

روش AHP/DEA تقاطعی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده

محمد رضا علیرضایی^۱، سید علی رخشان^۲، محمدرضا رفیعی ثانی^۳

چکیده: تمامی مدل‌های پایه در تحلیل پوششی داده‌ها، واحدهای تصمیم‌گیرنده را به دو دسته کارا و ناکارا بخش می‌کنند و هیچ تفکیکی برای واحدهای کارا قائل نمی‌شوند. در فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی نیز با وجود ارائه‌ی یک رتبه‌بندی کامل از واحدها، فرآیند تشکیل ماتریس مقایسات زوجی بر اساس نظرات خبرگان بوده که این نظرات باعث ایجاد خطا و ناسازگاری ماتریس‌های حاصل می‌شود. در این نوشتار ابتدا یک روش ترکیبی موسوم به روش AHP/DEA تقاطعی برای رتبه‌بندی واحدها پیشنهاد شده است که ضمن استفاده از نقاط قوت هر دو دیدگاه، تحلیل پوششی داده‌ها و فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی در ارائه‌ی یک رتبه‌بندی منطقی از واحدها، مشکلات روش‌های پیشین انجام گرفته در این زمینه را تا حد قابل توجهی پوشش می‌دهد. سپس ویژگی‌ها و مزایای روش پیشنهادی با سایر روش‌ها مقایسه خواهد شد. در نهایت برای مقایسه بهتر چندین مثال عددی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی، روش AHP/DEA تقاطعی، رتبه‌بندی.

۱. استادیار دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

۳. دانشجوی دکترای ریاضی کاربردی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۰۲/۲۱

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۰/۰۹/۲۷

نویسنده مسئول مقاله: سید علی رخشان

E-mail: Ali_rakhshan@mathdep.iust.ac.ir

مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA^۱) و فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP^۲) ابزارهایی هستند که امروزه کاربردهای فراوانی در زمینه‌های کنترل، مدیریت و تصمیم‌گیری پیدا کرده‌اند [۱۳]. در حالی که این دو مفهوم به‌طور جداگانه توسعه یافته‌اند، اما تحقیقات در دهه‌های اخیر نشان می‌دهد که این مفاهیم می‌توانند در کاربردهای واقعی ترکیب شده و بنابراین از مزایای یکدیگر بهره‌مند شوند [۶]. رتبه‌بندی در روش فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP) و DEA به‌گونه‌ای متفاوت رقم می‌خورد. با این حال هر یک از این دو دیدگاه در مقوله رتبه‌بندی دارای نقاط ضعف و قوت مخصوص به خود هستند [۱۰]. رتبه‌بندی در AHP بر اساس ارزیابی موضوعی از یک مجموعه‌ی متناوب با چندین معیار سازمان یافته در ساختار سلسله‌مراتبی است و در DEA هر واحد تصمیم‌گیری (DMU)^۳ بر اساس چندین ورودی و خروجی ارزیابی شده و به دو گروه کارا و ناکارا تقسیم می‌شود. برای رتبه‌بندی واحدهای کارا در DEA روش‌های مختلفی ارائه شده است. برای نمونه، روش کارایی تقاطعی که برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده پیشنهاد شد [۲][۱۱]، روشی ارائه داد که به روش ابرکارایی برای رتبه‌بندی واحدها معروف شد. فریدمن و سنیونی استرن از تحلیل همبستگی متعارفی (CCA/DEA)^۴ برای رتبه‌بندی واحدها بر اساس وزن‌های مشترک استفاده می‌کنند [۵]. جهان‌شاه‌لو و همکاران یک سیستم رتبه‌بندی برای واحدهای کارایی DEA بر اساس تأثیرات آنها روی واحدهای ناکارای DEA انجام می‌دهند [۹]. سنیونی استرن یک روش ترکیبی AHP/DEA برای رتبه‌بندی واحدها ارائه می‌دهد. این روش با وجودی که ایده‌ی جدیدی در ترکیب AHP و DEA بود، خود دارای مشکلاتی بود [۱۲].

مهم‌ترین مشکل روش AHP/DEA ارائه شده این است که رتبه‌بندی آن با رتبه‌بندی DEA در حالت چند ورودی و چند خروجی ناسازگار است و ممکن است یک واحد ناکارا در رتبه‌ای بالاتر از یک واحد کارا قرار گیرد. مشکل دیگر این روش قدرت تفکیک‌پذیری ضعیف آن در حالت چند ورودی - چند خروجی است، به‌خصوص هنگامی که تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها زیاد باشد. مشکل سوم این روش نیز آنست که هر جفت از واحدها با چندین ورودی و خروجی در یک مدل DEA مقایسه می‌شوند که این در ادبیات DEA مطلوب نیست [۱]. یکی از علت‌های اصلی ایجاد چنین مشکلاتی این است که اگر n واحد تصمیم‌گیری که هر کدام دارای m ورودی و s خروجی باشد، آنگاه برای اجرای مدل‌های پایه‌ای DEA باید داشته باشیم:

-
1. Data Envelopment Analysis
 2. The Analytical Hierarchy Process
 3. Decision Making Unit
 4. Common Correlation Analysis/DEA

