهر اسلام آبادغرب مورد استفاده قرار دادند. متغیرهای مواد اولیه، نیروی انسانی و برق مصرفی متغیرهای ورودی و مقدار شیرینی فروخته شده را به‌عنوان متغیر خروجی در نظر گرفتند. نتایج نشان داد که در بین قنادی‌ها، تنها قنادی مرکزی کاراست و از جمله دلایل کارایی قنادی مرکزی را صرفه جویی در مصرف برق، مکان گزینی مناسب قنادی و به‌کارگیری نیروی

1. Mostafaee, Saljooghi

انسانی ماهر و با تجربه عنوان کردند. نتایج حاصل از اجرای مدل حاکی از آن بود که مدل پیشنهادی دارای قدرت تحلیل بیشتر و نتایج قابل قبولی نسبت به مدل‌های ارائه شده در این زمینه است.

در ادامه ابتدا به ارائه مدل‌های کارایی هزینه قطعه‌ای خطی در فضاهای رقابتی و غیر رقابتی که توسط میرزائیان و فلاح نژاد (۲۰۲۱) ارائه شده می‌پردازیم و سپس مدل‌های کلاسیک شاخص مالمکوئیست هزینه‌ای ارائه می‌شوند تا شکاف تحقیقاتی موجود در این پژوهش‌ها مشخص گردد.

کارایی هزینه با ورودی‌های قطعه‌ای خطی

فرض‌کنید n واحدتصمیم‌گیرنده $(DMU_j, j = 1,\ldots,n)$ با m ورودی نامنفی $(x_{ij}, i = 1,\ldots,m)$ و s خروجی نامنفی$(y_{rj}, r = 1,\ldots,s)$ موجود باشد و $p_i(i = 1,2,\ldots,m)$ هزینه ورودی$x_{ij}\,(i = 1,\ldots,m)$ درتمام واحدها باشد. برای محاسبه کارایی هزینه DMU_o مدل کارایی هزینه (CE) زیر را در نظر می‌گیریم (فار و همکاران، ۱۹۸۵):

رابطه ۱)

$$\begin{aligned} C(y_o,p_o) = min \quad & \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_i \quad i = 1,2,\ldots,m \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} \quad \mathrm{r} = 1,,2,\ldots,\mathrm{s} \\ & \lambda_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n \\ & x_i \ge 0 \quad i = 1,\ldots,m \end{aligned}$$

به طوری که $C(y_o,p_o)$مینیمم هزینه تولید بردار خروجی y_o با هزینه‌های ورودی p_o را تعریف می‌کند. اگر $x_i^* = (x_{i1}^*,\ldots,x_{im}^*)$ جواب بهینه مدل ۱ باشد آنگاه کارایی هزینه DMU_o به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

رابطه ۲)

$$CE_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i x_i^*}{\sum_{i=1}^{m} p_i x_{io}}$$

که به وضوح $CE_o \le 1$ و در آن $\sum_{i=1}^{m} p_i x_{io}$ هزینه مشاهده شده و $\sum_{i=1}^{m} p_i x_i^*$ هزینه بهینه است.

قابل ذکر است که مدل CE، میزان کارایی هزینه واحدها را، در یک فضای کاملاً رقابتی تعیین می‌کند که در آن هزینه ورودی‌ها توسط بازار و نه توسط خود شرکت‌ها تعیین می‌شود و بنابراین این هزینه‌ها در تمامی واحدها، یکسان در نظر گرفته می‌شوند.

در مدل CE، هزینه ورودی‌ها همواره ثابت است لذا سهم ورودی x_i در تابع هدف، به‌صورت $p_i x_i$ خواهد بود. اما در واقعیت مسائلی وجود دارند که هزینه بعضی از ورودی‌ها متناسب با مقدار مصرف آن ورودی‌ها تغییر می‌کند و بنابراین در این مسائل دیگر $p_i x_i$ سهم متغیر x_iدر تابع هدف نخواهد بود.

به‌طور مثال اگر میزان انرژی مصرفی را به‌عنوان یک عامل ورودی در نظر بگیریم هزینه این انرژی براساس میزان مصرف، به‌صورت پلکانی تغییر می‌کند و یا میزان حقوق دریافتی کارکنان در ساعات اضافه‌کاری، به میزان ساعات

اضافه‌کاری کارمندان بستگی دارد و به‌صورت پلکانی و تصاعدی تغییر می‌کند و یا میزان حقوق پرداختی کارکنانی که در ساعات مختلفی از شب و روز کار می‌کنند به‌میزان ساعات کاری آنها در شب و روز، متفاوت خواهد بود.

در چنین مواردی که میزان هزینه یک متغیر ورودی مانند x_1، به‌صورت پلکانی تغییر می‌کند، دیگر نمی‌توان از مدل CE برای تعیین کارایی واحدها بهره‌جست. زیرا دیگر در این مدل، فرض تناسب برقرار نیست و لذا تابع مذکور، دیگر خطی نخواهد بود.

برای این منظور میرزائیان و فلاح نژاد (۲۰۲۱) مدل هزینه قطعه‌ای خطی را به‌صورت زیر پیشنهاد دادند.

فرض کنید هزینه‌ها برای q ورودی اول به‌صورت یکنواخت و برابر p_i و برای بقیه ورودی‌ها یعنی $q+1$ تا m به‌صورت پلکانی و برابر p_i^k باشد. این هزینه‌ها برای همه واحدها برابر است.

فرض کنید $v_i^k(k=1,\dots,t_i)$ متغیرهای متناظر $x_i(i=q+1,\dots,m)$ درفواصل $[x_i^0,x_i^1)$ و $[x_i^1,x_i^2)$ و ... و $[x_i^{t_i-1},x_i^{t_i})$ باشند که در آن $x_i^0=0$ و $x_i^{t_i}=\infty$. در این صورت کارایی هزینه DMU_o با مدل خطی زیر محاسبه می‌شود:

رابطه ۳)

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{q} p_i x_i + \sum_{k=1}^{t_i}\sum_{i=q+1}^{m} p_i^k v_i^k \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_i \quad i=1,2,\dots,q \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \sum_{k=1}^{t_i} v_i^r \quad i=q+1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} \quad r=1,2,\dots,s \\
& 0 \le v_i^k \le x_i^k - x_i^{k-1} \quad i=q+1,\dots,m \quad k=1,2,\dots,t_i-1 \\
& v_i^{t_i} \ge 0 \quad i=q+1,\dots,m \\
& \lambda_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n
\end{aligned}$$

اگر $x_i^*(i=1,\dots,q)$ و $v_i^{k*}(i=q+1,\dots,m)(k=1,2,\dots,t_i)$ جواب بهینه مدل۳ باشد آنگاه کارایی هزینه قطعه‌ای خطی DMU_o $(PLCE_o)$[1] به‌صورت زیر خواهد بود.

رابطه ۴)

$$PLCE_o = \frac{\sum_{i=1}^{q} p_i x_i^* + \sum_{k=1}^{t_i}\sum_{i=q+1}^{m} p_i^k v_i^{k*}}{\sum_{i=1}^{q} p_i x_{io} + \sum_{k=1}^{t_i}\sum_{i=q+1}^{m} p_i^k v_i^k}$$

به راحتی می‌توان مشاهده کرد که $0 < PLCE_o \le 1$ و اگر $PLCE_o = 1$ آنگاه DMU_o کارا و در غیر این صورت ناکاراست.

1. Piecewise Linear Cost Efficiency

مدل کارایی هزینه قطعه‌ای خطی در فضای غیررقابتی

مدل ۱ ارائه شده توسط فار و همکاران (۱۹۸۵) زمانی قابل استفاده است که فضای مورد بررسی، یک فضای کاملاً رقابتی باشد و تمامی هزینه‌های ورودی‌ها، توسط بازار تعیین شده و برای تمامی واحدها، یکسان باشد. زمانی که قیمت‌ها بین واحدهای تصمیم گیرنده ثابت نیستند و هزینه ورودی‌ها در واحدهای تصمیم‌گیرنده متفاوت و توسط خود شرکت‌ها تعیین شود در این حالت مدل فار و همکاران (۱۹۸۵) تفاوت بین هزینه کنونی و حداقل هزینه را منعکس نمی‌کند. درنتیجه کارایی هزینه فار و همکاران باید تعمیم داده شود (تون، ۲۰۰۲ وکامانهو و دایسون، ۲۰۰۸). در چنین حالتی، کامانهو و دایسون (۲۰۰۸) فضای غیررقابتی را به دو حالت زیر تقسیم می‌کنند.

۱. ورودی‌ها متجانس هستند

اگر ورودی‌ها متجانس باشند یعنی جنس ورودی‌های هر یک از DMUها با یکدیگر یکسان باشد و هزینه آنها در واحدهای مختلف، متفاوت باشد، کامانهو و دایسون (۲۰۰۸) برای محاسبه کارایی در فضای هزینه بر اساس مفهوم کارایی قیمت $(Price\ Efficiency)$ سه کارایی فارل (FCE_o) ، اقتصادی (EE_o)، و بازار (ME_o) پیشنهاد می‌کنند.

رابطه ۵)
$$\text{Farrell Cost Efficiency}y_{j_o}\ (\mathrm{FCE_o}) = \frac{\text{حداقل هزینه با قیمت کنونی}}{\text{هزینه کنونی}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{io}\, x_i^*}{\sum_{i=1}^{m} p_{io} x_{io}}$$

رابطه ۶)
$$\text{Economic Efficiency}y_{j_o}\ (\mathrm{EE_o}) = \frac{\text{حداقل هزینه}}{\text{هزینه کنونی}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^{min}\, x_i^*}{\sum_{i=1}^{m} p_i x_{io}}$$

رابطه ۷)
$$\text{Market Efficiency}y_{j_o}\ (\mathrm{ME_o}) = \frac{\text{حداقل هزینه}}{\text{حداقل هزینه با قیمت کنونی}} = \frac{EE_o}{FCE_o}$$

کارایی هزینه فارل توانایی تولید خروجی کنونی با کمترین هزینه در دسترس با هزینه‌های کنونی در واحدهای تصمیم‌گیرنده را نشان می‌دهد و ناکارایی مقادیر ورودی را منعکس می‌کند. کارایی اقتصادی توانایی تولید خروجی‌های کنونی با کمترین هزینه را اندازه‌گیری می‌کند. تمام واحدهای تصمیم گیرنده با مجموعه مشابهی از قیمت‌ها تحت شرایط کنونی بازارها ارزیابی می‌گردند. کارایی بازار میزانی را نشان می‌دهد که در آن واحدهای تصمیم گیرنده موفق به پرداخت کمترین هزینه ورودی‌ها، تحت شرایط موجود در بازارها شده اند. ناکارایی مربوط به پرداخت مازاد منابع می‌تواند توسط این کارایی محاسبه گردد. در رابطه ۵، x_i^*جواب بهینه مدل ۱ با جای‌گذاری p_i با p_{io} است. در رابطه ۶، p_i^{min} کمترین قیمت ورودی i ام همه واحدها، p_{io} قیمت ورودی واحد تحت بررسی و x_i^* مقدار بهینه مدل۱ با قیمت‌های p_i^{min} است.

