

مدلی برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه، مبتنی بر تئوری امکان با متغیرهای تصمیم فازی

مهناز حسین‌زاده^۱، محمداقبر منهاج^۲، عالیه کاظمی^۳

چکیده: در این پژوهش، مدلی برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه فازی مبتنی بر تئوری امکان با منابع غیر دقیق و متغیرهای تصمیم فازی ارائه شده است. با توجه به ماهیت غیر دقیق میزان منابع در دسترس، تعیین یک جواب قطعی برای مدل، غیر منطقی به نظر می‌رسد. بدین منظور، مدل پیشنهادی به گونه‌ای طراحی شده که تصمیم‌ها را به صورت فازی تعیین می‌کند. این روش، نقایص روش‌های پیشین ارائه شده در این زمینه را برطرف کرده است و مهم‌ترین مزیت آن، سهولت در به کارگیری است. مدل پیشنهادی در مسئله‌ای برای تخصیص سفارش به تأمین‌کنندگان، به کار گرفته شده و کارایی آن در عمل، آزمایش شده است. با توجه به ماهیت فازی جواب‌های به دست آمده از حل مدل، تصمیم‌گیرنده با انعطاف بیشتری در تصمیم‌گیری مواجه خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی چندهدفه، برنامه‌ریزی فازی مبتنی بر تئوری امکان، تخصیص، رتبه‌بندی فازی، عدد فازی مثلثی، متغیر تصمیم فازی.

۱. دکتری مدیریت تحقیق در عملیات، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران

۲. استاد دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران

۳. استادیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۸/۰۸

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۳/۰۲/۲۰

نویسنده مسئول مقاله: عالیه کاظمی

Email: aliyehkazemi@ut.ac.ir

مقدمه

تصمیم‌گیری درباره مسائل پیچیده، در شرایط پیچیده و با چندین هدف و معیار متفاوت، یکی از مهم‌ترین فعالیت‌های روزمره انسان‌هاست. تاکنون روش‌های بسیاری برای حل این‌گونه مسائل پیشنهاد شده‌اند که از جمله آنها تئوری مطلوبیت چندشاخصه (کینی و رایفا، ۱۹۷۶؛ فرکوهر، ۱۹۸۴)، روش‌های تئوری بایسین (شفر، ۱۹۷۶)، روش‌های تحلیل سلسله‌مراتبی (ساعتی، ۱۹۸۶؛ هرکر و ورگز، ۱۹۸۷) و روش‌های برنامه‌ریزی آرمانی (استیور، ۱۹۸۶) است. بیشتر مسائل نیازمند تصمیم‌گیری در شرایط واقعی، در محیطی نامطمئن اتفاق می‌افتند و بنابراین، بسیاری از ضرایب، اهداف و محدودیت‌ها را نمی‌توان به‌صورت دقیق، قطعی و بدون ابهام برآورد کرد. در عمل، نبود دسترسی به نمونه‌های کافی یا در دست‌نداشتن یک مدل آماری زیربنایی، موجب برآوردهای آماری ناکارآمد خواهد شد. در نتیجه، استفاده از یک مدل تصمیم قطعی در این شرایط، به دستیابی به جواب‌هایی غیر واقعی منجر خواهد شد (مهدوی امیری و ناصری، ۲۰۰۷). در این شرایط، تئوری فازی، چارچوبی تئوریک و مفهومی را برای اداره و مدیریت چنین نبود اطمینانی فراهم می‌آورد.

تئوری مجموعه‌های فازی را نخستین بار بلمن و زاده (۱۹۶۵)، در فرایند تصمیم‌گیری به‌کار گرفتند. مفهوم برنامه‌ریزی ریاضی فازی، به‌صورت کلی، نخستین بار از سوی تاناکا و همکاران (۱۹۷۳) مطرح شد و برای بار اول، زیمرمن (۱۹۷۸)، مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی را فرموله کرد. از آن پس، تکنیک‌های بسیاری برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی، توسعه یافتند که در قالب دو دسته کلی برنامه‌ریزی خطی فازی و برنامه‌ریزی خطی مبتنی بر تئوری امکان قرار گرفته‌اند. دیسون معتقد است هنگامی که توابع عضویت مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی، مانند تئوری مطلوبیت، براساس مفهوم ترجیحات تعیین می‌شود، این تابع عضویت با تابع مطلوبیت تفاوتی ندارد؛ اما این گفته، درباره توزیع‌های احتمال در برنامه‌ریزی خطی احتمالی درست نیست. در هر دسته از این مدل‌ها، بعضی از قسمت‌های مسئله به‌صورت فازی یا غیر دقیق در نظر گرفته شده‌اند و راهکارهایی برای حل آنها ارائه شده است (لای و هوانگ، ۱۹۹۲). بسیاری از مدل‌های ارائه‌شده، برای سادگی بیشتر، جواب نهایی مسئله را به‌صورت قطعی در نظر می‌گیرند (تاناکا و همکاران، ۲۰۰۰)، بدین معنا که در یک محیط فازی، تصمیم‌ها به‌صورت قطعی اتخاذ می‌شوند و بنابراین، در این فرایند تصمیم‌گیری، جنبه فازی مسئله عملاً نادیده گرفته می‌شود. از آن پس، چندین مدل برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی یا مبتنی بر تئوری امکان با متغیرهای تصمیم فازی ارائه شدند که هر یک مزایا و معایبی دارند. عده‌ای نیز مدل‌هایی را با عنوان مدل‌های تمام‌فازی ارائه کرده‌اند (هاشمی و همکاران، ۲۰۰۶؛ بوکلی و فیورینگ، ۲۰۰۰؛

اله‌ویرانلو و همکاران، ۲۰۰۸؛ دهقان و همکاران، ۲۰۰۶؛ مالکی و همکاران، ۲۰۰۰؛ لطفی و همکاران، ۲۰۰۹؛ کومار و همکاران، ۲۰۰۱)، که در این دسته از مدل‌ها، تمامی پارامترهای مسئله و متغیرهای تصمیم همزمان فازی فرض می‌شوند. با توجه به موارد ذکرشده، در این تحقیق تلاش شده تا مدلی ارائه شود که با شمول بعضی پارامترهای فازی، جواب نهایی را به صورت فازی و منطبق با شرایط تعیین کند.