به وجود می‌آید. $n \geq \max \{m \times s, 3(m+s)\}$ در غیر اینصورت مشکلاتی نظیر مشکلات اشاره شده در بالا

مشکلات روش فوق به‌دست علی‌رضایی و همکاران بر طرف شد [۱]. در واقع در روش AHP/DEA بهبود یافته‌ی پیشنهادی آنان با تغییر گام اول فرآیند انجام گرفته در روش AHP/DEA سه مشکل اساسی بیان شده رفع شد. با این حال روش پیشنهادی آنان از حیث محاسباتی می‌تواند مورد نقد واقع شود؛ زیرا که برای رتبه‌بندی N واحد نیاز به حل $N(N-1) + N$ بار مسئله LP است. در این پژوهش روش AHP/DEA تقاطعی برای رتبه‌بندی واحدها پیشنهاد شده است که ضمن داشتن یک روند منطقی و بهره‌گیری از نقاط قوت AHP و DEA و پوشاندن مشکلات روش AHP/DEA، از لحاظ محاسباتی بسیار ساده‌تر از روش AHP/DEA بهبود یافته است، به طوری که برای رتبه‌بندی N واحد، تنها به حل N مسئله LP نیاز است. در ادامه ضمن تشریح ویژگی‌ها و مزایای روش پیشنهادی با چند مثال عددی امکان مقایسه بهتر روش‌ها را فراهم شده است.

این نوشتار بدین ترتیب تدوین شده است. ابتدا در بخش ادبیات پژوهش، شرح کوتاهی از رتبه‌بندی در AHP و DEA بیان شده و روش‌های AHP/DEA و AHP/DEA بهبود یافته مرور شده است. روش AHP/DEA تقاطعی برای رتبه‌بندی واحدها در بخش روش پژوهش پیشنهاد شده است و در بخش یافته‌های پژوهش با مثال‌هایی عددی، روش تقاطعی با تعدادی از روش‌های رتبه‌بندی، از جمله روش‌های ترکیبی AHP/DEA مقایسه شده است و در پایان نیز یک نتیجه‌گیری آنچه بیان شد، آمده است.

ادبیات پژوهش

رتبه‌بندی در DEA و AHP

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش ناپارامتریک است که با فرض اصول موضوعه تولید، به ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) که هر یک دارای چندین ورودی و چندین خروجی می‌باشند، می‌پردازد. مدل‌های DEA تمام واحدها را به دو دسته کارا و ناکارا تقسیم می‌کند به طوری که واحدهای کارا مقدار کارایی یک و واحدهای ناکارا دارای مقدار کارایی کمتر از یک هستند. تحلیل پوششی داده‌ها یک روش جبرانی است که در آن هر واحد مجموعه‌ای از وزن‌های بهینه به‌گونه‌ای حاصل می‌شود که واحد تحت بررسی بیشترین کارایی را در مقایسه با سایر واحدهای رقیب به‌دست آورد [۴].

فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی نیز یکی از کارآمدترین روش‌های تصمیم‌گیری است که اولین بار توسط توماس ال ساعتی در سال ۱۹۸۰ مطرح شد. AHP بر اساس مقایسه‌های زوجی بنا شده و امکان بررسی سناریوهای مختلف را به مدیران می‌دهد.

سنگ بنای فرآیند ساختار سلسله‌مراتبی، مقایسه زوجی است. این روش به ما این امکان را می‌دهد که مسائل کیفی را که واحدی برای اندازه‌گیری آنها وجود ندارد، ارزیابی کرده و بتوانیم آنها را با مسائل کمی مقایسه و ترکیب کنیم. این مقایسات ماتریسی تشکیل می‌دهند که درایه‌های این ماتریس از مقایسه‌ی عنصر هر سطر با عناصر ستون‌ها به دست می‌آید. برای مثال درایه نشان می‌دهد که عنصر اول چند برابر عنصر دوم ارزش دارد.

کارشناسان با استفاده از یک سری پرسش‌هایی که در رابطه با هدف مورد نظر از مدیران می‌پرسند، ماتریس مقایسه زوجی را تکمیل می‌کنند. در واقع فرآیند سلسله‌مراتبی ساماندهی ذهن مدیران در قالب یک سری ضرایب است و بنابراین از دید ریاضی‌دانان مهم‌ترین مشکل روش AHP آن است که رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده حاصل دخالت مستقیم انسان است چون نظر یک انسان از هیچ منطق محکمی پیروی نمی‌کند و بنابراین احتمال خطا در آن بسیار زیاد است.

روش‌های AHP/DEA برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده

روش AHP/DEA ارائه شده‌ی سینوانی استرن و همکاران

یکی از روش‌های موجود برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده، روش AHP/DEA است که توسط سینوانی استرن و همکاران در سال ۲۰۰۰ مطرح شد [۱۲]. مراحل این رتبه‌بندی به صورت زیر است.

