Analysis of Conditional Capital Asset Pricing Model with Time Variant Beta using Standard Capital Asset Pricing Model

Saeed Fallahpour
*Corresponding author, Assistant Prof. of Financial Management, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: falahpor@ut.ac.ir

Shapour Mohammadi
Associate Prof. of Financial Management, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: shmohamadi@ut.ac.ir

Mohammad Sabunchi
*Corresponding author, M.Sc. in Financial Management, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: m.sabounchi@ut.ac.ir

Abstract

Objective: The aim of the present study is to analyze and test the power of Conditional Capital Asset Pricing Model (CAPM) with Time Variant Beta against Standard Capital Asset Pricing Model to find the better model to explain expected return of stocks**.**

Methods: Using monthly data, beta value was estimated using standard CAPM and Multivariate GARCH methods for companies included in the statistical sample. Based on these two methods, the expected returns of the next year to test out-of-sample performance were calculated by eliminating 12 months from the top and adding 12 months from the bottom**.** The same process was repeated for the following years. Then, the accuracy of each of these models was examined using criteria MAE and MSE.

Results: Using paired t-test and Diebold-Mariano test, we tested the research hypotheses and the results were presented based on MAE and MSE indices. The results showed that according to both criteria in MAE and MSE, the conditional CAPM models, whether based on full rank BEKK or diagonal BEKK, can have better performance than the standard CAPM model.

Conclusion: Regarding the findings and better predictive power of conditional CAPM based on full rank BEKK and/or diagonal BEKK, in terms of MAE and MSE criteria, replacing the standard model with these models can result in higher accuracy.

Keywords: Conditional capital asset pricing model, Multivariate GARCH, Full rank BEKK, Investment, Diagonal BEKK.

Citation: Fallahpour, S., Mohammadi, Sh., Sabunchi, M. (2018). Analysis of Conditional Capital Asset Pricing Model with Time Variant Beta using Standard Capital Asset Pricing Model. Financial Research Journal, 20(1), 17-32. (*in Persian*)

Financial Research Journal, 2018, Vol. 20, No.1, pp. 17-32
DOI: 10.22059/frj.2018.105678.1005803
Received: August 17, 2014; Accepted: September 10, 2015

مقایسه مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای شرطی با بتای متغیر نسبت به زمان، از طریق مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای استاندارد

سعید فلاح‌پور

استادیار مدیریت مالی، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: falahpor@ut.ac.ir

شاپور محمدی

دانشیار اقتصادسنجی، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: shmohamadi@ut.ac.ir

محمد صابونچی

* نویسنده مسئول، کارشناس ارشد مدیریت مالی، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: m.sabounchi@ut.ac.ir

چکیده

هدف: هدف این مطالعه، بررسی توان مدل CAPM شرطی مبتنی بر بتای متغیر نسبت به زمان در مقایسه با مدل CAPM استاندارد، به منظور یافتن مدل مناسب برای تبیین بازده مورد انتظار سهام است.

روش: با استفاده از داده‌های ماهانه و به کمک روش CAPM استاندارد و روش‌های ناهمسانی واریانس شرطی چند متغیره، بتای شرکت‌های داخل نمونه برآورد شد. بر اساس این دو روش و به منظور بررسی عملکرد خارج از نمونه، بازده مورد انتظار سال بعد برای هر دو مدل محاسبه گردید و با حذف ۱۲ ماه از بالا و اضافه کردن ۱۲ ماه بعد، فرایند قبل برای سال‌های بعدی تا انتهای دوره زمانی تحقیق تکرار شد، سپس دقت هر یک از مدل‌های یاد شده با استفاده از معیار میانگین قدر مطلق خطا و میانگین مجذور خطا بررسی و مقایسه گردید.

یافته‌ها: فرضیه‌های تحقیق با استفاده از آزمون مقایسه زوجی و دایبولد ـ ماریانو، بررسی شدند و نتایج آزمون فرضیه‌ها بر اساس معیارهای میانگین قدر مطلق خطا و میانگین مجذور خطا ارائه شد. نتایج نشان داد که بر اساس هر دو معیار میانگین قدر مطلق خطا و میانگین مجذور خطا، مدل‌های CAPM شرطی چه بر مبنای مدل BEKK قطری و چه مبنای مدل BEKK مرتبه کامل، نسبت به مدل CAPM استاندارد عملکرد بهتری دارند.

نتیجه‌گیری: با توجه به یافته‌های بیان شده و قدرت پیش‌بینی بهتر قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای شرطی بر مبنای مدل BEKK مرتبه کامل و BEKK قطری از لحاظ معیارهای میانگین قدر مطلق خطا و میانگین مجذور خطا نسبت به مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای استاندارد، جایگزینی این مدل‌ها به جای مدل استاندارد دقت بالاتری ارائه می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای شرطی، ناهمسانی واریانس چندمتغیره، BEKK مرتبه کامل، سرمایه‌گذاری، BEKK قطری.

استناد: فلاح‌پور، سعید؛ محمدی، شاپور؛ صابونچی، محمد (۱۳۹۷). مقایسه مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای شرطی با بتای متغیر نسبت به زمان، از طریق مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای استاندارد. *تحقیقات مالی*، ۲۰(۱)، ۱۷- ۳۲.

