Higher Moments Portfolio Optimization Considering Entropy based on Polynomial Idealistic Programming

Ahmad Nabizadeh
Assistant Prof., Faculty of Management, Kharazmi University, Tehran, Iran. E-mail: ahmadnabizade@khu.ac.ir

Adel Behzadi
*Corresponding Author, Ph.D Candidate, Department of Financial Engineering, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: adel_behzadi@ut.ac.ir

Abstract

Objective: chooseing the optimal portfolio is an integral issue in investment. It is challenging to estimate the tock return rate because of the vague nature of future events. Hence, it is recommended to add diverdity to cover the related risks. According to Markowitz's modern portfolio theory, assets return has normal distribution. But empirical evidences show that assets return distribution is not normal and we would consider higher moment and Entropy as diversification indexes in this paper.

Methods: In this study, a new approach for polynomial idealistic programming which is based on a mean-variance-skewness-kurtosis-entropy model is proposed and two measures of Shannon entropy and Gini-Simpson entropy are used.

Results: The results indicated that the proposed approach is well-suited, especially for portfolio models with higher moments.

Conclusion: The findings showed that using entropy as a diversification index cannot cause any significant decrease in optimized values for other goals. Using Shannon entropy and Gini-Simpson entropy models can lead to an increase in return and Shannon entropy model can yield more diversification compared to Gini-Simpson entropy model.

Keywords: Diversity index, entropy, higher moment portfolio, portfolio optimization, portfolio performance measure

Citation: Nabizadeh, A; Behzad, A. (2018). Higher Moments Portfolio Optimization Considering Entropy based on Polynomial Idealistic Programming. *Financial Research Journal*, 20 (2), 191-208. *(in Persian)*

Financial Research Journal, 2018, Vol. 20, No.2, pp. 191-208.
DOI: 10.22059/frj.2018.255731.1006645
Received: February 11, 2018; Accepted: May 31, 2018

گشتاور مراتب بالاتر در بهینه‌سازی پرتفوی با درنظر گرفتن آنتروپی و استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای

احمد نبی‌زاده
استادیار، گروه منابع انسانی و کسب و کار، دانشکده مدیریت، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: ahmadnabizade@khu.ac.ir

عادل بهزادی
* نویسنده مسئول، دانشجوی دکتری مهندسی مالی، گروه مدیریت مالی و بیمه، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: adel_behzadi@ut.ac.ir

چکیده

هدف: انتخاب پرتفوی بهینه یکی از موضوعات مهم در سرمایه‌گذاری است. به دلیل ماهیت مبهم این اتفاقات، آینده پیش‌بینی بازده سهام با چالش مواجهه است. بر اساس نظریه مدرن پرتفوی، برای پوشش ریسک این اتفاقات از تنوع‌سازی استفاده می‌شود. این نظریه براساس مفروضاتی بنا شده است که یکی از این مفروضات نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها است. اما شواهد تجربی نشان از عدم نرمال بودن بازده دارایی‌ها دارد. زمانی که فرض نرمال بودن نقض می‌شود، از گشتاورهای مراتب بالاتر جهت کامل‌تر کردن مدل استفاده می‌شود. از طرف دیگر آنتروپی یکی از معیارهای تنوع‌سازی است که در مدل‌های بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. لذا، هدف از نگارش مقاله درنظر گرفتن فرض غیرنرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها از طریق وارد کردن گشتاورهای مراتب بالاتر در مدل‌ها و همچنین درنظر گرفتن معیار آنتروپی به‌عنوان معیار تنوع‌سازی در مدل بهینه‌سازی پرتفوی می‌باشد.

روش: در مقاله پیش‌رو، رویکرد جدیدی با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای براساس مدل میانگین، واریانس، چولگی، کشیدگی و آنتروپی پیشنهاد شده است. در این مقاله برای اندازه‌گیری آنتروپی از معیارهای شانون و جینی سیمپسون استفاده شده است. همچینین برای بهینه‌سازی مسأله از روش آرمانی چندجمله‌ای استفاده شده است.

یافته‌ها: یافته‌ها نشان از بهبود ارزیابی عملکرد پرتفوی نسبت به مدل میانگین واریانس و مدل‌هایی که به تنهایی گشتاور مراتب بالاتر را درنظر گرفته‌اند، دارد.

نتیجه‌گیری: نتایج حاصل از مقایسه مدل‌ها براساس شاخص‌های ارزیابی پرتفوی نشانگر این است که استفاده از آنتروپی به منظور متنوع‌سازی، موجب کاهش معنی‌دار مقادیر بهینه سایر توابع هدف نمی‌شود. همانطور که مشاهده شد، هنگام استفاده از آنتروپی جینی سیمپسون و گشتاورهای مراتب بالاتر، بازده بیشتری نسبت به سایر مدل‌ها بدست آمد و از طرف دیگر آنتروپی شانون، تنوع‌سازی بیشتری نسبت آنتروپی جینی سیمپسون را نتیجه داد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی پرتفوی، گشتاورهای مراتب بالاتر، شاخص تنوع‌سازی، آنتروپی، معیارهای ارزیابی عملکرد

استناد: حیدری، مهدی؛ منصورفر، غلامرضا؛ قاسم‌زاده، مرتضی (۱۳۹۷). گشتاور مراتب بالاتر دربهینه‌سازی پرتفوی با درنظر گرفتن آنتروپی و استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۲۰ (۲)، ۱۹۱– ۲۰۸.

فصلنامه تحقیقات مالی، ۱۳۹۷، دوره ۲۰، شماره ۲، ص. ۱۹۱– ۲۰۸

DOI: 10.22059/frj.2018.255731.1006645

دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۲۲، پذیرش ۱۳۹۷/۰۳/۱۰

مقدمه

از زمان گسترش کامپیوترهای مدرن، محاسبات مالی پیشرفت چشمگیری داشته است. منظور از بهینه‌سازی پرتفوی، انتخاب سبد سهام متشکل از دارایی‌ها می‌باشد به‌نحوی که مطلوبیت سرمایه‌گذار بیشینه گردد. مارکوئیتز[1] مدل بهینه‌سازی کلاسیک خود را مبتنی بر معیارهای میانگین و واریانس ارائه داد. مهمترین مفروضات این مدل، درنظر گرفتن بازده دارایی‌ها به‌عنوان یک متغیر تصادفی نرمال بود که در ادامه محققان مختلفی در پژوهش‌های خود نشان دادند که بازده دارایی‌ها از تابع چگالی نرمال پیروی نمی‌کند؛ بنابراین مدل کلاسیک ارائه شده توسط مارکوئیتز کارایی خود را در انتخاب سبد سهام بهینه از دست می‌دهد (ساموئلسون[2]، ۱۹۷۰).

مطالعات صورت گرفته توسط آردیتی[3] (۱۹۷۱)، اسیموکویتز و بیدل[4] (۱۹۷۸) و کونو و سوزوکی[5] (۱۹۹۲) نشان می‌دهد که مطلوبیت سرمایه‌گذاران کوادراتیک نیست و باید گشتاور مراتب بالاتر مانند کشیدگی و چولگی نیز در نظر گرفته شود و با توجه به پیشرفت پردازنده‌ها مدل‌های MVS و MVSK به منظور بهینه‌سازی پرتفوی ارائه شدند (آردیتی، ۱۹۷۱؛ سیموکویتز و بیدل، ۱۹۷۸; کونو و سوزوکی، ۱۹۹۲).

از طرفی، مدل‌هایی مانند MVS در دورانی که بحران مالی رخ می‌دهد کارایی خود را به منظور متنوع‌سازی پرتفوی، به‌خصوص زمانی که تعداد دارایی‌های مورد استفاده در مسئله محدود باشد، از دست خواهند داد (دیمیگوئل و نوگالس[6]، ۲۰۰۹). معیار دیگری که به این منظور معرفی شده است، آنتروپی پرتفوی است، که معیار مناسبی برای متنوع‌سازی پرتفوی می‌باشد. مطالعات نشانگر، بالاتر بودن کارایی بالاتر جواب بدست آمده، هنگام استفاده از آنتروپی به‌عنوان شاخص ریسک، به‌خصوص برای داده‌های خارج از نمونه می‌باشد (برا و پارک، ۲۰۰۸).