گام اول: تولید ماتریس مقایسه‌ی زوجی با استفاده از DEA

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده داشته باشیم که هر کدام دارای m ورودی و s خروجی باشد. فرض کنید x_{ip} ورودی i ام واحد p که $p \in \{1, \dots, n\}$ و y_{rp} خروجی r ام واحد p باشد. بنابراین نقطه $(X_p, Y_p) = (x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{mp}, y_{1p}, y_{2p}, \dots, y_{sp})$ نمایش واحد p در فضای مجموعه امکان تولید است. در این روش از مدل CCR مضربی استفاده می‌شود تا به ازای هر دو واحد A و B ، دو پارامتر E_{AA} و E_{BA} به صورت زیر تولید شود:

$$E_{AA}: \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rA} \quad (\text{رابطه‌ی ۱})$$

$$\begin{aligned}
 s. t \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{iA} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rA} \leq 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rA} - \sum_{i=1}^m v_i x_{iA} \leq 0 \\
 & u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \\
 & v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{BA}: \max \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rB} \\
 s. t \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{iB} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rB} \leq 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rB} - E_{AA} \sum_{i=1}^m v_i x_{iB} = 0 \\
 & u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \\
 & v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

رابطه‌ی (۲)

به‌طور مشابه می‌توان E_{AB} و E_{BB} را محاسبه کرد. بعد از محاسبه‌ی این مقادیر، برای هر جفت واحد i و j مقدار a_{ij} در ماتریس مقایسات زوجی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$a_{ij} = \frac{E_{ii} + E_{ij}}{E_{jj} + E_{ji}}, \quad a_{ii} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{رابطه‌ی (۳)}$$

گام دوم: محاسبه‌ی وزن‌های واحدها توسط AHP

در این مرحله برای ماتریس مقایسات زوجی به‌دست آمده در مرحله اول، بردار وزن‌های مربوطه را به کمک مقدار ویژه ماکزیمم محاسبه کرده و براساس این وزن‌ها، واحدهای تصمیم‌گیرنده را رتبه‌بندی می‌کنند.

روش AHP/DEA بهبود یافته برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده

در این روش که علی‌رضایی و همکاران آن را انجام داده‌اند، گام اول روش AHP/DEA به صورت زیر اصلاح شده و گام دوم به طور کاملاً مشابه انجام می‌گیرد [۱].
مفروضات بخش‌های قبل را برای واحدها در نظر بگیرید. در این روش ابتدا از طریق مدل CCR با ماهیت ورودی، کارایی هر یک از واحدها محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & CCR: \min \theta_o \\
 & s. t \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_o x_{io} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

(رابطه‌ی ۴)

سپس n فضای امکان تولید $T_k (k = 1, \dots, n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
 T_k = \{ (X, Y) \mid \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j X_j \leq X, \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j Y_j \geq Y, \lambda_j \geq 0 \\
 j = \{1, \dots, n\}
 \end{aligned}$$

(رابطه‌ی ۵)

در واقع T_k ، فضای امکان تولید پس از حذف واحد k ام از مجموعه‌ی مشاهدات است. سپس در یک فرآیند n مرحله‌ای، کارایی واحدها در هر یک از فضاهای امکان تولید فوق، محاسبه می‌شود. به گفته‌ی دیگر، در مرحله k ام، واحد k ام حذف شده و کارایی دیگر واحدها به کمک رابطه‌ی (۶) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
 & \min \theta_o \\
 & s. t \quad \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_o x_{io} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \quad \quad \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

(رابطه‌ی ۶)

اگر TE_k^i کارایی واحد i ام پس از حذف واحد k ام تعریف شود، آنگاه نتایج محاسبات را می‌توان در جدولی مانند جدول (۱) نشان داد.

جدول ۱. کارایی‌ها پس از حذف واحد k ام ($k = 1, 2, \dots, n$)

DMUs	۱	۲	۳	...	N
۱	*	TE_1^2	TE_1^3	...	TE_1^n
۲	TE_2^1	*	TE_2^2	...	TE_2^n
۳	TE_3^1	TE_3^2	*	...	TE_3^n
...
n	TE_n^1	TE_n^2	TE_n^3	...	*

پس از تنظیم جدول (۱)، میزان ترجیح واحد i ام به واحد j ام در ماتریس مقایسات زوجی از رابطه‌ی (۷) به دست می‌آید.

$$a_{ij} = \frac{TE_i^j + \{TE_i^j - TE_j^i\}}{TE_j^i + \{TE_j^i - TE_i^j\}} \quad \text{رابطه‌ی (۷)}$$

$$i, j = 1, \dots, n, \quad a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

که در آن TE^i و TE^j کارایی‌های واحدهای i و j حاصل از رابطه‌ی شماره‌ی ۴ است و $\{TE_i^j - TE_j^i\}$ میزان تأثیر واحد i ام بر واحد j ام است. در واقع، ترجیح واحد i به واحد j برابر نسبت‌های کارایی و میزان تأثیرگذاری واحدهای i و j بر یکدیگر است.

روش پژوهش

روش AHP/DEA تقاطعی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده

در این بخش ما ابتدا روش رتبه‌بندی AHP/DEA تقاطعی را ارائه می‌دهیم و سپس به تشریح ویژگی‌ها و مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های موجود می‌پردازیم.

با فرضیه‌های بخش‌های پیش برای واحدهای تصمیم‌گیرنده، روش AHP/DEA تقاطعی همان دو گام انجام شده در روش‌های قبل را پیش گرفته با این تفاوت که در این روش گام اول و ساخت جدول مقایسات زوجی به سبکی متفاوت با روش‌های قبل انجام می‌گیرد.