تعاریف مقدماتی

اعداد فازی

اعداد فازی، تعمیم اعداد معمولی (قطعی) هستند و با استفاده از اصل گسترش می‌توان عملگرهای جبری را برای آنها تعریف کرد.

تعریف ۱-۲: طبق تعریف، عدد فازی A از نوع LR است اگر و فقط اگر:

$$A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_A - x}{w_A}\right) & -\infty < x \leq m_A \\ R\left(\frac{x - m_A}{w'_A}\right) & m_A \leq x < +\infty \end{cases} \quad w_A, w'_A \geq 0 \quad (1)$$

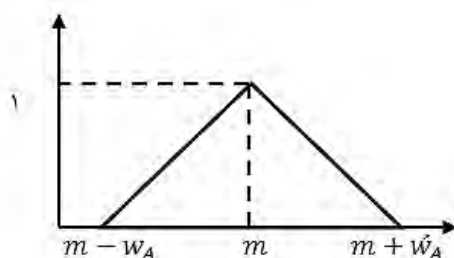
به طوری که L و R توابع مرجع‌اند که چند خاصیت دارند: ۱. متقارن هستند، ۲. $L(0) = 1$ و $R(0) = 1$ و ۳. توابعی هستند که در فاصله $[0, +\infty)$ غیر صعودی و در فاصله $(-\infty, 0]$ غیر نزولی‌اند. m_A مقدار میانگین عدد فازی A است و دو عدد w_A, w'_A میزان عرض باندهای چپ و راست A را اندازه می‌گیرند. این یک فرم پارامتریک از عدد فازی A است و به همین سبب می‌توان A را با یک سه‌تایی به شکل زیر نمایش داد:

$$\tilde{A} \equiv (m, w_A, w'_A)_{LR}$$

و می‌گوییم یک عدد فازی از نوع LR یک عدد فازی مثلثی است، اگر تابع عضویت آن به صورت تابع ۲ باشد:

$$A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m_A - x}{w_A} & m_A - w_A < x \leq m_A \\ 1 - \frac{x - m_A}{w'_A} & m_A \leq x < m_A + w'_A \\ \cdot & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (2)$$

که نمایش آن به صورت شکل ۱ است:



شکل ۱. نمایش عدد فازی مثلثی

تعریف ۲-۲: عملگرهای ریاضی

برای دو عدد فازی A و B که در فاصله $[0, \infty)$ ، توابع L و R آنها کاهشی است، عملگرهای اصلی به صورت روابط ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ تعریف می‌شوند:

$$A = (a, w_A, w'_A)_{LR}, \quad B = (b, w_B, w'_B)_{LR}$$

$$A + B = (a + b, w_A + w'_B, w'_A + w'_B)_{LR} \quad (3)$$

$$A - B = (a - b, w_A + w'_B, w'_A + w'_B)_{LR} \quad (4)$$

برای $B > 0, A > 0$ داریم:

$$(a, w_A, w'_A)_{LR} \cdot (b, w_B, w'_B)_{LR} \approx (a \cdot b, aw_B + bw_A, aw'_B + bw'_A)_{LR} \quad (5)$$

و برای $B > 0, A < 0$ داریم:

$$(a, w_A, w'_A)_{LR} \cdot (b, w_B, w'_B)_{LR} \approx (a \cdot b, -aw'_B + bw_A, -aw_B + bw'_A)_{LR} \quad (6)$$

و برای هر $c \in \mathbb{R}^+$ داریم:

$$c \cdot (a, w_A, w'_A)_{LR} = (ca, cw_A, cw'_A)_{LR} \quad (7)$$

تعریف ۳-۲: رتبه‌بندی فازی

عدد فازی B از عدد فازی A کوچک‌تر است، اگر و فقط اگر:

$$B < A \iff \left(\begin{array}{l} 1) \ b < a \\ 2) \ w_B + w'_B \geq w_A + w'_A \end{array} \right) \quad (8)$$

(منهاج، ۲۰۰۷)

مدل برنامه‌ریزی چندهدفه مبتنی بر تئوری امکان با متغیرهای تصمیم فازی و

منابع فازی

فرم عمومی مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه، با اعداد سمت راست و متغیرهای تصمیم فازی به صورت مسئله ۹ قابل تعریف است:

$$\text{Max (Min)} Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_p] \quad (9)$$

$$\tilde{Z}_1 = Z_1(x_j)$$

$$\tilde{Z}_2 = Z_2(x_j)$$

⋮

$$\tilde{Z}_p = Z_p(x_j)$$

St:

$$A_i(\tilde{x}_j) \leq \tilde{b}_j \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\tilde{x}_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

در این مدل، $A = (a_{ij})$ نشان‌دهنده ماتریس ضرایب، $C = (c_j)$ بردار ضرایب متغیرها در تابع هدف و $\tilde{b} = (b_i)$ نشان‌دهنده بردار اعداد سمت راست است که $\tilde{b}_i = (b_i, w_{bi}, w'_{bi})$ و $\tilde{x} = (x_{mj}, w_j, w'_j)$ متغیرهای تصمیم فازی مسئله‌اند که در آن، اعداد فازی از نوع LR هستند و لزوماً متقارن یا مثبت نیستند.