با توجه به نکات فوق، مدل‌هایی که ترکیبی از گشتاور مراتب بالاتر و آنتروپی را درنظر می‌گیرند، می‌توانند کارایی بالاتری برای سرمایه‌گذار به همراه داشته باشند. مقاله حاضر به دنبال استفاده ترکیبی از گشتاور مراتب بالاتر و آنتروپی برای بهینه‌سازی پرتفوی متشکل از صنایع مختلف می‌باشد. با این نکته که از دو معیار مختلف برای اندازه‌گیری آنتروپی مورد استفاده قرار گرفته است. دو معیار موردنظر، آنتروپی شانون[7] و جینی سیمپسون[8] می‌باشد و به دلیل چند معیاره بودن مدل از روش برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای (PGP)[9] برای حل مسئله استفاده شده است.

در ادامه، ابتدا به بیان پیشینه پژوهش پرداخته می‌شود، سپس مروری بر مبانی نظری صورت می‌گیرد. در انتها یافته‌های پژوهش و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

1. Markowitz
2. Samuelson
3. Arditti
4. SimkowitzAndBeedles
5. Konno And Suzuki
6. DeMiguel and Nogales
7. Shannon Entropy
8. Ginisimpson Entropy
9. Polynomial Goal Programming

پیشینه نظری پژوهش

فرموله کردن ریاضی مسئله بهینه‌سازی پرتفوی

بهینه‌سازی پرتفوی در واقع تعیین ترکیب مناسب دارایی‌ها برای دستیابی به اهداف از پیش‌تعیین شده می‌باشد. در این بخش قصد داریم مدل‌سازی بهینه‌سازی پرتفوی را شرح دهیم. فرض کنید که $W^T = (w_1. w_2 \dots. w_n)$ ترانهاده بردار اوزان دارایی‌ها می‌باشد که w_i نشان‌دهنده وزن تخصیص یافته به دارایی i ام می‌باشد. همچنین $M = (m_1. m_2 \dots. m_n)^T$ نشان‌دهنده بردار بازده دارایی‌ها است و V، S و K به ترتیب نشان‌دهنده واریانس، چولگی و کشیدگی دارایی‌ها می‌باشند. همچنین برای نشان دادن آنتروپی شانون و جینی سیمپسون به ترتیب از نمادهای E_S و E_{G-S} استفاده می‌شود. میانگین، واریانس، گشتاور سوم (چولگی) و گشتاور چهارم (کشیدگی) پرتفوی به شرح فرمول‌های زیر با توجه به نمادهای فوق قابل تعریف می‌باشند.

$$R_{pe} = E(R_p) = W^T M = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i$$ رابطه ۱)

$$V_p = V(R_p) = W^T V(W) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$ رابطه ۲)

$$S_p = S(R_p) = \mathrm{E}(W^T(R-M))^3 = W^T S(W \otimes W) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_i w_j w_k s_{ijk}$$ رابطه ۳)

$$S_p = S(R_p) = \mathrm{E}(W^T(R-M))^4 = W^T K(W \otimes W \otimes W) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} w_i w_j w_k w_l k_{ijkl}$$ رابطه ۴)

به‌طوری‌که $R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$ بازده پرتفوی، $E(R_i) = m_i$ میانگین دارایی i ام و $\sigma_{i.j}$ کواریانس بین دارایی i ام و j ام می‌باشد. همچنین s_{ijk} و k_{ijk} به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد. دقت داشته باشید که $\otimes$ نشان‌دهنده ضرب رونکر است.

$$\begin{aligned} s_{ijk} &= E\big((R_i - m_i)(R_j - m_j)(R_k - m_k)\big) \\ k_{ijk} &= E\big((R_i - m_i)(R_j - m_j)(R_k - m_k)(R_l - m_l)\big) \end{aligned}$$ رابطه ۵)

همچنین آنتروپی شانون و جینی سیمپسون به شرح زیر قابل محاسبه می‌باشد.

رابطه ۶
$$E_s = -\sum_{i=1}^{n} w_i lnw_i = -W^T(lnW)$$

رابطه ۷
$$E_{G-S} = 1 - \sum_{i=1}^{n} {w_i}^2 = 1 - W^T W$$

رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای

در این بخش رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای (PGP) برای مسئله بهینه‌سازی پرتفوی با درنظر گرفتن درجات گشتاور بالاتر و معیارهای آنتروپی شرح داده شده است. این رویکرد اولین بار توسط تای و لئونارد[1](۱۹۸۸) برای بهینه‌سازی چند معیاره مورد استفاده قرار گرفت (تای و لئونارد، ۱۹۸۸). در ادامه از این رویکرد برای مسئله بهینه‌سازی پرتفوی محققانی مانند لای[2] (۱۹۹۱)، چوناچیندا[3] و همکاران (۱۹۹۷)، کالنا و کولازو[4] (۲۰۰۷)، دیویس[5] و همکاران(۲۰۰۹)، مهیری و پریگنت[6] (۲۰۱۰)، اسکرینجاریک[7] (۲۰۱۳) و پرولس و اسچویزر[8] (۲۰۱۴) بهره برده شد (لای، ۱۹۹۱; چوناچیندا و همکاران، ۲۰۰۶; کالنا و کولازو، ۲۰۰۷; دیویس و همکاران، ۲۰۰۹; مهیری و پریگنت،۲۰۱۰; اسکرینجاریک، ۲۰۱۳; پرولس و اسچویزر، ۲۰۱۴). البته لازم به ذکر است که در مقالات داخلی از رویکردهای دیگر برنامه‌ریزی آرمانی نیز برای بهینه‌سازی پرتفوی استفاده شده است (تقی‌زاده یزدی و همکاران، ۱۳۹۵; اسلامی بیدگی و تلنگی، ۱۳۸۷). مقاله حاضر سعی دارد بهینه‌سازی پرتفوی را با درنظر گرفتن گشتاورهای مراتب بالاتر و آنتروپی انجام دهد. تابع هدف مدل زیر گشتاورهای اول تا چهارم و همچنین آنتروپی شانون و جینی سیمپسون ارائه شده است.

مدل۱)

$$Maximize\ W^T M$$
$$Minimize\ W^T V\ \mathrm{W}$$
$$Maximize\ E\big(W^T(R-M)\big)^3$$
$$Minimize\ \big(W^T(R-M)\big)^4$$
$$maximize\ -W^T(lnw)$$
$$maximize\ 1 - W^T W$$
$$subject\ to\ W^T 1_N = 1$$
$$w \geq 0$$

1. Tayi and Leonard
2. Lai
3. Chunhachinda
4. Canela and Collazo
5. Davies
6. Mhiri and Prigent
7. Škrinjarić
8. Proelss & Schweiz

در مدل فوق 1_N نشان‌دهنده بردار $N \times 1$ می‌باشد. به منظور حل مدل فوق با استفاده از رویکرد PGP دو مرحلـه وجود دارد. مرحله اول تمرکز بر هر تابع هدف و بدست آوردن مقدار بهینه بدون درنظر گرفتن سایر توابع هدف مـی‌باشـد که با نمادهای R_{pe}^*، V_p^*، S_p^*، K_p^*، E_s^* و E_{G-s}^* نشان داده می‌شود. در مرحله دوم متغیرهای آرمـانی d_1، d_2، d_3، d_4، d_5 و d_6 به منظور مینیمم‌سازی انحرافات به‌کار گرفته می‌شوند. در مرحله اول مسئله به شش زیر مسئله بـه شـرح زیـر تقسیم می‌شود.