گام اول: تولید ماتریس مقایسه زوجی با استفاده از DEA

در این روش ابتدا تمامی واحدها توسط مدل مضربی CCR به صورت رابطه شماره ۸ ارزیابی شده و وزن‌های بهینه از این مدل استخراج می‌شود.

$$CCR: \max \quad \theta = \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}$$

$$s. t \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{رابطه ۸})$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

حال با استفاده از ضرایب بهین به دست آورده از مدل CCR برای هر واحد تصمیم گیرنده، مقدار θ_k^t را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta_k^t = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk}^* y_{rt}}{\sum_{i=1}^m v_{ik}^* x_{it}} \quad (\text{رابطه ۹})$$

که در آن u_{rk}^* و v_{ik}^* به ترتیب وزن‌های بهینه خروجی و ورودی برای واحد k ام به کمک مدل (۸) است. به عبارت دیگر θ_k^t مقدار کارایی واحد t ام به کمک وزن‌های بهینه واحد k ام است. با انجام فرآیند فوق برای هر دو زوج واحدهای تحت بررسی ماتریس تقاطعی زیر را خواهیم داشت.

جدول ۲. ماتریس تقاطعی

θ_1^1	θ_2^1	...	θ_n^1
θ_1^2	θ_2^2	θ_n^2
...
θ_1^n	θ_2^n	...	θ_n^n

پس از محاسبه‌ی ماتریس تقاطعی فوق، مقادیر ماتریس مقایسات زوجی به صورت رابطه‌ی شماره‌ی ۱۰ محاسبه می‌شود.

$$a_{ij} = \frac{\theta_i^i + \theta_j^j}{\theta_j^j + \theta_i^i} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \quad \text{رابطه ی ۱۰}$$

با توجه به رابطه (۱۰) ماتریس مقایسه زوجی $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را تولید می‌کنیم که در عناصر آن مقادیر θ_i^i و θ_j^j کارایی‌های حاصل از رابطه‌ی (۸) برای واحدهای i و j است. با توجه به رابطه شماره (۱۰)، فرض کنید واحد i ام کارا و واحد j ام ناکارا باشد. از آنجایی که $\theta_i^i = 1$ در صورت کسر قرار دارد و همچنین با توجه به تعریف کارایی تقاطعی روابط $\theta_i^i > \theta_j^j, \theta_i^i \geq \theta_j^j, \theta_i^i \geq \theta_j^j$ را داریم. بنابراین با توجه به تعریف a_{ij} در رابطه شماره (۱۰) داریم: $a_{ij} > 1$ که این نشان دهنده‌ی برتری واحد i ام نسبت به واحد j ام است.

گام دوم: محاسبه وزن‌های واحدها توسط AHP

در این مرحله برای ماتریس مقایسات زوجی به‌دست آمده در مرحله اول، بردار وزن‌های مربوطه را به کمک مقدار ویژه ماکزیمم (λ_{max}) محاسبه کرده و براساس این وزن‌ها، واحدهای تصمیم‌گیرنده را رتبه‌بندی می‌کنند.

نقش ضرایب (U, V) در کارایی واحدها و روش پیشنهادی این مقاله در حالت خاص

در این بخش به تشریح نقش وزن‌های (u, v) در کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌پردازیم. برای درک بهتر مطلب مثال زیر با دو ورودی و یک خروجی را در نظر بگیرید [۳].

جدول ۳. واحدهای تصمیم‌گیرنده با دو ورودی و یک خروجی

واحد F	واحد E	واحد D	واحد C	واحد B	واحد A	واحدها
۱۰	۲	۴	۸	۷	۴	ورودی ۱
۱	۴	۲	۱	۳	۳	ورودی ۲
۱	۱	۱	۱	۱	۱	خروجی ۱

مدل CCR این داده‌ها به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} CCR: \quad & \max \theta = uy_p \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^2 v_i x_{ip} = 1 \\ & uy_j \leq v_1 x_{1p} + v_2 x_{2p} \quad j = 1, \dots, 6 \\ & u \geq 0, v_1, v_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \text{رابطه ی ۱۱}$$

فرض کنید می‌خواهیم کارایی واحد A را محاسبه کنیم بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
 & CCR: \max \theta = u \\
 & s. t \quad 4v_1 + 3v_2 = 1 \\
 & u \leq 4v_1 + 3v_2 \quad (A) \\
 & u \leq 7v_1 + 3v_2 \quad (B) \\
 & u \leq 8v_1 + v_2 \quad (C) \\
 & u \leq 4v_1 + 2v_2 \quad (D) \\
 & u \leq 2v_1 + 4v_2 \quad (E) \\
 & u \leq 10v_1 + v_2 \quad (F) \\
 & u \geq \varepsilon, v_1, v_2 \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

رابطه‌ی (۱۲)

از آنجایی که u مثبت است داریم:

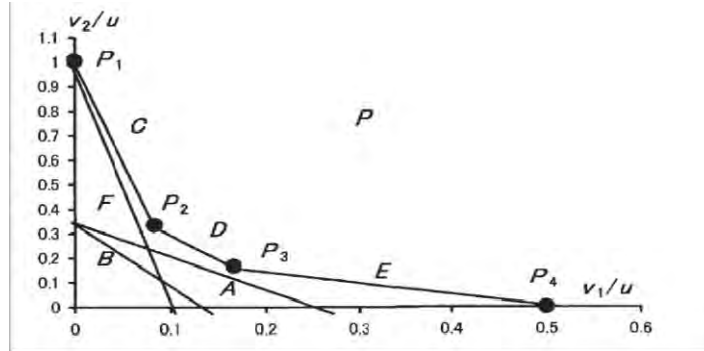
$$\begin{aligned}
 & CCR: \max \theta = u \\
 & s. t \quad 4v_1 + 3v_2 = 1 \\
 & 1 \leq 4\frac{v_1}{u} + 3\frac{v_2}{u} \quad (A) \\
 & 1 \leq 7\frac{v_1}{u} + 3\frac{v_2}{u} \quad (B) \\
 & 1 \leq 8\frac{v_1}{u} + \frac{v_2}{u} \quad (C) \\
 & 1 \leq 4\frac{v_1}{u} + 2\frac{v_2}{u} \quad (D) \\
 & 1 \leq 2\frac{v_1}{u} + 4\frac{v_2}{u} \quad (E) \\
 & 1 \leq 10\frac{v_1}{u} + \frac{v_2}{u} \quad (F) \\
 & u \geq \varepsilon, v_1, v_2 \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

رابطه‌ی (۱۳)

معادله $4v_1 + 3v_2 = 1$ در نظر بگیرید. با تقسیم این معادله بر u مسئله ماکزیم‌سازی u را به مسئله مینیم‌سازی $\frac{1}{u}$ تبدیل می‌کنیم.

$$4\frac{v_1}{u} + 3\frac{v_2}{u} = \frac{1}{u} \quad \text{رابطه‌ی (۱۴)}$$

در شکل زیر ناحیه p ، ناحیه شدنی مثال بالا در فضای دو بعدی را نشان می‌دهد. مرز ناحیه p شامل سه پاره‌خط و محورهاست. پاره‌خط نظیر واحدهای کارای E ، D و C است.



شکل ۱. ناحیه P

بنابراین مسئله تبدیل به تعیین مینیمم t که به ازای آن خط زیر، ناحیه p را قطع می‌کند.

$$4 \frac{v_1}{u} + 3 \frac{v_2}{u} = t \quad \text{رابطه‌ی ۱۵}$$

هر (v_1, v_2) روی پاره‌خط (p_1, p_2) و (p_2, p_3) و (p_3, p_4) به ترتیب وزن‌های بهین D, C و E است. بنابراین وزن‌های بهین واحدهای کارا منحصربه‌فرد نیستند، پس هر نقطه روی مرز ناحیه p یک وزن بهینه برای واحدهای کارا شمرده می‌شود.

با استفاده از مطالب بالا می‌توان به طور مشابه این حالت را به حالت چند ورودی و چند خروجی تعمیم دهیم، که در این حالت‌ها با ابر صفحه‌ها سروکار داریم. حال با توجه به مباحث بالا می‌توانیم برای AHP/DEA تقاطعی قضیه زیر را ثابت کنیم. واقع این قضیه جمع بندی مطالب گذشته است.

قضیه ۱: اگر واحد i ام کارا و واحد j ام ناکارا باشد w_i و w_j وزن‌های مربوط به واحد i ام و واحد j ام باشند که با استفاده از روش بهبود یافته به دست آمده‌اند. آنگاه داریم: $w_i > w_j$

اثبات: کافی است نشان دهیم که در ماتریس مقایسه زوجی داریم:

$$a_{ik} \geq a_{jk} \quad k = 1, \dots, n$$

حتی می‌توان این شرط را محدودتر کرد به صورت زیر:

$$a_{ij} \geq a_{jj} = 1$$

با نشان دادن شرط محدود شده بالا حکم قضیه ثابت می‌شود.

با توجه به رابطه شماره (۱۰)، فرض کنید واحد i ام کارا و واحد j ام ناکارا باشد. از آنجایی که $\theta_i^i = 1$ در صورت کسر قرار دارد و همچنین با توجه به تعریف کارایی تقاطعی روابط $\theta_i^i > \theta_j^j$

$\theta_j^i \geq \theta_j^j, \theta_i^i \geq \theta_j^i$ را داریم. بنابراین با توجه به تعریف a_{ij} در رابطه شماره (۱۰) داریم: $a_{ij} \geq 1$ ، که این نشان دهنده برتری واحد i ام نسبت به واحد j ام است. همچنین می توان برای نشان دادن $a_{ij} \geq 1$ از بحث های بخش قبل استفاده می کنیم. از آنجایی که ضرایب بهین (u, v) برای واحدهای کارا منحصر به فرد نیست، ما می توانیم ضرایب بهینی را برای واحد i ام انتخاب کنیم، به طوری که علاوه بر برقراری روابط $\theta_j^i > \theta_j^j, \theta_i^i \geq \theta_j^i, \theta_j^i \geq \theta_i^i$ همچنین داشته باشیم: $\theta_j^i \geq \theta_j^j$. در این صورت $a_{ij} \geq 1$ برقرار می شود.