با جایگذاری موارد ذکر شده می‌توان مدل ۹ را به صورت مدل ۱۰ نوشت:

$$\max \tilde{Z}_1 = c_{11}(x_{1m}, w_1, w'_1) + c_{12}(x_{2m}, w_2, w'_2) + \dots + c_{1n}(x_{nm}, w_n, w'_n) \quad (10)$$

$$\max \tilde{Z}_2 = c_{21}(x_{1m}, w_1, w'_1) + c_{22}(x_{2m}, w_2, w'_2) + \dots + c_{2n}(x_{nm}, w_n, w'_n)$$

⋮

$$\max \tilde{Z}_p = c_{p1}(x_{1m}, w_1, w'_1) + c_{p2}(x_{2m}, w_2, w'_2) + \dots + c_{pn}(x_{nm}, w_n, w'_n)$$

s.t.

$$a_{11}(x_{1m}, w_1, w'_1) + a_{12}(x_{2m}, w_2, w'_2) + \dots + a_{1n}(x_{nm}, w_n, w'_n) \leq [b_1, b_{1w}, b_{1w'}]$$

⋮

$$a_{M1}(x_{Mm}, w_1, w'_1) + a_{M2}(x_{Mm}, w_2, w'_2) + \dots + a_{Mn}(x_{nm}, w_n, w'_n) \leq [b_M, b_{Mw}, b_{Mw'}]$$

$$(x_{jm}, w_j, w'_j) \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

تاناکا و همکاران (۲۰۰۰)، برای حل مسئله فوق با متغیرهای تصمیم فازی، مدلی را پیشنهاد کردند. آنها در این مدل، متغیرهای تصمیم را اعداد فازی مثلثی و تابع عضویت بردار فازی X را به صورت رابطه ۱۱ تعریف کردند.

$$\Pi_X(x) = \Pi_{X_1}(x_1) \wedge \Pi_{X_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \Pi_{X_n}(x_n) \quad (11)$$

به طوری که $X = (a, w)_T$ و $a = [a_1, \dots, a_n]_T$ و $w = [w_1, \dots, w_n]_T$ و عدد سمت راست را که با C_i نمایش دادند یک عدد فازی مثلثی مثبت با تابع عضویت رابطه ۱۲ تعریف کردند.

$$\Pi_{C_i} = 1 - |x - C_i| / r_i \quad (12)$$

به طوری که $C_i = (c_i, r_i)^T$ و $c_i \geq 0$ و $r_i \geq 0$. تاناکا و همکاران (۲۰۰۰)، تابع خطی ۱۳ را به صورت رابطه ۱۴ نشان دادند.

$$Y = aX_1 + \dots + a_n X_n = a^T X \quad (13)$$

$$Y = (a^T X, |a^T X|)_T \quad (14)$$

آنها با تعریف رتبه بندی دو عدد فازی $Y_i \geq Y_j$ به صورت رابطه ۱۵ و با توجه به رابطه ۱۴، مدل برنامه ریزی فازی زیر را به صورت مدل قطعی ۱۶ تعریف کردند.

$$y_i - (1-h)w_i \geq y_j - (1-h)w_j \quad (15)$$

$$y_i + (1-h)w_i \geq y_j + (1-h)w_j$$

به طوری که $h \in [0, 1]$ سطح امکان ارزیابی تعیین شده است.

$$\max k_1 \sum_{j=1}^n p_j x_j + k_2 \sum_{j=1}^n q_j w_j \quad (16)$$

$$s.t. \quad b_i' a - (1-h) |b_i' w| \leq c_i - (1-h) r_i$$

$$b_i' a + (1-h) |b_i' w| \leq c_i + (1-h) r_i$$

$$(i = 1, \dots, m+1)$$

همان طور که گفته شد، این مدل تنها برای زمانی قابل استفاده است که اعداد سمت راست، اعداد فازی مثبت باشند و در صورت وجود اعداد منفی، سمت راست قابل استفاده نیست. به علاوه، برای دستیابی به نتیجه مدل باید برای مقادیر مختلف p و q ، جواب های مختلف را محاسبه کرد که زمان زیادی را به خود اختصاص می دهد.

مالکی و همکاران (۲۰۰۰)، برای حل مدل برنامه ریزی مبتنی بر تئوری امکان با متغیرها و منابع فازی تک هدفه پیشنهاد کردند که با حل ثانویه مدل که شامل مدل با تنها ضرایب تابع هدف فازی خواهد شد، جواب مدل اولیه را مشخص کنند. بدین منظور، آنها مسئله برنامه ریزی خطی با متغیرهای تصمیم فازی را به صورت مدل ۱۷ تعریف کردند.

$$\begin{aligned} \min \tilde{Z} &= b' \tilde{Y} \\ \text{s.t. } \tilde{Y} A &\geq \tilde{C}' \\ \tilde{Y} &\geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

به طوری که $\tilde{Y} \in (F(\mathbb{R}))^m$ و $\tilde{C}' \in (F(\mathbb{R}))^n$ ، $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $0 \leq b \in \mathbb{R}^m$. این محققان، مسئله ثانویه مدل فوق را به صورت مدل ۱۸ تعریف کردند.

$$\begin{aligned} \max \tilde{Z} &= \tilde{C} X \\ \text{s.t. } AX &\leq b \\ X &\geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، به طور مستقیم با فرض مثبت بودن اعداد سمت راست و در نتیجه، مثبت شدن متغیرهای تصمیم فازی، قابل استفاده است. در غیر این صورت، مدل، نشدنی می‌شود. از طرفی این مدل با توجه به ساختار خود، قابلیت تعمیم برای مسائل چندهدفه را ندارد. لطفی و همکاران (۲۰۰۹) نیز مدلی را برای حل مسائل با متغیرهای تصمیم فازی پیشنهاد کردند که این مدل، تنها برای مواردی قابل استفاده است که اعداد سمت راست و متغیرهای تصمیم، اعداد فازی مثلثی متقارن باشند. در غیر این صورت، باید مقدار این پارامترها را با نزدیک‌ترین عدد فازی مثلثی متقارن تخمین زد و بنابراین، جواب مسئله تقریبی است. آنها برای تقریب‌زدن هر عدد فازی مثلثی با نزدیک‌ترین عدد فازی متقارن، به صورت زیر عمل می‌کنند:

اگر \tilde{u} یک عدد فازی و $(\bar{u}(r), \underline{u}(r))$ فرم پارامتریک آن باشد، برای تقریب‌زدن هر یک از اعداد فازی مثلثی با نزدیک‌ترین عدد فازی متقارن به \tilde{u} ، باید رابطه ۱۹ را حداقل کرد:

$$D^*(\tilde{u}, S[x, \sigma]) = \int_0^1 (\underline{u}(r) - S[x, \sigma](r))^2 dr + \int_0^1 (\bar{u}(r) - S[x, \sigma](r))^2 dr \quad (19)$$

که با حداقل کردن رابطه فوق بر حسب (x_0, σ) به رابطه ۲۰ می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{3}{4} \int_0^1 (\bar{u}(r) - \underline{u}(r))(1-r) dr \\ x_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\bar{u}(r) + \underline{u}(r)) dr \end{aligned} \quad (20)$$

بنابراین، نزدیک‌ترین عدد فازی مثلثی متقارن به \tilde{u} ، x_0 با فازیت σ است که به نوعی دیفازی‌کننده‌های \tilde{u} به حساب می‌آیند.

سپس آنها مسئله را به شکل مدل ۲۱ تعریف کردند:

$$\begin{aligned} & \text{Max } C \left(C_{\tilde{x}}, w_{\tilde{x}}^L, w_{\tilde{x}}^R \right) \quad (21) \\ & \text{s.t. } A \left(C_{\tilde{x}}, w_{\tilde{x}}^L, w_{\tilde{x}}^R \right) = \left(C_{\tilde{b}}, w_{\tilde{b}}^L, w_{\tilde{b}}^R \right) \\ & \quad C_{\tilde{x}} - w_{\tilde{x}}^L \geq 0. \end{aligned}$$

به طوری که:

$$\tilde{X} = (C_{\tilde{x}}, w_{\tilde{x}}^L, w_{\tilde{x}}^R), \tilde{b} = (C_{\tilde{b}}, w_{\tilde{b}}^L, w_{\tilde{b}}^R)$$

که متغیرهای تصمیم و اعداد سمت راست با استفاده از تقریب گفته شده فوق برای اعداد مثلثی نامتقارن، به نزدیکترین اعداد فازی مثلثی نزدیک به آنها تقریب زده می‌شوند و سپس مدل را دیفازی و حل می‌کنند. از مهم‌ترین محدودیت‌های این مدل، قابلیت کاربرد آن تنها برای اعداد فازی مثلثی متقارن است. همچنین این مدل، تنها برای اعداد فازی غیر منفی قابل استفاده است. به علاوه، حل مدل با استفاده از این روش، به زمان و محاسبه‌های بسیاری نیاز دارد.

مدل پیشنهادی

در این قسمت، تلاش شده تا برای حل مدل برنامه‌ریزی چندهدفه با متغیرهای تصمیم و منابع فازی، روشی ارائه شود که ضمن برطرف کردن نقایص مدل‌های پیشین، از سادگی در محاسبه‌ها نیز برخوردار باشد. این مدل برای تمامی انواع حالت‌ها برای اعداد سمت راست و متغیرها، از اعداد قطعی گرفته تا اعداد فازی مثلثی متقارن، نامتقارن و مثبت و منفی، قابلیت استفاده دارد.

در این بخش، برای حل مسئله ۱۰، گام‌های زیر را دنبال می‌کنیم:

گام ۱: هر تابع هدف را به تنهایی و همراه با محدودیت‌های کارکردی مسئله اصلی در نظر می‌گیرد و بدین ترتیب، P مسئله برنامه‌ریزی خطی مبتنی بر تئوری امکان را با یک تابع هدف تعریف می‌کنیم.

گام ۲: با توجه به تعریف عملگرهای فازی، هر مسئله برنامه‌ریزی فازی گام ۱ به مسئله ۲۲ قابل تبدیل است:

$$\max (\min) (Z_{P_m}, Z_{P_w}, Z_{P_{w'}}) = \left(\sum_{j=1}^n C_j X_{jm}, \sum_{j=1}^n C_j W_j, \sum_{j=1}^n C_j W'_j \right) \quad (22)$$

$$\forall P = 1, \dots, p$$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} X_{jm}, \sum_{j=1}^n a_{ij} W_j, \sum_{j=1}^n a_{ij} W'_j \right) \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} (b_{im}, b_{iw}, b_{iw'})$$

$$\forall i = 1, \dots, M$$

$$\tilde{x} = (x_{jm}, w_j, w'_j) \text{ is non-negative } \quad j = 1, \dots, n$$