$$\begin{aligned} &Maximize\ R_{pe}^* = W^T M \\ &subject\ to\ W^T 1_N = 1 \\ &w \geq 0 \end{aligned}$$ مدل ۲)

$$\begin{aligned} &Minimize\ V_p^* = W^T V\, \mathrm{W} \\ &subject\ to\ W^T 1_N = 1 \\ &w \geq 0 \end{aligned}$$ مدل ۳)

$$\begin{aligned} &Maximize\ S_p^* = E\left(W^T (R - M)\right)^3 \\ &subject\ to\ W^T 1_N = 1 \\ &w \geq 0 \end{aligned}$$ مدل ۴)

$$\begin{aligned} &Minimize\ K_p^* = \left(W^T (R - M)\right)^4 \\ &subject\ to\ W^T 1_N = 1 \\ &w \geq 0 \end{aligned}$$ مدل ۵)

$$\begin{aligned} &maximize\ E_s^* = -W^T (lnw) \\ &subject\ to\ W^T 1_N = 1 \\ &w \geq 0 \end{aligned}$$ مدل ۶)

$$\begin{aligned} &maximize\ E_{G-s}^* = 1 - W^T W \\ &subject\ to\ W^T 1_N = 1 \\ &w \geq 0 \end{aligned}$$ مدل ۷)

مدل‌های فوق را می‌توان با استفاده از برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی حل کرد و توابع هدف را محاسبه کرد. حـال این توابع هدف با استفاده از فاصله مینوسکی[1] در قالب مدل PGP جمع می‌شوند. فاصله مینوسکی به صورت رابطه زیـر قابل تعریف می‌باشد.

$$Z = \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{d_k}{Z_k}\right|^p\right)^{1/p}$$ رابطه ۸)

در رابطه فوق Z_k نشان‌دهنده مقدار استاندارد شده تابع هدف k ام و d_k انحـراف از تـابع هـدف k ام مـی‌باشـد.

1. Minkowskidistance

همچنین سرمایه‌گذاران بین اهداف مختلف اولویت‌های خود را دارند که اولویت هر تابع هدف با λ_i نشان داده می‌شود. درنظر گرفتن مقادیر مختلف λ_i می‌تواند مدل بهینه‌سازی را به شکل‌های مختلف تبدیل کند. به طور مثال مدل‌های MV (میانگین و واریانس)، MVS (میانگین، واریانس و چولگی) و MVSK (میانگین، واریانس، چولگی و کشیدیگی) حالت خاصی از این مسئله می‌باشند، که با درنظر گرفتن مقادیر مختلف λ_i بدست آمده اند. حال با مشخص بودن λ_i و مقادیر بهینه هر یک از توابع هدف در گام دوم مدل بهینه‌سازی به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$minimize\ Z = \left(1+\left|\frac{d_1}{R_{pe}^*}\right|\right)^{\lambda_1} + \left(1+\left|\frac{d_2}{V_p^*}\right|\right)^{\lambda_2} + \left(1+\left|\frac{d_3}{S_p^*}\right|\right)^{\lambda_3} + \left(1+\left|\frac{d_4}{K_p^*}\right|\right)^{\lambda_4} + \left(1+\left|\frac{d_5}{E_s^*}\right|\right)^{\lambda_5} + (1+\left|\frac{d_6}{E_{G-s}^*}\right|)^{\lambda_6}$$

$$\begin{aligned}
&subject\ to{:}\, W^T M + d_1 = R_{pe}^* \\
&W^T V\, W - d_2 = V_p^* \\
&E\left(W^T(R-M)\right)^3 + d_3 = S_p^* \\
&\left(W^T(R-M)\right)^4 - d_4 = K_p^* \\
&-W^T(lnw) + d_5 = E_s^* \\
&1 - W^T W + d_6 = E_{G-S}^* \\
&W^T 1_N = 1 \\
&w \geq 0
\end{aligned}$$

مدل ۸)

مسئله فوق را می‌توان با λ_i مختلف حل کرد و اوزان مربوطه را با توجه به سناریوهای مختلف محاسبه کرد.

معیارهای ارزیابی پرتفوی

معیار شارپ یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین معیارهای ارزیابی پرتفوی در آزمون‌های خارج از نمونه می‌باشد. که به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$SR = \frac{r_p^0}{\sigma_p^0}$$

رابطه ۹)

در رابطه فوق r_p^0 و σ_p^0 به ترتیب نشانگر میانگین و انحراف معیار خارج از نمونه می‌باشند. شاخص SRمعیار مناسبی برای اندازه‌گیری عملکرد پرتفوی در زمانی‌که r_p^0 منفی است نمی‌باشد. در این شرایط، ایسرالسن[1] (۲۰۰۵) شاخص SR تعدیل شده را به شرح زیر معرفی کرد (ایسرالسن، ۲۰۰۵).

1. Israelsen.

$$MSR = \frac{r_p^0}{({}^{r_p^0}/_{abs(r_p^0)})} \quad (\sigma_p^0)$$ رابطه ۱۰)

در رابطه فوق abs شان‌دهنده قدرمطلق می‌باشد.

رویکرد پنجره غلطان

در مقاله پیش‌رو به منظور محاسبه شاخص ارزیابی عملکرد از رویکرد پنجره غلطان بهره برده شده است. در این رویکرد، معمولا پنجره تخمین به طول ۷۰ روز $WL = 70$ درنظر گرفته می‌شود. در هر مرحله با استفاده از داده‌های مربوط به این پنجره تخمین و مقادیر بهینه محاسبه شده برای هر تابع هدف، اوزان بهینه محاسبه می‌شود. این فرآیند با غلط زدن پنجره و داده‌های جدید تکرار شده و اوزان بهینه دوباره محاسبه خواهد شد. در انتها $T - WL$ پرتفوی (بردار اوزان) طی این فرآیند حاصل خواهد شد که T دوره زمانی مورد نظر و WL طول پنجره می‌باشد. در هر مرحله با استفاده از اوزان محاسبه شده مقدار $R_{p.t+1}$ به‌عنوان بازده خارج از نمونه پرتفوی برای دوره t+1 به شرح فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$R_{p.t+1} = W_t^T r_{t+1}$$ رابطه ۱۱)

در رابطه فوق r_{t+1} بردار بازدهی در زمان t+1 می‌باشد. بنابراین می‌توان به تعداد $T - WL$ بازده خارج از نمونه برای هر پرتفوی بهینه محاسبه شده بدست آورد که این بازده‌ها را برای محاسبه SR و MSR می‌توان برای مقایسه مدل‌ها محاسبه کرد. همچنین همانند پژوهش‌ی که اوتسا و کانتار[1] (۲۰۱۱) انجام دادند، به منظور مقایسه SR می‌توان از آماره Z_{JK} استفاده کرد که دارای میانگین صفر و واریانس ϑ می‌باشد و مقدار واریانس بنا به رابطه زیر قابل محاسبه است (اوتسا و کانتار، ۲۰۱۱).

$$\vartheta = \frac{1}{T - WL}(2 - 2\rho_{1.2} + \frac{1}{2}(SR_1^2 + SR_2^2 - 2SR_1SR_1{\rho_{1.2}}^2))$$ رابطه ۱۲)

در رابطه فوق SR_1 و SR_2 مقادیر معیار شارپ محاسبه شده از دو مدل مختلف هستند و $\rho_{1.2}$ نشان‌دهنده میزان همبستگی میان بازده‌های دو مدل می‌باشد. بنابراین، آماره آزمون به شرح رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$Z_{JK} = \frac{(SR_1 - SR_2)}{\sqrt{\vartheta}}$$ رابطه ۱۳)

---

1. Ustaand Kantar

همچنین در این پژوهش برای مقایسه مدل‌ها به لحاظ هزینه معاملاتی از نسبت گردش پرتفـوی (PT)[1] معرفـی شده توسط دیمیگوئل و نوگالس (۲۰۰۹) به شرح رابطه زیر استفاده شده است (دیمیگوئل و نوگالس، ۲۰۰۹).