در واقع در قضیه بالا ما به یک رتبه بندی ساختاری تکیه می کنیم. ما با استفاده از اینکه ضرایب بهین برای واحدهای تصمیم گیری منحصر به فرد نیستند، می توانیم یک روش رتبه بندی متکی بر این ساختار ارائه دهیم. با این کار ما مشکل جواب های دگرین که در روش کارایی تقاطعی بود را رفع کردیم، به این صورت که ما مجاز به استفاده از همه ی ضرایب (u, v) نیستیم به طوری که استفاده از ضرایب غیر مجاز رتبه بندی اشتباه می دهد.

یافته های پژوهش

ویژگی ها و مزایای روش AHP/DEA تقاطعی

۱. اساس رتبه بندی حاصل از روش AHP/DEA تقاطعی بر اساس تمرکز واحدهای ناکارا در اطراف واحدهای کاراست که اساس رتبه بندی تقاطعی^۱ است، با این تفاوت که در رتبه بندی تقاطعی از آنجایی که مشکل جواب های دگرین وجود دارد، ممکن است واحدهای کارا در رتبه ای پایین تر از واحدهای ناکارا قرار بگیرند، حال آنکه این مشکل در روش AHP/DEA تقاطعی با توجه به قضیه ۱ رفع شده است.

۲. در مقایسه با روش AHP/DEA ارائه شده ی سینوانی استرن و همکاران، روش AHP/DEA تقاطعی سه مشکلی که علی رضایی و همکاران به آن اشاره کرده اند را نیز برطرف می کند [۱]. در واقع، روش پیشنهادی دارای قدرت تفکیک پذیری بهتری نسبت به روش AHP/DEA است ضمن آنکه رتبه بندی کارا - ناکارای DEA را نیز تغییر نمی دهد و در فرآیند رتبه بندی از وجود تمامی واحدهای تصمیم گیرنده استفاده می کند.

۳. هر چند معایب مطرح شده بر روش AHP/DEA، در پژوهش علی رضایی و همکاران نیز برطرف شده است، با این حال فرآیند انجام گرفته در این مطالعه از دیدگاه محاسباتی مورد انتقاد است [۱]. در واقع در این روش اگر n واحد داشته باشیم، به تعداد $n(n-1) + n$ مرتبه

1. Cross Efficiency

بایستی مسئله LP حل شود تا بتوان واحدها را رتبه‌بندی کرد. حال آنکه در روش AHP/DEA تقاطعی تنها n مسئله LP نیاز است تا ماتریس تقاطعی را تشکیل داده و واحدها را رتبه‌بندی کنیم، اما از آنجایی که اساس رتبه‌بندی روش AHP/DEA بهبود یافته برپایه‌ی تأثیر حذف واحدهای کارا از فضای امکان تولید بر سایر واحدها است، ولی اساس رتبه‌بندی AHP/DEA تقاطعی برپایه‌ی تمرکز واحدهای ناکارا در اطراف واحدهای کارا است، از این رو دارای رتبه‌بندی متفاوت هستند.

۴. فرآیند انجام گرفته در روش AHP/DEA تقاطعی برای تشکیل ماتریس مقایسات زوجی به‌گونه‌ای است که اغلب ماتریس تشکیل شده دارای شاخص ناسازگاری کوچکتری نسبت به ماتریس تولید شده در دو روش ارائه شده است که توضیحات بیشتر را در مثال‌ها خواهید دید. بنابراین از دید روش فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی روشی که در آن منجر به تولید ماتریس مقایسه زوجی با ناسازگاری کوچکتر می‌شود، روش بهتریست.

مثال‌های عددی:

در این بخش چندین مثال آورده شده است که در آنها به ارائه‌ی روش AHP/DEA تقاطعی پرداخته و نتایج حاصل از آن با سایر روش‌های رتبه‌بندی مقایسه می‌شود.

مثال ۱. در این مثال به رتبه‌بندی ۵ واحد تصمیم‌گیرنده با ۳ ورودی و ۳ خروجی پرداخته^۱ و نتایج حاصل از روش AHP/DEA تقاطعی را با نتایج حاصل از دو روش ارائه شده در بخش ۳ مقایسه می‌کنیم.

همان‌طور که در جدول (۵) ملاحظه می‌کنید، روش AHP/DEA برای همه‌ی واحدها رتبه‌ی ۱ را نتیجه می‌دهد که نشان از قدرت تفکیک‌پذیری ضعیف این روش دارد. هر دو روش AHP/DEA بهبود یافته و AHP/DEA تقاطعی رتبه‌بندی کامل و البته سازگار با رتبه‌بندی کارا - ناکارای CCR ارائه می‌دهند، با این حال رتبه‌بندی واحدهای کارا در دو روش با توجه به اساس رتبه‌بندی آنها متفاوت است. در این مثال خاص هر دو روش AHP/DEA تقاطعی و بهبود یافته دارای نرخ ناسازگاری برابر $0/0000892$ است. اما با توجه به جدول (۵) مشاهده می‌کنید که این دو روش رتبه‌بندی متفاوتی دارند. این تفاوت را می‌توان با توجه به اساس رتبه‌بندی آنها که در قسمت‌های قبلی به آن اشاره شد، توجیح کرد. نکته‌ی قابل ذکر دیگر زمان انجام محاسبات است که بر این اساس روش AHP/DEA تقاطعی زمان بسیار کمتری نسبت به روش AHP/DEA بهبود یافته برای رتبه‌بندی به خود اختصاص داده است.