فصلنامه تحقیقات مالی، ۱۳۹۷، دوره ۲۰، شماره ۱، صص. ۱۷- ۳۲

DOI: 10.22059/frj.2018.105678.1005803

دریافت: ۱۳۹۳/۰۵/۲۶، پذیرش: ۱۳۹۴/۰۶/۱۹

مقدمه

سرمایه‌گذاران اعم از فردی یا نهادی برای بررسی فرصت‌های متنوع سرمایه‌گذاری و انتخاب بهترین آن‌ها، از نرخ هزینه سرمایه استفاده کرده و بازده مورد انتظار خویش را محاسبه می‌کنند؛ بدین گونه که ضمن در نظر داشتن شاخص‌های مالی و تنزیل جریان‌های نقدی حاصل از طرح‌های سرمایه‌گذاری، با استفاده از نرخ هزینه سرمایه، توجیه‌پذیری سرمایه‌گذاری در طرح یاد شده را بررسی می‌کنند. بنابراین تعیین نرخ بازده مورد انتظار با استفاده از روش‌های ناکارا می‌تواند به اخذ تصمیم‌های اشتباه در پذیرش یا رد گزینه‌های متفاوت سرمایه‌گذاری منتهی شود. مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای، یکی از مدل‌های موجود برای برآورد نرخ بازده مورد انتظار است. ریسک کل به دو دسته سیستماتیک و غیرسیستماتیک تفکیک می‌شود؛ مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای، نرخ بازده مورد انتظار برآوردی را صرفاً به ریسک سیستماتیک وابسته می‌کند و به ازای پذیرش ریسک سیستماتیک بیشتر، پاداش[1] (بازده) بیشتری را برای سرمایه‌گذار در نظر می‌گیرد. برای به دست آوردن ریسک سیستماتیک می‌توان از شیب رگرسیون بازده شرکت روی بازده بازار بهره برد.

از آنجا که کوشش برای به دست آوردن دقیق‌تر پارامترهای مدل CAPM به برآورد دقیق‌تر بازده مورد انتظار (متغیر وابسته مدل) منجر می‌شود، در این پژوهش تلاش شده است که از مدل‌های کاراتری برای برآورد صحیح بازده مورد انتظار بهره برده شود. پارامتر β نماد ریسک سیستماتیک شناخته می‌شود. از آنجا که سرمایه‌گذاران با توجه به داده‌ها و اطلاعات جدید، می‌توانند تخمین‌های تازه‌ای از میانگین، واریانس و کواریانس بازده دارایی‌ها داشته باشند، کوواریانس شرطی طی زمان و بر خلاف آنچه مدل CAPM استاندارد ارائه می‌دهد، متغیر بوده و به تبع آن ضریب بتا نیز متغیر خواهد بود. بنابراین، این ایده به ذهن می‌رسد که می‌توان با متغیر در نظر گرفتن بتا در طول زمان به بهبود دقت در پیش‌بینی بازده مورد انتظار دست یافت. در این پژوهش با مدل‌سازی ماتریس واریانس ـ کوواریانس به کمک روش BEKK مرتبه کامل و BEKK قطری و به دست آوردن بتا از روی این ماتریس، بازده مورد انتظار را پیش‌بینی کرده و این بازده را با بازده واقعی مقایسه می‌کنیم، سپس به مقایسه توانایی پیش‌بینی هر یک از مدل‌های نام برده با CAPM استاندارد می‌پردازیم.

پیشینه نظری پژوهش

ریسک پدیده‌ای است که بر عدم اطمینان و احتمال نوسان در نتایج مورد انتظار دلالت دارد. در واقع به فاصله بین رخداد واقعی با آن چیزی که انتظار می‌رفته رخ دهد، ریسک گفته می‌شود. در بازارهای مالی، ریسک را می‌توان در فاصله فعلی قیمت سهام، ارز، کالا و غیره با آنچه از قبل پیش‌بینی می‌شده، مشاهده کرد؛ از این رو در آینده نیز هر چه احتمال فاصله‌گیری قیمت پیش‌بینی شده از قیمتی که واقعاً دیده خواهد شد، بیشتر باشد با ریسک بیشتری مواجه خواهیم بود.

کاپلان و گاریک (۱۹۸۱)، ریسک را شامل عدم اطمینان و انواع آسیب‌ها و خسارت‌های ممکن دانسته و این رابطه را برای ریسک ارائه کردند: خسارت + عدم اطمینان = ریسک[2]

1. Compensation
2. Risk = Uncertainty + damage

گالیتز معتقد است که هر گونه نوسان در عایدات مورد انتظار به این مفهوم است که بیش از یک نتیجه محتمـل در آینده وجود خواهد داشت که این به معنای ریسک و مخاطره است.

اندازه‌گیری ریسک

در یک دسته‌بندی می‌توان معیارهای اندازه‌گیری ریسک را در دو دسته معیارهای ریسک پراکندگی و معیارهـای ریسـک نسبی قرارداد (راعی و سعیدی، ۱۳۸۳: ۴۴–۶۸).

ریسک پراکندگی[1]

از معیارهای مربوط به این ریسک می‌توان به متوسط قدر مطلق انحرافات، واریانس و انحراف معیار اشاره کرد.

متوسط قدر مطلق انحرافات[2]: برای محاسبه این شاخص از رابطه ۱ استفاده می‌شود کـه در آن مجمـوع قـدر مطلـق انحرافات هر مشاهده از میانگین حسابی را تقسیم بر تعداد مشاهده‌ها می‌کنیم.

رابطه ۱)

$$\mathrm{MAD} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| X_i - \bar{X} \right|}{N}$$

واریانس[3]: واریانس، پراکندگی داده‌ها حول میانگین است. برای محاسبه واریانس نمونه آماری برای یک نمونه N تایی، از تخمین‌زننده بدون تورش زیر برای برآورد واریانس جامعه استفاده می‌شود:

رابطه ۲)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{N-1}$$

شایان ذکر است که در نظریه نوین پرتفوی، واریانس به عنوان معیار ریسک مد نظر قرار گرفته و شـاخص ریسـک کل پرتفوی است.