پیشینه تجربی

$$PT = \frac{1}{T - WL - 1} \sum_{t=WL}^{T-1} \sum_{i=1}^{n} |w_{i.t+1} - w_{i.t}| \qquad \text{(۱۴ رابطه)}$$

پژوهش

در حوزه تحقیقات مالی یکی از مهمترین مسائل، انتخاب پرتفوی بهینه است. یعنی سرمایه‌گذار چه ترکیبی از دارایی‌ها را انتخاب کند که مقدار مطلوبیت با توجه به محدودیت‌های وی بیشینه گردد.

در تئوری مدرن پرتفوی فرض می‌شود مقدار بازده به‌عنوان یک متغیر تصادفی است. یکی از مباحـث اساسـی در این‌گونه انتخاب معیار ریسک است. سرمایه‌گذار باید مقدار ریسک را کمینه و بازده را تا جایی که ممکن اسـت بیشـینه کند. پایه و اساس تئوری مدرن پرتفوی به‌وسیله مارکوئیتز گذاشته شد. مارکوئیتز واریانس را به‌عنوان شاخص ریسـک در نظر گرفت (مارکوئیتز[2]، ۱۹۵۲).

در پژوهش دیگری مارکوئیتز نشان داد که معیار واریانس دارای نقـص‌هـایی اسـت (مـارکوئیتز، ۱۹۵۹). یکـی از مهمترین نقص‌های مطرح شده این است که واریانس، دید یکسانی را نسبت به بازده‌های بالا و پا یین دارد یعنی مقدار بازده خیلی بالا و خیلی پایین برای سرمایه‌گذار ریسک یکسانی را در پی خواهد داشت ولی در جهان واقعی این چنـین به نظر نمی‌رسد. سرمایه‌گذاری فقط نوسانات بخش نامطلوب از بازده را به‌عنوان شاخص ریسک در نظرمی‌گیرنـد (روم و فرگوسن[3] (۱۹۹۴). مطالعات فاما[4] (۱۹۶۵)، آردیتـی (۱۹۷۱)، اسـیموکویتز و بیـدل (۱۹۷۸) و چوناچینـدا و همکـاران (۱۹۹۷) نشان می‌دهدکه بازده دارایی‌ها دارای توزیع متقارن نیست (فاما، ۱۹۶۵; آردیتی، ۱۹۷۱; اسـیموکویتز و بیـدل، ۱۹۷۸; چوناچیندا و همکاران، ۱۹۹۷). نوسانات زیر میانگین بازده می‌تواند معیار مفیدی برای بیان ریسـک در واقعیـت باشد. یکی از معیارهایی که در این رابطه استفاده می‌شود نیمه واریانس است که ابتدا توسط مارکوئیتز به‌عنـوان معیـار ریسـک اسـتفاده شـد (مـارکوئیتز، ۱۹۵۹) و بعـد از آن توسـط محققـان دیگـری مـورد اسـتفاده قـرار گرفـت (چـو و دنینگ[5]،۱۹۹۴; گروتولد و هالرباش، ۱۹۹۹).

از طرفی بسیاری از محققان نشان دادند که درجات گشتاور بالاتر قابل چشم‌پوشی در نظریه پرتفوی نیستند مگر اینکه بنابر دلایلی مانند تقارن توزیع احتمال، این گشتاورها درنظر گرفته نشوند (کرایس و لیتزبرگ، ۱۹۷۶; سانتوس و فرناندز، ۲۰۰۰; ونگ و همکاران، ۲۰۰۷; ژانگ، ۲۰۰۳).

ساموئلسون (۱۹۷۰) اولین کسی بود که نشان داد که اگر گشتاور اول و دوم مساوی باشد سرمایه‌گذار تمایـل بـه انتخاب پرتفوی که درجه گشتاور بالاتر دارد (ساموئلسون، ۱۹۷۰). در پژوهش‌های که انجام شد، شواهد نشان‌گـر ایـن

1. Portfolio Turnover
2. Markowitz
3. Rom, & Ferguson
4. Fama
5. Chow and Denning

مطلب بود که زمانی که در مدل بهینه‌سازی از چولگی استفاده می‌شود، سرمایه‌گذاران می‌توانند بازده بالاتری کسب کنند (هاروی و لیتچی، ۲۰۱۰). اما در ادامه در مدل‌های بهینه‌سازی علاوه بر درنظر گرفتن چولگی، کشیدگی نیز درنظر گرفته شد و مدل MVSK مورد استفاده قرار گرفت و به نوعی چهار گشتاور اول بازده دارایی‌ها در مدل گنجانده شد که به نوعی خواص واقعی بازده دارایی‌ها مانند دنباله پهن و غیر نرمال بودن نیز در مدل بهینه‌سازی پرتفوی درنظر گرفته شد (یو و همکاران، ۲۰۰۶; اسکرینجاریک، ۲۰۱۳; مورتون و همکاران، ۲۰۱۷).

از سویی دیگر یکی از معیارهای دیگری که در بهینه‌سازی پرتفوی مورد توجه تعدادی از پژوهشگران قرار گرفته است، آنتروپی است. دیمیگوئل و نوگالس (۲۰۰۹) نشان دادند که هنگام وقوع بحران مالی، مدل میانگین–واریانس دارای ریسک بالاتری نسبت به پرتفوی که به خوبی متنوع‌سازی شده است، می‌باشد (دیمیگوئل و نوگالس، ۲۰۰۹). آنتروپی به‌عنوان معیاری از تنوع‌سازی است که می‌توان در تابع هدف مسأله بهینه‌سازی پرتفوی مورد استفاده قرار داد و آزمون خارج از نمونه نشان از بالاتر افزایش کارایی پرتفوی هنگام استفاده از آنتروپی است (برا و پارک، ۲۰۰۸). همچمین در پژوهش دیگری توسط وایل و ناروسکی (۲۰۱۶) مقادیر ریسک و بازده به‌وسیله آنتروپی و گشتاورهای جزئی محاسبه شد (وایل و ناوروسکی، ۲۰۱۶).

برخی محققان دو رویکرد بالا یعنی استفاده از گشتاورهای مراتب بالاتر و آنتروپی را به صورت ترکیبی در مسأله بهینه‌سازی پرتفوی مورد استفاده قرار دادند. همچنین برخی دیگر از محققان کارایی توابع مختلف آنتروپی در چارچوب مدل‌های با گشتاور بالاتر در محیط فازی مورد بررسی قرار دادند (یو و ونگ، ۲۰۱۷; رای و ماجومدر،۲۰۱۷).

یافته‌های پژوهش

توصیف داده‌ها

به منظور نشان دادن کارایی رویکرد پیشنهادی از داده‌های مربوط به بازده هشت صنعت منتخب استفاده شده است. اطلاعات مربوط به شاخص صنایع به صورت ماهانه از نرم‌افزار tseclient استخراج شده است و از بازده زمانی از اسفند ۱۳۸۷ تا اسفند ۱۳۹۶ استفاده شده است. این نمونه بر اساس روش نمونه‌گیری قضاوتی از بهترین صنایع بورسی انتخاب شده است. برای توصیف داده‌ها از متغیرهای میانگین، واریانس، چولگی وکشیدگی استفاده شده است. همچنین برای اینکه نشان دهیم توزیع داده‌ها نرمال و متقارن نیست از آزمون جارک برا[1] استفاده‌شده است. آماره این آزمون بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود (جارک و برا، ۱۹۸۷).

$$JB = \frac{n}{6}(s^2 + \frac{(k-3)^2}{4})$$ رابطه ۱۵)

در این رابطه n تعداد نمونه، s چولگی و k کشیدگی داده‌ها را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که این آماره از توزیع مربع کای با دو درجه آزادی پیروی می‌کند.

