



## Investigating the Performance of Portfolio Insurance Strategies under a Regime Switching Markov Model in Tehran Stock Exchange

**Peyman Alipour** 

\*Corresponding Author, PhD Candidate, Department of Finance, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: payman.alipour@ut.ac.ir

**Ali Foroush Bastani**

Associate Prof., Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Zanzan University of Graduate Studies, Zanzan, Iran. E-mail: bastani@iasbs.ac.ir

**Gholamreza Mansourfar**

Associate Prof., Department of Accounting, Faculty of Economics and Management, Urmia University, Urmia, Iran. E-mail: g.mansourfar@urmia.ac.ir

### Abstract

**Objective:** Portfolio insurance strategies are structural methods that provide a certain level of certainty by setting a floor value. In other words, using these strategies can achieve a predetermined minimum return. PI strategies, while maintaining the potential for capital growth in bull markets, provide downside protection in the bear market and at the end of the investment horizon provide a guaranteed minimum return. This study explains how to construct a portfolio and allocate assets by using these strategies, and also examines the performance of a constant proportion portfolio insurance (CPPI) strategy and value at risk based portfolio insurance (VBPI).

**Methods:** In order to evaluate the performance of constant proportion portfolio insurance strategy and value at risk based portfolio insurance, first the mathematical model of the Constrained Constant Proportion portfolio insurance is presented. In the Constrained case risk-free borrowing is not possible which makes the model more realistic. By using the Fourier transform of the characteristic function, the density function of returns has been extracted. By using the Density Function, the value at risk is calculated at the desired confidence levels, and finally, the mathematical model of the risk-based approach is presented. A variable-rate model is used to estimate the risk-taking movement of the asset, which is closer to reality. To estimate the dynamic of the risky asset regime-switching model has been used to make the model closer to reality.

**Results:** The results show that both strategies have been successful in controlling risk, and this performance improves with increasing confidence level and frequency of portfolio rebalancing. Omega measure shows that the performance of the constant proportion portfolio insurance is better at low thresholds. Also, the dispersion of the simulated results for the final value of the portfolios showed that the constant proportion portfolio insurance works better in protecting the floor.

**Conclusion:** Portfolio insurance strategies can dramatically improve the controlling of downside risk relative to buy and hold strategy and the performance of CPPI strategy is better than VBPI according to the performance measures.

**Keywords:** Portfolio insurance, CPPI, VBPI, Regime Switching model, Omega measure

**Citation:** Alipour, Peyman; Foroush Bastani, Ali and Mansourfar, Gholamreza (2021). Investigating the Performance of Portfolio Insurance Strategies under a Regime Switching Markov Model in Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, 23(2), 269-293. <https://doi.org/10.22059/FRJ.2020.296329.1006982> (in Persian)

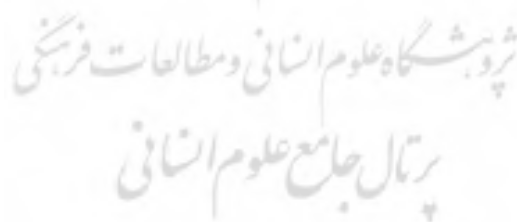
Financial Research Journal, 2021, Vol. 23, No.2, pp. 269-293

DOI: 10.22059/FRJ.2020.296329.1006982

Received: January 21, 2020; Accepted: June 27, 2020

Article Type: Research-based

© Faculty of Management, University of Tehran



## بررسی عملکرد استراتژی‌های بیمه سبد سرمایه تحت مدل تصادفی مارکف رژیم متغیر در

### بورس اوراق بهادار تهران

پیمان علی پور

\* نویسنده مسئول، دانشجوی دکتری، گروه مالی، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: payman.alipoor@ut.ac.ir

علی فروش باستانی

دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: bastani@iasbs.ac.ir

غلامرضا منصورفر

دانشیار، گروه حسابداری، دانشکده اقتصاد و مدیریت، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: g.mansourfar@urmia.ac.ir

## چکیده

**هدف:** استراتژی‌های بیمه سبد، نوعی روش‌های ساختاری هستند که با تعیین مقداری برای کف، سطح مشخصی از اطمینان (بیمه) را ارائه می‌کنند. به بیان دیگر با استفاده از این استراتژی‌های معاملاتی، می‌توان حداقل بازده از پیش تعیین شده‌ای را کسب کرد. این پژوهش ضمن بیان نحوه ساخت و تخصیص دارایی در این استراتژی‌ها، به بررسی عملکرد استراتژی بیمه سبد با نسبت ثابت (CPPI) و بیمه سبد بر اساس ارزش در معرض ریسک (VBPI) می‌پردازد.

**روش:** ابتدا مدل ریاضی رویکرد با نسبت ثابت در حالت محدودشده، ارائه شد. در حالت محدودشده، استقراس با نرخ بدون ریسک امکان‌پذیر نیست. در ادامه با استفاده از تبدیل فوریه تابع مشخصه، تابع چگالی بازده استخراج شد. با استفاده از تابع چگالی بازده، ارزش در معرض ریسک در سطوح اطمینان مدنظر به دست آمد و در نهایت به کمک آن، مدل ریاضی رویکرد مبتنی بر ارزش در معرض ریسک ارائه شد. به منظور برآورد روند حرکتی دارایی ریسکی، از مدل با رژیم متغیر استفاده شد که به واقعیت نزدیک‌تر است.

**یافته‌ها:** نتایج نشان می‌دهد که هر دو استراتژی در کنترل ریسک نامطلوب موفق عمل کرده‌اند و این عملکرد با افزایش سطح اطمینان و تعداد دفعات تغییر چیدمان سبد در طول دوره سرمایه‌گذاری بهبود می‌یابد. در مقایسه دو استراتژی، سنجه امگا نشان می‌دهد که در آستانه‌های پایین عملکرد استراتژی با نسبت ثابت بهتر است. همچنین پراکندگی نتایج شبیه‌سازی شده برای ارزش نهایی سبد نشان داد که رویکرد با نسبت ثابت در محافظت از کف عملکرد بهتری دارد.

**نتیجه‌گیری:** استراتژی‌های بیمه سبد، ریسک نامطلوب را نسبت به استراتژی خرید و نگهداری به‌طور چشمگیری بهبود می‌دهند و همچنین، استراتژی بیمه سبد با نسبت ثابت در قیاس با استراتژی بیمه سبد مبتنی بر ارزش در معرض ریسک عملکرد بهتری دارد.

**کلیدواژه‌ها:** بیمه سبد، CPPI، VBPI، رژیم متغیر، امگا

**استناد:** علی پور، پیمان؛ فروش باستانی، علی و منصورفر، غلامرضا (۱۴۰۰). بررسی عملکرد استراتژی‌های بیمه سبد سرمایه تحت مدل تصادفی مارکف رژیم متغیر در بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۲۳(۲)، ۲۶۹ – ۲۹۳.

تحقیقات مالی، ۱۴۰۰، دوره ۲۳، شماره ۲، صص. ۲۶۹-۲۹۳

DOI: 10.22059/FRJ.2020.296329.1006982

دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۰۱، پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۰۷

نوع مقاله: عملی پژوهشی

© دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

## مقدمه

بعد از بحران مالی سال‌های ۱۹۷۳ و ۱۹۷۴ در آمریکا، به دلیل تجربه‌های تلخ گذشته، بسیاری از مدیران سرمایه‌گذاری در صندوق‌های بزرگ مانند صندوق‌های بازنشستگی، علاقه‌ای به سرمایه‌گذاری در بازارهای سهام نداشتند. محققان حوزه مالی دریافتند که دغدغه اصلی مدیران، نبود راهکارهایی است که بتوانند سرمایه‌گذاران را در برابر ضررهای شدید در بازارهای مالی محافظت کنند، از این رو، به فکر افتادند تا سازوکاری را برای پوشش ریسک سرمایه‌گذاران در بازارهای نزولی طراحی کنند. در سال ۱۹۷۶ هاینه لاند<sup>۱</sup> ایده بیمه سبد سهام را مطرح کرد و در سال ۱۹۸۱ با تجاری‌سازی این ایده، استراتژی‌های بیمه سبد به بازارهای مالی معرفی شد (پریگانت<sup>۲</sup>، ۲۰۰۷).

استراتژی‌های بیمه سبد سهام (PI)<sup>۳</sup> نوعی روش‌های ساختاری هستند که تلاش می‌کنند بین دارایی ریسکی و دارایی بدون ریسک با تضمین سطح مشخصی از بازده، نسبت بهینه‌ای به دست آورند. به بیان دیگر با استفاده از این استراتژی‌های معاملاتی، می‌توان حداقل بازده از پیش تعیین شده‌ای را کسب کرد. این روش‌ها ضمن اینکه امکان کسب سود در بازارهای صعودی را حفظ می‌کنند، مانع افت شدید سرمایه در بازارهای نزولی می‌شوند و در پایان دوره سرمایه‌گذاری، مقدار کافی<sup>۴</sup> را برای ارزش پرتفو تضمین می‌کنند (باساک<sup>۵</sup>، ۲۰۰۲).

مطالعات پیشین در زمین بررسی عملکرد استراتژی‌های بیمه سبد سهام نشان داده است که زیان‌های شدید در نقاطی روی می‌دهد که تغییر رژیم و پرش در روند حرکتی قیمت سهام اتفاق می‌افتد. از سوی دیگر، وجود رژیم متغیر در پویایی بازار، پدیده‌ای شناخته شده است. اغلب متغیرهای اقتصادی طی زمان به دلایل گوناگون همانند جنگ، تغییر سیاست‌ها، بحران‌های اقتصادی و طبیعی و انتقال بین چرخه اقتصاد انقباضی و انبساطی و دیگر موارد دچار تغییر وضعیت یا تغییر رژیم می‌شوند که این امر به تغییرات معناداری در بازده سهام، نرخ بازده و دیگر شاخص‌های مالی منجر می‌شود. از این رو، در این مقاله، از مدل‌های با رژیم متغیر که نخستین بار همیلتون معرفی کرده است، برای مدل‌سازی هر چه بهتر رفتار بازار استفاده شده است.

در این مقاله دو نوع پُر کاربرد از استراتژی‌های بیمه سبد، بررسی شده است: بیمه سبد با نسبت ثابت (CPPI)<sup>۶</sup> و بیمه سبد بر اساس ارزش در معرض ریسک (VBPI)<sup>۷</sup>. با استفاده از این استراتژی‌ها، وزن بهینه دارایی‌های ریسکی و غیرریسکی در طول دوره سرمایه‌گذاری تعیین می‌شود؛ به طوری که در پایان دوره سرمایه‌گذاری ارزش پرتفو کمتر از مقدار تضمین شده نشود. بدین منظور، در این مقاله با استفاده از مدل‌های با رژیم متغیر و ادبیات فرایندهای تصادفی، مدل‌های ریاضی با پویایی تصادفی غیرنرمال، برای استراتژی‌های مورد مطالعه، ارائه می‌شود تا عملکرد این استراتژی‌های معاملاتی به‌طور دقیق بررسی شود. نتایج به دست آمده از مدل‌های ارائه شده برای هر یک از رویکردهای مدنظر، با استفاده

1. Hayne E. Leland

2. Prigent

3. Portfolio Insurance

4. Floor Value

5. Basak

6. Constant Proportion Portfolio Insurance

7. Value at Risk Based Portfolio Insurance

از سنج‌های ارزیابی عملکرد بررسی و در نهایت با مقایسه نتایج ارزیابی عملکرد، بهترین رویکرد انتخاب و معرفی می‌شود.

در ادامه، پیشینه نظری ارائه می‌شود که در آن به‌طور مختصر به معرفی استراتژی‌های سبد سرمایه پرداخته شده است، سپس در بخش پیشینه تجربی پژوهش، مطالعات مرتبط با موضوع این پژوهش و سؤال‌های پژوهش مطرح می‌شود. در بخش سوم به بیان روش‌شناسی پژوهش پرداخته شده است و در این بخش مدل‌های ریاضی پژوهش ارائه می‌شوند. بخش چهارم به ارائه نتایج اختصاص دارد. در بخش انتهایی نیز با توجه به نتایج به‌دست‌آمده، بحث و نتیجه‌گیری خواهد شد.