دقت کنید اگر قیمت‌های ورودی‌ها در همه واحدها یکسان باشد آنگاه در همه واحدها، کارایی اقتصادی با کارایی فارل برابر شده و کارایی بازار همواره برابر یک است. اما اگر قیمت‌های ورودی در واحدها متفاوت باشد مفاهیم کارایی اقتصادی و کارایی بازار، ارزیابی کامل‌تر و جامع‌تری برای واحدها فراهم می‌آورد (کامانهو و دایسون، ۲۰۰۸).

۲. ورودی‌ها متجانس نیستند

اگر ورودی‌ها نامتجانس باشند یعنی جنس ورودی‌های هریک از DMUها متفاوت با دیگری باشد و هزینه آنها در واحدهای مختلف، متفاوت باشند کامانهو و دایسون (۲۰۰۸) مدل زیر از تون (۲۰۰۲) را برای محاسبه کارایی هزینه واحدها پیشنهاد می‌کنند.

رابطه ۸)

$$\min \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^o$$
$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{x}_{ij} = \bar{x}_i^o \; i = 1,2,\dots,m$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \; \mathrm{r} = 1,,2,\dots,\mathrm{s}$$
$$\lambda_j \geq 0, j = 1,\dots,n$$
$$\bar{x}_i^o \geq 0, i = 1,\dots,m$$

در مدل فوق $\bar{x}_{ij} = p_{ij}x_{ij}$ و $\bar{x}_i^o = p_{io}x_i$ است که در آن x_{ij} ورودی i ام DMU_j و p_{ij} هزینه متناظر با x_{ij} است. پس از محاسبه مقادیر بهینه مدل ۸ ، مقدار کارایی هزینه تونی (TCE[1]) DMU_o از رابطه زیر به دست می‌آید.

رابطه ۹)

$$TCE_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^{o*}}{\sum_{i=1}^{m} p_{io}x_{io}}$$

حال فرض کنید در فضای غیررقابتی، بعضی قیمت‌های تعیین شده از سوی شرکت‌ها، به‌صورت پلکانی تغییر کند. در این‌صورت مدل‌ها و روابط ارائه شده توسط کامانهو و دایسون (۲۰۰۸) دیگر قابل استفاده نخواهد بود، در این حالت، میرزائیان و فلاح نژاد (۲۰۲۱) برای محاسبه کارایی هزینه واحدها در حالت‌های متجانس و نامتجانس روش زیر را ارائه دادند. فرض کنید $x_i(i = 1,2,\dots,q_o)$ ورودی‌های خطی و $x_i(i = q_o + 1,\dots,m)$ ورودی‌های قطعه‌ای خطی DMU_o باشندکه با قیمت‌های پلکانی $p_{io}^1 < p_{io}^2 < \cdots < p_{io}^{t_{io}}$ ارزش گذاری شده‌اند. در واقع ورودی iام DMU_o (x_{io}) در t_{io} بازه، خطی است.

دقت شود از آنجا که شرکت‌ها، تعیین کننده قیمت ورودی‌ها هستند، تعیین خطی بودن یا قطعه‌ای خطی بودن ورودی‌ها نیز به عهده شرکت‌ها بوده و ممکن است برای واحدهای متفاوت، یکسان نباشد. به‌طور مثال ممکن است ورودی i ام برای واحد j_o به‌صورت خطی و برای واحد j_s به‌صورت قطعه‌ای خطی در نظر گرفته شود.

حال با فرضیات فوق، دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: ورودی‌های متجانس با قیمت‌های متفاوت که بعضی از آنها قطعه‌ای خطی است.

در این حالت مفاهیم کارایی هزینه، کارایی اقتصادی و کارایی بازار به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

1. Tone Cost Efficiency

رابطه ۱۰)
$$\mathrm{PLFCE_o} == \frac{\sum_{i=1}^{q} p_{io}^{min} x_i^* + \sum_{i=q+1}^{m} \sum_{k=1}^{t_i} p_{io}^{k,min} v_i^{k*}}{\sum_{i=1}^{q} p_{io} x_{io} + \sum_{i=q+1}^{m} \sum_{k=1}^{t_i} p_{io}^{k} v_{io}^{k}}$$

رابطه ۱۱)
$$PLEE_o = \frac{\sum_{i=1}^{q} p_i^{min} x_i^* + \sum_{i=q+1}^{m} \sum_{k=1}^{u} p_i^{k,min} v_i^{k*}}{\sum_{i=1}^{q_o} p_i x_{io} + \sum_{i=q_o+1}^{m} \sum_{k=1}^{u} p_i^{k} v_{io}^{k}}$$

رابطه ۱۲)
$$\mathrm{PLM}E_o = \frac{PLEE_o}{PLFCE_o}$$

در رابطه ۱۰، $PLFCE_o$ کارایی هزینه فارل در حالت قطعه‌ای خطی است که برای محاسبه $PLFCE_o$ کافیست مدل ۳ قرار دهیم $p_i = p_{io}$ و$p_i^k = p_{io}^k$. در رابطه ۱۱، $PLEE_o$ کارایی اقتصادی DMU_o در حالت قطعه‌ای خطی است. در این رابطه $(i = 1, \dots, q)$ p_i^{min} کوچک‌ترین قیمت ورودی iام در بین تمام واحدها، u تعداد بازه‌هایی است که از قطعه قطعه کردن بازه‌های موجود برای متغیر iام $(i = q + 1, \dots, m)$ حاصل می‌شود و $p_i^{k,min}$ کوچک‌ترین هزینه ورودی iام همه واحدها در هر قطعه تولید شده‌است و qتعداد متغیرهایی است که در واحدهای مختلف به‌صورت خطی هستند. همچنین x_i^* و v_i^{k*} جواب بهینه مدل ۳ به ازای $p_i = p_i^{min}$ و $p_i^k = p_i^{k,min}$ هستند. در رابطه ۱۲، $PLME_o$ کارایی بازار DMU_o در حالت قطعه‌ای خطی است.

حالت دوم : ورودی‌های نامتجانس با قیمت‌های متفاوت که بعضی از آنها قطعه‌ای خطی است.

اگر ورودی‌ها نامتجانس باشند و بعضی از آنها قطعه‌ای خطی باشند دیگر نمی‌توان مدل تونی (۲۰۰۲) را به کار برد زیرا این مدل نیز مانند مدل ۱ با ورود متغیرهای قطعه‌ای خطی، به یک مدل غیرخطی تبدیل می‌شود. برای این منظور مدل زیر پیشنهاد می‌شود:

رابطه ۱۳)
$$\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{q_o} \bar{x}_i^o + \sum_{i=q_o+1}^{m} \sum_{k=1}^{t_{io}} \bar{v}_{io}^k \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{x}_{ij} = \bar{x}_{io} \quad i = 1,2,\dots,q_o \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{x}_{ij} \le \sum_{k=1}^{t_{io}} v_{io}^k \quad i = q_o + 1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} \quad r = 1,2,\dots,s \\
& 0 \le \bar{v}_{io}^k \le \bar{x}_i^k - \bar{x}_i^{k-1} \quad i = q_o + 1,\dots,m \quad k = 1,2,\dots,t_i - 1 \\
& \bar{v}_{io}^t \ge 0 \quad i = q_o + 1, \dots, m \\
& \lambda_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, n \\
& \overline{x}_i^o \ge 0 \quad i = 1,2, \dots, q_o
\end{aligned}$$

در مدل ۱۳، $\bar{x}_{ij} = p_{ij} x_{ij}$ $(i = 1,2, \dots, q_o)$، $\bar{v}_i^{ok} = p_{io}^k v_i^{ok}$ $(i = q_o + 1, \dots, m)$ و $\bar{v}_{ij}^k = p_{ij}^k v_{ij}^k$ $(i = q_o + 1, \dots, m)$. بعد از محاسبه جواب بهینه مدل۱۳، میزان کارایی DMU_o از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\mathrm{PLCE}_o = \frac{\sum_{i=1}^{q_o} \bar{x}_i^{o^*} + \sum_{i=q_o+1}^{m} \sum_{k=1}^{t_{io}} \bar{v}_i^{ok^*}}{\sum_{i=1}^{q_o} \bar{x}_{io} + \sum_{q_o+1}^{m} \sum_{k=1}^{t_{io}} \bar{v}_{io}^{k}}$$ رابطه ۱۴)

شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای

شاخص مالمکوئیست هزینه‌ای که توسط مانیاداکیس و تاناسولیس(۲۰۰۴) ارائه شد به‌صورت زیر است.

n واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j \;\; (j = 1,, \dots, n)$ با m ورودی و s خروجی را در زمان‌های t و $t+1$ مفروض‌اند و هزینه هر واحد ورودی در زمان‌های مختلف، معلوم ومثبت است. ورودی‌های واحد تصمیم‌گیرنده j ام در زمان t را با x_j^t و خروجی‌های آن را با y_j^t و هزینه ورودی‌ها را با p_j^t و ورودی‌های واحد تصمیم‌گیرنده j ام در زمان $t+1$ را با x_j^{t+1} و خروجی‌های آن را با y_j^{t+1} و هزینه ورودی‌ها را با p_j^{t+1} نمایش می‌دهیم. شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای (CM)[1] دوره‌های t و $t+1$ برای واحد تصمیم‌گیرنده o، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$CM_o^t = \frac{c^t(y_o^{t+1}, p_o^t)/p_o^t x_o^{t+1}}{c^t(y_o^t, p_o^t)/p_o^t x_o^t}$$ رابطه۱۵)

$$\mathrm{CM}_\mathrm{o}^{\mathrm{t+1}} = \frac{c^{t+1}(y_o^{t+1}, p_o^{t+1})/p_o^{t+1} x_o^{t+1}}{c^{t+1}(y_o^t, p_o^{t+1})/p_o^{t+1} x_o^t}$$ رابطه۱۶)

شاخص مالمکوئیست هزینه برای DMU_o به‌صورت میانگین هندسی CM_o^t و $\mathrm{CM}_\mathrm{o}^{\mathrm{t+1}}$ به‌صورت زیرتعریف می‌شود:

$$CM_o = \left[\frac{c^t(y_o^{t+1}, p_o^t)/p_o^t x_o^{t+1}}{c^t(y_o^t, p_o^t)/p_o^t x_o^t} \times \frac{c^{t+1}(y_o^{t+1}, p_o^{t+1})/p_o^{t+1} x_o^{t+1}}{c^{t+1}(y_o^t, p_o^{t+1})/p_o^{t+1} x_o^t}\right]^{1/2}$$ رابطه ۱۷)

که $p_o^t x_o^t = \sum p_{io}^t x_{io}^t$، شاخص i نشان دهنده iامین ورودی است. همچنین در رابطه فوق، $c^t(y_o^t, p_o^t)$ مینیمم هزینه تولید بردار خروجی y_o با هزینه‌های ورودی p_o در دوره t است که با رجوع به تکنولوژی با بازده به مقیاس ثابت محاسبه می‌شود. $c^t(y_o^t, p_o^t)$ و $c^t(y_o^{t+1}, p_o^t)$ به‌ترتیب برابر مقدار بهینه مدل کارایی هزینه فار در زمان t و $t+1$ نسبت به مرز دوره‌ی t هستند که توسط مدل‌های ۱۸ و ۱۹ محاسبه می‌شوند.