1. Jarque and Bera

جدول ۱. توصیف داده‌ها

ردیف	شرح	میانگین	واریانس	چولگی	کشیدگی	آماره جارک برا	P
۱	**کانه های فلزی**	۰/۰۳۲	۰/۰۰۳	۰/۱۱۷	۸/۵۴۸	۱۸۲/۴۴۲	۰/۰۰۱
۲	**فراورده‌های نفتی**	۰/۰۳۴	۰/۰۰۴	-۰/۱۸۴	۴/۴۶۷	۱۳/۵۴۱	۰/۰۰۸
۳	**لاستیک**	۰/۰۲۸	۰/۰۰۵	-۰/۲۰۰	۵/۵۲۷	۳۸/۷۲۱	۰/۰۰۱
٤	**فلزات اساسی**	۰/۰۳۴	۰/۰۰۴	-۰/۳۰۹	۵/۸۱۶	۴۹/۱۹۰	۰/۰۰۱
۵	**خودرو**	۰/۰۲۵	۰/۰۰۶	۰/۲۴۷	۷/۹۱۳	۱۴۴/۲۵۵	۰/۰۰۱
٦	**شیمیایی**	۰/۰۳۸	۰/۰۰۱	۰/۰۷۰	۵/۸۵۶	۲۳/۴۰۶	۰/۰۰۲
۷	**سیمان**	۰/۰۲۹	۰/۰۰۳	-۰/۴۱۲	۴/۵۱۲	۱۷/۵۳۱	۰/۰۰۴
۹	**بانکداری**	۰/۰۱۴	۰/۰۱۱	-۰/۱۳۶	۳/۳۹۹	۱/۳۷۶	۰/۴۳۶

همان‌طور که مشاهده می‌کنید به‌جز صنعت بانکداری سایر صنایع براساس آزمون جارک برا نرمال نمی‌باشد. بنابراین برای کامل‌تر شدن مدل می‌توان از گشتاورهای مراتب بالاتر و همچنین آنتروپی استفاده کرد.

اجرای مدل

در بهینه‌سازی با استفاده از روش PGP و رویکرد پنجره غلتان با افق ۷۰ ماهه، ابتدا مدل‌های ۲ تا ۷ اجرا می‌شود. برای اجرای مدل‌ها به دلیل غیرخطی بودن از تابع مینیمم‌سازی[1] در نرم‌افزار متلب استفاده شده است که در جدول زیر میانگین توابع هدف هر مدل در رویکرد پنجره غلتان در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۲. مقادیر بهینه هر یک از توابع هدف با توجه به مدل‌های ۲-۷

ردیف	میانگین بازدهی بهینه	میانگین واریانس بهینه	میانگین چولگی بهینه	میانگین کشیدگی بهینه	میانگین آنتروپی شانون بهینه	میانگین آنتروژپی سیمپسون
شرح	۰.۰۳۹	۰.۰۰۱۰	۰.۰۰۰۴	۰.۸۵۴۸	۲.۶۳۴۵	۰.۹۳۵۴

در ادامه با توجه به مدل ۸ و ترکیب‌های مختلف λ_i می‌توان ترکیب‌های مختلفی از جواب‌های بهینه را محاسبه کرد. در مقاله پیش‌رو برای λ_i مقادیر باینری ۰ و ۱ درنظر گرفته شده است و یازده مدل مختلف با یکدیگر مورد مقایسه واقع شده است. علاوه بر این مدل هم‌وزن (EWM) به‌عنوان مدل پایه نیز محاسبه شده است. میانگین هر تابع هدف محاسبه شده به تفکیک هر مدل در جدول زیر ارائه شده است. توجه داشته باشید که اگر $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 1$ و برای سایر مقادیر λ_i مقدار صفر درنظر گرفته شود، مدل مذکور به مدل میانگین–واریانس تبدیل خواهد شد و برای بهینه‌سازی از نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است.

همانطور که در جدول زیر مشاهده می‌کنید، بیشترین مقدار میانگین بازدهی در بین مدل‌های EWM، MVM،

۱. از تابع Fmincon استفاده شده است.

MVSM و MVSKM، مربوط به مدل MVM می‌باشد. همچنین برای سایر توابع هدف مدل MVSKM نتایج بهتری را به همراه داشته است. اما هنگامی که در مدل‌ها آنتروپی نیز درنظر گرفته می‌شود به ترتیب مدل‌های $ME_{G-S}M$ و ME_SM دارای بیشترین بازده می‌باشند.

زمانی که بر روی آنتروپی شانون تمرکز می‌شود، مدل ME_SM بهترین مقدار میانگین بازدهی بهینه، آنتروپی شانون و آنتروپی جینی سیمپسونرا به سرمایه‌گذار حاصل شده است و برای سایر توابع هدف $MVSKE_SM$ بهترین نتیجه را داده است.

اما زمانی که بر روی آنتروپی جیمی سیمپسون تمرکز می‌شود، مدل $ME_{G-S}M$ بهترین مقدار میانگین بازدهی بهینه، آنتروپی شانون و آنتروپی جینی سیمپسون را به سرمایه‌گذار حاصل شده است و برای سایر توابع هدف $MVSKE_{G-S}M$ بهترین نتیجه را داده است.

حال اگر مدل‌های MVM، $\mathrm{MVE_SM}$ و $\mathrm{MVE_{G-S}M}$ با یکدیگر مقایسه شوند، مدل MVM دارای بهترین مقدار $\mathrm{V_P}$، $\mathrm{S_P}$ و $\mathrm{K_P}$، مدل $\mathrm{MVE_SM}$ بهترین مقدار $\mathbf{E_S}$ و مدل $\mathrm{MVE_{G-S}M}$ بهترین مقدار $\mathrm{E_{G-S}}$ و $\mathrm{R_{pe}}$ می‌باشد.

همچنین از مقایسه مدل‌های MVSM، $\mathrm{MVSE_SM}$ و $\mathrm{MVSE_{G-S}M}$ این نتیجه حاصل می‌شود که مدل MVSM دارای بهترین مقدار $\mathrm{R_{pe}}$، $\mathrm{V_P}$، $\mathrm{S_P}$ و $\mathrm{K_P}$ می‌باشد. درصورتیکه مدل $\mathrm{MVSE_SM}$ بهترین $\mathbf{E_S}$ و مدل $\mathrm{MVSE_{G-S}M}$ بهترین مقدار $\mathbf{E_{G-S}}$ در بین این مدل‌ها دارا می‌باشند.