گام ۳: با توجه به تعریف مربوط به رتبه‌بندی اعداد فازی، مسئله به مدل قطعی ۲۳ تبدیل می‌شود. درواقع، با توجه به این پیش‌فرض که $B < A$ ، اگر $\text{mean } B < \text{mean } A$ و $WB > WA$ ، برای تابع هدف حداکثر کردن، از آنجا که حاصل عبارت Z ، یک عدد فازی از نوع LR است، برای اینکه تا آنجا که ممکن است، این عدد فازی را بزرگ‌تر سازیم، مقدار $\text{mean } Z$ را حداکثر و مقدار WZ را حداقل می‌کنیم. در مورد توابع حداقل‌سازی، برعکس عمل می‌کنیم؛ یعنی برای اینکه تا آنجا که ممکن است عدد فازی Z را حداقل کنیم، مقدار $\text{mean } Z$ را حداقل و مقدار WZ را حداکثر می‌کنیم. در مورد محدودیت‌ها نیز به همین صورت عمل می‌کنیم؛ بنابراین، خواهیم داشت:

$$\max(\min)(Z_{pm}) = \sum_{j=1}^n c_j x_{jm} \quad (23)$$

$$\min(\max)(Z_{pw} + Z_{pw'}) = \sum_{j=1}^n c_j w_j + c_j w'_j \quad \forall P = 1, \dots, p$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jm} \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_{im} \quad \forall i = 1, \dots, M$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (w_j + w'_j) \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} b_{iw} + b_{iw'} \quad \forall i = 1, \dots, M$$

$$x_{jm} - w_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

گام ۴: جواب بهینه P تابع هدف تک‌هدفه را با استفاده از مسئله، محاسبه (\bar{x}_p^*) و سپس مقدار $Z_p^* = (Z_{pm}^*, Z_{pw}^*, Z_{pw'}^*)$ را برای $P = 1, \dots, p$ محاسبه می‌کنیم.

گام ۵: یک مسئله تک‌هدفه جدید همراه با محدودیت‌های قطعی تعریف شده در گام ۳ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\min \sum_{p=1}^P w_p [(Z_{pm}, Z_{pw}, Z_{pw'}) - (Z_{pm}^*, Z_{pw}^*, Z_{pw'}^*)] \quad (24)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jm} \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_{im}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} (w_j + w'_j) \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} b_{iw} + b_{iw'}$$

$$x_{jm} - w_j \geq 0$$

به طوری که w_p که $P = 1, \dots, p$ نشان دهنده وزن تابع هدف P ام است که از سوی تصمیم گیرنده تعیین می شود.

گام ۶: جواب بهینه مدل گام ۶ را می یابیم که جوابی کارا برای مسئله چندهدفه فازی اولیه است.

مثال کاربردی

شرکت مورد بررسی که یکی از گروه های صنعتی فعال در زمینه لوازم جانبی، قطعه ها و اتصالات خودرو در سطح کشور است، در زمینه تولید قطعه های پلیمری و پلاستیکی خودرو، فعال است و محصول های خود را به سفارش شرکت های تأمین کننده در صنعت خودرو (سایکو، ایران لوازم قطعه، مهرکام پارس و سازه گستر و مگاموتور) برای استفاده در مونتاژ خودرو تولید می کند. این شرکت، برای تأمین یکی از قطعه های خود، ۱۰ گزینه (تأمین کننده) دارد و هدف آن، انتخاب ۴ تأمین کننده اصلی از این ۱۰ شرکت، به گونه ای است که زمان تولید و ضایعات آن، حداقل و قابلیت اطمینان در زمان تحویل، حداکثر شود. نکته ای که وجود دارد این است که میزان نیاز شرکت به این قطعه، به صورت دقیق مشخص نیست؛ یعنی حدوداً ۲۴۰،۰۰۰ قطعه در ماه است که بسته به میزان تولید محصول نهایی در هر ماه ممکن است کمتر یا بیشتر از این مقدار باشد. البته تجربه های گذشته نشان داده است که این تولرانس ممکن است به میزان حداکثر ۲۰،۰۰۰ کمتر یا بیشتر از میزان ذکر شده باشد که می توان این میزان تقاضا را با یک تابع توزیع مثلثی به صورت $[۲۰۰،۰۰۰، ۲۰۰،۰۰۰، ۲،۴۰۰،۰۰۰]$ نشان داد. همچنین شرکت مایل است که هزینه متغیر تولید هر قطعه، به طور متوسط حدود ۵/۵ تومان باشد که با توجه به مقدار متغیر تقاضا در هر ماه، میزان کل هزینه متغیر قطعه های دریافت شده نیز دقیق نیست. شرکت مایل است که این هزینه کل، از عدد فازی به صورت $[۱۳،۰۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰]$ - که برحسب ۱۰۰۰ ریال نشان داده شده است - بیشتر نشود. با توجه به غیر دقیق بودن، میزان تقاضا و سقف هزینه متغیر مورد نظر شرکت، اتخاذ یک تصمیم قطعی در مورد میزان قطعه سفارش داده شده به هر تأمین کننده، منطقی به نظر نمی رسد و عملاً غیر ممکن است. از این رو، مدل پیشنهادی در این مسئله، به کار گرفته شده است. داده های مربوط به ۴ عامل زمان تولید، هزینه متغیر، ضایعات به ازای هر یک قطعه و درصد قابلیت اطمینان در زمان تحویل قطعه ها در جدول ۱ داده شده است:

جدول ۱. داده‌های شرکت مورد نظر در شاخص‌های مختلف

شرکت	زمان تولید	هزینه متغیر	ضایعات	قابلیت اطمینان در زمان تحویل
۱	۲۳۹/۱۶	۶/۰۰۹	۰/۳۳۳	۰/۹
۲	۲۸۲/۱۴	۵/۵۷	۰/۱۶۶	۰/۶
۳	۲۲۴	۵/۸۵۳	۰/۱۶۶	۰/۵
۴	۲۲۱/۲۵	۵/۱۵۲	۰/۴۱۶	۰/۹
۵	۲۳۱/۲۵	۵/۹۸۵	۰/۵	۱/۳
۶	۳۳۹/۸	۶/۴۴۴	۰/۷۵	۱
۷	۲۱۷/۵	۵/۰۵	۰/۸۳	۰/۴
۸	۲۱۱/۶۶	۴/۸۹۸	۰/۹۵	۰/۶
۹	۳۳۶/۲۵	۷/۲۸	۰/۵	۰/۹
۱۰	۳۴۸	۷/۳۷	۰/۳۳۳	۰/۶