رابطه ۱۸)

$$\begin{aligned}
c^t(y_o^t, p_o^t) &= Min \sum_{i=1}^{m} p_i^t x_i \\
s.t. &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \le x_i \;\; i = 1, \dots, m, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^t \le y_{ro}^t \;\; r = 1, \dots, s, \\
&\lambda_j \ge 0 \\
&x_j \ge 0
\end{aligned}$$

1 Cost Malmquist

رابطه ۱۹)
$$c^t(y_o^{t+1}, p_o^t) = Min \sum_{i=1}^{m} p_i^t x_i$$
$$s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \leq x_i \; i = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^t \leq y_{ro}^{t+1} \; r = 1, \dots, s,$$
$$\lambda_j \geq 0$$
$$x_j \geq 0$$

$C^{t+1}(Y_o^{t+1}, p_o^{t+1})$ و $C^{t+1}(Y_o^{t+1}, p_o^{t+1})$ به‌ترتیب مقدار بهینه مدل‌هایی است که با تبدیل t به $t+1$ و $t+1$ به t از مدل‌های ۱۸ و ۱۹ به دست می‌آیند، می‌باشند. حال توابع فاصله به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

CE_{to}^{t}: کارایی هزینه واحد o در زمان t، نسبت به مرز کارایی دوره t .

CE_{to}^{t+1} : کارایی هزینه واحد o در زمان t، نسبت به مرز کارایی دوره $t+1$.

CE_{t+1o}^{t} : کارایی هزینه واحد o در زمان $t+1$، نسبت به مرز کارایی دوره t.

CE_{t+1o}^{t+1} : کارایی هزینه واحد o در زمان $t+1$، نسبت به مرز کارایی دوره $t+1$.

که در آن

رابطه ۲۰)
$$CE_{to}^{t} = \frac{c^t(y_o^t, p_o^t)}{p_o^t x_o^t}$$

رابطه ۲۱)
$$CE_{t+1o}^{t} = \frac{c^t(y_o^{t+1}, p_o^t)}{p_o^t x_o^{t+1}}$$

رابطه ۲۲)
$$CE_{to}^{t+1} = \frac{c^{t+1}(y_o^t, p_o^{t+1})}{p_o^{t+1} x_o^t}$$

رابطه ۲۳)
$$CE_{t+1o}^{t+1} = \frac{c^{t+1}(y_o^{t+1}, p_o^{t+1})}{p_o^{t+1} x_o^{t+1}}$$

اکنون با استفاده از رابطه ۱۷ می‌توان نوشت:

رابطه ۲۴)
$$CM_o = \sqrt{\frac{CE_{t+1o}^{t+1}}{CE_{to}^{t+1}} \times \frac{CE_{t+1o}^{t}}{CE_{to}^{t}}}$$

یکی از تجزیه‌های معروف شاخص مالمکوئیست، تجزیه $FGLR$ است که توسط فار، گروسکوف، لیندگرن و رووس (۱۹۹۴) ارائه شد. آنها نشان دادند که MI قابل تجزیه به دو مؤلفه تغییرات تکنولوژی و تغییرات کارایی است. شاخص

بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای رابطه ۱۷ را نیز مشابه با MI و با استفاده از تجزیه $FGLR$ می‌توان به تغییرات کارایی هزینه (OEC)[۱] و تغییرات تکنیکی هزینه (CTC)[۲] به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$$CM_o = (\text{OEC}) \times (\text{CTC}) = \frac{CE_{t+1o}^{t+1}}{CE_{to}^{t}} \times \left[\sqrt{\frac{CE_{t+1o}^{t}}{CE_{t+1o}^{t+1}} \times \frac{CE_{to}^{t}}{CE_{to}^{t+1}}} \right]$$ رابطه ۲۵)

مؤلفه بیرون براکت تغییرات کارایی هزینه است که مشخص می‌کند آیا واحد مورد نظر در فاصله زمانی $[t, t+1]$ به مرز کارایی نزدیک‌تر شده یا دورتر و صورت و مخرج این کسر همان اندازه کارایی هزینه فار است که این مؤلفه تغییر کارایی هزینه ورودی بین دوره‌های t و $t+1$ را ذخیره می‌کند. مؤلفه داخل براکت تغییرات تکنولوژی هزینه را طی این دوره زمانی و به عبارتی میزان جابجایی مرز کارایی را نمایش می‌دهد. CTC اثر ترکیبی تغییرات هزینه ورودی و تغییرات تکنولوژی را در طول زمان ذخیره می‌کند.

اگر $CM_o > 1$ باشد واحد مورد نظر رشد داشته، $CM_o < 1$ نشان دهنده تنزل واحد و $CM_o = 1$ نشان می‌دهد واحد مورد نظر هیچ رشد یا تنزلی نداشته است

تبیین شکاف تحقیقاتی

با بررسی مطالعات انجام شده در خصوص شاخص بهره‌وری مالمکوئیست، مشاهده می‌شود در صورتی که هزینه‌های واحدهای تحت بررسی به‌صورت پلکانی تغییر کنند و بخواهیم شاخص مالمکوئیست هزینه‌ای را برای محاسبه پیشرفت واحدها محاسبه کنیم استفاده از رابطه‌های ۱۷ تا ۲۴ ممکن نخواهد بود. علاوه بر این، مطالعات انجام شده در زمینه مالمکوئیست هزینه‌ای با فرض رقابتی بودن فضای واحدها انجام شده و در حالتی که فضای واحدها غیر رقابتی باشند مورد بررسی قرار نگرفته اند. از این رو، در این مقاله، براساس پژوهش انجام شده توسط میرزائیان و فلاح نژاد (۲۰۲۱) برای کارایی هزینه قطعه‌ای خطی، شاخص بهره‌وری مالمکوئیست برای حالتی که هزینه‌ها به‌صورت پلکانی تغییر می‌کنند در هر دو فضای رقابتی و غیر رقابتی توسعه داده می‌شود.

روش‌شناسی پژوهش

در این بخش با توجه به مدل‌های هزینه‌ای قطعه‌ای خطی ارائه شده توسط میرزائیان و فلاح نژاد (۲۰۲۱) که در بخش قبل ارائه شد، شاخص مالمکوئیست هزینه‌ای به حالت قطعه‌ای خطی توسعه داده‌شده و مدل‌های مربوطه در فضاهای رقابتی و غیررقابتی معرفی می‌شوند.

شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه قطعه‌ای خطی در فضای رقابتی

فرض کنید p_i که هزینه ورودی‌های $x_i (i = 1, \dots, q)$ است به‌صورت یکنواخت و $p_i^k (k = 1, \dots, t_i)$ که هزینه ورودی‌های $x_i (i = q+1, \dots, m)$ است به‌صورت پلکانی $\left(p_i^1 < p_i^2 < \dots < p_i^{t_i}\right)$ تغییرکند و p_iها و p_i^kها برای

1. Overall Efficiency Change
2. Cost-Technical Change

همه واحدها برابرباشند(فضای کاملاً رقابتی). همچنین فرض کنید $v_i^k(k=1,\dots,t_i)$ متغیرهای متناظر $x_i(i=q+1,\dots,m)$ در فواصل $[0,x_i^1)$ و $[x_i^1 x_i^2)$ و $[x_i^{t_{i-1}},\infty)$ باشند که در آن $x_i^0=0$ و $x_i^{t_i}=\infty$. با توجه به رابطه ۱۷، شاخص مالمکوئیست هزینه قطعه‌ای خطی (PLCM[1]) در فضای رقابتی برای DMU_o را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$PLCM_o=\sqrt{\frac{\frac{c^{t+1}\left(y_o^{t+1},p_o^{t+1},\left(p_o^k\right)^{t+1}\right)}{\sum_{i=1}^{q}p_i^{t+1}x_{io}^{t+1}+\sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}\left(p_i^k\right)^{t+1}\left(v_{io}^k\right)^{t+1}}}{\frac{c^{t+1}\left(y_o^{t},p_o^{t+1},\left(p_o^k\right)^{t+1}\right)}{\sum_{i=1}^{q}p_i^{t+1}x_{io}^{t}+\sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}\left(p_i^k\right)^{t+1}\left(v_{io}^k\right)^{t}}}\times\frac{\frac{c^{t}\left(y_o^{t+1},p_o^{t},\left(p_o^k\right)^{t}\right)}{\sum_{i=1}^{q}p_i^{t}x_{io}^{t+1}+\sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}\left(p_i^k\right)^{t}\left(v_{io}^k\right)^{t+1}}}{\frac{c^{t}\left(y_o^{t},p_o^{t},\left(p_o^k\right)^{t}\right)}{\sum_{i=1}^{q}p_i^{t}x_{io}^{t}+\sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}\left(p_i^k\right)^{t}\left(v_{io}^k\right)^{t}}}}$$ رابطه ۲۶

که در آن p_o^t و p_o^{t+1} به‌ترتیب هزینه ورودی‌های خطی x_{io}^t و x_{io}^{t+1} و $\left(p_o^k\right)^{t}$ و $\left(p_o^k\right)^{t+1}$ به‌ترتیب هزینه ورودی‌های قطعه‌ای خطی در زمان t و $t+1$ هستند. مقادیر $c^t\left(y_o^t,p_o^t,\left(p_o^k\right)^t\right)$ و $c^t\left(y_o^{t+1},p_o^t,\left(p_o^k\right)^t\right)$ از حل مدل‌های ۲۷ و ۲۸ به دست می‌آیند:

رابطه ۲۷
$$\begin{aligned}
c^t\left(y_o^t,p_o^t,\left(p_o^k\right)^t\right)=Min\quad & \sum_{i=1}^{q}p_i^t x_i+\sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}\left(p_i^k\right)^t v_i^k\\
s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^t\le x_i,\quad i=1,\dots,q,\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^t\le \sum_{k=1}^{t_i}v_i^k,\quad i=q+1,\dots,m,\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}^t\ge y_{ro}^t,\quad r=1,\dots,s,\\
& 0\le v_i^k\le x_i^k-x_i^{k-1},\quad i=q+1,\dots,m,\quad k=1,\dots,t_i-1,\\
& v_i^{t_i}\ge 0,\quad i=q+1,\dots,m,\\
& \lambda_j\ge 0,\quad j=1,\dots,n.
\end{aligned}$$