واریانس پرتفوی: واریانس پرتفوی n سهمی از رابطه ۳ به دست می‌آید.

رابطه ۳)

$$V(P) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{i,j}$$

$$\sigma_{i,j} = \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

که در آن، w_i درصد سرمایه‌گذاری در سهم i؛ w_j درصد سرمایه‌گذاری در سهم j؛ $\sigma_{i,j}$ کوواریـانس بـین بـازدهی سهم i و سهم j؛ $\rho_{i,j}$ ضریب همبستگی بین بازدهی سهم i و سهم j و σ_i و σ_j انحراف معیار بازدهی سهم i و انحـراف معیار بازدهی سهم j است.

1. Dispersion measure
2. Mean Absolute Deviation
3. Variance

انحراف معیار[1]: برای اینکه انحراف مشاهدات از میانگین برابر صفر شود، در محاسبات مربوط به واریانس از مجذور انحرافات استفاده می‌شود. درعین حال، برای مقایسه مشاهدات با مشخصه پراکندگی، باید هر دو کمیت از یک درجه باشند. به همین دلیل جذر واریانس به عنوان انحراف معیار به صورت زیر مطرح می‌شود:

رابطه ۴) $$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

نیمه واریانس[2]: همان‌طور که بیان شد، واریانس پراکندگی داده‌ها حول میانگین را نشان می‌دهد، اما پراکندگی بالای میانگین لزوماً برای سرمایه‌گذاران نامطلوب نخواهد بود. از این رو مارکوئیتز نشان داد معیار ریسکی که پراکندگی پایین مقدار هدف مشخص را لحاظ کند، معیار بهتری برای سنجش ریسک است. نیمه واریانس، معیار ریسکی است که برای انحرافات نامطلوب به کار می‌رود. به بیان دیگر، اگر ریسک را احتمال زیان تعریف کنیم، تغییرات مطلوب ریسک شمرده نمی‌شوند و فقط مشاهداتی که کمتر از میانگین نرخ بازده هستند، ریسک محسوب می‌شوند. در واقع داریم:

رابطه ۵) $$\mathrm{SV}_{\mu}(\mathrm{F}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{E}(\max(\mu - \mathrm{X}, 0)^2) = \int_{-\infty}^{\mu} (\mu - \mathrm{x})^2 \mathrm{dF}_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})$$

ریسک نسبی

از شاخص‌ها و معیارهای ریسک نسبی می‌توان به ضریب حساسیت (بتا) کرد.

ضریب حساسیت (بتا): در رویکرد نظریه نوین پرتفوی، ریسک کل به دو جزء ریسک قابل کنترل (ریسک غیرسیستماتیک) و ریسک غیرقابل کنترل (ریسک سیستماتیک) طبقه‌بندی می‌شود. ریسک سیستماتیک زاییده تغییرات اقتصادی، سیاسی، اجتماعی و محیطی در بازار سرمایه است. این ریسک قابل کنترل نیست و برای سهام مختلف روند کمابیش یکسانی دارد. بتا شاخصی برای محاسبه ریسک سیستماتیک در نظر گرفته می‌شود. دو رویکرد برای محاسبه بتا وجود دارد:

- محاسبه β از طریق رگرسیون خط مشخصات: خط مشخصات، رابطه بین بازدهی سهم و بازدهی بازار را نشان می‌دهد که در آن، بازدهی سهم متغیر وابسته و بازدهی بازار متغیر مستقل است؛ شیب خط یاد شده، نشان‌دهنده ضریب حساسیت (β) است. معادله کلی خط مشخصات به صورت رابطه ۶ است.

رابطه ۶) $$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it}$$

- محاسبه β از طریق کوواریانس: بتا به عنوان شاخص ریسک سیستماتیک از رابطه ۷ نیز محاسبه می‌شود.

رابطه ۷) $$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_m)}{\sigma^2(r_m)} = \frac{\mathrm{E}(r_i - \overline{r}_i)(r_m - \overline{r}_m)}{\mathrm{E}(r_m - \overline{r}_m)^2}$$

در واقع، بتا حاصل تقسیم کوواریانس بازدهی سهم و بازدهی بازار بر واریانس بازدهی بازار است (راعی و سعیدی، ۱۳۸۳: ۱۱۹-۱۲۴).

1. Standard Deviation
2. Semivariance

مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای

مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای، مشهورترین مدل در قیمت‌گذاری دارایی‌هاست. شارپ (۱۹۶۴) و لینتنر (۱۹۶۵) هر یک به طور جداگانه با استفاده از تئوری پرتفوی برای ایجاد تعادل در بازار، مدل CAPM را گسترش دادند. اساس تئوری CAPM، تئوری پرتفوی همراه با دارایی بدون ریسک و امکان فروش استقراضی نامحدود است. در این تئوری صرفاً درباره تصمیم‌های یک سرمایه‌گذار بحث نمی‌شود، اما تصمیم‌های هر سرمایه‌گذار با هم تلفیق شده و تعادل بازار تعیین می‌شود. در تئوری پرتفوی، قیمت هر دارایی به طور مستقل تعیین شده و از سرمایه‌گذاران اثر نمی‌پذیرد. در مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای، قیمت دارایی‌ها (معادل بازده‌های مورد انتظار دارایی) به طور مستقل تعیین نشده‌اند، اما در بازار تعادل وجود دارد. قیمت جاری روی بازده مورد انتظار اثرگذار است. با معین بودن سودهای نقدی مورد انتظار آتی و با فرض کارا بودن بازار، قیمت دارایی‌ها با ارزش ذاتی آن‌ها برابر است؛ بدین معنا که قیمت‌های بالا در زمان حال به بازده مورد انتظار کمتری در دوره بعد منتج می‌شود و برعکس. این برابری بین قیمت و بازده مورد انتظار، اجازه می‌دهد که یا روی قیمت یا روی بازده مورد انتظار تمرکز کنیم (بادی، کان و مارکوس، ۲۰۱۰).