## پیشینه نظری پژوهش

### استراتژی بیمه سبد با نسبت ثابت (CPPI)

ایده اولیه استراتژی بیمه سبد با نسبت ثابت، شامل مدیریت یک سبد پویا بوده است. به این شکل که ارزش نهایی در پایان دوره سرمایه‌گذاری بیشتر از ارزش مطرح‌شده توسط سرمایه‌گذار است و به‌صورت درصدی از سرمایه اولیه مطرح می‌شود.

$$F_T = \alpha_T \cdot V_0^{CPPI} \quad \text{رابطه (۱)}$$

توجه شود که در صورت عدم امکان فرصت آربیتراژ، ممکن نیست که بتوان سرمایه‌گذاری را یافت که بازده آن بیشتر از بازده بدون ریسک باشد و از سوی دیگر، ریسکی هم نداشته باشد. بنابراین ماکزیمم ارزش تضمین شده سبد در پایان دوره سرمایه‌گذاری T به‌صورت زیر است.

$$\alpha_T \leq e^{r \cdot T} \quad \text{رابطه (۲)}$$

$F_T$  نشان‌دهنده ارزش فعلی تضمین شده است که ارزش کف<sup>۱</sup> هم گفته می‌شود. با تنزیل با نرخ بهره بدون ریسک خواهیم داشت:

$$F_t = \alpha_t \cdot V_0^{CPPI} \quad \text{رابطه (۳)}$$

$$\alpha_t = \alpha_T \cdot e^{-r \cdot (T-t)}$$

ارزش مازاد از ارزش فعلی سبد نسبت به مقدار کف کوشن<sup>۲</sup> خوانده می‌شود و با  $C_t$  نشان داده می‌شود و ارزش آن در هر زمانی به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$C_t = \max \{V_t^{CPPI} - F_t, 0\} \quad \text{رابطه (۴)}$$

1. Floor Value

2. Cushion

به‌منظور تضمین ارزش نهایی مینیمم سبد، ایده‌آسی رویکرد CPPI شامل سرمایه‌گذاری نسبت ثابت  $m$  از مقدار کوشن در دارایی ریسکی است. به همین دلیل، به این روش، بیمه سبد با نسبت ثابت می‌گویند. سرمایه‌گذاری در دارایی‌های ریسکی را Exposure می‌نامند و به شکل زیر به دست می‌آید:

$$E_t = m \cdot C_t = m \cdot \max \{V_t^{CPPI} - F_t, 0\} \quad (\text{رابطه ۵})$$

$$B_t = V_t^{CPPI} - E_t \quad (\text{رابطه ۶})$$

قسمت باقی‌مانده سبد، در دارایی بدون ریسک سرمایه‌گذاری می‌شود. توجه شود که تابع پرداخت محدب خواهد بود اگر ضریب  $m$  بزرگ‌تر از ۱ باشد. با اعمال لم ایتو، ارزش سبد CPPI در زمان  $t$  در طول دوره زمانی سرمایه‌گذاری از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} V_t^{CPPI} &= F_t + C_t = \alpha_t \cdot V_0^{CPPI} + C_t \\ &= \alpha_t \cdot e^{-(T-t)r} \cdot V_0^{CPPI} + C_0 \cdot \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^m \cdot e^{(1-m)(r+\frac{1}{2}m\sigma^2)t} \end{aligned} \quad (\text{رابطه ۷})$$

بنابراین، رویکرد CPPI با سطح اطمینان  $\alpha_T$  و ضریب  $m$  پارامتری می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود ارزش سبد CPPI همواره بیشتر از مقدار کف فعلی است. مقدار کف در واقع نشان‌دهنده مقدار تضمین‌شده پویا در یک سبد است (زاگست و کروس<sup>۱</sup>، ۲۰۱۱)

### بیمه سبد بر اساس ارزش در معرض ریسک (VBPI)

در بازارهای مالی، بحث مدیریت ریسک و نقش مهم آن در تخصیص دارایی، بسیار در کانون توجه قرار گرفته است. با کنترل ریسک نامطلوب به‌صورت پویا، در کنار دنبال کردن بیشینه بازده مورد انتظار، تخصیص دارایی مبتنی بر ریسک اتفاق می‌افتد. این مفهوم از تخصیص دارایی مبتنی بر ریسک، بسیار به مفهوم استراتژی‌های بیمه سبد نزدیک می‌شود (چی‌هو، کدل و تئوبالد<sup>۲</sup>، ۲۰۱۰). رویکرد جدیدی در ادبیات موضوع بیمه سبد وجود دارد که با استفاده از ارزش در معرض ریسک، سعی می‌کند سبدها را بیمه کند. VBPI رویکرد جدیدی است که با استفاده از مفهوم ارزش در معرض ریسک، تخصیص سرمایه در سبد را بین دارایی ریسکی و غیرریسکی انجام می‌دهد؛ به‌گونه‌ای که بیشترین مقدار زیان سبد، برابر با ارزش در معرض ریسک در سطح اطمینان مدنظر باشد. ارزش در معرض ریسک، بر اساس سطح ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران و مقدار تضمین‌شده از ارزش سبد در سررسید محاسبه می‌شود. همان‌طور که قبلاً بیان شد، در بیمه سبد، مهم‌ترین عاملی که باعث ریزش ارزش سبد به زیر سطح کف در زمان سررسید می‌شود، ریسک شکاف است. از آنجایی که ارزش در معرض ریسک، بر دنباله رو به پایین<sup>۳</sup> تمرکز دارد، به‌طور دقیق می‌تواند ریسک شکافی را که ناشر

1. Zagst and Kraus

2. Chih Ho, Cadle, Theobald

3. Downward tail

بیمه سبد با آن مواجه است، محاسبه کند. این استراتژی همانند CPPI یک استراتژی پویاست (جیانگ، ما و آن، ۲۰۰۹). برای نشان دادن این استراتژی، فرض می‌شود که این استراتژی فقط بین یک دارایی ریسکی و یک دارایی غیرریسکی اعمال می‌شود. ارزش دارایی غیرریسکی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$dB_t = rB_t dt \quad \text{رابطه ۸}$$

$$B_0 > 0$$

در این رابطه،  $r$  نرخ بدون ریسک است که فرض می‌شود مقدار ثابتی دارد. دارایی ریسکی  $S$  از توزیع تصادفی هندسی تحت اندازه احتمال واقعی پیروی می‌کند.

$$dS_t = \sigma(\mu dt + \sigma dW_t) \quad \text{رابطه ۹}$$

$$S_0 > 0$$

$\mu$  و  $\sigma$  به ترتیب بازده مورد انتظار و نوسان دارایی هستند؛  $W$  حرکت براونی استاندارد است و فرض  $\mu > r$  همواره برقرار است. بنابراین با استفاده از لم ایتو، بازده لگاریتمی دارایی ریسکی از توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر پیروی می‌کند.

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 \cdot t\right) \quad \text{رابطه ۱۰}$$

مقدار اولیه سبد با  $V_0$  و مقدار تضمین شده در سررسید  $T$  با  $F_T$  نشان داده می‌شود. فرض می‌شود که مقدار تضمین شده در سررسید، کمتر از حالتی است که کل سبد در دارایی بدون ریسک سرمایه‌گذاری شود،  $F_T < V_0 e^{rT}$ . وزن دارایی بدون ریسک در سبد با نماد  $w$  و وزن دارایی ریسکی با  $1-w$  نشان داده می‌شود. تعداد واحدهای دارایی ریسکی و دارایی غیرریسکی در زمان صفر برابر است با:

$$\beta = \frac{wV_0}{B_0} \quad \text{رابطه ۱۱}$$

$$\eta = \frac{(1-w)V_0}{S_0}$$

$\beta$  تعداد دارایی‌های بدون ریسک و  $\eta$  تعداد دارایی‌های ریسکی سبد است. با فرض اینکه سبد در بازه  $[0, T]$  تغییری نداشته باشد، ارزش نهایی سبد برابر خواهد بود با

$$V_T = \beta B_T + \eta S_T = wV_0 \exp(rT) + (1-w)V_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right) \quad \text{رابطه ۱۲}$$

بر اساس رویکرد ارزش در معرض ریسک خواهیم داشت:

$$-VaR^p = -(E(V_T) - F_T) \quad \text{رابطه ۱۳}$$

در رابطه ۱۳،  $VaR^p$  ارزش در معرض ریسک سبد در سطح اطمینان مشخص شده  $p$  است. برای همسان‌سازی محاسبات، افق زمانی  $VaR$  را با طول دوره سرمایه‌گذاری یکسان در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن دو معادله اخیر برای  $VaR$  خواهیم داشت.

$$VaR^p = wV_0 \exp(rT) + (1 - w)V_0 \exp(\mu T) - F_T \quad \text{رابطه ۱۴}$$

بنابراین،  $w$  وزن دارایی ریسکی با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$w = \frac{F_T + VaR - V_0 \exp(\mu T)}{V_0(\exp(rT) - \exp(\mu T))} \quad \text{رابطه ۱۵}$$

رابطه ۱۵ نشان می‌دهد که هر چه  $VaR$  سرمایه‌گذار بیشتر باشد، نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی بدون ریسک بیشتر و وزن دارایی ریسکی کمتر خواهد بود (جیانگ و همکاران، ۲۰۰۹).

### پیشینه تجربی پژوهش

برتراند و پریگنت<sup>۱</sup> (۲۰۰۱) دو استراتژی بیمه سبد بر اساس اختیار معامله<sup>۲</sup> و بیمه سبد با نسبت ثابت را بررسی و مقایسه کردند. آنها نشان دادند که عملکرد این استراتژی‌ها بیشتر به نوسان‌های دارایی ریسکی و هزینه‌های معاملاتی وابسته است. به این شکل که اگر قیمت دارایی ریسکی صعودی باشد، ارزش سبد CPPI بیشتر از ارزش سبد OBPI خواهد بود. در عین حال، اگر قیمت دارایی ریسکی افت شدیدی داشته باشد، ارزش سبد CPPI بیشتر از سبد OBPI کاهش خواهد یافت. این حالت، بدترین حالت ممکن برای CPPI است، به خصوص اگر بعد از ریزش بازار، ارزش دارایی ریسکی به شکل معناداری رشد کند و اختیار فروش حاضر در OBPI اعمال نشده باشد.

بویلر و کانیکانیتی<sup>۳</sup> (۲۰۰۵) استراتژی‌های CPPI تعدیل شده، مارچین و راجت<sup>۴</sup> را با استراتژی CPPI ساده به صورت تحلیلی مقایسه کردند. نتایج آنها نشان داد که محدودیت روی حداکثر دارایی ریسکی، به‌طور چشمگیری عملکرد استراتژی را کاهش می‌دهد. تحت محدودیت روی قسمت ریسکی سبد، اثر اهرمی ضریب  $m$  از بین می‌رود. معرفی استراتژی راجت، توانست به شکل مطلوبی، بخشی از زیان‌های اتفاق افتاده را جبران کند.

واندن<sup>۵</sup> (۲۰۰۶) نشان داد که رژیم متغیر، شرط اساسی برای بیمه سبد است و تعریف جدیدی برای تأثیر خوشه‌بندی

نوسان‌ها بیان کرد. او برای بررسی تأثیر نوسان‌های حاصل از استراتژی بیمه پویا، مدل جدیدی از بیمه سبد ارائه داد.

1. Bertrand & Prigent
2. Option Based Portfolio Insurance
3. Boulier and Kanniganti
4. Margin and Ratchet
5. Vanden



بالدر، برنلد و ماهاینی<sup>۱</sup> (۲۰۰۹) اثربخشی CPPI را تحت محدودیت‌های معاملاتی بررسی کردند. آنها استراتژی CPPI را در حالت گسسته زمان در نظر گرفتند. استراتژی به‌دست‌آمده، نوعی استراتژی خودتأمین<sup>۲</sup> است که میزان دارایی ریسکی مقداری غیرمنفی است. آنها پس از معرفی یک هزینه معاملاتی نسبی، تأثیر آن را در میزان ریسک سبد بررسی کردند.

جیانگ و همکارانش (۲۰۰۹)، ضمن معرفی بیمه سبد بر اساس ارزش در معرض ریسک، عملکرد آن را با CPPI و استراتژی خرید و نگهداری مقایسه کردند. آنها نشان دادند که VBPI عملکرد بهتری نسبت به CPPI هم در بازده و هم در محافظت در برابر ریسک نامطلوب دارد.