جدول ۳. میانگین توابع هدف

مدل	میانگین بازدهی	میانگین واریانس	میانگین چولگی	میانگین کشیدگی	میانگین آنتروپی شانون	میانگین آنتروژپی سیمپسون
EWM	۰/۰۳۰	۰/۰۰۵۷	-۰/۱۱۰۹	۶/۳۳۰۱	۲/۶۳۴۵	۰/۹۳۵۴
MVM	۰/۰۳۴	۰/۰۰۲۲	-۰/۰۷۱۱	۰/۷۰۰۸	۰/۳۳۶۰	۰/۱۷۳۶
MVSM	۰/۰۳۳۶	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۷۰۴	۰/۶۹۰۵	۰/۳۳۱۳	۰/۱۵۹۶
MVSKM	۰/۰۳۲۰	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۶۹۰	۰/۶۷۱۸	۰/۳۴۳۷	۰/۱۸۳۳
$\mathrm{ME_SM}$	۰/۰۳۴۸	۰/۰۰۵۵	-۰/۱۱۳۷	۵/۷۷۶۴	۲/۵۰۵۵	۰/۹۱۶۸
$\mathrm{MVE_SM}$	۰/۰۳۳۰	۰/۰۰۲۵	-۰/۰۸۷۰	۰/۹۷۶۵	۱/۴۶۴۶	۰/۵۸۷۶
$\mathrm{MVSE_SM}$	۰/۰۳۲۸	۰/۰۰۲۴	-۰/۰۷۶۹	۰/۹۱۲۸	۱/۶۳۰۴	۰/۵۵۹۰
$\mathrm{MVSKE_SM}$	۰/۰۳۱۸	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۷۱۱	۰/۷۰۶۳	۰/۸۰۰۵	۰/۳۵۴۶
$\mathrm{ME_{G\text{-}S}M}$	۰/۰۳۷۳	۰/۰۰۵۵	-۰/۱۱۹۶	۵/۶۰۶۱	۲/۲۴۰۶	۰/۸۸۶۵
$\mathrm{MVE_{G\text{-}S}M}$	۰/۰۳۲۹	۰/۰۰۲۵	-۰/۰۷۸۵	۰/۹۵۵۲	۱/۲۳۷۱	۰/۶۱۵۹
$\mathrm{MVSE_{G\text{-}S}M}$	۰/۰۳۲۶	۰/۰۰۲۴	-۰/۰۷۶۱	۰/۹۳۴۰	۱/۱۹۰۷	۰/۵۹۴۵
$\mathrm{MVSKE_{G\text{-}S}M}$	۰/۰۳۰۵	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۷۱۳	۰/۷۰۶۵	۰/۷۲۸۱	۰/۴۰۲۱

در بین مدل‌های MVSKM، $\mathrm{MVSE_SKM}$ و $\mathrm{MVSE_{G-S}KM}$، مدل MVSKM دارای بهترین مقدار R_{pe}، V_P، S_P و K_P می‌باشد و مدل‌های $MVSE_SKM$ و $MVSE_{G-S}KM$ به ترتیب دارای بهترین مقادیر E_S و E_{G-S} می‌باشند.

در انتها در بین کلیه مدل‌ها، مدل $ME_{G-S}M$ دارای بهترین مقدار $\boldsymbol{E_S}$، مدل MVSKM دارای بهترین مقدار V_P، S_P و K_P و مدل EWMA دارای بهترین مقدار میانگین E_S و E_{G-S} می‌باشند.

در ادامه به‌منظور مقایسه مدل‌های از شاخص‌های ارزیابی عملکرد پرتفوی معرفی شده در بخش قبل استفاده شده است. دقت داشته باشید که به دلیل رو به بالا بودن بازار سرمایه در سال ۱۳۹۶ از MSR استفاده نشده است و از PT برای مقایسه مدل‌ها از لحاظ هزینه معاملاتی استفاده شده است. در جدول زیر نتایج این مقایسه ارائه شده است.

همانطور که در جدول زیر مشاهده می‌کنید، مدل $\mathrm{MVSE_{G-S}KM}$ دارای بیشترین مقدار SR می‌باشد. در بین مدل‌های MVM، $\mathrm{MVE_SM}$ و $\mathrm{MVE_{G-S}M}$، مدل $\mathrm{MVE_{G-S}M}$ دارای بهترین عملکرد به لحاظ SR می‌باشد. همچنین به لحاظ آماری در سطح اطمینان ۹۵٪ اختلاف میان مدل‌های $\mathrm{MVE_SM}$ و $\mathrm{MVE_{G-S}M}$ معنی‌دار می‌باشد.

همچنین با مقایسه مدل‌های MVSM، $\mathrm{MVSE_SM}$و $\mathrm{MVSE_{G-S}M}$، مدل$\mathrm{MVSE_{G-S}M}$دارای بیشترین مقدار SR و $\mathrm{MVSE_SM}$ عملکرد بهتری از لحاظ شاخص PT داشته است و فقط مدل MVSM اختلاف معنی‌داری ندارد. هنگامی که کشیدگی درنظر گرفته می‌شود، مدل $\mathrm{MVSKE_{G-S}M}$ عملکرد بهتری نسبت به دو مدل MVSKM و $\mathrm{MVSKE_{G-S}M}$ دارد. در انتها مدل $\mathrm{MVSKE_{G-S}M}$ بهترین عملکرد را بین سایر مدل‌ها از لحاظ بازدهی و مدل $\mathrm{MVSE_{G-S}M}$ بهترین عملکرد را از لحاظ انحراف معیار داشته است.

جدول ٤. مقایسه نتایج با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد

ردیف	مدل	r_p^0	σ_p^0	SR	PT	P-value
۱	EWM	۰/۰۲۳۵	۰/۰۸۷۵	۰/۲۶۹۱	-	-
۲	MVM	۰/۰۲۷۴	۰/۰۵۸۵	۰/۴۶۸۸	۰/۰۳۱۲	۰/۱۹۴۶
۳	MVSM	۰/۰۲۸۳	۰/۰۵۸۶	۰/۰۴۸۲۸	۰/۰۱۶۱۲	۰/۱۷۰۸
۴	MVSKM	۰/۰۳۲۱	۰/۰۵۶۴	۰/۵۶۹۹	۰/۰۱۹۴	۰/۰۳۱۸
۵	$\mathrm{ME_SM}$	۰/۰۱۷۱	۰/۰۸۱۶	۰/۲۰۹۷	۰/۰۸۶۱	۰/۰۰۰۱
۶	$\mathrm{MVE_SM}$	۰/۰۲۷۱	۰/۰۵۰۱	۰/۵۴۱۷	۰/۰۴۲۲	۰/۰۰۰۱
۷	$\mathrm{MVSE_SM}$	۰/۰۲۷۶	۰/۰۴۹۶	۰/۵۵۶۲	۰/۰۳۵۲	۰/۰۰۰۵
۸	$\mathrm{MVSKE_SM}$	۰/۰۳۱۷	۰/۰۵۲۰	۰/۶۱۱۲	۰/۰۱۷۳	۰/۰۰۲۵
۹	$\mathrm{ME_{G\text{-}S}M}$	۰/۰۱۳۸	۰/۰۸۰۷	۰/۱۷۱۲	۰/۱۳۲۸	۰/۰۰۰۱
۱۰	$\mathrm{MVE_{G\text{-}S}M}$	۰/۰۲۸۶	۰/۰۴۷۶	۰/۶۰۳۰	۰/۰۵۱۰	۰/۰۰۰۱
۱۱	$\mathrm{MVSE_{G\text{-}S}M}$	۰/۰۲۸۹	۰/۰۴۶۹	۰/۶۱۶۸	۰/۰۴۹۵	۰/۰۰۰۱
۱۲	$\mathrm{MVSKE_{G\text{-}S}M}$	۰/۰۳۴۹	۰/۰۴۹۳	۰/۷۰۷۵	۰/۰۱۸۱	۰/۰۰۰۱

در جدول ۴ مدل‌ها با مقادیر باینری λ_i مقادیر ۰ و ۱ حل شد و هدف ما ارزیابی درنظر گرفتن آنتروپی شانون و جینی سیمپسون در مدل‌ها در حالت استفاده از گشتاورهای مراتب بالاتر می‌باشد. بنابراین نتایج بهینه‌سازی مدل‌هایی با اوزان مختلف λ_i به منظور بررسی اثر آنتروپی در ادامه در جدول زیر ارائه شده است. برای راحتی کار، اعداد درنظر گرفته شده برای مقادیر مختلف λ_i به صورت اولویت‌های توابع هدف در جدول زیر به صورت $(\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3.\lambda_4.\lambda_5.\lambda_6)$ ارائه شده است. به طور مثال برای مقادیر $\lambda_1 = 3$، $\lambda_2 = 1$، $\lambda_3 = 1$، $\lambda_4 = 1$، $\lambda_5 = 1$ و $\lambda_6 = 0$ به‌صورت (3.1.1.1.1.0) نمایش داده شده است. توجه داشته باشید که در توابع هدفی که مقادیر $\lambda_i = 0$ می‌باشد، تابع هدف متناظر درنظر گرفته نشده است. همانطور که مشاهده می‌کنید مدل‌هایی که در آنها E_S و E_{G-S} درنظر گرفته شده است دارای عملکرد تقریبا مشابهی هستند و درنظر گرفتن آنتروپی اهمیت بسزایی در عملکرد مدل‌ها دارد.