مفروضات مدل CAPM

علاوه بر مفروضاتی که در تئوری پرتفوی بیان شد، مفروضات دیگری نیز وجود دارد که مختص مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای است. مفروضات CAPM به صورت زیر است (راعی و پویان‌فر، ۱۳۸۴: ۳۰۲):

- عدم وجود هزینه معاملاتی و مالیات؛
- دارایی‌ها به صورت نامحدودی قابل تقسیم هستند؛
- هر سرمایه‌گذار می‌تواند بدون هیچ محدودیتی در هر دارایی سرمایه‌گذاری کند؛
- قیمت‌ها تعیین‌شده بوده و سرمایه‌گذار نمی‌تواند روی قیمت اثرگذار باشد (بازار رقابتی)؛
- مدل ایستا بوده و دوره سرمایه‌گذاری تک دوره‌ای است؛
- امکان فروش استقراضی نامحدود است؛
- انتظارات همگن بین سرمایه‌گذاران وجود دارد؛
- تمام دارایی‌ها قابلیت فروش دارند.

مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای شرطی[1]

مدل CAPM استاندارد از مفروضاتی چون بتا و صرف ریسک ثابت پیروی می‌کند و موجب می‌شود که این مدل دارای ماهیت ایستا شده و نوعی ضعف تلقی شود. متغیر بودن بتا طی زمان با در نظر گرفتن اینکه ریسک نسبی و بازده مورد انتظار دارایی در فرایند چرخه تجاری متغیر است را می‌توان توجیه کرد. بنابراین طبق مدل شرطی داریم:

$$E\left[R_i^t \middle| \Omega_{t-1}\right] - E\left[r^t \middle| \Omega_{t-1}\right] = \left(E\left[R_M^t \middle| \Omega_{t-1}\right] - E\left[r^t \middle| \Omega_{t-1}\right]\right)\beta_i^{t-1}$$ رابطه ۸)

1. Conditional Capital Asset Pricing Model (C-CAPM)

$$\beta_i^{t-1} = \frac{\mathrm{Cov}\left[R_i^t, R_M^t \middle| \Omega_{t-1}\right]}{\mathrm{Var}\left[R_M^t \middle| \Omega_{t-1}\right]}$$ رابطه ۹)

R_i^t نشان‌دهنده بازدهی سهم i در زمان t؛ r^t نرخ بازده بدون ریسک در زمـان t، R_M^t بـازده پرتفـوی بـازار در زمان t و Ω_{t-1} اطلاعات قابل‌دسترس در زمان ۱− t است. نوسان‌های موجود در بتای سهام ممکـن اسـت تحـت تـأثیر عوامل خرد اقتصاد مانند تغییرات عملیاتی، یا تغییر محیطی کسب‌وکار شرکت، یا ناشی از عوامل کلان اقتصادی مثل نرخ تورم، شرایط عمومی کسب‌وکار و انتظارات در مورد اتفاق‌های مربوط آینده باشد (جاگاناتان، ۱۹۹۶).

مدل ناهمسانی واریانس چند متغیره

مدل‌سازی نوسان‌ها در سری‌های زمانی مالی از زمان معرفی مدل ناهمسـانی شـرطی خودرگرسـیو (ARCH) در مقالـه اصلی انگل (۱۹۸۲) مطرح شد و پس از آن، انواع گوناگونی از مدل‌های ARCH ارائه گردید. از هنگامی که مـدل‌سـازی نوسان‌های بازده مرکز اصلی توجه بود، درک حرکت همزمان[1] بازده‌های مالی از اهمیت عملی زیادی برخـوردار شـد کـه این مسئله توجه بیشتر به مـدل‌هـای ناهمسـانی واریـانس شـرطی چنـد متغیـره (MGARCH) را مـی‌طلبـد. از جملـه مشخصه‌های مدل چند متغیره گارچ، این است که از یکسو این مدل باید به انـدازه کـافی انعطـاف‌پـذیر باشـد تـا بتوانـد مکانیک حرکت کوواریانس و واریانس‌های شرطی را نشان دهد و از سوی دیگر، چون تعداد پارامترها در مدل چند متغیره گارچ اغلب به سرعت با افزایش بعد مدل افزایش می‌یابد، مشخصه‌ها باید به اندازه کافی صرفه‌جویانه[2] انتخـاب شـوند تـا تخمین مدل آسان‌تر شده و پارامترهای مدل به سادگی تفسیر شوند. با وجود این، صرفه‌جویی اغلب معنـای سـاده‌سـازی می‌دهد و مدل‌هایی که پارامترهای اندکی دارند، ممکن است قادر به ضبط دینامیک مناسب در ساختار کوواریانس نباشند. ویژگی دیگری که باید در مشخصه‌ها مد نظر قرار گیرد، معین بودن است (طبق تعریف، ماتریس کوواریانس بایـد معـین مثبت باشد). یک امکان، ایجاد موقعیتی است که در آن ماتریس کوواریانس شرطی به کار رفته در مدل معین مثبت باشد، اما معمولاً این کار در عمل شدنی نیست. جایگزین دیگر برای آن، فرموله کردن مدل به روشی اسـت کـه معـین مثبـت بودن، به وسیله ساختار مدل ایجاد شود. ترکیب این ملزومات با هم، از جمله مشکلاتی است که سر راه گارچ چند متغیـره قرار دارد. نخستین مدل گارچ برای ماتریس‌های کوواریانس شرطی که مدل عامی محسوب مـی‌شـود، مـدلی بـا عنـوان VEC، کاری از بولرسلو، انگل و وودریج (۱۹۸۸) است. علاوه بر این، از آنجا که معین مثبت بـودن مـاتریس کوواریـانس شرطی در این مدل مشکل است، فرموله کردن مدل‌ها به این شکل، اهمیت زیادی دارد. افزون بر این، ایجاد مـدل‌هـایی که در آن پارامترهای تخمین زده شده دارای تفسیر روان و مستقیم باشند، نوعی مزیت به شمار می‌رود. در ادامه به سـیر اصلی پیشرفت ادبیات تحقیق گارچ چند متغیره پرداخته می‌شود.