در این مسئله، تابع هدف اول برای حداقل کردن زمان تولید، تابع هدف دوم برای حداقل کردن ضایعات و تابع هدف سوم برای حداکثر کردن قابلیت اطمینان در زمان تحویل، نوشته شده است. محدودیت اول برای بیشتر شدن کل هزینه متغیر از سقف هزینه مورد نظر شرکت و محدودیت دوم برای برآورده شدن تقاضای شرکت، آورده شده است. محدودیت‌های بعدی برای انتخاب حداقل ۴ شرکت از کل ۱۰ شرکت نوشته شده‌اند. همچنین این محدودیت‌ها تضمین می‌کنند که میزان سفارش‌های هر تأمین‌کننده غیر منفی خواهند بود. متغیرهای تصمیم در این مسئله عبارتند از:

$$y_j = \text{انتخاب کردن یا نکردن شرکت } j \text{ به عنوان تأمین‌کننده شرکت}$$

$$(x_{ij}, w_i, w_j) = \text{میزان سفارش اختصاص داده شده به شرکت } i \text{ در صورت انتخاب شدن}$$

به عنوان تأمین‌کننده شرکت.

مدل برنامه‌ریزی فازی چندهدفه برای مسئله ذکر شده به صورت مدل ۲۵ قابل تعریف است:

(۲۵)

$$\begin{aligned} \text{Min}Z_1 &= 239 / 16(x_{1m}, w_1, w_1) + 282 / 14(x_{rm}, w_r, w_r) + \\ & 224(x_{rm}, w_r, w_r) + 221 / 25(x_{fm}, w_f, w_f) + 231 / 25(x_{dm}, w_d, w_d) + \\ & 339 / 8(x_{fm}, w_f, w_f) + 217 / 5(x_{vm}, w_v, w_v) + 211 / 66(x_{lm}, w_l, w_l) + \\ & 336 / 25(x_{am}, w_a, w_a) + 348(x_{1m}, w_{1.}, w_{1.}) \\ \text{Min}Z_r &= 0 / 333(x_{1m}, w_1, w_1) + 0 / 166(x_{rm}, w_r, w_r) + 0 / 166(x_{rm}, w_r, w_r) + \\ & 0 / 416(x_{fm}, w_f, w_f) + 0 / 5(x_{dm}, w_d, w_d) + 0 / 75(x_{fm}, w_f, w_f) + \\ & 0 / 83(x_{vm}, w_v, w_v) + 0 / 95(x_{lm}, w_l, w_l) + 0 / 5(x_{am}, w_a, w_a) + 0 / 333(x_{1m}, w_{1.}, w_{1.}) \\ \text{Max}Z_r &= 0 / 9(x_{1m}, w_1, w_1) + 0 / 6(x_{rm}, w_r, w_r) + 0 / 5(x_{rm}, w_r, w_r) + \\ & 0 / 9(x_{fm}, w_f, w_f) + 1 / 3(x_{dm}, w_d, w_d) + 1 / 1(x_{fm}, w_f, w_f) + \\ & 0 / 4(x_{vm}, w_v, w_v) + 0 / 6(x_{lm}, w_l, w_l) + 0 / 9(x_{am}, w_a, w_a) + 0 / 6(x_{1m}, w_{1.}, w_{1.}) \\ \text{Subject to:} \\ & 6 / 0.9(x_{1m}, w_1, w_1) + 5 / 57(x_{rm}, w_r, w_r) + 4 / 898(x_{rm}, w_r, w_r) + \\ & 5 / 152(x_{fm}, w_f, w_f) + 5 / 985(x_{dm}, w_d, w_d) + 6 / 444(x_{fm}, w_f, w_f) + \\ & 5 / 0.5(x_{vm}, w_v, w_v) + 5 / 853(x_{lm}, w_l, w_l) + 7 / 28(x_{am}, w_a, w_a) + \\ & 7 / 37(x_{1m}, w_{1.}, w_{1.}) \leq [13 \dots 1000 \dots 1000] \\ & (x_{1m}, w_1, w_1) + (x_{rm}, w_r, w_r) + (x_{rm}, w_r, w_r) + (x_{fm}, w_f, w_f) + (x_{dm}, w_d, w_d) + \\ & (x_{fm}, w_f, w_f) + (x_{vm}, w_v, w_v) + (x_{lm}, w_l, w_l) + (x_{am}, w_a, w_a) + \\ & (x_{1m}, w_{1.}, w_{1.}) \leq [2400 \dots 200 \dots 200] \\ & x_{jm} - w_j \geq 10 y_j \quad j = 1, 2, \dots, 10 \\ & x_{jm} - w_j \leq 2600 y_j \quad j = 1, 2, \dots, 10 \\ & y_1 + y_r + y_f + y_d + y_v + y_l + y_a + y_{1.} \geq 5 \\ & x_{jm} \geq 0 \text{ and integer} \quad w_j \geq 0 \text{ and integer} \quad j = 1, \dots, 10 \\ & y_1, y_r, y_f, y_d, y_v, y_l, y_a, y_{1.} = 0 \text{ or } 1 \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل با تابع هدف اول بدون در نظر گرفتن سایر توابع هدف عبارت است از:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_r &= (111, 11, 11) \quad \tilde{x}_f = (10, 0, 0) \quad \tilde{x}_v = (100, 0, 0) \\ \tilde{x}_l &= (2089, 189, 189) \quad Z_1^* = (510896 / 74, 42467, 74, 42467, 74) \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل با تابع هدف دوم، بدون در نظر گرفتن سایر توابع هدف عبارت است از:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_r &= (1607, 5, 5) \quad \tilde{x}_f = (593, 195, 195) \quad \tilde{x}_v = (100, 0, 0) \quad \tilde{x}_l = (100, 0, 0) \\ Z_r^* &= (691 / 45, 81 / 95, 81 / 95) \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل با تابع هدف سوم، بدون در نظر گرفتن سایر توابع هدف عبارت است از:

$$\tilde{x}_1 = (100, 0, 0) \quad \tilde{x}_r = (1505, 21, 21) \quad \tilde{x}_\delta = (649, 149, 149) \quad \tilde{x}_\lambda = (101, 0, 0) \\ Z_r^* = (2348/8, 425/2, 425/2)$$