جدول ۵. میانگین توابع هدف

اولویت	میانگین بازدهی	میانگین واریانس	میانگین چولگی	میانگین کشیدگی	میانگین آنتروپی شانون	میانگین آنتروژپی سیمپسون
۳-۱-۱-۱-۱-۰	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۱۰۶	-۸/۰۵۴۷	۰/۹۶۴۱	۰/۷۱۵۳	۰/۳۱۹۲
۳-۱-۱-۱-۰-۱	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۱۲	-۸/۳۱۶۷	۱/۲۲۸۹	۰/۷۱۱۲۵	۰/۳۷۶۵
۳-۱-۱-۱-۳-۰	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۱۳	-۸/۳۳۷۱	۱/۴۷۴۷	۱/۶۸۱۶	۰/۶۶۷۴
۳-۱-۱-۱-۰-۳	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۱۳	-۹/۰۸۰۶	۱/۳۷۱۶	۱/۳۸۸۲	۰/۶۶۸۳
۳-۱-۱-۱-۰-۰	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۱۱	-۷/۸۰۳۷	۰/۹۰۴۵	۰/۳۴۱۱	۰/۱۶۶۳
۱-۳-۱-۱-۱-۰	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۱۰	-۷/۶۲۵۴	۰/۸۷۱۳	۰/۶۲۴۳	۰/۳۲۱۴
۱-۳-۱-۱-۰-۱	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۱۰	-۷/۶۴۵۸	۰/۸۷۴۱	۰/۵۶۷۲	۰/۳۵۵۱
۱-۳-۱-۱-۳-۰	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۱۲	-۸/۵۳۲۳	۱/۱۷۳۴	۱/۴۲۸۵	۰/۵۹۰۲
۱-۳-۱-۱-۰-۳	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۱۱	-۸/۳۶۳۲۵	۱/۱۱۱۱	۱/۲۲۰۰	۰/۵۹۵۳
۱-۳-۱-۱-۰-۰	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۱۰	-۷/۵۲۸۸	۰/۸۵۵۷	۰/۴۲۶۳	۰/۲۴۳۵
۱-۱-۱-۱-۳-۰	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۱۳	-۹/۱۳۲۷	۱/۴۴۱۸	۱/۷۰۰۴	۰/۶۷۹۳
۱-۱-۱-۱-۰-۳	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۱۲	-۸/۸۲۲۲	۱/۳۰۳۶	۱/۴۶۰۷	۰/۶۷۹۰

در ادامه در جدول زیر مدل‌های معرفی شده با اولویت‌های مختلف ارائه شده است. در بین مدل‌های معرفی شده، مدل (۳-۰-۱-۳-۱) با درنظر گرفتن آنتروپی جینی سیمپسون دارای بهترین عملکرد از لحاظ SR و در مرتبه بعدی مدل (۱-۰-۱-۳-۱) با درنظر گرفتن آنتروپی شانون قرار دارد. همچنین مدل (۰-۰-۱-۱-۳) بدترین مدل از لحاظ معیار PT، مدل (۱-۰-۱-۳-۱) دارای بیشترین بازدهی و مدل (۳-۰-۱-۳-۱) دارای کمترین انحراف معیار می‌باشد.

جدول ٦. مقایسه نتایج با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد

اولویت‌ها	rp	sigma p	SR	PT	P-value
۰-۱-۱-۱-۳	۰/۰۰۱۹	۰/۰۲۵۳	۰/۰۷۱۶	۰/۰۶۰۰	۰/۱۵۲۱
۱-۰۰-۱-۱-۳	۰/۰۰۲۳	۰/۰۲۶۲	۰/۰۹۰۰	۰/۳۴۰۱	۰/۰۰۳۵
۰-۳-۱-۱-۳	۰/۰۰۲۰	۰/۰۲۴۰	۰/۰۸۲۴	۰/۰۳۱۳	۰/۰۰۰۰
۳-۰۰-۱-۱-۳	۰/۰۰۲۰	۰/۰۲۳۶	۰/۰۸۳۳	۰/۰۴۲۹	۰/۰۰۰۰
۰-۰۰-۱-۱-۳	۰/۰۰۱۸	۰/۰۲۷۵	۰/۰۶۷۸	۰/۰۷۸۵	۰/۳۳۵۱
۰-۱-۱-۳-۱	۰/۰۰۲۷	۰/۰۲۴۱	۰/۱۰۷۸	۰/۰۱۵۶	۰/۰۰۱۱
۱-۰۰-۱-۳-۱	۰/۰۰۲۸	۰/۰۲۳۳	۰/۱۱۹۰	۰/۰۱۲۳	۰/۰۰۰۰
۰-۳-۱-۳-۱	۰/۰۰۲۴	۰/۰۲۲۹	۰/۱۰۵۵	۰/۰۱۰۹	۰/۰۰۰۰
۳-۰۰-۱-۳-۱	۰/۰۰۲۷	۰/۰۲۱۷	۰/۱۲۲۹	۰/۰۱۶۲	۰/۰۰۰۰
۰-۰۰-۱-۳-۱	۰/۰۰۲۶	۰/۰۲۵۲	۰/۱۰۱۹	۰/۰۱۵۲	۰/۰۰۷۲
۰-۳-۱-۱-۱	۰/۰۰۲۳	۰/۰۲۳۷	۰/۰۹۷۱	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۰۰
۳-۰۰-۱-۱-۱	۰/۰۰۲۵	۰/۰۲۲۸	۰/۱۰۸۰	۰/۰۱۱۰	۰/۰۰۰۰

مقایسه آزمون خارج از نمونه مطالعات گذشته نتایج جالبی را در پی دارد. برای مثال، برا و پارک (۲۰۰۸) به این نتیجه رسیدند، که مدل MVM نسبت به مدل EWM نتایج بهتری را در پی داشته است (برا و پارک، ۲۰۰۸). همچنین در مطالعه دیگری، یو و همکاران (۲۰۱۴) نشان دادند که مدل MVM عملکرد بهتری نسبت به مدل MVE_SM دارد، اما مدل $MVE_{g\text{-}s}M$ از دو مدل قبلی عملکرد بهتری را نشان داده است (یو و همکاران، ۲۰۱۴). اوتسا و کانتار (۲۰۱۱) نشان دادند که بر اساس شاخص SR مدل $MVSE_SM$ عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های MVM و MVSM دارد و مدل $MVSKE_{G\text{-}S}M$ بهترین نتیجه را در بین مدل‌های پیشنهادی داشته است و مدل‌های

$MVSKE_SM$ و $MVSKE_{G\text{-}S}M$ دارای مقادیر کمتری PT نست به مدل‌های MVM، MVSM و MVSKM بوده است (اوتسا و کانتار، ۲۰۱۱).

نتیجه‌گیری

متنوع‌سازی یکی از ابعاد مهم در بهینه‌سازی پرتفوی می‌باشد. واریانس پرتفوی یکی از اصلی‌ترین شاخص‌های اندازه‌گیری ریسک می‌باشد و از آنجا که بر اساس داده‌های تاریخی محاسبه می‌شود، دارای نواقصی از این حیث نیز می‌باشد. آنتروپی معیاری برای اندازه‌گیری تنوع‌سازی در بهینه‌سازی پرتفوی می‌باشد. این مقاله با هدف گنجاندن آنتروپی و گشتاورهای مراتب بالاتر در مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی نگارش شده و پیشنهاد شده است که از رویکرد بهینه‌سازی چند معیاره به منظور بهینه‌سازی مدلی که میانگین، واریانس، چولگی، کشیدگی و آنتروپی را به صورت همزمان درنظر می‌گیرد، استفاده شود.