کانستانتینو و خومان<sup>۳</sup> (۲۰۰۹) عملکرد استراتژی CPPI را با دو استراتژی سرمایه‌گذاری بدون ریسک و سرمایه‌گذاری بدون شکاف خرید و نگهداری مقایسه کردند. بر اساس نتایج آنها، عملکرد CPPI در برابر این استراتژی‌ها بهتر است و با توجه به معیارهای مقایسه عملکرد، استراتژی CPPI نسبت به دیگر استراتژی‌ها برتری دارد.

زاگست و کراوس (۲۰۰۹) در مقاله‌ای به تحلیل و مقایسه دو روش بیمه سبدي OBPI و CPPI پرداختند. آنها از مقیاس‌های مختلف تسلط تصادفی مرتبه سوم بهره بردند و با اعمال تسلط تصادفی مراتب دوم و سوم استراتژی CPPI به شرایط، پارامتر مدنظر را بررسی کردند. محدودیت‌هایی که در این تحقیق بر ضرایب CPPI اعمال شده است، از تفاوت بین واریانس ضمنی و واریانس تجربی ناشی شده است.

هاینات<sup>۴</sup> (۲۰۱۱) استراتژی CPPI را با این فرض بررسی کرد که دارایی ریسکی یک فرایند تصادفی تحت مدل رژیم سوئیچینگ است. او در این مقاله، به محاسبه ۴ گشتاور مرکزی سبد CPPI در حالت زمان پیوسته پرداخت و نشان داد که چگونه می‌توان با استفاده از تبدیل فست فوریه به تابع چگالی توزیع رسید و راهکاری برای مقایسه VaR و TailVaR پیشنهاد کرد.

حمیدی، مایلت و پریگنت<sup>۵</sup> (۲۰۱۱) در یک چارچوب کاری متغیر با زمان ضریب  $m$  را به‌گونه‌ای تعریف کردند که میزان ریسک در طول زمان ثابت بماند. آنها نشان دادند که رویکرد بیمه سبد با نسبت متغیر (DPPI) نسبت به رویکرد CPPI عملکرد بهتری دارد.

ونگ<sup>۶</sup> (۲۰۱۳) در مقاله‌ای، رویکرد CPPI را تحت فرض رژیم سوئیچینگ با در نظر گرفتن فرایند لوی نمایی بررسی کرد. در این مقاله مسیر حرکتی قیمت دارایی‌ها بر اساس فرایندهای لوی نمایی مشخص تحت شرایط مختلف بازار در نظر گرفته می‌شود. فرض شده است که انتقال، از یک حالت بازار به حالت دیگر، از فرایند مارکوف پنهان پیروی می‌کند. در این مقاله، حالت‌های تحلیلی برای آن دسته از معیارهای مهم ریسک که با CPPI مرتبط هستند، مانند احتمال کسری و کسری مورد انتظار به‌دست آمده است. تابع مشخصه کسری نیز برای شناخت بهتر توزیع آن به‌دست

1. Balder, Brandl and Mahayni
2. Self finance
3. Constantinou & Khuman
4. Hainaut
5. Hamidi, Mailliet and Prigent
6. Weng

آمده است. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که رفتار سبدي CPPI می‌تواند با تفاوت در موقعیت‌های مختلف بازار در زمان شروع سرمایه‌گذاری متفاوت باشد. در حقیقت، از منظر ضامن CPPI، اگر سبدي در بازار صعودی شروع به کار کند نسبت به حالتی که شروع سبد از بازار نزولی باشد، خطر بیشتری دارد.

آمور و پریگنت<sup>۱</sup> (۲۰۱۸) در مقاله‌ای به دنبال توسعه استراتژی CPPI و معرفی حالات مختلف این استراتژی بر اساس کف‌های شرطی<sup>۲</sup> مختلف، به خصوص استراتژی‌های مارجین و راجت پرداخته‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که استراتژی‌های مارجین شرطی و راجت شرطی، همواره نسبت به مدل‌های عمومی CPPI، مارجین و راجت با پارامترهای ثابت، عملکرد بهتری دارد.

در مطالعات داخلی محققان مختلفی از مدل رژیم سوئیچینگ در مطالعه خود استفاده کرده‌اند. سجاد و طاهری (۱۳۹۵) در مقاله‌ای، به محاسبه فاصله اطمینان و ارزیابی دقت ارزش در معرض خطر محاسبه شده با مدل مارکف سوئیچینگ گارچ در بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. آنها در مطالعه خود با مقایسه دقت مدل‌های مارکف سوئیچینگ گارچ و گارچ در محاسبه ارزش در معرض ریسک شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران، به ساختن فاصله اطمینان بوت استری برای ارزش در معرض خطر پرداختند و تأثیر امکان چرخش یا انتقال بین دو رژیم کم‌نوسان و پرنوسان را بر دقت تخمین ارزش در معرض خطر آزمودند. نتایج نشان داد که مدل مارکف سوئیچینگ گارچ به تخمین ارزش در معرض خطر محتاطانه‌تری نسبت به مدل گارچ در بورس تهران منجر می‌شود و برای سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز مناسب‌تر است.

جهانگیری و حسینی (۱۳۹۶) در مقاله‌ای به بررسی آثار سیاست پولی، نرخ ارز و طلا بر بازار سهام ایران با استفاده از مدل MS-VAR-EGARCH پرداختند. نتایج برآورد مدل تحقیق با استفاده از رویکرد غیرخطی خودرگرسیون برداری تغییر رژیم مارکف و الگوی ناهم‌سانی واریانس شرطی نمایی نشان داد که در یک مدل با دو رژیم، در رژیم ۱، بین مقادیر گذشته بازده نرخ ارز و بازده شاخص کل بازار سهام، رابطه مثبت و معناداری وجود دارد و بین بازده شاخص کل بازار سهام و وقعه بازده سکه بهار آزادی رابطه منفی و معنادار برقرار است. نتایج مربوط به رژیم صفر نیز حاکی از وجود رابطه مثبت و معنادار بین مقادیر گذشته نرخ رشد نقدینگی و بازده شاخص کل بازار سهام در رژیم صفر است. افزون بر این، شوک‌های جاری نرخ ارز و نقدینگی، اثر منفی و معناداری بر بازده شاخص کل بازار سهام دارند.

امیر تیموری، جلائی و زاینده‌رودی (۱۳۹۶) به بررسی تأثیر هم‌زمانی چرخه‌های تجاری ایران و آلمان بر اصطکاک و عمق بازارهای مالی ایران پرداختند. آنها در این مطالعه از رویکرد مارکوف سوئیچینگ بیزین ور (MSBVAR) استفاده کردند. نتایج آنها نشان داد که نقش اصطکاک مالی در توجیه درجه هم‌زمانی چرخه‌های تجاری طی بحران‌های مالی جهانی، شایان توجه است. رژیم ۱ (رکود) نسبت به رژیم ۲ (تورم) پایدارتر بوده و احتمال ماندن در رژیم ۱ بیشتر است.

رافعی و شکری (۱۳۹۸) با استفاده از رهیافت مدل‌های نیمه مارکوف پنهان به تحلیل وضعیت‌های بازدهی در بازار سرمایه ایران پرداختند. یافته‌های این پژوهش نشان داد که مناسب‌ترین توزیع برای بررسی روند بازدهی شاخص کل بورس تهران و همچنین، مدل نیمه مارکوف سه رژیمی، مناسب‌ترین حالت برای مدل‌سازی است. به علاوه، بورس اوراق

بهادار تهران، به طور کلی در سه حالت خرسی، گاوی و میانه قرار دارد که بیش از نیمی از زمان بررسی شده را در حالت میانه به سر برده و محتمل ترین حالت پس از حالت های خرسی و گاوی، ورود به حالت میانه و استمرار این حالت است و کمابیش، هیچ گاه به طور مستقیم از حالت خرسی وارد حالت گاوی نشده است. همچنین، احتمال ورود از حالت میانه به حالت خرسی تقریباً سه برابر احتمال ورود از حالت میانه به حالت گاوی است.

## روش شناسی پژوهش

### مدل CPPI تحت دینامیک رژیم متغیر

روند تغییر ارزش سبد CPPI در طول دوره سرمایه گذاری با استفاده از رابطه دیفرانسیل تصادفی زیر به دست می آید.

$$dV_t = E_t \frac{dS_t}{S_t} + (V_t^{CPPI} - E_t) \frac{dB_t}{B_t} \quad \text{رابطه ۱۶}$$

با در نظر گرفتن حرکت براونی هندسی تحت مدل رژیم متغیر، دینامیک حرکتی دارایی ریسکی از رابطه دیفرانسیل تصادفی زیر به دست می آید (بویلر و کانيجانیتی، ۲۰۰۵).

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t \quad \text{رابطه ۱۷}$$

با جای گذاری رابطه ۱۷ در رابطه ۱۶ خواهیم داشت:

$$dV_t = E_t((\mu(x_t) - r)dt + \sigma(x_t)dW_t) + V_t r dt \quad \text{رابطه ۱۸}$$

در CPPI استاندارد، امکان اهرمی شدن قسمت ریسکی سبد به هر میزانی وجود دارد. به بیان دیگر، هیچ محدودیتی روی قرض کردن وجود ندارد. اما در CPPI محدود شده<sup>۱</sup>، یک شرط واقع بینانه لحاظ شده است؛ به این صورت که با در نظر گرفتن یک ضریب  $p$ ، اکسپوژر به شکل زیر محدود شده است:

$$0 < E_t < pV_t \quad p > 0 \quad \text{رابطه ۱۹}$$

بنابراین، در CPPI محدود شده مقدار اکسپوژر از رابطه زیر به دست می آید.

$$E_t = \min \{mC_t, pV_t\} \quad \text{رابطه ۲۰}$$

با در نظر گرفتن رابطه ۲۰ و اعمال آن در رابطه ۱۸، دینامیک سبد CPPI بر اساس رابطه دیفرانسیل تصادفی زیر به دست می آید.

$$dV_t = \begin{cases} V_t r dt & C_t \leq 0 \\ mC_t ((\mu(x_t) - r)dt + \sigma(x_t)dW_t) + V_t r dt & 0 < mC_t < pV_t \\ pV_t ((\mu(x_t) - r)dt + \sigma(x_t)dW_t) + V_t r dt & pV_t \leq mC_t \end{cases} \quad \text{رابطه ۲۱}$$

با اعمال لم ایتو و حل رابطه دیفرانسیلی تصادفی بالا، ارزش سبد CPPI در هر لحظه از رابطه ۲۲ به دست می‌آید.

$$V_t = V_0 + \begin{cases} V_{t-1}r\Delta t & C_t \leq 0 \\ C_{t-1}(m(\mu(x_t) - r) + r)\Delta t + m\sigma(x_t)\Delta W_{t-1} & 0 < mC_t < pV_t \\ C_{t-1}(p(\mu(x_t) - r) + r)\Delta t + p\sigma(x_t)\Delta W_{t-1} & pV_t \leq mC_t \end{cases} \quad \text{رابطه ۲۲}$$

### مدل VBPI تحت دینامیک رژیم متغیر

استراتژی VBPI سرمایه را بین دارایی ریسکی و غیرریسکی بر اساس توزیع بازده آن، تخصیص می‌دهد و به‌طور پویا، سبدی بیمه شده را چیدمان<sup>۱</sup> می‌کند. در این روش، بیشترین زیان نسبت به مقدار تضمین شده، در سطح اطمینان مدنظر برابر با ارزش در معرض ریسک آن توزیع است.