یک فرایند برداری تصادفی مثل $\{r_t\}$ با ابعاد N×۱ که در آن $Er_t = 0$ بوده و F_{t-1}تابعی است که اطلاعات تولیـد شده توسط سری $\{r_t\}$ را از ابتدا تا زمان ۱− t نشان می‌دهد. فرض کنید که r_t دارای ناهمسانی واریانس شرطی است:

1. Comovement
2. Parsimonious

رابطه ۱۰) $r_t = H_t^{1/2} \eta_t$

با اطلاعات F_{t-1} که در آن ماتریس N×N به شکل $H_t = [h_{ijt}]$ ماتریس کوواریانس شرطی است و r_t و η_t نیز یک فرایند خطای برداری iid هستند که در آن شرط $E\eta_t\eta_t' = I$ برقرار است؛ ساختار گارچ چندگانه تعریف می‌شود که در آن هیچ ساختار وابسته خطی در $\{r_t\}$ وجود ندارد. در کاربردهای مالی، r_t اغلب به عنوان یک بردار بازده لگاریتمی N دارایی نشان داده می‌شود.

مسئله باقی‌مانده که باید مشخص شود، فرایند ماتریسی H_t است. در این مورد، فرمول‌های پارامتریک در چهار گروه ارائه می‌شوند. در گروه اول ماتریس کوواریانس شرطی H_t به شکل مستقیم مدل‌سازی شده است. این گروه به طور ویژه شامل مدل‌های VEC و BEKK می‌شود که از نخستین مدل‌های گارچ چند متغیره پارامتریک به شمار می‌روند. مدل‌های گروه دوم، مدل‌های عاملی را دربرمی‌گیرند که مبتنی بر صرفه‌جویی هستند. فرض می‌شود که فرایند r_t توسط تعداد کمی عامل مشاهده نشده دارای ناهمسانی واریانس، تولید می‌شود. مدل‌های گروه سوم بر پایه مدل‌سازی واریانس‌ها و همبستگی‌های شرطی به جای مدل‌سازی مستقیم ماتریس کوواریانس شرطی استوار شده‌اند. مدل‌های این گروه شامل مدل همبستگی شرطی ثابت (CCC) و متعلقات آن هستند. جاذبه این گروه مبتنی بر تفسیر شهودی همبستگی‌هاست که مدل‌های متعلق به آن در کانون توجه محققان زیادی قرار گرفته است. در گروه آخر، رهیافت‌های ناپارامتریک و نیمه پارامتریک قرار می‌گیرند که می‌توانند کمبود کارایی تخمین‌زننده‌های پارامتریک را به دلیل ساختار غیرمعین ماتریس‌های کوورایانس شرطی، جبران کنند.

مدل‌های ماتریس کوورایانس شرطی

مدل گارچ VEC بولرسلو و همکاران (۱۹۸۸) تعمیم درست و ساده‌ای از مدل گارچ چند متغیره است. هر واریانس و کوواریانس شرطی یک تابع از تمام واریانس‌ها و کوواریانس‌های شرطی تأخیری مثل بازده‌های مربع و حاصل ضرب متقاطع بازده‌هاست که به صورت رابطه ۱۱ نوشته می‌شود.

رابطه ۱۱) $$\mathrm{vech}(H_t) = c + \sum_{j=1}^{q} A_j\, \mathrm{vech}\left(r_{t-j} r_{t-j}'\right) + \sum_{j=1}^{p} B_j\, \mathrm{vech}(H_{t-j})$$

در رابطه بالا، $\mathrm{vech}(\cdot)$ عملگری است که ستون‌های بخش پایین مثلثی ماتریس مربع را پر می‌کند، C یک بردار $N(N+1)/2 \times 1$ است و A_j و B_j ماتریس‌های پارامتری $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ هستند. در واقع یک مدل میانگین گارچ چند متغیره معرفی شده که فقط اجزای کوواریانس شرطی آن بررسی می‌شود. فراگیر بودن و انعطاف مدل VEC نوعی مزیت است، اما می‌تواند مشکلاتی را نیز ایجاد کند. یکی از مشکلات، شرایط محدود کننده‌ای است که برای H_t وجود دارد، به طوری که باید برای تمام tها معین مثبت باشد. علاوه بر این تعداد پارامترها برابر است با $(p+q)(N(N+1)/2)^2 + N(N+1)/2$ که بسیار بزرگ است، مگر آنکه N کوچک باشد. از سوی دیگر همان‌طور که بحث خواهد شد، تخمین پارامترها از نظر محاسباتی مشکل و زمان‌بر است.