۱. داده‌های مثال ۱ از علیرضایی و رفیعی ثانی، ۱۳۸۹.

جدول ۴. داده‌های مثال ۲

واحد ۵	واحد ۴	واحد ۳	واحد ۲	واحد ۱	
۴/۶	۴	۴/۴	۵/۵	۴/۹	ورودی ۱
۲	۱	۱/۷	۲/۳	۲	ورودی ۲
۱۹۰۰	۱۸۰۰	۲۰۰۰	۲۱۰۰	۱۵۰۰	ورودی ۳
۲۰۰۰۰	۲۰۰۰۰	۲۱۰۰۰	۱۸۰۰۰	۲۰۰۰۰	خروجی ۱
۷	۸	۷	۸	۵	خروجی ۲
۸	۵	۷	۸	۹	خروجی ۳
۱	۱	۱	۰/۹۵	۱	کارایی

جدول ۵. $(\epsilon = 0/0001, \lambda_{max} = 0/0004)$

واحد ۵	واحد ۴	واحد ۳	واحد ۲	واحد ۱	
۳	۱	۴	۵	۲	AHP/DEA بهبود یافته
۱	۱	۱	۱	۱	AHP/DEA
۴	۲	۳	۵	۱	AHP/DEA تقاطعی

مثال ۲. در این روش به رتبه‌بندی ۶ واحد همراه با ۲ ورودی و ۲ خروجی [۷] با استفاده از روش AHP/DEA تقاطعی پرداخته و نتایج را با نتایج ۱۰ روش دیگر رتبه‌بندی مقایسه می‌کنیم. علاوه بر مقایسه روش AHP/DEA تقاطعی با روش‌های ترکیبی که در مثال ۱ نشان داده شد، یکی از اهداف این مقاله مقایسه روش AHP/DEA تقاطعی با سایر روش‌های رتبه‌بندی موجود است تا برتری روش پیشنهادی این مقاله در قالب مثال به نمایش گذاشته شود. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید اکثر این روش‌ها با رتبه‌بندی DEA ناسازگارند. در این مثال تنها روش ابرکارایی^۱ رتبه‌بندی منطقی دارد که این روش نیز در برخی از حالات نشدنی می‌شود و نتایج لازم را نتیجه نمی‌دهد.

جدول ۶. داده‌های مثال ۳

واحد ۶	واحد ۵	واحد ۴	واحد ۳	واحد ۲	واحد ۱	
۲/۲	۲/۵	۵/۲	۳/۲	۴	۱/۵	ورودی ۱
۰/۷	۱/۲	۲	۱/۲	۰/۷	۰/۲	ورودی ۲
۱/۴	۱/۹	۲/۸	۴/۲	۱/۴	۱/۴	خروجی ۱
۱/۵	۲/۵	۴/۲	۱/۰۵	۲/۱	۰/۳۵	خروجی ۲
۰/۸۷	۰/۹۸	۱	۱	۱	۱	کارایی

1. super efficiency

جدول ۷. $(\varepsilon = +/0001, \lambda_{max} = 6/012)$

رتبه‌بندی						
واحد ۶	واحد ۵	واحد ۴	واحد ۳	واحد ۲	واحد ۱	
۶	۴	۳	۲	۵	۱	Model(8) rank
۶	۵	۱	۱	۱	۱	CCR
۶	۵	۱	۱	۱	۱	Additive
۶	۱	۱	۱	۱	۱	BCC
۶	۵	۴	۳	۲	۱	Super - efficiency
۶	۵	۴	۳	۲	۱	Statistical-based model (CCA)
۶	۴	۳	۲	۵	۱	Statistical-based model (DR/DEA)
۶	۴	۲	۵	۲	۱	Cross-efficiency – aggressive
۶	۳	۱	۵	۴	۱	Cross-efficiency – benevolent
۶	۳	۱	۵	۴	۱	Liang et al.'s model
۶	۵	۳	۴	۲	۱	AHP\DEA تقاطعی

مثال ۳. در این مثال به رتبه‌بندی ۳ واحد همراه با ۲ ورودی و ۲ خروجی با استفاده از ۳ روش AP و MAJ و AHP/DEA بهبود یافته می‌پردازیم [۷]. هدف از این مثال نشان دادن قدرت تفکیک‌پذیری روش AHP/DEA تقاطعی نسبت به روش‌های MAJ و AP است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، مثالی در اینجا معرفی شده که دو روش MAJ و AP جواب نشدنی برای یک واحد را ارائه می‌دهد اما روش AHP/DEA تقاطعی دارای رتبه‌بندی سازگار با CCR است. همان‌طور که در جدول (۹) ملاحظه می‌فرمایید، هر دو واحد ۱ و ۳ دارای خروجی صفر هستند، بنابراین منطقی است که رتبه پایین‌تری داشته باشند.