برای ارائه مدل VBPI تحت دینامیک رژیم متغیر، فرض می‌شود که دارایی ریسکی  $S$ ، از توزیع تصادفی هندسی به‌صورت زیر پیروی می‌کند.

$$dS_t = S_t(\mu(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t), \quad S_0 > 0 \quad \text{رابطه ۲۳}$$

که در آن  $\mu(x_t)$  نرخ بازده دارایی و  $\sigma(x_t)$  تلاطم دارایی ریسکی است. فرض می‌کنیم پارامترهای  $\mu(x_t)$  و  $\sigma(x_t)$  به‌وسیله فرایند مارکف مخفی  $X_t$  که مستقل از حرکت براونی است، مدل می‌شوند (البوت و میائو، ۲۰۰۹). ارزش نهایی سبد VBPI در حالت رژیم متغیر از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V_T = \beta B_T + \eta S_T = wV_0 \exp(rT) + (1-w)V_0 \left(\frac{S_T}{S_0}\right) \quad \text{رابطه ۲۴}$$

همان‌طور که در رابطه ۱۵ نشان داده شد با داشتن ارزش در معرض ریسک، در هر لحظه می‌توان وزن دارایی غیرریسکی و به طبع آن، وزن دارایی ریسکی را به دست آورد. ارزش در معرض ریسک یک سبد می‌تواند به‌صورت چندان  $q$  آن به‌صورت زیر تعریف شود:

$$p(V_T < q) = \varepsilon \quad \text{رابطه ۲۵}$$

با جای‌گذاری رابطه ۲۴ در رابطه ۲۵ و در نظر گرفتن  $R_T = \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$  خواهیم داشت:

$$p\left(\frac{S_T}{S_0} < \frac{F_T - wV_0 e^{rt}}{(1-w)V_0}\right) = p\left(R_T < \ln\left(\frac{F_T - wV_0 e^{rt}}{(1-w)V_0}\right)\right) = \varepsilon \quad \text{رابطه ۲۶}$$

اگر تابع چگالی احتمال  $R_T$  را با  $f_{R_T}(s)$  نشان دهیم، رابطه بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{F_T - wV_0 e^{rt}}{(1-w)V_0}\right)} f_{R_T}(s) d(s) = \varepsilon \quad \text{رابطه ۲۷}$$

بنا بر رابطه بالا، کرانه بالای انتگرال، ارزش در معرض ریسک خواهد بود.

$$\ln \left( \frac{F_T - wV_0 e^{rt}}{(1-w)V_0} \right) = VaR \quad \text{رابطه ۲۸}$$

که در نتیجه، وزن دارایی بدون ریسک (W) از رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$w = \frac{F_T - V_0 \exp(VaR)}{V_0(\exp(rT) - \exp(VaR))} \quad \text{رابطه ۲۹}$$

در رابطه ۲۹ تنها پارامتر نامشخص VaR است که با داشتن آن، می توان w را محاسبه کرد.

برای محاسبه VaR، می بایست توزیع احتمال  $R_T$  را داشته باشیم؛ اما توزیع احتمال  $R_T$  را نمی توانیم به صورت تحلیلی به دست بیاوریم، از این رو، باید از تابع مشخصه آن (تبدیل فوریه تابع چگالی آن) استفاده کنیم. با معکوس کردن عددی تابع مشخصه  $R_T$ ، می توانیم چگالی احتمالات  $R_T$  را به دست آورده و با استفاده از آن، VaR را محاسبه کنیم. رویکرد مدنظر را در ادامه توضیح می دهیم.

تابع مشخصه  $R_T$  که با  $\varphi(\theta)$  نشان می دهیم با استفاده از تبدیل فوریه  $R_T$  تعریف می شود.

$$\varphi(\theta) = E(e^{i\theta R_T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta s} f_{R_T}(s) ds \quad \text{رابطه ۳۰}$$

که در آن  $f_{R_T}(s)$  تابع چگالی  $R_T$  است. با توجه به تعریف  $R_T$  خواهیم داشت:

$$\varphi(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta R_T}) = \mathbb{E}\left(e^{\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)i\theta}\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{S_T}{S_0}\right)^{i\theta}\right) \quad \text{رابطه ۳۱}$$

برای محاسبه عبارت آخر در رابطه ۳۱، به قضیه زیر نیاز داریم:

قضیه ۱: برای تمامی  $\gamma \in \mathbb{R}$  ماتریس  $B_\gamma$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$B_\gamma = Q' + \text{diag} \begin{pmatrix} \gamma \left( \mu(1) - \frac{\sigma(1)}{2} \right) + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma(1)^2 \\ \vdots \\ \gamma \left( \mu(N) - \frac{\sigma(N)}{2} \right) + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma(N)^2 \end{pmatrix} \quad \text{رابطه ۳۲}$$

و خواهیم داشت:

$$E \left( \left( \frac{S_t}{S_0} \right)^\gamma \middle| F_0 \right) = E \left( \langle \exp(B_\gamma t) \delta(0); 1 \rangle \middle| F_0 \right) = \sum_{i=1}^N p_i(0) (\langle \exp(B_\gamma t) e_i; 1 \rangle) \quad \text{رابطه ۳۳}$$

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_N\}$  واحد بردارهای مجموعه بردارهای واحد  $\delta(t) = (\delta(i, \alpha(t)))_{i \in \mathcal{N}}$ '

به دست آورده و 1 برداری با N عدد یک است.

با توجه به قضیهٔ اخیر، برای رابطهٔ ۳۱ ماتریس  $B_{i\theta}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_{i\theta} = Q' + \text{diag} \begin{pmatrix} i\theta \left( \mu(1) - \frac{\sigma(1)}{2} \right) - \frac{1}{2}\theta^2\sigma(1)^2 \\ \vdots \\ i\theta \left( \mu(N) - \frac{\sigma(N)}{2} \right) - \frac{1}{2}\theta^2\sigma(N)^2 \end{pmatrix} \quad \text{رابطهٔ (۳۴)}$$

از این رو داریم:

$$\varphi(\theta) = E(\langle \exp(B_{i\theta}t)\delta(0); 1 \rangle | F_0) = \sum_{i=1}^N p_i(0) \langle \exp(B_{i\theta}t)e_i; 1 \rangle \quad \text{رابطهٔ (۳۵)}$$

با معکوس کردن تبدیل فوریه، تابع چگالی احتمال  $R_T$  از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f_{R_T}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta) e^{-i\theta s} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(\theta) e^{-i\theta s} d\theta \quad \text{رابطهٔ (۳۶)}$$

با توجه به اینکه در رابطهٔ ۳۶ انتگرال متقارن است، می‌توان رابطه را به صورت قسمت دوم نوشت. برای محاسبهٔ انتگرال اخیر، از الگوریتم FFT موجود در نرم‌افزار متلب استفاده می‌شود. نحوهٔ کار این الگوریتم به این شکل است که به ازای هر ورودی به شکل  $\{IN(j) : j = 0, \dots, N-1\}$  خروجی زیر را نتیجه خواهد داد:

$$OUT(k) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}kj} \cdot IN(j) \quad k = 0, \dots, N-1 \quad \text{رابطهٔ (۳۷)}$$

گام اول در استفاده از این رویکرد عددی، گسسته‌سازی انتگرال است. بدین منظور هر گام را با  $\Delta\theta$  و تعداد گام‌ها را با  $N$  نشان می‌دهیم.  $\theta$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{\theta_j\} = \{j\Delta\theta \in \mathbb{R}^+ \mid 0 \leq j \leq N-1\} \quad \text{رابطهٔ (۳۸)}$$

همین تعداد گام نیز در راستای  $s$  متناظر با هر  $f_{R_T}$  در نظر گرفته می‌شود.

$$\{s_k\} = \{-s_{min} + k\Delta s \in \mathbb{R}^+ \mid 0 \leq k \leq N-1\} \quad \text{رابطهٔ (۳۹)}$$

به طوری که  $s_{min} = \frac{N\Delta s}{2}$  و برای گام‌های گسسته‌سازی رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\Delta\theta\Delta s = \frac{2\pi}{N} \quad \text{رابطهٔ (۴۰)}$$

جهت گسسته‌سازی انتگرال آخر به شکل مناسب برای الگوریتم FFT به ازای تمامی  $s_{k=0 \dots N-1}$  به شکل زیر عمل می‌شود:

$$\frac{\pi f_{R_T}(s_k)}{OUT(k)} = \int_0^{+\infty} \varphi(\vartheta) e^{-i\vartheta s_k} d\vartheta = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} j k} \underbrace{e^{i \cdot \vartheta_j \cdot s_{\min}} \varphi(\vartheta_j) \Delta\vartheta}_{IN(j)}$$

قسمت اول رابطه بالا، بردار خروجی الگوریتم FFT یا همان تابع چگالی مدنظر است. با برآورد تابع چگالی، به راحتی می توان به چندک مدنظر از توزیع  $R_T$  دست یافت که با  $r_\epsilon$  نشان داده می شود. با استفاده از رابطه ۲۴، ارزش در معرض ریسک (چندک  $q$ ) از رابطه زیر به دست می آید (هاینات، ۲۰۱۱):

$$VaR = wV_0 \exp(rT) + (1 - w)V_0 e^{r_\epsilon} \quad \text{رابطه ۴۱}$$

### آزمون کوپیک

یکی از راه های ارزیابی توانایی پیش بینی مدل های ارزش در معرض ریسک، شمارش دفعاتی است که مقدار زیان واقعی از مقدار زیان پیش بینی شده توسط مدل بزرگ تر باشد. اگر ارزش در معرض خطرهای روزانه، هفتگی، ماهانه را مستقل فرض کنیم، مقایسه نتایج واقعی سود و زیان روزانه با ارزش در معرض خطر محاسبه شده، یک توزیع دوجمله ای خواهد شد. اگر زیان واقعی از زیان برآورد شده توسط مدل بیشتر باشد، این رویداد شکست تلقی می شود و اگر کوچک تر شود، این رویداد موفق است. برای نشان دادن موفقیت و شکست از  $I_t(\alpha)$  استفاده می شود که  $\alpha$  ضریب پوشش ارزش در معرض خطر است.

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } r_t < -\%VaR_{t|t-1} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad \text{رابطه ۴۲}$$

که  $r_t$  بازده مشاهده شده در دوره  $t$  است و  $\%VaR_{t|t-1}$  ارزش در معرض ریسک درصدی دوره  $t$  مشروط بر اطلاعات موجود تا زمان  $t-1$  است. فرضیه صفر به صورت زیر بیان می شود:

$$\sum_{t=1}^T I_t = \text{Bin}(T, \alpha) \quad \text{رابطه ۴۳}$$

یعنی تعداد تخطی ها از مقدار ارزش در معرض ریسک (تعداد شکست ها) دارای توزیع دوجمله ای است.  $T$  تعداد نمونه و  $\alpha$  نرخ پوشش است. فرضیه آماری را می توان به صورت زیر نوشت:

$H_0$ : مجموع تخطی ها دارای توزیع دوجمله ای است.

$H_1$ : مجموع تخطی ها دارای توزیع دوجمله ای نیست.

$$\begin{cases} H_0: \hat{\alpha} = \alpha \\ H_1: \hat{\alpha} \neq \alpha \end{cases}$$

که در آن  $\hat{\alpha}$  نسبت تعداد تخطی ها به کل پیش بینی ها یا نسبت شکست است. کوپیک برای بررسی فرضیه ارائه شده،

آزمون نسبت شکست ها را پیشنهاد می کند. نسبت درست نمایی کوپیک (LR) دارای توزیع کای دو با یک درجه آزادی

است و آماره آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$LR_{PF} = 2 \ln \left[ \frac{\hat{\alpha}^{T_1} (1 - \hat{\alpha})^{T - T_1}}{\alpha^{T_1} (1 - \alpha)^{T - T_1}} \right] \quad \text{رابطه ۴۴}$$

در این رابطه،  $LR_{PF}$  نسبت احتمال شکست؛  $T$  تعداد کل پیش‌بینی‌ها و  $T_1$  تعداد شکست‌هاست. در صورتی که نسبت احتمال شکست بزرگ‌تر از توزیع کای‌دو با یک درجه آزادی و سطح خطای مدنظر باشد، فرض صفر رد می‌شود و نمی‌توان پذیرفت که مدل، ارزش در معرض ریسک را به‌درستی برآورد کرده است. اگر فرضیه صفر رد شود و  $\hat{\alpha} > \alpha$  باشد، مدل ارزش در معرض خطر را دست بالا و اگر  $\hat{\alpha} < \alpha$  باشد، دست پایین برآورد کرده است (راغفر و آجرلو، ۱۳۹۵).