تخمین در مدل VEC آسان‌تر است، زیرا می‌توان هر تابع را به طور جداگانه تخمین زد؛ اما این مدل VEC که شامل $(p + q + ۱)N(N + ۱)/N(N + ۱)/۲$ پارامتر است، بسیار محدود کننده به نظر می‌رسد، چون هیچ برهم‌کنشی بین کوواریانس‌ها و واریانس‌های شرطی مختلف مجاز نیست. یک مشکل عددی هم وجود دارد و آن پیچیده بودن تخمین پارامترهای مدل VEC از نظر محاسباتی است. با فرض آنکه خطاهای (اجزای اخلال) η_t از یک توزیع نرمال متغیر چندگانه تبعیت کند، (تابع) درست نمایی لگاریتمی رابطه ۱۱ به شکل زیر است.

$$\sum_{t=1}^{T} l_t(\theta) = c - \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{t=1}^{T} \ln|H_t| - \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{t=1}^{T} r_t' H_t^{-1} r_t$$ رابطه ۱۲)

پارامتر بردار θ باید با تکرار تخمین زده شود. همان‌طور که در رابطه ۱۲ دیده می‌شود، باید ماتریس کوواریانس شرطی H_t برای هر t در هر تکرار معکوس شود، این کار ممکن است در شرایطی که تعداد مشاهدات زیاد بوده و در زمان مشابه N نیز کوچک نباشد، طاقت‌فرسا شود. مشکل حاد دیگر، اطمینان از معین مثبت بودن ماتریس‌های کوواریانس است. در مورد مدل VEC به نظر نمی‌رسد که راه حل فراگیری برای این مشکل وجود داشته باشد. مشکل پیدا کردن مقادیر شروع‌کننده لازم برای H_t، با استفاده از ماتریس کوواریانس غیرشرطی تخمین زده شده، به عنوان مقدار اولیه حل شده است. شایان ذکر است در این پژوهش به منظور مدل‌سازی ناهمسانی واریانس چند متغیره از مدل BEKK قطری و BEKK مرتبه کامل استفاده شده که در بخش مدل مفهومی به تفصیل توضیح داده خواهد شد.

پیشینه تجربی

فرسن، کندل و استمباک (۱۹۸۷) در مطالعه‌ای با عنوان «آزمون قیمت‌گذاری دارایی‌ها با در نظر گرفتن زمان متغیر بودن صرف ریسک مورد انتظار و بتای بازار» بر اساس نسخه CAPM چند دوره‌ای مرتن، بازده شرطی اضافه مورد انتظار دارایی را بر مبنای صرف ریسک مورد انتظار شرطی آزمون کردند و اجازه دادند که بازده مورد انتظار و بتا طی زمان متغیر باشد و درعین حال، ماتریس واریانس ـ کوواریانس بازده دارایی‌ها ثابت فرض شود. آن‌ها با استفاده از سری زمانی بازدهی هفتگی شاخص موزون بورس آمریکا و نیویورک در یک دوره ۲۰ساله (۱۹۶۳ تا ۱۹۸۲)، ۱۰ پرتفوی با دهک‌بندی تشکیل داده و از طریق روش حداکثر درست‌نمایی با ترکیبی از سری زمانی و داده‌های مقطعی، روش تحقیق خود را شکل دادند. بر اساس نتایج پژوهش آن‌ها، شاخص موزون سهام به عنوان پرتفوی کارای میانگین ـ واریانس، زمانی که صرف ریسک مورد انتظار بازار به صورت شرطی بوده یا به بیان دیگر در طول زمان متغیر فرض شود؛ قابلیت پذیرش ندارد. این مسئله نشان می‌دهد پرتفوی بازار به نوسان‌های صرف ریسک مورد انتظار حساس نیست. از سوی دیگر، مدل با یک متغیر صرف ریسک تحت شرایط متغیر بودن در طول زمان رد نمی‌شود.

بولرسلو و همکارانش (۱۹۸۸)، در مقاله‌ای با عنوان «مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای با کوواریانس‌های زمان متغیر»، کار خود را با نقد بر این فروض مدل کلاسیک CAPM آغاز کردند که همه سرمایه‌گذارها نسبت به میانگین، واریانس و کوواریانس بازده دارایی‌ها، انتظارات همگنی دارند. همچنین به این نکته اشاره کردند که امکان دارد انتظارات همگن باشند، اما این انتظارات شرطی بوده و در طول زمان تغییر می‌کند. آن‌ها برای در نظر گرفتن زمان متغیر بودن

کوواریانس بازدهی، از مدل‌های GARCH بهره بردند؛ پرتفوی بازار را ترکیبی از اسناد خزانه ۶ ماهه، اوراق قرضه خزانه ۲۰ ساله و سهام در نظر گرفتند و از اسناد خزانه ۳ ماهه به عنوان نرخ بدون ریسک استفاده کردند. نرخ بازدهی‌های فصلی استفاده شده در مقاله، از فصل ابتدایی ۱۹۵۹ تا فصل دوم ۱۹۸۴ است که شامل ۱۰۲ مشاهده می‌شود. روش تخمین مدل آن‌ها روش حداکثر درست‌نمایی (ML) است. نتایج نشان داد که کوواریانس شرطی در طول زمان متغیر است و به طور معناداری به عنوان عاملی تعیین‌کننده از صرف ریسک متغیر بازار شناخته می‌شود. همچنین آن‌ها نتیجه گرفتند که بتا در طول زمان متغیر است.

کمپل هاروی (۱۹۸۹) در مقاله‌ای با عنوان «کوواریانس شرطی زمان متغیر در آزمون مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی» به آزمون CAPM و مدل‌های چند عامله قیمت‌گذاری دارایی پرداخت. این آزمون‌ها با لحاظ نمودن اینکه هم بازده مورد انتظار و هم کوواریانس شرطی در طول زمان تغییر می‌کنند، انجام گرفت. داده‌های بازده دارایی‌ها بر پایه پرتفوی‌های ماهانه سهام بورس نیویورک که بر اساس ارزش بازار دسته‌بندی شده‌اند، گردآوری شده است. پرتفوی‌ها هر سال بر اساس ارزش بازارشان دوباره تشکیل می‌شوند و پرتفوی بازار، میانگین وزنی شاخص بورس نیویورک در نظر گرفته شده است. طبق نتایج این مقاله، کوواریانس شرطی در طول زمان تغییر می‌کند و مدل نشان می‌دهد که بازده‌های بالاتر با کوواریانس شرطی بزرگ‌تر ارتباط دارند. در نهایت این مقاله نشان داده است که معادله CAPM مطرح‌شده از سوی شارپ ـ لینتنر قادر به در نظر گرفتن رفتار پویای بازدهی دارایی‌ها نیست.