جدول ۸. داده‌های مثال ۴

واحد ۱	واحد ۲	واحد ۳	
۴	۱	۸	ورودی ۱
۲	۵	۱	ورودی ۲
۰	۱	۰	خروجی ۱
۱	۱	۱	خروجی ۲
۱	۱	۱	کارایی

$$\varepsilon = 0/0001, \lambda_{max} = 3/018.9$$

رتبه‌بندی			
واحد ۳	واحد ۲	واحد ۱	
۱	نشدنی	۲	روش MAJ
۱	نشدنی	۲	روش AP
۲	۱	۳	تقاطع AHP/DEA

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مطالعه ما یک روش ترکیبی AHP/DEA موسوم به روش AHP/DEA تقاطعی ارائه کردیم که اساس رتبه‌بندی آن رتبه‌بندی تقاطعی است. نشان دادیم که با وجودی که این روش برگرفته از روش رتبه‌بندی تقاطعی است، با این حال مشکل روش رتبه‌بندی تقاطعی را که منجر به قرار گرفتن یک واحد کارا در رتبه‌ی پایین‌تر یک واحد ناکارا می‌شود، را نداشته و در عین حال نسبت به روش‌های ترکیبی ارائه شده در این زمینه نیز بهتر عمل می‌کند. در مثال‌ها و به کمک قضیه نشان دادیم که روش پیشنهادی، ضمن برطرف کردن معایب روش AHP/DEA ارائه‌شده‌ی سینوانی و همکاران، در مقایسه با روش AHP/DEA بهبود یافته نیز، دارای سرعت عمل بیشتری از دیدگاه محاسباتی است. همچنین همان‌طور که در مثال‌ها مشاهده شد، در اغلب حالات روش AHP/DEA تقاطعی دارای یک ماتریس مقایسات زوجی با ناسازگاری ناچیز است که این خود نشانه‌ی بالا بودن درصد اطمینان رتبه‌بندی حاصل از روش پیشنهادی است. بنابراین برتری روش AHP/DEA تقاطعی نسبت به روش AHP/DEA بهبود یافته می‌توان بر سرعت رتبه‌بندی و تولید ماتریس مقایسه زوجی با ناسازگاری کمتر که فقط در مثال‌ها و به‌صورت تجربی قابل مشاهده است، تکیه کرد.

تحلیل پوششی داده‌ها و روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره ابزارهایی هستند که امروزه کاربردهای فراوانی در زمینه‌های کنترل، مدیریت و تصمیم‌گیری پیدا نموده‌اند. تحقیقات نشان می‌دهد که این روش‌ها می‌توانند به زیبایی با هم ترکیب شوند و روش‌هایی جدید و پر کاربردی تولید کرد به طوری که نقاط ضعف یکدیگر را پوشش دهند. همان‌طور که مشاهده شد در این پژوهش یکی از روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره به نام AHP با DEA ترکیب شد. در همین راستا می‌توان روش‌های ترکیبی بسیاری تولید کرد.

منابع

۱. علیرضایی، م: رفیعی ثانی، م. (۱۳۸۹). توسعه‌ای بر روش AHP/DEA برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده. مدیریت صنعتی، ۲ (۵): ۸۳-۱۰۲.
2. Andersen, P., Petersen, N.C., 1993. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, 39: 1261–1264.
3. Cooper, William W., Seiford Lawrence M., Tone Kaoru, (2000). *Data Envelopment Analysis*, Second Edition, Springer.
4. Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K., 2006. *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses*. Springer Science+Business Media Inc., New York.
5. Friedman, L., Sinuany-Stern, Z., 1997. Scaling units via the canonical correlation analysis in the DEA context. *European Journal of Operational Research*, 100: 629–637.
6. Ganley, J.A., Cubbin, S.A., 1992. *Public Sector Efficiency Measurement: Applications of Data Envelopment Analysis*. North-Holland Publishing, Amsterdam.
7. Jahanshahloo G.R, HosseinzadehLotfi F, Shoja. N., Tohidi. G, Razavyan. S. (2004). *Ranking using L1-norm in data envelopment analysis*, Applied Mathematics and Computation 153, 215–224.
8. Jahanshahloo G.R., HosseinzadehLotfi .F, Jafari. Y, Maddahi. R, (2011) Selecting symmetric weights as a secondary goal in DEA cross-efficiency evaluation. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 544–549.
9. Jahanshahloo, G.R., Junior, H.V., Lotfi, F.H., Akbarian, D., 2007. A new DEA ranking system based on changing the reference set. *European Journal of Operational Research*, 181(1): 331–337.
10. Ramanathan, R., 2006. Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process. *Computers and Operations Research*, 33, 1289–1307.
11. Sexton, T.R., Silkman, R.H., Hogan, A.J., 1986. *Data Envelopment Analysis*. Jossey-Bass, San Francisco.
12. Sinuany-Stern, Z., Mehrez, A., Hadad, Y., 2000. An AHP/DEA methodology for ranking decision-making units. *International Transactions in Operational Research*, 7, 109–124.

13. Wang, Y.M., Liu, J., Elhagh, T.M.S., 2008b. An integrated AHP-DEA methodology for bridge risk assessment. *Computers and Operations Research*, 54, 513-525.