### کالیبره کردن مدل رژیم متغیر

برای کالیبره کردن مدل رژیم سوئیچینگ، از روش فیلتر همیلتون استفاده می‌شود. این روش از رویکرد ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) بر اساس بازده‌های مشاهده شده برای برآورد پارامترهای مدنظر در مدل آماری استفاده می‌کند. اگر  $O_1, O_2, \dots, O_n$  تعداد  $n$  بازده مشاهده شده باشند، در بازه زمانی  $\Delta t$  خواهیم داشت:

$$O_i = \ln \left( \frac{S_{t_{i-1} + \Delta t}}{S_{t_{i-1}}} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{رابطه ۴۵}$$

که دینامیک حرکتی دارایی پایه، از حرکت براونی هندسی زیر پیروی می‌کند:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(\alpha_t) dt + \sigma(\alpha_t) dW_t \quad \text{رابطه ۴۶}$$

فرض می‌شود که تغییر موقعیت‌ها صرفاً در زمان‌های گسسته  $t_i = 1 \dots n$  اتفاق می‌افتد. در صورتی که در زمان  $t_{i-1}$  در موقعیت  $\lambda$  باشیم، با توجه به رابطه ۴۲ بازده مربوط به بازه زمانی  $[t_{i-1}, t_i]$  یک متغیر تصادفی نرمال  $O_i \sim N(\mu_j \Delta t, \sigma_j \sqrt{\Delta t})$  است. مجموعه پارامترهایی از مدل که باید برآورد شوند را با  $\Theta$  نشان می‌دهیم.

$$\Theta = \{\mu_{j=1 \dots N}, \sigma_{j=1 \dots N}, \rho_{j=1 \dots N}, j = 1 \dots N\} \quad \text{رابطه ۴۷}$$

تابع لگاریتم درست‌نمایی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\log \ell = \log f(O_1 | \Theta) + \log f(O_2 | \Theta, O_1) + \log f(O_3 | \Theta, O_1, O_2) + \dots + \log f(O_n | \Theta, O_1, \dots, O_{n-1}) \quad \text{رابطه ۴۸}$$

که در آن  $f(O_k | \Theta, O_1, \dots, O_{k-1})$  تابع چگالی بازده‌ها در بازه زمانی  $k$ ام، با توجه به پارامترهای داده شده مدل  $\Theta$  و مشاهدات قبلی  $O_1, \dots, O_{k-1}$  است. در این رویکرد، پارامترهایی که مدل رژیم متغیر را کالیبره می‌کنند، پارامترهایی هستند که تابع درست‌نمایی را ماکزیمم می‌کنند. همیلتن نشان داد که تابع چگالی شرطی که در محاسبه  $f(O_k | \Theta, O_1, \dots, O_{k-1})$  لحاظ شده است، به صورت برگشتی به شکل زیر به دست می‌آید:



$$f(O_k|\theta, O_1, \dots, O_{k-1}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_i(t_{k-1}|\theta, O_1, \dots, O_{k-1}) p_{i,j}(t_{k-1}, t_k|\theta) f(O_k|\theta, \alpha_{t_k} = j)$$

- $f(O_k|\theta, \alpha_{t_k} = j)$  تابع چگالی گوسی بازده‌ها در موقعیت  $j$  است.
  - $p_{i,j}(t_{k-1}, t_k|\theta)$  احتمال انتقال از موقعیت  $i$  در زمان  $t_{k-1}$  به موقعیت  $j$  در زمان  $t_k$  برای مجموعه پارامترها  $\theta$  است.
  - $p_i(t_{k-1}|\theta, O_1, \dots, O_{k-1})$  احتمال قرار داشتن موقعیت  $i$  در زمان  $t_{k-1}$  با توجه به مشاهدات قبلی است.
- احتمال  $p_i(t_{k-1}|\theta, O_1, \dots, O_{k-1})$  را می‌توان به صورت بازگشتی با استفاده از  $f(O_{k-1}|\theta, O_1, \dots, O_{k-2})$  به شکل زیر به دست آورد:

$$p_i(t_{k-1}|\theta, O_1, \dots, O_{k-1}) = \frac{\sum_{j=1}^N p_i(t_{k-2}|\theta, O_1, \dots, O_{k-2}) p_{i,j}(t_{k-2}, t_{k-1}|\theta) f(O_{k-1}|\theta, \alpha_{t_{k-1}})}{f(O_{k-1}|\theta, O_1, \dots, O_{k-2})} \quad \text{رابطه ۴۹}$$

برای شروع فرایند بازگشتی، نیاز به دانستن مقدار  $f(O_1|\theta)$  است. همیلتن فرض می‌کند که زنجیره مارکف برای دوره زمانی به اندازه کافی بلند در جریان است، بنابراین می‌توان ویژگی‌های مانایی زنجیره‌های مارکف را اعمال نمود. می‌توان نوشت:

$$f(O_1|\theta) = \sum_{i=1}^N p_i(\theta) f(O_1|\theta, \alpha_{t_1} = i) \quad \text{رابطه ۵۰}$$

که در آن  $p_i(\theta)$  احتمال مانای فرایند مارکف  $(\alpha_t)$  است.

### یافته‌های پژوهش

در این مطالعه فرض شده است که سرمایه‌گذاری اولیه ۱۰۰ واحد و دوره سرمایه‌گذاری یک سال است. مقدار تضمین شده ۱۰۰ درصد معادل ۱۰۰ واحد اولیه در نظر گرفته شده است. سطح اطمینان‌های مورد بررسی سطوح ۹۰ درصد، ۹۵ درصد و ۹۹ درصد است و دوره‌های بررسی دوباره چیدمان سبد ماهانه، هفتگی و روزانه در نظر گرفته شده است. همچنین برای هر یک از استراتژی‌ها، به ازای هر سناریو تعداد ۱۰۰۰۰ شبیه‌سازی انجام شده است.

به منظور شناسایی روندهای مختلف موجود در دینامیک حرکتی بازار در بازه زمانی مورد مطالعه، از مدل رژیم سوئیچینگ همیلتون استفاده شده است. هدف این مطالعه، کنترل نوسان‌های شدید منفی است، از این رو، رژیم‌های مختلف بر اساس میزان نوسان‌ها تفکیک شده است. بر اساس داده‌های موجود، یک مدل با دو رژیم که رژیم اول بیانگر حالت کم‌نوسان و رژیم دوم بیانگر موقعیت پرنوسان در روند است، کالیبره شده است. بدین منظور از ۲۴۱۸ بازه روزانه

مشاهده شده از شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران، از ابتدای سال ۱۳۸۸ تا انتهای سال ۹۷ برای تخمین پارامترهای مدل استفاده شده است. برآوردهای به‌دست‌آمده بر اساس رویکرد حداکثر درست‌نمایی، در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱. میانگین و نوسان‌های برآوردی برای رژیم‌های مختلف

پارامتر	$\mu(1)$	$\mu(2)$	$\sigma(1)$	
مقدار	۰/۲۷	۰/۰۲	۱/۱۳	۰/۳۳

همان‌طور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود، رژیم اول مربوط به بازار صعودی با بازده و نوسان‌های بیشتر و رژیم دوم نشان‌دهنده بازار رکودی با بازده نزدیک به صفر و نوسان کمتر نسبت به رژیم اول است. همچنین ماتریس Q و به‌طبع آن، ماتریس احتمالات انتقال، به‌ترتیب زیر برآورد شده است.

$$Q = \begin{pmatrix} -0.0833 & 0.0833 \\ 0.0638 & -0.0638 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 0.9225 & 0.0775 \\ 0.0593 & 0.9407 \end{pmatrix}$$

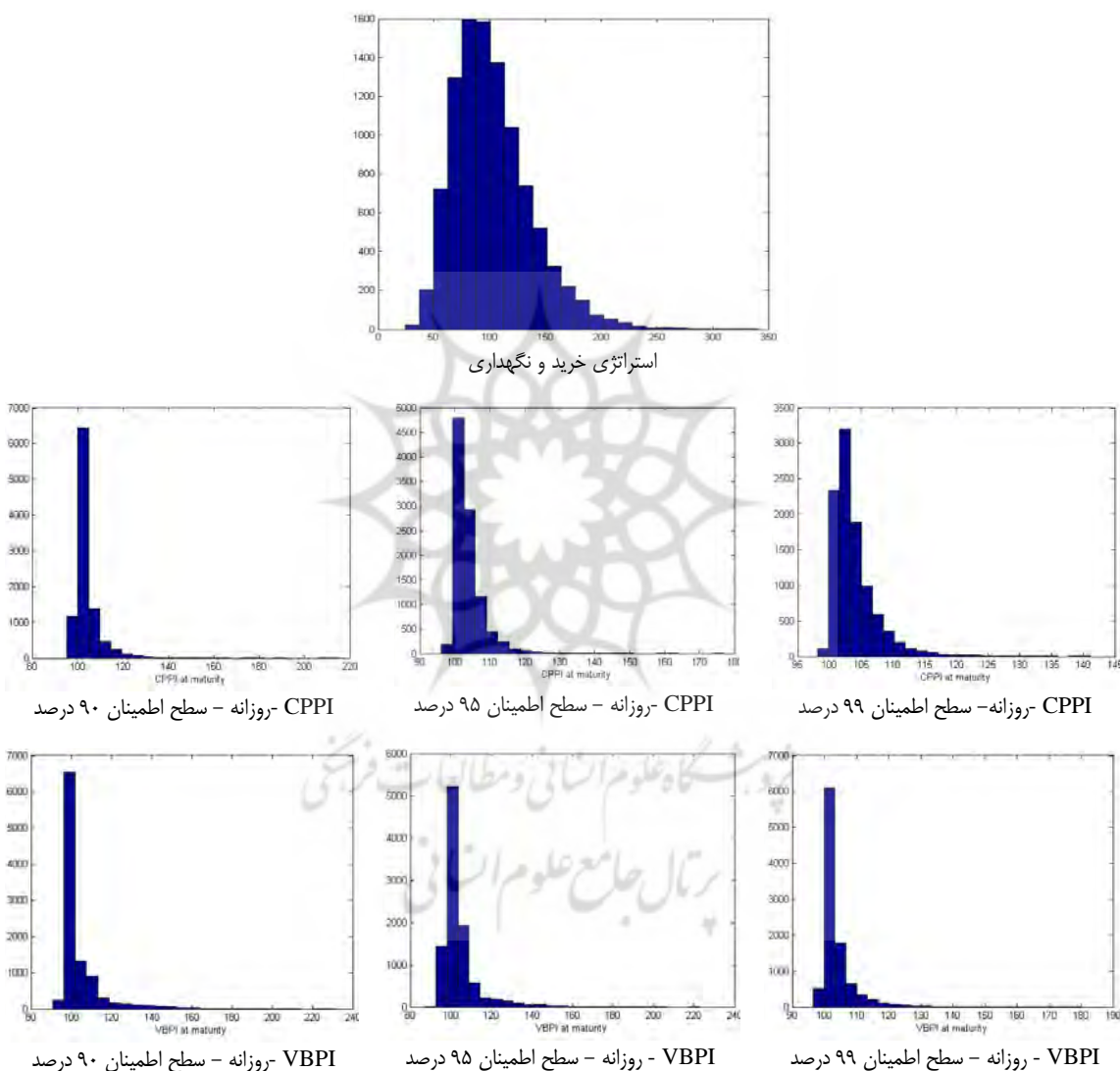
برای به‌دست‌آوردن تابع چگالی احتمال مورد نیاز در رویکرد VBPI، از معکوس کردن تبدیل فوریه استفاده شده است. بدین منظور، در الگوریتم FFT، هر گام گسسته‌سازی ۰/۵ واحد ( $\Delta\theta = 0/5$ ) و تعداد گام  $16834$  ( $N = 2^{14}$ ) در نظر گرفته شده است. اندازه بازه نیز بر اساس رابطه ۴۰ به دست می‌آید.

جهت اطمینان از نتایج به‌دست‌آمده برای ارزش در معرض ریسک با استفاده از رویکرد تابع مشخصه و الگوریتم FFT، آزمون کوپیک اجرا شده است. بدین منظور تعداد ۲۰۰ مشاهده از بازده‌های موجود، به عنوان مشاهدات خارج از نمونه در نظر گرفته شده است. در ادامه، نتایج حاصل برای بازه‌های زمانی روزانه، هفتگی و ماهانه در سطوح اطمینان موردنظر با مقدار واقعی آن مقایسه شده است. بر اساس نتایج جدول ۲، در تغییر چیدمان‌های روزانه و هفتگی در تمامی سطوح اطمینان، مقدار آماره LR از مقدار بحرانی کوچک‌تر است، بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که فرضیه صفر، یعنی برابری نرخ شکست و سطح معناداری پذیرفته می‌شود که نشان‌دهنده برآورد مناسب مدل است. در حالت ماهانه در سطح اطمینان ۹۰ درصد، مقدار آماره LR از مقدار بحرانی بزرگ‌تر است و فرض صفر در این حالت رد می‌شود. در سایر سطوح اطمینان در حالت ماهانه فرض صفر پذیرفته شده است. با توجه به اینکه در الگوریتم، عمل گسسته‌سازی با تعداد گام‌های بالا انجام شده است، لذا مدل از دقت مناسبی برخوردار است.