هال، مایلز و تیلور (۱۹۸۹)، در مقاله‌ای با عنوان «مدل‌سازی قیمت‌گذاری دارایی با بتاهای زمان متغیر» و با استفاده از داده‌های مربوط به بازده ماهانه بورس لندن طی دوره زمانی مارس ۱۹۷۵ تا ژوئن ۱۹۸۷، به بررسی زمان متغیر بودن بتا در مدل CAPM پرداختند. آن‌ها با در نظر گرفتن ناهمسانی واریانس شرطی بازده مازاد دارایی‌ها، با استفاده از مدل ARCH و GARCH به بررسی زمان متغیر بودن کوواریانس‌های شرطی در مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای استاندارد و همچنین مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای مصرف بنیان[1] مبادرت ورزیدند. نتایج نشان داد که ادراک از ریسک در طول زمان متغیر است، اما سرمایه‌گذاران ادراک خود را نسبتاً به آرامی بروز می‌دهند. این نسخه از CAPM اجازه می‌دهد که مقادیر متفاوتی برای ریسک غیرقابل متنوع سازی (ریسک سیستماتیک) برآورد شود و اثر زمان متغیر بودن ریسک لحاظ گردد.

لیلیان نگ (۱۹۹۱) در مقاله‌ای با عنوان «آزمون CAPM با کوواریانس‌های زمان متغیر؛ رویکرد GARCH چند متغیره» و با استفاده از بازده‌های ماهانه تحقق‌یافته تمام سهام معامله شده در بورس سهام نیویورک طی دوره زمانی ژانویه ۱۹۲۶ تا دسامبر ۱۹۸۷، به بررسی و آزمون مدل CAPM شارپ ـ لینتنر و CAPM با بتای صفر پرداخت. وی در این مطالعه بر آزمون‌های چند متغیره‌ای تمرکز کرد که در آن بازده مورد انتظار دارایی، واریانس شرطی و کوواریانس بازده دارایی‌ها می‌توانند در طول زمان تغییر کنند. در این پژوهش فرض شده است که ماتریس کوواریانس شرطی بازده دارایی‌ها، از فرایند GARCH چند متغیره که در آن ماتریس همبستگی بازده دارایی در طول زمان ثابت است، پیروی می‌کند. او آزمون‌های خود را روی دو نمونه متفاوت از دارایی‌ها انجام داد. نمونه اول، پرتفوی‌هایی از سهام را تشکیل

1. Consumption-CAPM

می‌داد که بر اساس بتای خود دسته‌بندی شده بودند؛ در حالی که دسته دیگر بر اساس اندازه شرکت طبقه‌بندی شده بودند. نتایج نشان داد طبق سری زمانی Pooled و مقطعی بازده، پرتفوی‌هایی که بر اساس بتا دسته‌بندی شده‌اند، کارایی میانگین ـ واریانس شرطی در پرتفوی بازار رد نمی‌شود و اگر آزمون روی پرتفوی‌هایی اجرا شود که بر اساس اندازه دسته‌بندی شده‌اند، مدل رد می‌شود.

هانسون و هوردال (۱۹۹۸) در مقاله‌ای با عنوان «آزمون CAPM شرطی با استفاده از مدل GARCH-M چند متغیره»، مدل CAPM استاندارد را در مقابل مدل‌های شرطی CAPM که ریسک را در طول زمان متغیر فرض می‌کند، با استفاده از مدل GARCH-M چند متغیره آزمون کردند. جامعه‌ای که در این مقاله بررسی شده است، بازار سهام سوئد در دوره زمانی ۱۹۷۷ تا ۱۹۹۰ بود. آن‌ها دارایی‌های تحت بررسی خود را در سه گروه ۱. پنج پرتفوی بر اساس بتای ورقه بهادار؛ ۲. پنج پرتفوی بر اساس اندازه شرکت و۳. پنج پرتفوی بر اساس ساختار صنعت و زمان متغیر بودن ماتریس کوواریانس بازدهی‌ها با استفاده از مدل (۱،۱) GARCH-M برآورد کردند. همچنین این آزمون شامل مدل‌هایی می‌شد که اجازه می‌دادند واریانس و کوواریانس نامتقارن باشند. با استفاده از آزمون LM و فارغ از دسته‌بندی انجام‌شده برای دارایی‌ها، نتایج از مدل CAPM شرطی در مقابل CAPM استاندارد، حمایت کرد.

هافنر و هروارتز (۱۹۹۸)، در مقاله‌ای با عنوان «زمان متغیر بودن قیمت بازی ریسک در مدل CAPM- رویکردها، شواهد تجربی و کاربرد» با بیان اینکه در رویکرد سنتی، زمان متغیر بودن پاداش ریسک به صورت تجربی به زمان متغیر بودن گشتاور دوم شرطی ارتباط داده می‌شد، منبع دیگری را به عنوان زمان متغیر بودن پاداش ریسک بررسی کردند. آن‌ها ضریب ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران که در تابع مطلوبیت ثابت فرض می‌شود را به عنوان قیمت بازی ریسک در طول زمان متغیر فرض کردند و برای مدل‌سازی آن، از چارچوب GARCH-M دو متغیره بهره بردند. همچنین، از قیمت‌های روزانه ۲۱ سهم بورس آلمان در دوره زمانی ۲ ژانویه ۱۹۹۰ تا ۳۰ دسامبر ۱۹۹۶ که شامل ۱۷۵۲ روز معاملاتی بود، استفاده کردند. آن‌ها توانستند متدولوژی‌های استفاده شده در برآورد مدل CAPM را با استفاده از کوواریانس‌های زمان متغیر و در نظر گرفتن زمان متغیر بودن قیمت بازاری ریسک، تعمیم دهند.