تابع تک‌هدفه براساس گام ۵، به صورت مدل ۲۶ تعریف می‌شود:

(۲۶)

$$\begin{aligned} \text{Min}Z = & \{ 239/16(x_{1m}, w_1, w_1) + 282/14(x_{rm}, w_r, w_r) + \\ & 224(x_{rm}, w_r, w_r) + 221/25(x_{fm}, w_f, w_f) + 231/25(x_{\delta m}, w_\delta, w_\delta) + \\ & 339/8(x_{\epsilon m}, w_\epsilon, w_\epsilon) + 217/5(x_{vm}, w_v, w_v) + 211/66(x_{\lambda m}, w_\lambda, w_\lambda) + \\ & 336/25(x_{\alpha m}, w_\alpha, w_\alpha) + 348(x_{1..m}, w_{1..}, w_{1..}) - (51.896/74, 42467, 74, 42467, 74) \} \\ & + 100 \cdot \{ 0/333(x_{1m}, w_1, w_1) + 0/166(x_{rm}, w_r, w_r) + 0/166(x_{rm}, w_r, w_r) + \\ & 0/416(x_{fm}, w_f, w_f) + 0/5(x_{\delta m}, w_\delta, w_\delta) + 0/75(x_{\epsilon m}, w_\epsilon, w_\epsilon) + \\ & 0/83(x_{vm}, w_v, w_v) + 0/95(x_{\lambda m}, w_\lambda, w_\lambda) + 0/5(x_{\alpha m}, w_\alpha, w_\alpha) + \\ & 0/333(x_{1..m}, w_{1..}, w_{1..}) - (691/45, 81/95, 81/95) \} \\ & + 100 \cdot \{ (2348/8, 425/2, 425/2) - 0/9(x_{1m}, w_1, w_1) - \\ & 0/6(x_{rm}, w_r, w_r) - 0/5(x_{rm}, w_r, w_r) - 0/9(x_{fm}, w_f, w_f) - \\ & 1/3(x_{\delta m}, w_\delta, w_\delta) - 1/1(x_{\epsilon m}, w_\epsilon, w_\epsilon) - 0/4(x_{vm}, w_v, w_v) - \\ & 0/6(x_{\lambda m}, w_\lambda, w_\lambda) - 0/9(x_{\alpha m}, w_\alpha, w_\alpha) - 0/6(x_{1..m}, w_{1..}, w_{1..}) \} \end{aligned}$$

که این تابع هدف معادل است با مدل ۲۷:

(۲۷)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \max Z = & 135/66 x_{1m} + 185/14 x_{rm} + 157 x_{rm} + 159/25 x_{fm} + 91/25 x_{\delta m} + \\ & 284/8 x_{\epsilon m} + 512/25 x_{vm} + 506/66 x_{\lambda m} + 316/25 x_{\alpha m} + 334/5 x_{1..m} \\ \min W = & 675/66 w_1 + 545/14 w_r + 457 w_r + 699/25 w_f + 871/25 w_\delta + 384/8 w_\epsilon + \\ & 752/5 w_v + 866/66 w_\lambda + 856/25 w_\alpha + 694/5 w_{1..} \\ \text{s.t:} \\ & 6/009 x_{1m} + 5/57 x_{rm} + 4/898 x_{rm} + 5/152 x_{fm} + 5/985 x_{\delta m} + 6/444 x_{\epsilon m} + \\ & 5/05 x_{vm} + 5/853 x_{\lambda m} + 7/28 x_{\alpha m} + 7/37 x_{1..m} \leq 13000 \\ & 6/009 w_1 + 5/57 w_r + 4/898 w_r + 5/152 w_f + 5/985 w_\delta + 6/444 w_\epsilon + 5/05 w_v + \\ & 5/853 w_\lambda + 7/28 w_\alpha + 7/37 w_{1..} \geq 1000 \\ & x_{1m} + x_{rm} + x_{rm} + x_{fm} + x_{\delta m} + x_{\epsilon m} + x_{vm} + x_{\lambda m} + x_{\alpha m} + x_{1..m} \leq 2400 \\ & w_1 + w_r + w_r + w_f + w_\delta + w_\epsilon + w_v + w_\lambda + w_\alpha + w_{1..} \geq 200 \\ & x_{jm} - w_j \geq 100 y_j \quad j=1, 2, \dots, 10 \\ & x_{jm} - w_j \leq 2600 y_j \quad j=1, 2, \dots, 10 \\ & y_1 + y_r + y_r + y_f + y_\delta + y_\epsilon + y_v + y_\lambda + y_\alpha + y_{1..} \geq 5 \\ & x_{jm} \geq 0 \text{ and integer} \quad w_j \geq 0 \text{ and integer} \quad j=1, \dots, 10 \end{aligned}$$

جواب بهینه مدل عبارت است از:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (100, 0, 0) & \bar{x}_2 &= (100, 0, 0) & \bar{x}_3 &= (1587, 0, 0) & \bar{x}_4 &= (613, 200, 200) \\ \bar{Z}_1^* &= (517.78 / 14, 46250, 46250) & \bar{Z}_2^* &= (10.16 / 592, 100, 100) \\ \bar{Z}_3^* &= (2375 / 2, 260, 260) \end{aligned}$$