جدول ۲. نتایج آزمون کوپیک

وضعیت	ماهانه			هفتگی				روزانه				
	بحرانی	LR	تعداد خطا	وضعیت	بحرانی	LR	تعداد خطا	وضعیت	بحرانی	LR	تعداد خطا	
رد	۲/۷۰۶	۳/۲	۲۸	قبول	۲/۷۰۶	۰/۴۸	۲۳	قبول	۲/۷۰۶	۰/۲۳	۱۸	۹۰
قبول	۳/۸۴۱	۳/۲۳	۱۶	قبول	۳/۸۴۱	۲/۲۹	۱۵	قبول	۳/۸۴۱	۰/۸۷	۱۳	۹۵
قبول	۶/۶۳۵	۵/۲۶	۶	قبول	۶/۶۳۵	۵/۲۶	۶	قبول	۶/۶۳۵	۳/۲	۵	۹۹

به منظور اثبات کارایی استراتژی‌های بیمه سبد، در شکل ۱ نمودار هیستوگرام ارزش نهایی استراتژی‌های مختلف به نمایش گذاشته شده است. شکل ۱-الف هیستوگرام استراتژی خرید و نگهداری را نشان می‌دهد و شکل‌های ۱-ب تا ۱-ت هیستوگرام استراتژی CPPI و شکل‌های ۱-ج تا ۱-ن هیستوگرام استراتژی VBPI در سطوح اطمینان مختلف را در دوره روزانه نشان می‌دهد.

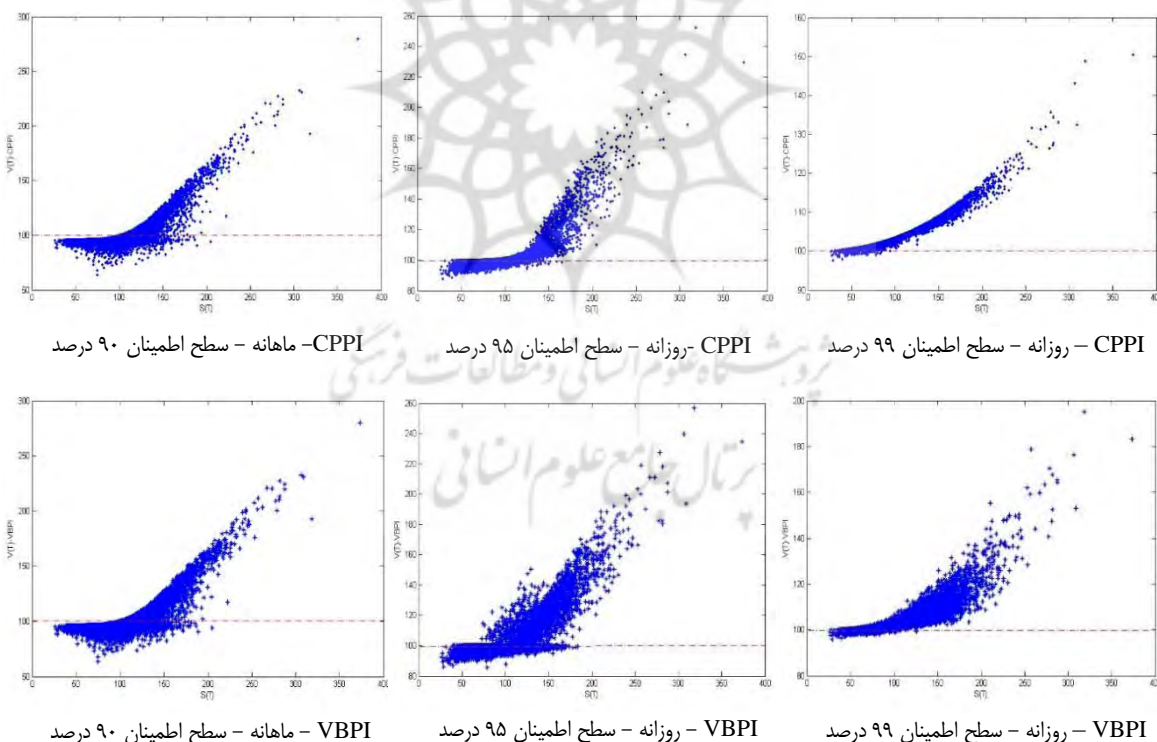


شکل ۱. هیستوگرام نتایج نهایی استراتژی‌های خرید و نگهداری، CPPI و VBPI

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، سطح ریسک هر دو استراتژی با توجه به دنباله کوچک سمت چپ نسبت به استراتژی خرید و نگهداری در سطح مطلوبی قرار دارد. به بیان دیگر، تعداد نتایج کمتر از ۱۰۰، در رویکرد خرید و نگهداری بسیار زیاد است، در حالی که در نتایج حاصل شده با استفاده از رویکردهای PI مشاهده می‌شود که تراکم ارزش‌ها، در اعداد بالاتر از ۱۰۰ واحد بیشتر است که از این موضوع حکایت می‌کند که توزیع بازده‌ها در استراتژی‌های

بیمه سبد شرایط بهتری دارد. در دوره‌های زمانی هفتگی و ماهانه نیز نتایج به همین ترتیب است. نتایج این نمودارها نشان می‌دهد که در صورت استفاده از استراتژی‌های PI، سرمایه‌گذاران می‌توانند ضمن حفظ امکان کسب بازده مثبت در بازارهای صعودی، خطر افت شدید سرمایه را در بازارهای نزولی به شکل چشمگیری کاهش دهند.

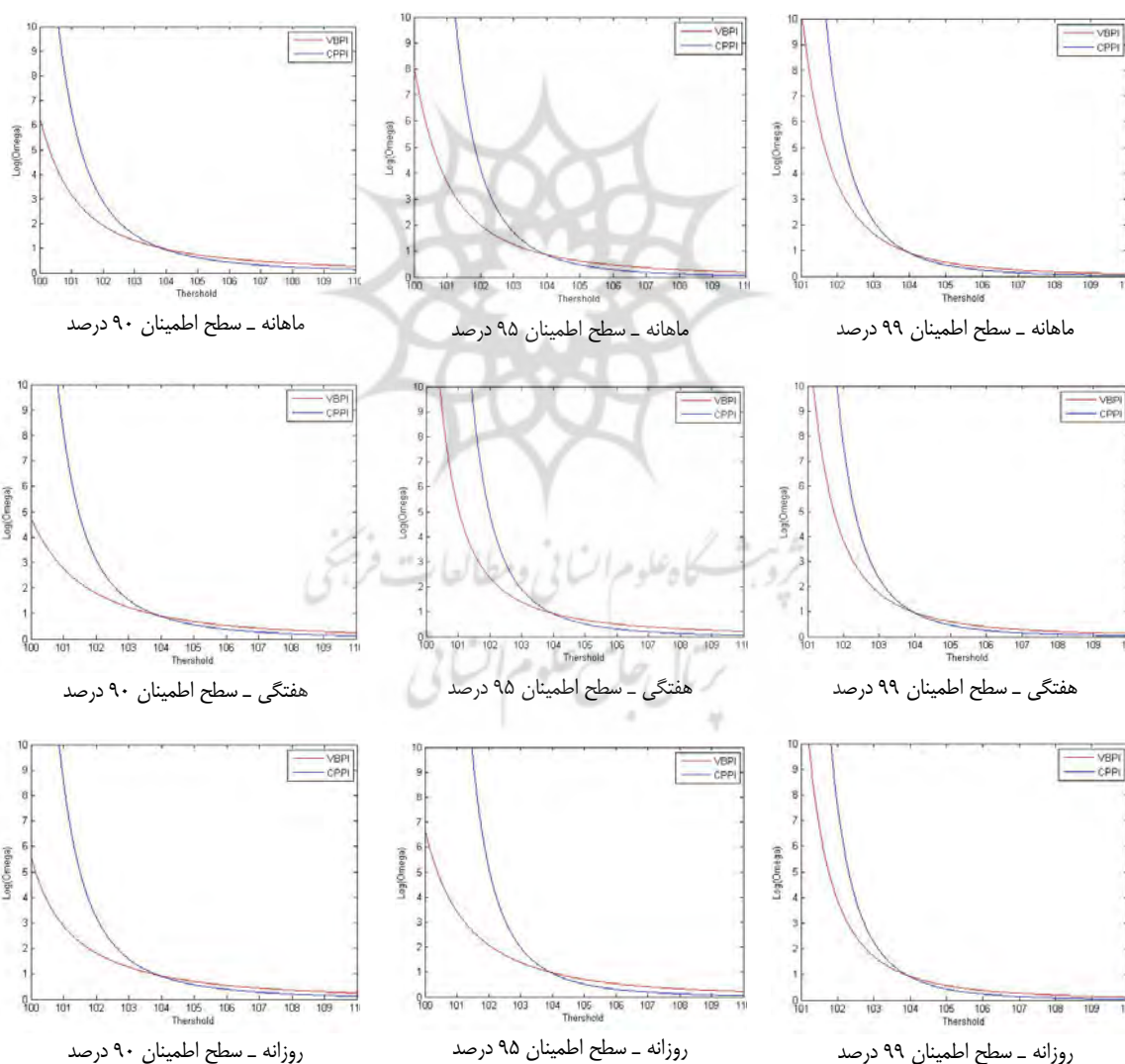
شکل ۲ ارزش نهایی سبدهای CPPI و VBPI را نسبت به ارزش نهایی دارایی ریسکی نشان می‌دهد. با مقایسه نمودارها می‌توان دریافت که در سطح اطمینان یکسان، تعداد نتایجی که پایین‌تر از سطح کف (خط قرمز) قرار می‌گیرند در بازه زمانی ماهانه نسبت به حالت روزانه بیشتر است. بنابراین رویکرد روزانه عملکرد بهتری در محافظت از کف داشته است. همچنین با مقایسه نتایج سطوح اطمینان ۹۰ درصد و ۹۹ درصد، تعداد نقاط زیر مقدار کف در سطح ۹۹ درصد بسیار کمتر از سطح ۹۰ درصد است که عملکرد بهتر در سطح ۹۹ درصد را نشان می‌دهد. در نهایت، به طور کلی با مقایسه نتایج دو استراتژی CPPI و VBPI در بازه‌های زمانی مختلف و سطوح اطمینان مختلف، برتری رویکرد CPPI مشهود است. لذا استفاده از رویکرد CPPI در حالتی که سبد به صورت روزانه بررسی می‌شود، رویکرد قابل اعتمادتری برای سرمایه‌گذاران خواهد بود. همچنین با توجه به اینکه استراتژی CPPI نسبت به VBPI بهتر توانسته است از مقدار کف محافظت کند، این رویکرد برای سرمایه‌گذاران با سطح ریسک‌گریزی بیشتر مناسب است.