رابطه ۲۸
$$\begin{aligned}
c^t\left(y_o^{t+1},p_o^t,\left(p_o^k\right)^t\right)=Min\quad & \sum_{i=1}^{q}p_i^t x_i+\sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}\left(p_i^k\right)^t v_i^k\\
s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^t\le x_i,\quad i=1,\dots,q,\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}^t\le \sum_{k=1}^{t_i}v_i^k,\quad i=q+1,\dots,m,\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}^{t+1}\ge y_{ro}^{t+1},\quad r=1,\dots,s,\\
& 0\le v_i^k\le x_i^k-x_i^{k-1},\quad i=q+1,\dots,m,\quad k=1,\dots,t_i-1,
\end{aligned}$$

1. Piecewise Linear Cost Malmquist

$$v_i^{t_i} \geq 0, \quad i = q+1, \dots, m,$$
$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

مقادیر $c^{t+1}\left(y_o^{t}, p_o^{t+1}, (p_o^k)^{t+1}\right)$ و $c^{t+1}\left(y_o^{t+1}, p_o^{t+1}, (p_o^k)^{t+1}\right)$ به‌طور مشابه محاسبه می‌شوند. حال تعریف می‌کنیم:

$$PLCE_{to}^{t} = \frac{c^t\left(y_o^t, p_o^t, (p_o^k)^t\right)}{\sum_{i=1}^{q} p_i^t x_{io}^t + \sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}(p_i^k)^t (v_{io}^k)^t}. \qquad \text{رابطه ۲۹)}$$

$$PLCE_{t+1o}^{t} = \frac{c^t\left(y_o^{t+1}, p_o^t, (p_o^k)^t\right)}{\sum_{i=1}^{q} p_i^t x_{io}^{t+1} + \sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}(p_i^k)^t (v_{io}^k)^{t+1}}. \qquad \text{رابطه ۳۰)}$$

$$PLCE_{to}^{t+1} = \frac{c^{t+1}\left(y_o^t, p_o^{t+1}, (p_o^k)^{t+1}\right)}{\sum_{i=1}^{q} p_i^{t+1} x_{io}^t + \sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}(p_i^k)^{t+1} (v_{io}^k)^t}. \qquad \text{رابطه ۳۱)}$$

$$PLCE_{t+1o}^{t+1} = \frac{c^{t+1}\left(y_o^{t+1}, p_o^{t+1}, (p_o^k)^{t+1}\right)}{\sum_{i=1}^{q} p_i^{t+1} x_{io}^{t+1} + \sum_{i=q+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_i}(p_i^k)^{t+1} (v_{io}^k)^{t+1}} \qquad \text{رابطه ۳۲)}$$

در این رابطه، $PLCE_{to}^{t}$ کارایی هزینه قطعه‌ای خطی واحد o در زمان t نسبت به مرز t؛ $PLCE_{t+1o}^{t}$ کارایی هزینه قطعه‌ای خطی واحد o را در زمان $t+1$ نسبت به مرز t؛ $PLCE_{to}^{t+1}$ کارایی هزینه قطعه‌ای خطی واحد o را در زمان t نسبت به مرز $t+1$؛ $PLCE_{t+1o}^{t+1}$ کارایی هزینه قطعه‌ای خطی واحد o را در زمان $t+1$ نسبت به مرز $t+1$ است. اکنون با استفاده از رابطه ۲۶ داریم:

$$PLCM_o = \sqrt{\frac{PLCE_{t+1o}^{t+1}}{PLCE_{to}^{t+1}} \times \frac{PLCE_{t+1o}^{t}}{PLCE_{to}^{t}}} \qquad \text{رابطه ۳۳)}$$

و تجزیه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه قطعه‌ای خطی به تغییرکارایی هزینه (OCE) و تغییر تکنیکی هزینه (CTC) به شکل زیر است (تجزیه FGLR):

$$PLCM_o = (\mathrm{OEC}) \times (\mathrm{CTC}) = \frac{PLCE_{t+1o}^{t+1}}{PLCE_{to}^{t}} \sqrt{\frac{PLCE_{t+1o}^{t}}{PLCE_{t+1o}^{t+1}} \times \frac{PLCE_{to}^{t}}{PLCE_{to}^{t+1}}} \qquad \text{رابطه ۳۴)}$$

در رابطه ۳۴ داریم:

$$OEC = \frac{PLCE_{t+1o}^{t+1}}{PLCE_{to}^{t}} \qquad \text{رابطه ۳۵)}$$

$$\mathrm{CTC} = \sqrt{\frac{PLCE_{t+1o}^{t}}{PLCE_{t+1o}^{t+1}} \times \frac{PLCE_{to}^{t}}{PLCE_{to}^{t+1}}} \qquad \text{رابطه۳۶)}$$

با محاسبه شاخص بهره‌وری با استفاده از رابطه ۳۴، اگر $PLCM_o > 1$ باشد بیانگر رشد، $PLCM_o < 1$ باشد بیانگر افت و $PLCM_o = 1$ باشد بیانگر سکون واحد می‌باشد.

شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای با تابع هزینه قطعه‌ای خطی در فضای غیررقابتی

در این قسمت شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای قطعه‌ای خطی را در فضای غیررقابتی که هزینه ورودی‌ها در واحدهامتفاوت‌اند، در حالت متجانس و نامتجانس معرفی می‌کنیم.

اگر ورودی‌ها متجانس باشند براساس کارایی تعریف شده توسط کامانهو ودایسون (۲۰۰۸)، کارایی هزینه قطعه‌ای خطی فارل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{PLFCE_o} = = \frac{\sum_{i=1}^{q} p_{io}^{min} x_i^* + \sum_{i=q+1}^{m} \sum_{k=1}^{t_i} p_{io}^{k,min} v_i^{k*}}{\sum_{i=1}^{q} p_{io} x_{io} + \sum_{i=q+1}^{m} \sum_{k=1}^{t_i} p_{io}^{k} v_{io}^{k}} \quad \text{رابطه ۳۷)}$$

رابطه۳۷ کارایی هزینه فارل قطعه‌ای خطی است. در این حالت شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه قطعه‌ای خطی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{PLFM_o} = \sqrt{\frac{PLFCE_{t+1o}^{t+1}}{PLFCE_{to}^{t+1}} \times \frac{PLFCE_{t+1o}^{t}}{PLFCE_{to}^{t}}} \quad \text{رابطه ۳۸)}$$

در این رابطه، $PLFCE_{to}^{t}$ کارایی هزینه فارل قطعه‌ای خطی واحد o در زمان t نسبت به مرز t؛ $PLFCE_{t+1o}^{t}$ کارایی هزینه فارل قطعه‌ای خطی واحد o را در زمان $t+1$ نسبت به مرز t؛ $PLFCE_{to}^{t+1}$ کارایی هزینه فارل قطعه‌ای خطی واحد o را در زمان t نسبت به مرز $t+1$؛ $PLFCE_{t+1o}^{t+1}$ کارایی هزینه فارل قطعه‌ای خطی واحد o را در زمان $t+1$ نسبت به مرز $t+1$ است.

تجزیه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه قطعه‌ای خطی به تغییرکارایی هزینه (OCE) و تغییر تکنیکی هزینه (CTC) به شکل زیر است (تجزیه FGLR):

$$PLFCM_o = (\mathrm{OEC}) \times (\mathrm{CTC}) = \frac{PLFCE_{t+1o}^{t+1}}{PLFCE_{to}^{t}} \sqrt{\frac{PLFCE_{t+1o}^{t}}{PLFCE_{t+1o}^{t+1}} \times \frac{PLFCE_{to}^{t}}{PLFCE_{to}^{t+1}}} \quad \text{رابطه۳۹)}$$

در رابطه ۳۹ داریم:

$$OEC = \frac{PLFCE_{t+1o}^{t+1}}{PLCE_{to}^{t}} \quad \text{رابطه۴۰)}$$

$$\mathrm{CTC} = \sqrt{\frac{PLFCE_{t+1o}^{t}}{PLFCE_{t+1o}^{t+1}} \times \frac{PLFCE_{to}^{t}}{PLFCE_{to}^{t+1}}} \quad \text{رابطه۴۱)}$$

با محاسبه شاخص بهره‌وری با استفاده از رابطه ۳۹، اگر $PLFCM_o > 1$ باشد بیانگر رشد، $PLFCM_o < 1$ باشد بیانگر افت و $PLFCM_o = 1$ باشد بیانگر سکون واحد می‌باشد.

در فضای غیررقابتی که قیمت‌ها برای واحدهای مختلف متفاوت است، حالتی را در نظر بگیرید که ورودی‌ها نامتجانس‌اند و بعضی قیمت‌های تعیین شده از سوی شرکت‌ها به‌صورت پلکانی تغییر می‌کند. در این صورت شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه تن قطعه‌ای خطی در فضای غیررقابتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$PLTCM_o = \sqrt{\frac{\dfrac{c^{t+1}\left(y_o^{t+1},p_{ij}^{t+1}x_{ij},\left(p_{io}^{k}\right)^{t+1}v_i^{ok}\right)}{\sum_{i=1}^{q_o}(\bar{x}_{io})^{t+1}+\sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_{io}}\left(\bar{v}_{io}^{k}\right)^{t+1}}}{\dfrac{c^{t+1}\left(y_o^{t},p_{ij}^{t+1}x_{ij},\left(p_{io}^{k}\right)^{t+1}v_i^{ok}\right)}{\sum_{i=1}^{q_o}(\bar{x}_{io})^{t}+\sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_{io}}\left(\bar{v}_{io}^{k}\right)^{t}}}\times\frac{\dfrac{c^{t}\left(y_o^{t+1},p_{ij}^{t}x_{ij},\left(p_{io}^{k}\right)^{t}v_i^{ok}\right)}{\sum_{i=1}^{q_o}(\bar{x}_{io})^{t+1}+\sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_{io}}\left(\bar{v}_{io}^{k}\right)^{t+1}}}{\dfrac{c^{t}\left(y_o^{t},p_{ij}^{t}x_{ij},\left(p_{io}^{k}\right)^{t}v_i^{ok}\right)}{\sum_{i=1}^{q_o}(\bar{x}_{io})^{t}+\sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_{io}}\left(\bar{v}_{io}^{k}\right)^{t}}}}$$ رابطه ۴۲)