جواب بهینه حاصل از حل مدل در حالت قطعی و بدون در نظر گرفتن متغیرهای تصمیم،

به صورت فازی عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 100 & x_2^* &= 100 & x_3^* &= 1587 & x_4^* &= 613 \\ Z_1^* &= (517.78 / 14) & Z_2^* &= (10.16 / 592) & Z_3^* &= (2375 / 2) \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل، اعداد سمت راست و نتیجه حاصل برای متغیرهای تصمیم، لزوماً اعداد فازی مثلثی متقارن نیستند و مدل با توجه به متغیرها و محدودیت‌های نسبتاً زیاد، همچنان شدنی است و نتایج معقولی را به شکلی ساده و با محاسبه‌های نسبتاً اندک و در زمانی کوتاه ارائه کرده است.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فازی و مبتنی بر تئوری امکان، بررسی شده و در نهایت، مدلی برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه، مبتنی بر تئوری امکان با منابع غیر دقیق و متغیرهای تصمیم فازی ارائه شده است؛ با این فرض که با وجود منابع فازی، تعیین تصمیم‌ها به صورت قطعی، غیر منطقی به نظر می‌رسد. از مهم‌ترین مشکل‌های موجود در مدل‌های پیشین این است که بعضی تنها برای اعداد فازی مثبت تعریف شده‌اند، بعضی تنها در صورت متقارن بودن اعداد فازی مثلثی برای پارامترها و متغیرها کاربرد دارند و بعضی قابلیت تعمیم به مسائل با چندین هدف را ندارند. مدل ارائه‌شده در پژوهش حاضر، برای تمامی انواع پارامترها و متغیرهای فازی مثلثی مثبت یا منفی، متقارن یا نامتقارن، یک‌هدفه یا چندهدفه، قابل استفاده است. این مدل در یک مسئله تخصیص خرید به تأمین‌کنندگان به کار گرفته شد و نتایج به دست آمده با نتایج حل مسئله- در حالتی که منابع و متغیرهای تصمیم آن به صورت قطعی در نظر گرفته شوند- مقایسه شد. نکته شایان توجه حاصل از نتایج این مدل این است که مدیران شرکت، با وجود نبود قطعیت منابع می‌دانستند که مقدار سفارش‌های آنها به هر تأمین‌کننده تقریبی است، اما تولرانس قابل قبول تغییرها از جواب بهینه حاصل، از حل مدل قطعی برای آنها مشخص نبود و بنابراین، با حل مدل قطعی، آنها ناگزیر به تحلیل حساسیت مدل بعد از حل مدل بودند، اما مدل پیشنهادی، از همان ابتدا با توجه به فازی در نظر گرفتن متغیرهای تصمیم،

تصمیم‌ها را به صورت فازی، معین و تولرانس بهینه (عرض باند) مشخص کرد؛ بنابراین، به تحلیل حساسیت مدل، بعد از حل نیازی نیست. کاربرد مدل در یک مسئله واقعی نشان داد که محاسبه‌های ریاضی ساده و زمان محاسباتی بسیار اندک، مزیت دیگری است که می‌توان برای آن برشمرد.

تقدیر و تشکر

این پژوهش با استفاده از اعتبارهای شورای پژوهشی دانشگاه تهران به شماره طرح ۰۳/۰۱/۴۳۰۳۰۳۰ انجام شده است.

References

- Allahviranloo, T., Lotfi, F.H., Kiasary, M.K., Kiani, N.A. & Alizadeh, L., (2008). Solving full fuzzy linear programming problem by the ranking function. *Applied Mathematical Science*, 2, 19–32. (In Persian)
- Buckley, J.J. & Feuring, T. (2000). Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 109, 35–53.
- Dehghan, M., Hashemi, B. & Ghatee, M. (2006). Computational methods for solving fully fuzzy linear systems. *Applied Mathematics and Computations*, 179: 328–343. (In Persian)
- Farquhar, P. (1984). Utility assessment methods. *Management Science*, 30: 1283–1300.
- Harker, P. & Vargas, L. (1987). The theory of ratio scale estimations: Saaty's analytic hierarchy process. *Management Science*, 33(11): 1383–1403.
- Hashemi, S.M., Modarres, M., Nasrabadi, E. & Nasrabadi, M. M. (2006). Fully fuzzified linear programming, solution and duality. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 17, 253–261. (In Persian)
- Keeney, R. & Raiffa, H. (1976). *Decision with Multiple Objectives: Preference and Value Trade-off*, John Wiley. New York.
- Kumar, A., Kaur, J. & Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. *Applied Mathematical Modeling*, 35, 817–823.
- Lai, Y. J. & Hwang, C. L. (1992). *Fuzzy Mathematical Programming: methods and applications*, Springer. Berlin.

- Lotfi, F. H., Allahviranloo, T., Jondabeha, M. A. & Alizadeh, L. (2009). Solving a fully fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution. *Applied Mathematical Modeling*, 33, 3151–3156. (In Persian)
- Mahdavi Amiri, N. & Nasser, S. H. (2007). Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 158: 1961 – 1978. (In Persian)
- Maleki, H. R., Tata, M. & Mashinchi, M. (2000). Linear programming with fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 109: 21–33. (In Persian)
- Menhaj, M. B., (2007). Fuzzy Computations. *Daneshnegar Publication*, Tehran, 324–329. (In Persian)
- Saaty, T. (1986). Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process. *Management Science*, 32(7): 841–855.
- Shafer, G. A. (1976). *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press.
- Steuer, R. (1986). *Multiple criteria optimization: Theory, Computation and Applications*, John Wiley. New York.
- Tanaka, H., Guo, P. & Zimmermann, H.J. (2000). Possibility distributions of fuzzy decision variables obtained from possibilistic linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 113: 323-332.
- Tanaka, H., Okuda, T. & Asai, K. (1973). On fuzzy mathematical programming. *Journal of Cybernetics Systems*, 3: 37–46.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8: 338–353.
- Zimmermann, H.J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 1: 45–55.