شکل ۲. پراکندگی نتایج نهایی شبیه‌سازی شده نسبت به تغییرات قیمت دارایی ریسکی

در شکل ۳ دو استراتژی با استفاده از سنجه امگا مقایسه شده است. سنجه امگا سنجه‌ای نسبتاً جدید برای مقایسه استراتژی‌های بیمه سبد است. این سنجه، در واقع نسبت میانگین بازده‌های بالاتر از یک حد آستانه (L) به میانگین

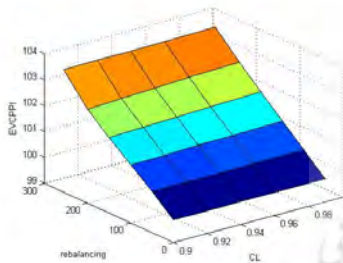
زیان‌های پایین‌تر از همان حد آستانه است. به ازای هر حد آستانه‌ای سبدی که امگای بیشتری داشته باشد، عملکرد بهتری دارد. این سنجه تمامی گشتاورهای توزیع بازده از جمله چولگی و کشیدگی را دربرمی‌گیرد، بنابراین سنجه مناسبی برای بررسی کارایی استراتژی‌های بیمه سبد است. بدین منظور، برای مقایسه عملکرد دو استراتژی مورد مطالعه، نمودار امگای آنها به‌عنوان تابعی از حد آستانه برای سطوح اطمینان ۹۰ درصد، ۹۵ درصد و ۹۹ درصد در حالت روزانه ارائه شده است. نمودار تابع امگا نشان می‌دهد که به ازای Lهای کم، استراتژی CPPI نسبت به استراتژی VBPI عملکرد بهتری دارد و برعکس، به ازای Lهای زیاد، استراتژی VBPI عملکرد نسبتاً بهتری دارد. اختلاف عملکرد این دو استراتژی با افزایش سطح L کاهش می‌یابد.



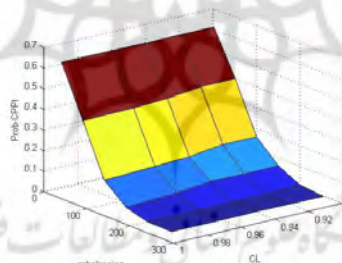
شکل ۳. مقایسه امگای استراتژی‌های VBPI و CPPI

بتراند و پریگنت (۲۰۱۱) نشان دادند که حد آستانه کمتر، به معنای این است که سرمایه‌گذار بیشتر به ریسک اهمیت می‌دهد و کنترل ریسک اولویت دارد. در حالی که سطح بالای حد آستانه، به معنای آن است که سرمایه‌گذار به عملکرد بازده سبد توجه دارد. لذا نتایج حاصل از شکل ۳ نیز همانند شکل ۲ نشان می‌دهد که استراتژی CPPI برای سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز مناسب‌تر است.

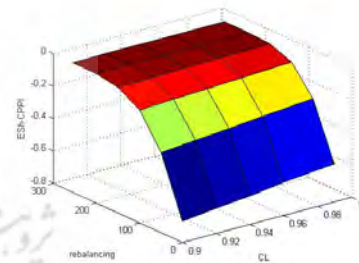
شکل ۴ تأثیر هم‌زمان سطح اطمینان و فواصل زمانی تغییر چیدمان را روی ارزش نهایی سبد، احتمال نکول و میانگین اندازه نکول نشان می‌دهد. در هر دو سبد VBPI و CPPI ارزش نهایی سبد با سطح اطمینان و تعداد دفعات چیدمان، رابطه مستقیمی دارد؛ یعنی با افزایش سطح اطمینان و تعداد دفعات چیدمان، ارزش نهایی سبد افزایش می‌یابد. از طرفی، احتمال نکول با سطح اطمینان و تعداد دفعات چیدمان رابطه معکوسی دارد؛ به طوری که با افزایش سطح اطمینان و تعداد دفعات چیدمان احتمال نکول کاهش می‌یابد. همان‌طور که در نمودار پیداست، احتمال نکول تا سطح اطمینان و تعداد دفعات چیدمان احتمال نکول کاهش می‌یابد. اما در تعداد دفعات بیش از ۲۰۰ تغییر چندانی در احتمال نکول اتفاق نمی‌افتد. همچنین میانگین اندازه نکول با سطح اطمینان و تعداد دفعات چیدمان رابطه معکوسی دارد، به این معنا که با افزایش سطح اطمینان و تعداد دفعات چیدمان، اندازه نکول کاهش می‌یابد. در این نمودار نیز در تعداد دفعات بیش از ۲۰۰ تغییر چیدمان، تغییر چندانی در اندازه نکول اتفاق نمی‌افتد. لذا تعداد ۲۰۰ تغییر چیدمان برای رسیدن به بهترین نتیجه و حذف بخش عمده ریسک کافی است.



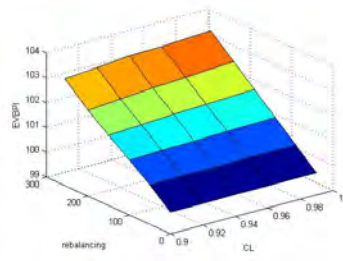
تغییرات میانگین بازده سبد CPPI نسبت به بازه زمانی و سطح اطمینان مختلف



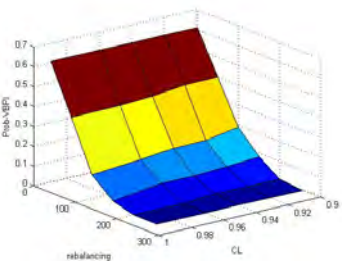
تغییرات احتمال نکول سبد CPPI نسبت به بازه زمانی و سطح اطمینان مختلف



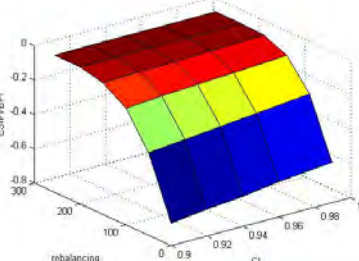
تغییرات میانگین اندازه نکول سبد CPPI نسبت به بازه زمانی و سطح اطمینان مختلف



تغییرات میانگین بازده سبد VBPI نسبت به بازه زمانی و سطح اطمینان مختلف



تغییرات احتمال نکول سبد VBPI نسبت به بازه زمانی و سطح اطمینان مختلف



تغییرات میانگین اندازه نکول سبد VBPI نسبت به بازه زمانی و سطح اطمینان مختلف

#### شکل ۴. بررسی تأثیر هم‌زمان سطح اطمینان و بازه‌های تغییر چیدمان

در تمامی نمودارهای شکل ۴، رفتار سبدهای دو استراتژی مشابه یکدیگر است، به این دلیل که استراتژی CPPI حالت خاصی از استراتژی VBPI است؛ یعنی اگر در استراتژی CPPI امکان تغییر ضریب  $m$  در طول دوره سرمایه‌گذاری وجود داشته باشد، می‌توان در هر لحظه تغییر چیدمان ضریبی برای  $m$  به‌دست آورد که استراتژی‌های VBPI و CPPI به ازای آن ضریب یکسان باشند.

در جدول ۳ نتایج سنجه‌های امگا و کاپا ارائه شده است. با توجه به نتایج سنجه امگا، در حد آستانه‌های پایین، عملکرد استراتژی CPPI نسبت به استراتژی VBPI بهتر است؛ اما در حد آستانه ۴ درصد، استراتژی VBPI عملکرد بهتری دارد. این نتایج با نتایج شکل ۳ که سنجه‌های امگا را به حالت ترسیمی نشان می‌دهد، هم‌خوانی دارد. نتایج سنجه کاپا نیز در حد آستانه‌های پایین، برتری عملکرد استراتژی CPPI نسبت به استراتژی VBPI را نشان می‌دهد، در حالی که در حد آستانه ۴ درصد، VBPI عملکرد بهتری دارد.

جدول ۳. معیارهای ارزیابی عملکرد امگا و کاپا برای سبدهای VBPI و CPPI

کاپا - VBPI			کاپا - CPPI			امگا - CPPI			امگا - CPPI				
ماهانه	هفتگی	روزانه	ماهانه	هفتگی	روزانه	ماهانه	هفتگی	روزانه	ماهانه	هفتگی	روزانه		
۱/۱۷	۱/۰۳	۱/۳۶	۲/۳۲	۳/۱۸	۳/۲۷	۳/۱۹	۲/۷۹	۲/۸۸	۶/۶۲	۸/۱۷	۸/۵۳	۹۰	حد آستانه ۱٪
۱/۳	۲/۴	۱/۵۸	۴/۳۸	۶/۲۲	۶/۸۹	۳/۶۵	۵/۱۶	۳/۴۳	۱۴/۰۴	۱۸/۷۴	۲۰/۷۶	۹۵	
۳/۸۶	۴/۵۴	۵/۵۷	۸/۱۴	۱۲/۰۴	۱۲/۵۴	۱۰/۶۵	۱۲/۷	۱۳/۸۶	۳۱/۸۵	۴۵/۹	۴۷/۵۸	۹۹	
۰/۶۲	۰/۵۳	۰/۶۳	۱/۰۸	۱/۲۷	۱/۳۱	۱/۹۴	۱/۸۱	۱/۸۲	۲/۹	۳/۱۲	۳/۲۲	۹۰	حد آستانه ۲٪
۰/۶۲	۰/۹۹	۰/۷۶	۱/۶۶	۲/۰۷	۲/۲۲	۲/۰۱	۲/۳۷	۲/۰۹	۴/۲	۴/۹۱	۵/۲	۹۵	
۱/۵	۱/۶۹	۱/۷۸	۲/۶	۳/۱۴	۳/۱۱	۳/۶۳	۳/۸۶	۳/۹	۶/۵۷	۷/۷	۷/۶۳	۹۹	
۰/۲۴	۰/۱۸	۰/۲۱	۰/۳۷	۰/۳۸	۰/۴	۱/۳۲	۱/۲۶	۱/۲۶	۱/۵۶	۱/۵۵	۱/۵۸	۹۰	حد آستانه ۳٪
۰/۱۹	۰/۳۱	۰/۲۸	۰/۴۷	۰/۵۹	۰/۶۷	۱/۲۷	۱/۴	۱/۳۹	۱/۷۳	۱/۹۱	۱/۹۹	۹۵	
۰/۴۵	۰/۵۲	۰/۵۱	۰/۷	۰/۸۱	۰/۷۷	۱/۶۸	۱/۷۵	۱/۷۱	۲/۱۶	۲/۳۳	۲/۲۶	۹۹	
-۰/۰۲	-۰/۰۶	-۰/۰۶	-۰/۰۴	-۰/۰۷	-۰/۰۷	-۰/۹۷	-۰/۹۲	-۰/۹۳	-۰/۹۵	-۰/۸۹	-۰/۹۱	۹۰	حد آستانه ۴٪
-۰/۱	-۰/۰۶	-۰/۰۲	-۰/۰۹	-۰/۰۵	-۰/۰۳	-۰/۸۷	-۰/۹۳	-۰/۹۷	-۰/۸۶	-۰/۹۳	-۰/۹۶	۹۵	
-۰/۰۶	-۰/۰۳	-۰/۰۵	-۰/۰۶	-۰/۰۳	-۰/۰۶	-۰/۹۲	-۰/۹۷	-۰/۹۳	-۰/۹۱	-۰/۹۵	-۰/۹۱	۹۹	

## نتیجه‌گیری و بحث

در این پژوهش رویکردی برای ایجاد بیمه سبد با در نظر گرفتن مدل رژیم متغیر برای دارایی پایه ارائه شده است. لحاظ کردن مدل با رژیم متغیر، می‌تواند بسیار حائز اهمیت باشد؛ زیرا بحران‌های مالی نشان داده‌اند که میانگین و نوسان هر دارایی ریسکی با تغییر شرایط اقتصادی تغییر می‌کند، لذا در نظر گرفتن مقادیر ثابت در طول دوره سرمایه‌گذاری به نتایج دور از واقع منجر می‌شود. بدین منظور، در ابتدا با استفاده از داده‌های شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران، مدل مدنظر کالیبره شد و متغیرهای مربوط به هر رژیم با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی برآورد شدند.

برای به‌دست‌آوردن مدل ریاضی استراتژی CPPI در حالت رژیم متغیر، رابطه دیفرانسیل تفاضلی آن با استفاده از رابطه اولیئر - ماریاما و لم ایتو حل شد. همچنین، برای به‌دست‌آوردن مدل ریاضی استراتژی VBPI در حالت رژیم متغیر، ابتدا با استفاده از تبدیل فوریه و تابع مشخصه، تابع چگالی توزیع بازده به‌دست آمد و با استفاده از این توزیع، ارزش در معرض ریسک در سطوح مختلف محاسبه شد و در نهایت با استفاده از آن، تخصیص دارایی در سبد بین دارایی ریسکی و غیر ریسکی انجام گرفت. نتایج حاصل از دو رویکرد با استفاده از سنج‌های ارزیابی عملکرد ارزیابی شد.