کـــــه در آن $(i = 1,2,\ldots,q_o)\bar{x}_{ij} = p_{ij}x_{ij}$، $(i = q_o+1,\ldots,m)\bar{v}_i^{ok} = p_{io}^{k}v_i^{ok}$ و $\bar{v}_{ij}^{k} = p_{ij}^{k}v_{ij}^{k}$ $(i = q_o+1,\ldots,m)$. مقادیر $c^t\left(y_o^{t},p_{ij}^{t}x_{ij},\left(p_{io}^{k}\right)^{t}v_i^{ok}\right)$ و $c^t\left(y_o^{t+1},p_{ij}^{t}x_{ij},\left(p_{io}^{k}\right)^{t}v_i^{ok}\right)$ از مدل‌های ۴۳ و ۴۴ به دست می‌آیند:

رابطه۴۳)

$$\begin{aligned}
&c^t\left(y_o^{t},p_{ij}^{t}x_{ij},\left(p_{io}^{k}\right)^{t}v_i^{ok}\right)= Min \quad \sum_{i=1}^{q_o}\bar{x}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}}+\sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{\mathrm{k}=1}^{t_{io}}\bar{v}_i^{ok}\\
&s.t.\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\bar{x}_{ij}^{t}=\bar{x}_i^{o},\quad i=1,\ldots,q_o,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{t_{ij}}\lambda_j\bar{v}_{ij}^{k}\le\sum_{k=1}^{t_{io}}\bar{v}_i^{ok},\quad i=q_o+1,\ldots,m,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}^{t}\ge y_{ro}^{t},\quad r=1,\ldots,s,\\
&\quad 0\le\bar{v}_i^{ok}\le\bar{x}_{io}^{k}-\bar{x}_{io}^{k-1},\quad i=q_o+1,\ldots,m,\quad k=1,\ldots,t_i-1,\\
&\quad 0\le\ \bar{v}_i^{ot},\quad i=q_o+1,\ldots,m,\\
&\quad \lambda_j\ge 0,\quad j=1,\ldots,n,\\
&\quad \bar{x}_i^{o}\ge 0,\quad i=1,2,\ldots,q_o
\end{aligned}$$

رابطه۴۴)

$$\begin{aligned}
&c^t\left(y_o^{t+1},p_{ij}^{t}x_{ij},\left(p_{io}^{k}\right)^{t}v_i^{ok}\right)=\ Min\ \sum_{i=1}^{q_o}\bar{x}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}}+\sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{\mathrm{k}=1}^{t_{io}}\bar{v}_i^{ok}\\
&s.t.\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\bar{x}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{t}}=\bar{x}_i^{o},\quad i=1,\ldots,q_o,\\
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{t_{ij}}\lambda_j\bar{v}_{ij}^{k}\le\sum_{k=1}^{t_{io}}\bar{v}_i^{ok},\quad i=q_o+1,\ldots,m,\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}^{t+1}\ge y_{ro}^{t+1},\quad r=1,\ldots,s,\\
&0\le\bar{v}_i^{ok}\le\bar{x}_{io}^{k}-\bar{x}_{io}^{k-1},\quad i=q_o+1,\ldots,m,\quad k=1,\ldots,t_i-1,\\
&0\le\ \bar{v}_i^{ot},\quad i=q_o+1,\ldots,m,\\
&\lambda_j\ge 0,\quad j=1,\ldots,n,\\
&\bar{x}_i^{o}\ge 0,\quad i=1,2,\ldots,q_o
\end{aligned}$$

مقادیر $c^{t+1}\left(y_o^{t+1}, p_{ij}^{t+1}x_{ij}\,, \left(p_{io}^{k}\right)^{t+1} v_i^{ok}\right)$ و $c^{t+1}\left(y_o^{t}, p_{ij}^{t+1}x_{ij}\,, \left(p_{io}^{k}\right)^{t+1} v_i^{ok}\right)$ به‌طریق مشـابه بـه دست می‌آیند. حالا تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{PLCE}_{\mathrm{to}}^{\mathrm{t}} = \frac{c^{t}\left(y_o^{t}, p_{ij}^{t}x_{ij}\,, \left(p_{io}^{k}\right)^{t} v_i^{ok}\right)}{\sum_{i=1}^{q_o}(\bar{x}_{io})^{t} + \sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_{io}}\left(\bar{v}_{io}^{k}\right)^{t}}.$$ رابطه ۴۵)

$$\mathrm{PLCE}_{\mathrm{to}}^{\mathrm{t+1}} = \frac{c^{t+1}\left(y_o^{t}, p_{ij}^{t+1}x_{ij}\,, \left(p_{io}^{k}\right)^{t+1} v_i^{ok}\right)}{\sum_{i=1}^{q_o}(\bar{x}_{io})^{t} + \sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_{io}}\left(\bar{v}_{io}^{k}\right)^{t}}.$$ رابطه ۴۶)

$$\mathrm{PLTCE}_{\mathrm{t+1o}}^{\mathrm{t}} = \frac{c^{t}\left(y_o^{t+1}, p_{ij}^{t}x_{ij}\,, \left(p_{io}^{k}\right)^{t} v_i^{ok}\right)}{\sum_{i=1}^{q_o}(\bar{x}_{io})^{t+1} + \sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_{io}}\left(\bar{v}_{io}^{k}\right)^{t+1}}.$$ رابطه ۴۷)

$$\mathrm{PLTCE}_{\mathrm{t+1o}}^{\mathrm{t+1}} = \frac{c^{t+1}\left(y_o^{t+1}, p_{ij}^{t+1}x_{ij}\,, \left(p_{io}^{k}\right)^{t+1} v_i^{ok}\right)}{\sum_{i=1}^{q_o}(\bar{x}_{io})^{t+1} + \sum_{i=q_o+1}^{m}\sum_{k=1}^{t_{io}}\left(\bar{v}_{io}^{k}\right)^{t+1}}.$$ رابطه ۴۸)

با جای‌گذاری روابط ۴۸ -۴۵ در رابطه ۳۷ داریم:

$$PLTCM_o = \sqrt{\frac{PLTCE_{t+1o}^{t+1}}{PLTCE_{to}^{t+1}} \times \frac{PLTCE_{t+1o}^{t}}{PLTCE_{to}^{t}}}$$ رابطه ۴۹)

و بنابراین تجزیه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه تـن قطعـه‌ای خطـی ($PLTCM_o$) بـه تغییرکـارایی هزینـه (OCE) و تغییر تکنیکی هزینه (CTC) در فضای غیررقابتی و نامتجانس به شکل زیر است:

$$PLTCM_o = (\mathrm{OEC}) \times (\mathrm{CTC}) = \frac{PLTCE_{t+1o}^{t+1}}{PLTCE_{to}^{t}} \sqrt{\frac{PLTCE_{t+1o}^{t}}{PLTCE_{t+1o}^{t+1}} \times \frac{PLTCE_{to}^{t}}{PLTCE_{to}^{t+1}}}$$ رابطه ۵۰)

با محاسبه شاخص بهره‌وری با استفاده از رابطه ۵۰، چنان‌چه $PLTCM_o > 1$ باشد، نشان‌دهنده افزایش بهره‌وری، $PLTCM_o < 1$ نشان‌دهنده کاهش بهره‌وری و $PLTCM_o = 1$ عدم تغییر بهره‌وری در طی دو دوره را نشان می‌دهد.

یافته‌های پژوهش

در این بخش، روش پیشنهادی ارائه شده در بخش قبل را برای محاسبه شاخص مالمکوئیست هزینـه قطعـه‌ای‌خطـی در یک نمونه واقعی به کار می‌گیریم.

مطالعه موردی : رشد اقتصادی قنادی‌های شهر اسلام‌آبادغرب

در این مطالعه موردی، رشد اقتصادی ۱۴ قنادی شهراسلام‌آبادغرب در طی سال‌های ۱۳۹۸ تا ۱۳۹۹ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در سال ۱۳۹۸، تعداد ۱۵ قنادی در شهر اسلام‌آبادغرب مورد بررسی قرار گرفت (میرزائیان و فلاح نـژاد،۲۰۲۱). اما در سال ۱۳۹۹، با بررسی‌های به عمل آمده و مراجعه به اتحادیه اصناف، معلوم گردید که یکی از قنادی‌ها ورشکست و نهایتاً تعطیل شده‌است. بنابراین با تعطیلی این واحد، برای هـر دو دوره نمونـه مـوردی را بـا ۱۴ قنـادی بـه کـار بـردیم. قنادی‌ها به‌عنوان واحدهای تصمیم‌گیرنده انتخاب شده‌اند که بر اساس طبقه‌بندی صـنف قنـادی‌هـا، هـر واحـد دارای ۳ ورودی مواد اولیه مورد نیاز شامل مقدار شیرینی و جعبه خریـداری شـده، تعـدادکارگران و بـرق مصـرفی اسـت و مقـدار شیرینی فروخته شده به‌عنوان تنها خروجی واحدها در نظر گرفته شده است. در واقع داریم:

x_1 : مقدار مواد اولیه شامل مقدار شیرینی و جعبه خریداری شده بر حسب کیلوگرم

x_2: تعداد کارگران بر حسب نفر

x_3: میزان برق مصرفی بر حسب کیلو وات ساعت

y : مقدار شیرینی فروخته شده بر حسب کیلوگرم

با توجه به این که قیمت برق مصرفی قنادی‌ها توسط وزارت نیرو به‌صورت پلکانی مشـخص مـی‌شـود متغیـر x_3 به‌عنوان ورودی قطعه‌ای خطی در نظر گرفته می‌شود و سایر ورودی‌ها دارای هزینـه ثابـت و یکنواخـت هسـتند. قیمـت ورودی‌های x_1 و x_2 براساس اطلاعات صنف قنادی‌های شهرستان و هزینه ورودی سوم با مراجعه به شرکت توزیع برق شهرستان جمع‌آوری شده‌است. قیمت‌های مربوط به سال ۱۳۹۸ و ۱۳۹۹ در جدول ۱ آمده‌است:

جدول ۱. قیمت ورودی‌ها در سال ۱۳۹۸ و ۱۳۹۹

قیمت‌های سال ۱۳۹۸	قیمت‌های سال ۱۳۹۹
قیمت $x_۱$: ۱۳۰۰۰۰ریال قیمت $x_۲$: ۳۴۰۰۰۰۰۰ ریال قیمت x_3 : تابع هزینه قطعه‌ای خطی $c_3(x_3)=\begin{cases} ۲۰۹۷ & ۰ \le x_3 \le ۱۰۰ \\ ۲۱۹۱ & ۱۰۰ < x_3 \le ۲۰۰ \\ ۲۲۸۸ & ۲۰۰ < x_3 \le ۳۰۰ \\ ۲۳۸۳ & ۳۰۰ < x_3 \le ۴۰۰ \\ ۲۶۶۸ & ۴۰۰ < x_3 \le ۵۰۰ \\ ۳۰۵۰ & ۵۰۰ < x_3 \le ۶۰۰ \\ ۳۴۳۰ & x_3 > ۶۰۰ \end{cases}$	قیمت $x_۱$: ۱۵۰۰۰۰ ریال قیمت $x_۲$: ۵۰۰۰۰۰۰۰ ریال قیمت x_3 : تابع هزینه قطعه‌ای خطی $c_3(x_3)=\begin{cases} ۲۲۴۴ & ۰ \le x_3 \le ۱۰۰ \\ ۲۳۴۴ & ۱۰۰ < x_3 \le ۲۰۰ \\ ۲۴۴۸ & ۲۰۰ < x_3 \le ۳۰۰ \\ ۲۵۵۰ & ۳۰۰ < x_3 \le ۴۰۰ \\ ۲۸۵۵ & ۴۰۰ < x_3 \le ۵۰۰ \\ ۳۲۶۴ & ۵۰۰ < x_3 \le ۶۰۰ \\ ۳۶۷۰ & x_3 > ۶۰۰ \end{cases}$

داده‌های ورودی و خروجی ۱۴ قنادی مربوط به ماه تیر و بخشی از ماه‌های خرداد و مرداد سال‌های ۱۳۹۸ و ۱۳۹۹ و در یک بازه زمانی ۶۰ روزه به‌صورت جدول ۲ و ۳ است. با دقت در این جدول‌ها می‌تـوان مشـاهده نمـود کـه مقـادیر

ورودی سال ۱۳۹۹ نسبت به سال ۱۳۹۸ کاهش چشمگیری داشته‌است. در تمام قنادی‌ها، مواد اولیه به شدت کاهش یافته‌است و نیمی از قنادی‌ها برای جلوگیری از زیان بیشتر و احیاناً تعطیلی واحد، به ناچار نیروی کار خود را کاهش داده‌اند. میزان برق مصرفی نیز در۷ قنادی کاهش یافته‌است.

جدول ۲. ورودی و خروجی قنادی‌ها در سال ۱۳۹۸

قنادی‌ها	مواد اولیه	تعداد کارگران	برق مصرفی	مقدار شیرینی فروخته شده
آدم برفی	۵۰۴۰	۲	۲۵۵۰	۴۲۰۰
کرمجانی	۳۶۰۰	۳	۱۷۲۰	۳۰۰۰
قصر	۲۸۸۰	۳	۳۷۰۰	۲۴۰۰
شهرآرا	۲۱۶۰	۳	۳۴۸۰	۱۸۰۰
تمشک	۲۴۰۰	۳	۱۸۶۰	۲۰۰۰
ستاره‌شهر	۲۱۶۰	۱	۱۹۸۰	۱۸۰۰
سینا	۱۴۴۰	۲	۱۹۷۶	۱۲۰۰
کسرا	۴۹۲۰	۴	۱۲۱۰	۴۲۰۰
لادن	۱۰۸۰	۳	۱۰۹۵	۹۰۰
پدیده	۲۱۶۰	۳	۹۵۷	۱۸۰۰
مرکزی	۵۰۵۰	۲	۵۹۰	۴۲۰۰
محمدی	۱۴۲۰	۱	۹۵۰	۱۲۰۰
پرنا	۴۱۰۰	۳	۸۶۰	۳۶۰۰
رزرایز	۶۹۰۰	۵	۳۷۰۰	۶۰۰۰

جدول ۳. ورودی و خروجی قنادی‌ها در سال ۱۳۹۹

قنادی‌ها	مواد اولیه	تعداد کارگران	برق مصرفی	مقدار شیرینی فروخته شده
آدم برفی	۱۲۰۰	۱	۲۳۳	۱۲۶۰
کرمجانی	۱۵۰۰	۱	۶۰۰	۹۰۰
قصر	۱۲۰۰	۱	۴۸۰	۷۲۰
شهرآرا	۹۰۰	۳	۳۶۰	۵۴۰
تمشک	۱۰۰۰	۱	۴۰۰	۶۰۰
ستاره‌شهر	۶۴۸	۱	۱۰۸	۵۴۰
سینا	۷۹۲	۱	۷۲	۷۲۰
کسرا	۱۴۷۶	۲	۲۱۶	۱۲۶۰
لادن	۲۱۶	۲	۳۶	۱۸۰
پدیده	۸۶۴	۳	۱۴۴	۷۲۰
مرکزی	۱۲۱۹	۱	۲۵۰	۱۲۶۰
محمدی	۲۲۰	۱	۲۴	۲۴۰
پرنا	۱۲۳۰	۳	۱۵۰	۱۰۸۰
رزرایز	۳۴۵۰	۳	۴۵۰	۳۰۰۰

محاسبه شاخص مالمکوئیست و تحلیل نتایج

در محاسبه شاخص مالمکوئیست هزینه قطعه‌ای خطی نیاز به مقادیر کارایی هزینه داریم، اما چون متغیر ورودی دوم، متغیری صحیح است مدل۳ برای محاسبه کارایی هزینه مناسب نخواهد بود زیرا این مدل نقاط غیرصحیح را به‌عنوان مرجع نقاط ناکارا معرفی می‌کند. از این‌رو برای محاسبه کارایی هزینه DMU_o با سه ورودی و یک خروجی که در آن هزینه ورودی سوم قطعه‌ای خطی و متغیر ورودی دوم صحیح است، مدل MLP نظیر مدل۳ ارائه می‌شود:

رابطه ۵۱)

$$
\begin{aligned}
&\min\ p_1x_1 + p_2x_2 + \sum_{k=1}^{7} p_4^k v_4^k \\
&\text{s.t.} \sum_{j=1}^{14} \lambda_j\, x_{1j} \le x_1 \\
&\sum_{j=1}^{14} \lambda_j\, x_{2j} \le x_2 \\
&\sum_{j=1}^{14} \lambda_\text{j}\, x_{3j} \le \sum_{k=1}^{7} v_3^k \\
&\sum_{j=1}^{14} \lambda_j y_{1j} \ge y_{1o} \\
&0 \le v_3^1 \le x_3^1 \\
&0 \le v_3^2 \le x_3^2 - x_3^1 \\
&0 \le v_3^3 \le x_3^3 - x_3^2 \\
&0 \le v_3^5 \le x_3^5 - x_3^4 \\
&0 \le v_3^6 \le x_3^6 - x_3^5 \\
&0 \le v_3^7 < \infty \\
&x_2 \in z_+ \\
&\lambda_j \ge 0, j = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

با به‌کارگیری مدل ۵۱ به‌عنوان مدل پایه، و استفاده از روش پیشنهادی ارائه شده در بخش روش شناسی پژوهش، میزان کارایی هزینه هر یک از واحدها در دو دوره و همچنین میزان تغییرات تکنیکی وکارایی این واحدها در طی این دو دوره به همراه شاخص مالمکوئیست محاسبه شده و در جدول ۴ آورده شده است[۱].

۱. محاسبات مطالعه موردی توسط نرم افزار برنامه نویسی GAMS انجام شده است.

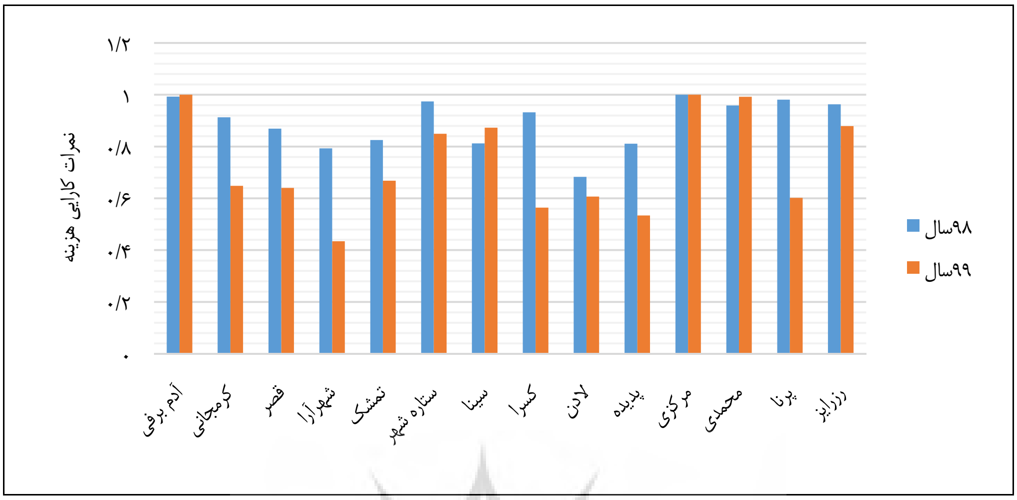
جدول ٤. مقادیر کارایی تکنیکی، مؤلفه‌های تغییرات تکنولوژی و تغییرات کارایی و شاخص مالمکوئیست

قنادی‌ها	کارایی هزینه سال ۹۸	کارایی هزینه سال ۹۹	تغییرات تکنیکی OEC	تغییرات کارایی CTC	شاخص مالمکوئیست
آدم‌برفی	۰/۹۹۳	۱/۰۰۰	۱/۰۹۵	۱/۰۰۷	۱/۱۰۲
کرمجانی	۰/۹۱۳	۰/۶۴۸	۱/۰۸۹	۰/۷۱۰	۰/۷۷۳
قصر	۰/۸۶۹	۰/۶۴۰	۱/۱۱۶	۰/۷۳۶	۰/۸۲۱
شهرآرا	۰/۷۹۳	۰/۴۳۴	۱/۱۰۰	۰/۵۴۷	۰/۶۰۱
تمشک	۰/۸۲۵	۰/۶۶۸	۱/۰۸۳	۰/۸۱۰	۰/۸۷۷
ستاره‌شهر	۰/۹۷۴	۰/۸۴۹	۱/۰۵۶	۰/۸۷۱	۰/۹۲۱
سینا	۰/۸۱۲	۰/۸۷۳	۱/۱۳۴	۱/۰۷۵	۱/۲۱۹
کسرا	۰/۹۳۲	۰/۵۶۴	۱/۱۳۷	۰/۸۲۶	۰/۸۶۴
لادن	۰/۶۸۳	۰/۶۰۷	۱/۰۰۶	۰/۹۰۵	۰/۹۳۹
پدیده	۰/۸۱۱	۰/۵۳۴	۱/۱۱۶	۰/۶۵۹	۰/۷۳۵
مرکزی	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۹۶	۱/۰۰۰	۱/۰۹۶
محمدی	۰/۹۵۹	۰/۹۹۲	۱/۱۰۳	۱/۰۳۴	۱/۱۴۱
پرنا	۰/۹۸۱	۰/۶۰۲	۱/۱۴۵	۰/۶۱۴	۰/۷۰۳
رزرایز	۰/۹۶۳	۰/۸۷۹	۱/۰۸۹	۰/۹۱۳	۰/۹۹۵

یادآوری می‌کنیم که کارایی هزینه قطعه‌ای خطی مساوی با یک، برای یک قنادی به معنی آن است که آن قنادی روی مرز کارایی قرار دارد و مقادیر کمتر از یک به معنی آن است که قنادی از نظر هزینه ناکاراست و زیر مرز کارایی قرار دارد. کارایی هزینه قنادی مرکزی در سال ۱۳۹۸ برابر یک بوده است و در این سال مرز کارایی را تشکیل داده است. در سال ۱۳۹۹، قنادی‌های آدم‌برفی و مرکزی با اندازه کارایی هزینه قطعه‌ای خطی مساوی یک، مرز کارایی را تشکیل داده‌اند. با دقت در مقادیر به دست آمده در جدول۴ می‌توان دید که قنادی مرکزی با اندازه کارایی مساوی یک در هر دو زمان ۱۳۹۸و ۱۳۹۹ کارا بوده است. در واقع این قنادی در هر دو دوره زمانی مرز کارایی را تشکیل می‌دهد. شکل۱ کارایی هزینه قطعه‌ای‌خطی را طی سال‌های ۱۳۹۸و ۱۳۹۹ نشان می‌دهد.