نتایج حاصل از مقایسه مدل‌ها بر اساس شاخص‌های ارزیابی پرتفوی نشانگر این است که استفاده از آنتروپی به منظور متنوع‌سازی، موجب کاهش معنی‌دار مقادیر بهینه سایر توابع هدف نمی‌شود. همانطور که مشاهده شد، هنگام استفاده از آنتروپی جینی سیمپسون و گشتاورهای مراتب بالاتر، بازده بیشتری نسبت به سایر مدل‌ها بدست آمد و از طرف دیگر آنتروپی شانون، تنوع‌سازی بیشتری نسبت آنتروپی جینی سیمپسون را نتیجه داد.

در مطالعات آتی توصیه می‌شود که هم از لحاظ روش حل مسئله توسعه داده شود که می‌توان از این نظر از الگوریتم‌های مختلف فرا ابتکاری از جمله الگوریتم‌های تکاملی استفاده شود و هم از لحاظ چارچوب مدل که می‌توان از سایر توابع اندازه‌گیری آنتروپی استفاده شود. همچنین پیشنهاد می‌شود، این نوع مدل‌ها بر اساس منطق فازی نیز بررسی شود تا کارایی مدل‌ها بر این بستر نیز بررسی شود.

منابع

اسلامی‌بیدگلی، غلامرضا؛ تلنگی، احمد (۱۳۸۷). **مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی در انتخاب پرتفولیوی بهینه. فصلنامه تحقیقات مالی**،(۱۳)،۵۰-۷۱.

تقی‌زاده‌یزدی، محمدرضا؛ فلاح‌پور، سعید؛ احمدی‌مقدم، محمد (۱۳۹۵). انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از برنامه‌ریزی فرا آرمانی و برنامه‌ریزی آرمانی ترتیبی توسعه‌یافته. **فصلنامه تحقیقات مالی**، (۴)، ۵۹۱-۶۱۲.

References

Arditti, F. D. (1967). Risk and the required return on equity. *The Journal of Finance*, 22 (1), 19-36.

Arditti, F. D. (1971). Another look at mutual fund performance. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6 (3), 909-912.

Bera, A. K., & Park, S. Y. (2008). Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle. *Econometric Reviews*, 27 (4-6), 484-512.

Canela, M. A., & Collazo, E. P. (2007). Portfolio selection with skewness in emerging market industries. *Emerging Markets Review*, 8 (3), 230-250.

Chow, K. V., and Denning, K. C. (1994). On variance and lower partial moment betas the equivalence of systematic risk measures.*Journal of Business Finance & Accounting*, 21 (2), 231-241.

Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., and Prakash, A. J.(1997). Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets. *Journal of Banking & Finance*, 21 (2), 143-167.

Davies, R. J., Kat, H. M., and Lu, S. (2009). Fund of hedge funds portfolio selection: A multiple-objective approach. *Journal of Derivatives & Hedge Funds*, 15 (2), 91-115.

DeMiguel, V., and F. J. Nogales. (2009). Portfolio selection with robust estimation. *Operations Research*,57 (3), 560-577.

Dokov, S., Morton, D. P., & Popova, I. (2017, November). Mean-Variance-Skewness-Kurtosis efficiency of portfolios computed via moment-based bounds. In *Information Science and Communications Technologies (ICISCT), 2017 International Conference on* (pp. 1-5). IEEE.

Eslami Bidgoli, G. & Talangi, A. (1999). This article is a revIew of the historical development of the Modern Portfolio Theory (MPT).. *Financial Research Journal*, 4(1), 50-71. *(in Persian)*

Fama, E. F. (1965). Portfolio analysis in a stable Paretian market. *Management science*, 11 (3), 404-419.

Israelsen, C. (2005). A refinement to the Sharpe ratio and information ratio. *Journal of Asset Management*, 5 (6), 423-427.

Grootveld, H., and W. Hallerbach. (1999). Variance vs downside risk: Is there really that much difference?.*European Journal of operational research*,114 (2), 304-319.

Harvey, C. R., Liechty, J. C., Liechty, M. W., and Müller,P. (2010). Portfolio selection with higher moments. *Quantitative Finance*, 10 (5), 469-485.

Jarque, C. M., and Bera,A. K. (1987). A test for normality of observationsand regression residuals. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, 163-172.

Konno, H., Shirakawa. H., and Yamazaki, H. (1993). A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model. *Annals of Operations Research*,45 (1), 205-220.

Konno, H., & Suzuki, K. I. (1992). A fast algorithm for solving large scale mean-variance models by compact factorization of covariance matrices. *Journal of the operations research society of Japan*, 35 (1), 93-104.

Kraus, A., & Litzenberger, R. H. (1976). Skewness preference and the valuation of risk assets. *The Journal of Finance*, 31 (4), 1085-1100.

Lai, K. K., Yu, L., and Wang, S. (2006). Mean-variance-skewness-kurtosis-based portfolio optimization. Computer and Computational Sciences, 2006. IMSCCS'06. First International Multi-Symposiums on, IEEE.

Lai, T.Y. (1991). Portfolio selection with skewness: a multiple-objective approach. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 1 (3), 293.

Liu, S., Wang, S., and Qiu, W. (2003). Mean-variance-skewness model for portfolio selection with transaction costs. *International Journal of Systems Science*, 34 (4), 255-262.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7 (1), 77-91.

Markowitz, H. (1959). Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments. John Wiley&Sons. *Inc, New York*.

MHIRI, M., & PRIGENT, J. L. (2010). International portfolio optimization with higher moments. *International Journal of Economics and Finance*, 2 (5), 157

Proelss, J., and Schweizer, D. (2014). Polynomial goal programming and the implicit higher moment preferences of US institutional investors in hedge funds. *Financial Markets and Portfolio Management*, 28 (1), 1-28.

Rom, B. M., and Ferguson, K. W. (1994). Post-modern portfolio theory comes of age. *The Journal of Investing*, 3 (3), 11-17.

Samuelson, P. A. (1975). The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments. In *Stochastic Optimization Models in Finance*, 215-220.

Samuelson, P. A. (1970). The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments. *The Review of Economic Studies*, 37 (4), 537-542.

Simkowitz, M. A., & Beedles, W. L. (1978). Diversification in a three-moment world. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13 (5), 927-941.

Škrinjarić, T. (2013). Portfolio Selection with Higher Moments and Application on Zagreb Stock Exchange. *Zagreb International Review of Economics & Business*, 16 (1), 65-78.

Taghizadeh Yazdi, M. R., Fallahpour, S. & Moghaddam, M. A. (2017). Portfolio selection by means of Meta-goal programming and extended lexicograph goal programming approaches. *Financial Research Journal*, *4*(1), 50-71. *(in Persian)*

Tayi, G. K., & Leonard, P. A. (1988). Bank balance-sheet management: An alternative multi-objective model. *Journal of the Operational Research Society*, 39 (4), 401-410.

Unser, M. (2000). Lower partial moments as measures of perceived risk: An experimental study. *Journal of Economic Psychology*, 21 (3), 253-280.

Usta, I., & Kantar, Y. M. (2011). Mean-variance-skewness-entropy measures: A multi-objective approach for portfolio selection. *Entropy*, 13 (1), 117-133.

Viole, F., & Nawrocki, D. (2016). Predicting risk/return performance using upper partial moment/lower partial moment metrics. *Journal of Mathematical Finance*, 6 (05), 900.

Yue, W., and Wang, Y. (2017). A new fuzzy multi-objective higher order moment portfolio selection model for diversified portfolios. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 465, 124-140.

Zhang, W. G., Wang, Y. L., Chen, Z. P., & Nie, Z. K. (2007). Possibilistic mean–variance models and efficient frontiers for portfolio selection problem. *Information Sciences*, 177 (13), 2787-2801.