نتایج نشان داد که هر دو استراتژی در محافظت از سبد در برابر ریسک نامطلوب موفق بوده‌اند، چراکه دنباله سمت چپ توزیع بازده در هر دو استراتژی نسبت به استراتژی خرید و نگهداری کوتاه‌تر شده‌اند. البته شکل توزیع بازده در هر دو استراتژی، به پارامترهای انتخابی بستگی دارد که توسط سرمایه‌گذار انتخاب می‌شود. در واقع، این پارامترها درجه ریسک‌گریزی افراد را تعیین می‌کنند.

همان‌طور که نمودار هیستوگرام نشان داد، توزیع بازده در استراتژی‌های بیمه سبد غیرمتمقارن است، از این رو سنجه امگا می‌تواند این ویژگی توزیع‌ها را پوشش دهد. بر اساس نتایج سنجه امگا، استراتژی CPPI در آستانه‌های کمتر، عملکرد بهتری دارد که نشان می‌دهد این استراتژی برای افراد ریسک‌گریز مناسب‌تر است.

در نمودار پراکندگی بازده‌ها نیز نتایج حاصل‌شده در سطوح اطمینان و بازه‌های تغییر چیدمان مختلف برتری عملکرد CPPI را نشان داد؛ زیرا تعداد نقاطی که پایین‌تر از مقدار کف قرار می‌گیرند، در این استراتژی کمتر است. به بیان دیگر، استراتژی CPPI در محافظت از کف عملکرد بهتری داشته است.

از طرفی نتایج حاصل شده نشان می‌دهد که با افزایش سطح اطمینان و تعداد تغییر چیدمان‌ها در طول دوره سرمایه‌گذاری، میانگین ارزش نهایی سبد افزایش و احتمال نکول و میانگین اندازه نکول کاهش می‌یابد. به بیان دیگر، سطح اطمینان و تعداد تغییر چیدمان رابطه مستقیم با ارزش نهایی سبد و رابطه معکوس با احتمال و اندازه نکول دارند. با در نظر گرفتن عملکرد کلی استراتژی‌های CPPI و VBPI، نتایج نشان می‌دهد که استراتژی CPPI در محافظت از سبد عملکرد بهتری داشته است.

به‌طور کلی، به‌منظور استفاده کاربردی از نتایج حاصل شده، سرمایه‌گذاران می‌توانند با استفاده از استراتژی‌های PI نوسان‌های منفی ارزش سبد سهام خود را کاهش دهند، به این معنا که احتمال افت ارزش سبد آنها به مقدار کمتر از مقدار تضمین شده، بسیار کم است. لذا سرمایه‌گذارانی که خواهان نوعی تضمین جهت ورود به بازار سرمایه هستند، می‌توانند از این استراتژی‌ها استفاده کنند. علاوه بر این، در شرایطی که این استراتژی‌های بازارهای نزولی شدید مواجه می‌شوند و نمی‌توانند مقدار تضمین شده را حفظ کنند، مقدار زیان متوسط، در این استراتژی‌ها در مقایسه با استراتژی خرید و نگهداری بسیار کمتر است.

همچنین با در نظر گرفتن نتایج ارزیابی عملکرد دو استراتژی CPPI و VBPI مشخص شد که CPPI رویکرد محتاطانه‌تری نسبت به VBPI است و برای سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز مناسب‌تر است.

نتایج این تحقیق می‌تواند برای صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک نیز مفید باشد. این صندوق‌ها می‌توانند با ایجاد



سبدهای مبتنی بر استراتژی‌های PI و فروش واحدهای این صندوق‌ها به سرمایه‌گذاران امکان بهره‌مندی از این استراتژی‌ها را به‌طور غیرمستقیم فراهم آورند. در کشورهایی که چنین صندوق‌هایی وجود دارد، ناشران این صندوق‌ها که معمولاً بانک‌ها هستند مقدار کف را تضمین می‌کنند و در مقابل، از سرمایه‌گذاران کارمزد دریافت می‌کنند. به یقین، ایجاد چنین ابزارهایی در ایران نیز می‌تواند باعث توسعه هر چه بیشتر بازار سرمایه شود که از نیازهای این روزهای اقتصاد کشور است.

در مقایسه با سایر مطالعات، نتایج این پژوهش با نتایج چیهو و همکاران (۲۰۱۱) مطابقت دارد. در مقاله چیهو استراتژی‌های مختلف PI صرفاً در حالت روزانه و بدون اعمال محدودیتی روی دارایی ریسکی بررسی شده است. در این مقاله، بازه‌های زمانی به حالات ماهانه و هفتگی نیز تعمیم داده شد و مشخص شد که افزایش تعداد چیدمان‌ها از یک مقدار مشخص، نمی‌تواند باعث بهبود عملکرد شود. همچنین با در نظر گرفتن محدودیت روی اکسپوژر، پیش‌فرض‌های اعمال شده روی استراتژی‌های مدنظر واقعی‌تر شد و ارزیابی عملکردها به‌شکل دقیق‌تری انجام گرفت. از طرفی، نتایج این تحقیق با بخشی از یافته‌های جیانگ و همکاران (۲۰۰۹) هم‌خوانی ندارد. جیانگ نشان داد که رویکرد VBPI نسبت به CPPI عملکرد بهتری دارد. دلیل این موضوع این نکته است که آنها توزیع بازده دارایی مالی را در رویکرد VBPI نرمال در نظر گرفته‌اند که با واقعیت هم‌خوانی ندارد؛ در حالی که در این مقاله با در نظر گرفتن توزیع رژیم سوئیچینگ، سعی شد که دینامیک حرکتی بازار هر چه واقعی‌تر شبیه‌سازی شود. نتایج حاصل نشان داد با اعمال مدل رژیم سوئیچینگ، رویکرد CPPI عملکرد بهتری نسبت به رویکرد VBPI دارد.

به‌عنوان پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی، نتایج این پژوهش نشان داد که نوع توزیع دارایی پایه، می‌تواند تأثیر بسزایی در عملکرد استراتژی‌های PI داشته باشد، لذا می‌توان استراتژی‌های بیمه‌سبد را با در نظر گرفتن دینامیک‌های دیگر حرکتی بررسی کرد، مانند مدل‌های پرش و پخش<sup>۱</sup> که شبیه‌سازی را به دنیای واقعی نزدیک‌تر می‌کنند. همچنین بررسی استراتژی بیمه سبد با مقدار کف متغیر یا با نسبت متغیر شرطی به جای نسبت ثابت، احتمالاً سبب بهبود عملکرد این استراتژی‌ها از طریق افزایش انعطاف‌پذیری خواهد شد. لذا بررسی آنها با در نظر گرفتن مقدار کف متغیر، از دیگر مباحث قابل بررسی در این زمینه است.

## منابع

- امیر تیموری، راضیه؛ جلائی، سید عبدالمجید؛ زاینده‌رودی، محسن (۱۳۹۶). بررسی تأثیر هم‌زمانی چرخه‌های تجاری ایران و آلمان بر اصطکاک و عمق بازارهای مالی ایران (رهیافت مارکوف سوئیچینگ بی‌زین ور). *تحقیقات مالی*، ۱۹(۳)، ۳۴۱-۳۶۴.
- جهانگیری، خلیل؛ حسینی ابراهیم‌آباد، سید علی (۱۳۹۵). بررسی آثار سیاست پولی، نرخ ارز و طلا بر بازار سهام در ایران با استفاده از مدل MS-VAR-EGARCH. *تحقیقات مالی*، ۱۹(۳)، ۳۸۹-۴۱۴.

- راغفر، حسین؛ آجلو، نرجس (۱۳۹۵). برآورد ارزش در معرض خطر پرتفوی ارزی یک بانک نمونه با روش GARCH-EVT-Copula. فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران، (۶۷)، ۱۱۳-۱۴۱.
- رافعی، میثم؛ شکری، میهن (۱۳۹۸). تحلیل وضعیت‌های بازدهی در بازار سرمایه ایران: رهیافت مدل‌های نیمه مارکوف پنهان. تحقیقات مالی، ۲۱(۴)، ۵۷۰-۵۹۲.
- سجاد، رسول؛ طاهری فر، رویا (۱۳۹۵). محاسبه فاصله اطمینان و ارزیابی دقت ارزش در معرض خطر محاسبه شده با مدل مارکف سوئیچینگ گارچ در بورس اوراق بهادار تهران. تحقیقات مالی، ۱۸(۳)، ۴۶۱-۴۸۲.

## References

- Ameur, H. B. and Prigent, J.L. (2018). Risk management of time varying floors for dynamic portfolio insurance. *European Journal of Operational Research*, 269(1), 363-381.
- Amir Teimoori, R., Abdolmajid Jalae, S., Zayandehroodi, M. (2017). Investigating the Impact of Iran-Germany Business Cycle Synchronization on the Friction and Depth of Financial Markets in Iran (Markov Switching Bayesian VAR Method). *Financial Research Journal*, 19(3), 341-364. (in Persian)
- Balder, S., Brandl, M. and Mahayni, A. (2009). Effectiveness of CPPI strategies under discrete-time trading. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(1), 204-220.
- Basak, S. (2002). A comparative study of portfolio insurance. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7-8), 1217-1241.
- Bertrand, P. and Prigent, J.L. (2001). *Portfolio insurance strategies: OBPI versus CPPI*. Available in: <http://janroman.dhis.org/finance/Structured%20products/OBPI%20vs%20CPPI.pdf>
- Bertrand, P. and Prigent, J.L. (2011). Omega performance measure and portfolio insurance. *Journal of Banking & Finance*, 35(7), 1811-1823.
- Boulier, J.F. and Kanniganti, A. (2005). Expected performance and risk of various portfolio insurance strategies. *Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium*. Available in: [https://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Brussels/Boulier\\_Kanniganti.pdf](https://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Brussels/Boulier_Kanniganti.pdf)
- Constantinou, N. and Khuman, A. (2009). How does CPPI perform against the simplest guarantee strategies? Available in: [http://repository.essex.ac.uk/10042/1/dp\\_09-03.pdf](http://repository.essex.ac.uk/10042/1/dp_09-03.pdf)
- Elliott, R. J. and Miao, H. (2009). VaR and expected shortfall: a non-normal regime switching framework. *Quantitative Finance*, 9(6), 747-755.
- Hainaut, D. (2011). Risk management of CPPI funds in switching regime markets. *Banker, Markets and Investors*. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2381883>
- Hamidi, B., Maillet, B. B. and Prigent, J.L. (2009). A risk management approach for portfolio insurance strategies. *Proceedings of the 1st EIF International Financial Research Forum, Economica*.

- Ho, L.-c., J. Cadle, and M. Theobald, An analysis of risk-based asset allocation and portfolio insurance strategies. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 2011. 36(2): p. 247-267.
- Jahangiri, Kh., and Hoseini Ebrahimabad, S. (2017). The Study of Monetary Policy, Exchange Rate and Gold Effects on the Stock Market in Iran Using MS-VAR-EGARCH Model. *Financial Research Journal*, 19(3), 389 - 414. (in Persian)
- Jiang, C., Y. Ma and Y. An (2009). The effectiveness of the VaR-based portfolio insurance strategy: An empirical analysis. *International Review of Financial Analysis*, 18(4), 185-197.
- Prigent, J.L. (2007). *Portfolio optimization and performance analysis* (1st Edition), CRC Press.
- Rafei, M., & Shokri, M. (2019). An Analysis of Return States in Iran Stock Market: Hidden Semi-Markov Model Approach. *Financial Research Journal*, 21(4), 570-592. (in Persian)
- Raghfar, H. and Ajorlou, N. (2015). Estimating the Value at Risk of Currency Portfolio of a Sample Bank by GARCH-EVT-Copula Method. *Iranian Journal of Economic Research*, 67, 113 – 141. (in Persian)
- Sajad, R., & Taherifar, R. (2016). Calculating the confidence level and assessing the accuracy of the value at risk calculated with the Garch Markof Switch model on the Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, 18(3), 461 - 482. (in Persian)
- Vanden, J. M. (2006). Portfolio insurance and volatility regime switching. *Mathematical Finance. An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 16(2), 387-417.
- Weng, C. (2013). Constant proportion portfolio insurance under a regime switching exponential Lévy process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(3), 508-521.
- Zagst, R. and Kraus, J. (2011). Stochastic dominance of portfolio insurance strategies. *Annals of Operations Research*, 185(1), 75-103.