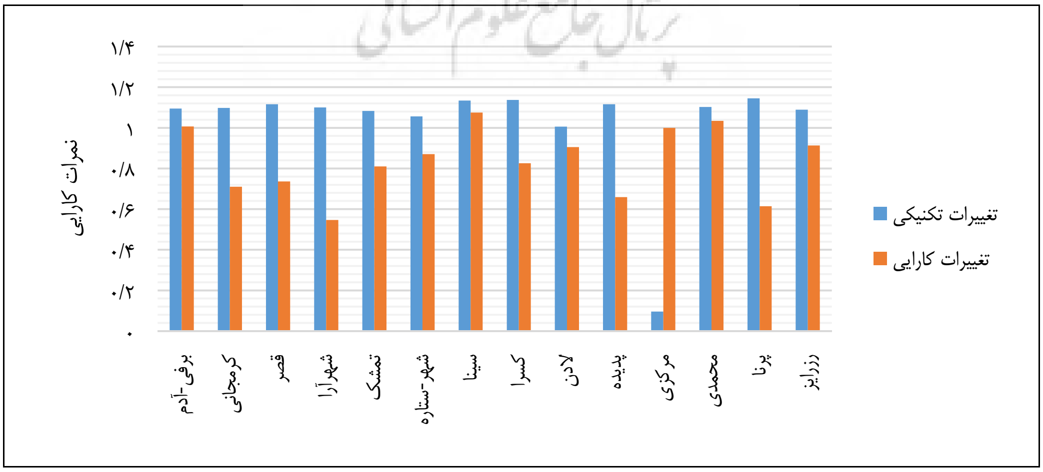
همچنین، نتایج حاصل از جدول ۴ نشان می‌دهد که در بین ۱۴ قنادی، قنادی‌های کرمجانی، قصر، شهرآرا، تمشک، ستاره‌شهر، کسرا، لادن، پدیده، پرنا و رزرایز تنزل کارایی هزینه داشته‌اند و در عین حال قنادی‌های آدم‌برفی، سینا، مرکزی و محمدی رشدکارایی هزینه داشته‌اند. در جدول۴ مؤلفه‌های OEC و CTC مربوط به تجزیه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست نشان داده شده‌اند که برای محاسبه آنها از روابط ۳۳ و ۳۴ استفاده شده است. شاخص بهره‌وری مالمکوئیست با استفاده از رابطه ۳۲ به دست آمده است که ستون آخر جدول۴ مقادیر این شاخص را نشان می‌دهد. با توجه به اطلاعات این جدول قنادی پدیده با EC = ۰/۶۵۹ و TC = ۱/۱۱۶ و MI = ۷۳/۰۴ در سال ۱۳۹۸ نسبت به سال ۱۳۹۹، ۰/۲۶۵ تنزل کارایی داشته‌است که دلیل عمدهٔ این تنزل، تنزل کارایی به میزان ۰/۳۴۱ است در حالی که تکنولوژی سال ۱۳۹۹، ۱/۱۱۶ برابر تکنولوژی سال ۱۳۹۸ است. در بین سایر قنادی‌ها، سینا با رشدی حدود ۱/۲۱۹ برابر،

بیشترین میزان بهره‌وری و شهرآرا و پرنا با تنزل ۰/۶۰۱ و ۰/۷۰۳ بیشترین تنزل بهره‌وری را داشته‌اند. دلیل اصلی رشد قنادی سینا در رشد کارایی این قنادی به میزان ۱/۰۷۵ برابر می‌باشد و نیز از تکنولوژی سال ۱۳۹۹ به میزان بیشتری نسبت به سال ۱۳۹۸ استفاده کرده است.

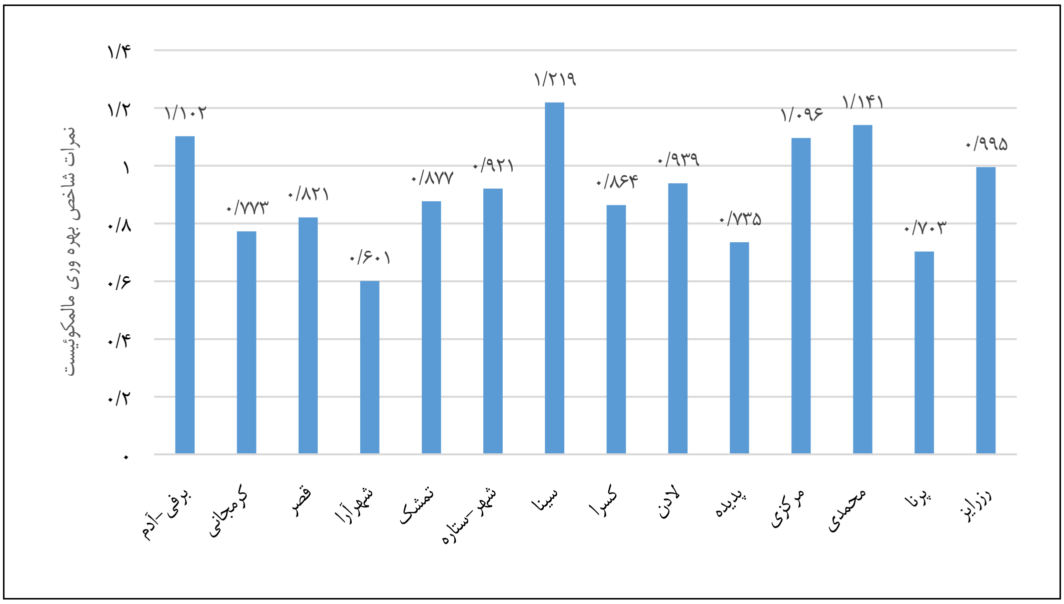


شکل ۱. نمودار مقایسه نمرات کارایی هزینه قطعه‌ای خطی در دو دوره

در بین این قنادی‌ها، آدم‌برفی ناکارایی خود را درسال ۱۳۹۸ که معادل ۰/۹۹۳ است جبران کرده و به اندازه کارایی برابر یک رسیده است. میزان رشد کارایی این قنادی برابر $۱/۰۰۷ = \frac{۱/۰۰۰}{۰/۹۹۳}$ است که همان مقداری است که در جدول ۴ در مقدار مربوط به مؤلفه OEC این قنادی آمده است. اما قنادی پدیده با اندازه کارایی هزینه قطعه‌ای خطی مساوی ۰/۸۱۱ در سال ۱۳۹۸و ۰/۵۳۴ در سال ۱۳۹۹ نه تنها در هر دو این سال‌ها ناکارا بوده است بلکه تنزل کارایی هم داشته است که نسبت این کارایی برابر است با $۰/۶۵۹ = \frac{۰/۵۳۴}{۰/۸۱۱}$ که برابر مقداری است که در جدول ۴ برای مؤلفه OEC داده شده است. شکل۲ تغییرات کارایی و تکنیکی قنادی‌ها و شکل ۳ مقدار شاخص مالمکوئیست واحدها نشان می‌دهند.



شکل۲. نمودار تغییرات کارایی و تغییرات تکنیکی قنادی‌ها



شکل۳. نمودار نمرات شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای قطعه‌ای خطی

به توجه به مقادیر تغییرات کارایی و تکنیکی واحدها در شکل ۲، مشاهده می‌شود که با وجود اینکه اغلب واحدها دارای تغییرات تکنیکی افزایشی هستند اما در تغییرات کارایی دچار افت قابل ملاحظه‌ای شده اند و همین عامل سبب شده که اکثر واحدها (۱۰ واحداز ۱۴ واحد) دچار افت بهره‌وری شوند (شکل ۳). بنابراین عامل افت بهره‌وری در این واحدها، افت محسوس کارایی در سال ۹۹ نسبت به سال ۹۸ بوده است. بنابراین واحدهایی که دارای افت کارایی هستند با کاهش مقادیر ورودی خود به نقاط مرجعی که توسط مدل کارایی هزینه ارائه می‌شود می‌توانند کارایی خود را بهبود داده و بنابراین بهره‌وری بیشتری را به دست آورند.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در مسائل واقعی، موارد بسیاری وجود دارد که در آنها قیمت‌ها به‌صورت پلکانی تغییر می‌کنند. برای مثال قیمت‌های مربوط به انرژی‌های آب، برق و گاز برای مصرف‌کننده‌ها و یا تعیین مقدار مالیات برای کارکنان و شرکت‌ها. وجود چنین هزینه‌هایی باعث می‌شود که مدل‌های ارائه شده در ادبیات DEA قادر به محاسبه شاخص مالمکوئیست نباشند. زیرا مبنای این مدل‌ها، مدل هزینه‌ای است که فقط در فضای رقابتی قابل اجرا است و هزینه‌ها را به‌صورت یکنواخت درنظر می‌گیرد. بنابراین اگر هزینه‌ها به‌صورت پلکانی باشند و یا فضای واحدها به‌صورت غیر رقابتی باشد مدل‌های ارائه شده قادر به محاسبه شاخص مالمکوئیست نیستند. ازین‌رو در این مقاله مدل‌هایی برای محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست هزینه‌ای در حالتی که هزینه‌ها به‌صورت پلکانی تغییر می‌کنند در فضای رقابتی و غیررقابتی ارائه شد و مدل‌های ارائه شده روی داده‌های واقعی به کار گرفته شده و نتایج تحلیل گردید. همان طور که در نتایج مطالعه موردی قابل مشاهده است، روش پیشنهادی که بر پایه مدل هزینه‌ای قطعه‌ای خطی ارائه شده است به راحتی قادر است که مقادیر شاخص مالمکوئیست را در هر دو فضای رقابتی و غیر رقابتی محاسبه کرده و نتایج حاصل از آن را تحلیل کند. بنابراین، روش پیشنهادی، با استفاده از مدل‌های هزینه‌ای قطعه‌ای خطی، مدل‌های مالمکوئیست کلاسیک را برای

حالاتی که هزینه‌ها پلکانی هستند و یا فضای مورد بررسی غیر رقابتی است مجهز می‌کرده تا نتایجی معتبر و دقیق‌تر ارائه دهند.

روش پیشنهادی انجام شده در این پژوهش تنها در فضای رقابتی مورد استفاده قرار گرفت این در حالی است که این روش را می‌توان در فضاهای غیر رقابتی نیز استفاده کرده و نتایج دقیق و معتبری به‌دست آورد.

علاوه براین، به‌کارگیری دیدگاه پیشنهادی این مقاله در نمونه‌های واقعی دیگر که در آنها بحث صرفه‌جویی و رعایت الگوی مصرف حائز اهمیت است و قیمت ورودی‌هایشان به‌صورت پلکانی است، می‌تواند از جمله توسعه‌های کاربردی در این زمینه باشد.

با توجه به اوضاع اقتصادی ناپایدار کشور، به علت دشواری‌های قیمت گذاری یا نوسانات بازار مانند تورم و یا شیوع کرونا ویروس، یافتن قیمت‌های ثابت و قطعی آسان نیست. در مطالعه انجام شده در این مقاله نیز با وجود در دسترس بودن قیمت‌های دقیق برای جامعه‌ای ازمشاهدات، اما نتایج به‌دست آمده مختص به دوره‌های کوتاه مدت ارزیابی می‌باشد. برای حل این‌مشکل و دستیابی به ارزیابی‌های بلند مدت پیشنهاد می‌شود از مدل‌هایی برای تخمین کران پایین و بالای کارایی هزینه در حالتی که اطلاعات قیمت نادقیق اند و تنها کران بالا و پایین قیمت ورودی‌ها برای هر واحد معین شده است، استفاده گردد.

پیشنهاد می‌شود روش‌ها و سیاست‌های اجرایی اتخاذ شده قنادی‌های کارا و بهره‌ور در این‌تحقیق بررسی شود، تا سایر قنادی‌ها جهت الگوگیری و مرجع قرار دادن آنها استفاده نمایند. وجود رقابت بیشتر قنادی‌ها باعث بهبود و ارتقای کارایی و بهره‌وری آنهاست. در این راستا نیز انجام پژوهشی برای اندازه‌گیری رقابت‌پذیری و راهکارهای افزایش رقابت مندی قنادی‌ها پیشنهاد می شود.

در نهایت، بررسی راهکارهای توسعه و ارتقای سطوح تکنولوژی و دانش فنی قنادی‌ها نیز پیشنهاد می‌شود.

منابع

علیرضایی، محمدرضا؛ رفیعی ثانی، محمدرضا (۱۳۹۵). توسعه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست به کمک مبادلات هدفمند در تحلیل پوششی داده‌ها. *مدیریت صنعتی*، ۸ (۳)، ۴۴۷-۴۶۶.

غریب، علی حسین؛ آذر، عادل؛ دهقان نیری، محمود (۱۳۹۹). طراحی مدا اندازه گیری نوآوری سازمان با رویکرد تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای پویا و اعمال محدودیت‌های فازی برای کنترل اوزان و یافتن اوزان عمومی (مورد مطالعه : دانشگاه‌های سطح یک کشور). *مدیریت صنعتی*، ۱۲(۳)، ۳۷۳-۳۹۴.

مؤمنی، منصور؛ خدایی، سمیه؛ بشیری، مجتبی (۱۳۹۹). تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای نادقیق با ساختار موازی و ورودی‌ها و خروجی‌های نادقیق (مطالعه موردی: سازمان تامین اجتماعی). *مدیریت صنعتی*، ۱۲ (۳)، ۴۱۹- ۴۳۹.

میردهقان اشکذری، سیدمرتضی (۱۳۸۹). *مشخصه‌ها و توسیعی از برخی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها*. رساله دکتری،تهران، دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم.

References

Alirezaee, M.R., Rafiee Sani, M.R. (2016). Extention of Malmquist Productivity Index using Targeted Trade-offs in Data Envelopment Analysis. *Journal of industrial management*, 8(3), 447-466. (*in Persian*)

Camanho, A. S., Dyson, R. G. (2005). Cost efficiency measurement with price uncertainty a DEA application bank branch assessments. *European Journal of Operational Research*, 161, 432-446.

Camanho, A. S., Dyson, R. G. (2008). A generalisation of the Farrell cost efficiency measure applicable to non-fully competitive settings, *Omega*, 36, 147-162.

Caves, D. W., Christensen, L. R., & Diewert, W. E. (1982). The economic theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity. *Econometrica*, 50(6), 1393–1414.

Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research, 2*, 429-444.

Cook, D.W., Zhu, J. (2009). Piecewise linear output measure in DEA. *European Journal of Operational Research*, 197, 312–319.

Färe, R., Grosskopf, S., Lindgren, B., & Roos, P. (1992). Productivity change in Swedish pharmacies 1980–1989: a non parametric approach. *Journal of Productivity Analysis*, 3, 81–97.

Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K. (1985). *The measurement of efficiency of production*, Boston: Kluwer Nijhoff.

Fare, R., Grosskopf, S., Norris, M., Zhang, Z. (1994). Productivity growth, Technical progress and Efficiency changes in industrialized Countries. *The American Economic Review*, 84, 66-83.

Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, 129, 253–351.

Gharib, A. H., Azar, A., Dehghan Nayeri, M. (2020). Designing an Organizational Innovation Measurement Model with Dynamic Network Data Analysis and Applying Fuzzy constraint for Weight Control and Finding a common set of weights (Case Study: Iranian Universities). *Industrial Management Journal*, 12(3), 373-394. (*in Persian*)

Hezaveh, E.R., Fallahnejad, R. (2021). Cost Malmquist Productivity Index in Non Competitive Environment of Price in Data Envelopment Analysis and the Use of it in the Dealings of the Iranian Stock Exchange. *Advances in Mathematical Finance & Applications*, 6(4), 757-767.

Jahanshahloo, G.R., Soleimani-Damaneh, M., Mostafaee, A. (2008). Asimplified version of the DEA cost efficiency model, *Eur. J. Oper. Res*, 184, 814–815.

Kuosmanen, T., Post, T. (2001). Measuring economic efficiency with incomplete price information: With an application to European commercial banks. *European Journal of Operational Research*, 134(1), 43-58.

Kuosmanen, T., Post, T. (2003). Measuring economic efficiency with incomplete price information*European Journal of Operational Research*, 144, 454–457.

Lotfi, F.H., Amirteimoori, A., Moghaddas, Z., Vaez‑Ghasemi, M. (2020). Cost efficiency measurement with price uncertainty: a data envelopment analysis. *Mathematical Sciences*, 14, 387-396.

Lotfi, F.H., Rostay-Malhkalife, M., Moghaddas, Z. (2010). Modified piecewise linear DEA model. *European Journal of Operational Research*, 205, 729–733.

Malmquist, S. (1953). Index numbers and indifference surfaces. *Trabajos de Estatistica*, 4, 209–242.

Maniadakis, N., Thanassoulis, E., (2004). A cost Malmquist productivity index. *European Journal of Operational Research*, 154, 396–409.

Mirdehghan Ashkzari, S.M. (2010). *Characterization and extension of some the models in Data Envelopment Analysis.* Doctoral Thesis, Tehran, Department of Mathematical Sciences and Computer Engineering, Tarbiat Moalem University. (*in Persian*)

Mirzaeian, F., Fallahnejad, R. (2021). Estimation of Cost Efficiency with Piecewise Linear Cost Function in Integer-Valued Data Envelopment Analysis. *Mathematical Sciences*, https://doi.org/10.1007/s40096-021-00386-5.

Momeni, M., Khodaee, S., Bashiri, M. (2020). Uncertain Network Data Envelopment Analysis with Parallel Structure and Imprecisely Inputs and Outputs (Case Study: Social Security Organization). *Industrial Management Journal*, 12(3), 419-439. (*in Persian*)

Mostafaee, A., Saljooghi, F.H. (2010). Cost efficiency measures in data envelopment analysis with data uncertainty, *European Journal of Operational Research*, 202, 595-603.

Sahoo, B. K., Kerstens, K., Tone, K. (2012). Returns to Growth in a Non-parametric DEA Approach. *International Transactions in Operational Research*,19(3), 463-486.

Sahoo, B. K., Mehdiloozad, M., Tone, K. (2014). Cost, revenue and profit efficiency measurement in DEA: A directional distance function approach. *European Journal of Operational Research*, 237, 921–938.

Sahoo, B. K., Tone, K. (2009). Decomposing Capacity Utilization in Data Envelopment Analysis An Application to Banks in India, *European Journal of Operational Research*, 195(2), 575-594.

Sahoo, B. K., Tone, K. (2009). Radial and Non-radial Decompositions of Profit Change With an Application to Indian Banking, *European Journal of Operational Research*, 196(3), 1130-1146.

Sahoo, B. K., Tone, K. (2013). Non-parametric Measurement of Economies of Scale and Scope in Non-competitive Environment with Price Uncertainty, *Omega*, 41(1), 97-111.

Sueyoshi, T. (1997). Measuring efficiencies and returns to scale of Nippon telegraph and telephone in production and cost analyses, *Management Science* 43, 779–796.

Thanassoulis, E., Shiraz, R.K., Maniadakis, N.(2015). A cost Malmquist productivity in- dex capturing group performance. *European Journal of Operational Research*, 241,796–805.

Tohidi, G., Razavyan, S., Tohidnia, S. (2012). A global cost Malmquist productivity index using data envelopment analysis, *The Journal of the Operational Research Society*, 63(1), 72-78.

Tone, K . (2002). A Strange case of the cost and allocative efficiencies in DEA. *Journal of the Operational Research Society*, 53, 1225–1231.

Tone, K., Sahoo, B. K. (2005). Evaluating cost efficiency and returns to scale in the life insurance corporation of India using data envelopment analysis, *Socio-Economic Planning Sciences*, 39, 261–285.

Tone, K., Sahoo, B. K. (2006). Re-examining Scale Elasticity in DEA. *Annals of Operations Research*, 145(1), 69-87.

Tone, K., Tsutsui, M. (2007). Decomposition of cost efficiency and its application to Japanese-US electric utility comparisons. *Socio-Economic Planning Sciences*, 91-106.

Walheer, B. (2018). Disaggregation of the cost Malmquist productivity index with joint and output-specific inputs. *Omega*, *75*, 1-12.