هوانگ و هونگ (۲۰۰۸) در مقاله‌ای با عنوان «رابطه بازده ـ ریسک شرطی در مدل بتا زمان متغیر» به بررسی رابطه نامتقارن بازده ـ ریسک در بتای CAPM زمان متغیر پرداختند. محققان سهام موجود در شاخص S&P500 در ۳ دسامبر ۲۰۰۳ را برای نمونه خود تعیین کردند و به گردآوری بازده روزانه آن‌ها از تاریخ نوامبر ۱۹۸۷ تا دسامبر ۲۰۰۳ پرداختند. آن‌ها با رد فرض ثابت بودن بتا در مدل CAPM استاندارد، به بررسی زمان متغیر بودن بتا و همچنین به بررسی رابطه نامتقارن بازده ـ ریسک در بازار دارای رونق و رکود با استفاده از مدل بتای زمان متغیر پرداختند. معیار منتخب در این مطالعه برای در نظر گرفتن زمان متغیر بودن بتا، معیار حداقل مربعات انطباقی[1] است که نخستین بار توسط مک کولوچ برای تخمین مدل بتای زمان متغیر استفاده شده بود. نتایج نشان داد در نظر گرفتن اثر نامتقارن ریسک ـ بازده و همچنین زمان متغیر بودن بتا در مقابل ثابت فرض کردن آن، موجب دقت بیشتر در برآورد قیمت ریسک می‌شود.

1. Adaptive Least Squares

مدل مفهومی

در این پژوهش از مدل معرفی شده انگل و کرونر (۱۹۹۵) با عنوان بابا_ انگل ـ کرافت ـ کرونر (BEKK)، استفاده شده است. جذابیت مدل یاد شده در این است که ماتریس‌های کوواریانس شرطی، تحت ساختار آن معین مثبت هستند. رابطه ۱۳ این مدل را نشان داده است.

$$H_t = CC' + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} A'_{kj} r_{t-j} r'_{t-j} A_{kj} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} B'_{kj} H_{t-j} B_{kj} \qquad \text{(۱۳ رابطه)}$$

که در آن A_{kj}، B_{kj} و C ماتریس‌های پارامتری $N \times N$ بوده و C پایین مثلثی است. تجزیه یک عبارت ثابت به یک حاصل ضرب متشکل از دو ماتریس مثلثی، به دلیل اطمینان از معین مثبت بودن H_t است. مدل BEKK، کوواریانس ثابت است، اگر و فقط اگر مقادیر ویژه رابطه $\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} A_{kj} \otimes A_{kj} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} B_{kj} \otimes B_{kj}$ که در آن $\otimes$ حاصل ضرب کرونکر[1] دو ماتریس را نشان می‌دهد، از نظر قدر مطلق کمتر از ۱ باشد؛ چرا که تعداد زیادی پارامترسازی وجود دارد که شکل مشابهی از مدل را نشان می‌دهد. انگل و کرونر (۱۹۹۵) شرایطی را برای حذف موارد مازاد ارائه کردند که از نظر ظاهری با یکدیگر کاملاً برابر بودند.

تفسیر پارامترهای رابطه ۱۳ ساده نیست. با توجه به مدل مرتبه اول (رابطه ۱۴) با قرار دادن $B = AD$ که در آن D یک ماتریس قطری است، رابطه ۱۴ به صورت رابطه ۱۵ درمی‌آید.

$$H_t = CC' + A' r_{t-1} r'_{t-1} A + B' H_{t-1} B \qquad \text{(۱۴ رابطه)}$$

$$H_t = CC' + A' r_{t-1} r'_{t-1} A + DE\left[A' r_{t-1} r'_{t-1} A \mid \mathcal{F}_{t-2}\right] D \qquad \text{(۱۵ رابطه)}$$

از رابطه ۱۵ مشاهده می‌شود که آنچه مدل شده، کوورایانس‌ها و واریانس‌های شرطی ترکیب خطی خاصی از بردار بازده دارایی r_t یا سبد سهام است. کرونر و نگ (۱۹۹۸) B را به صورت $B = \delta A$ که در آن $\delta > ۰$ و یک اسکالر است، محدود کردند.

نسخه ساده‌تر از رابطه ۱۴ که در آن A و B ماتریس‌های قطری هستند، گهگاه در برنامه‌های کاربردی مشاهده می‌شود. این مدل BEKK قطری به شکل ساده، رابطه $B = AD$ را برقرار می‌کند. این یک نسخه محدود شده از مدل VEC است که در آن پارامترهای توابع کوواریانس (توابع برای h_{ijt}, $i \neq j$)، حاصل ضرب پارامترهای توابع واریانس هستند. به منظور دستیابی به مدل فراگیرتر (مدلی که محدودیت‌ها را روی ضرایب عبارات کوواریانس اعمال کند)، باید به $K>۱$ اجازه داده شود. محدودشده‌ترین نسخه مدل BEKK قطری، BEKK اسکالر با $A = aI$ و $B = bI$ است که a و b در آن اسکالر هستند.

هر یک از مدل‌های BEKK به یک مدل VEC منحصر به فرد اشاره دارد که ماتریس‌های کوواریانس معین مثبت

1. Kronecker product

تولید می‌کند. انگل و کرونر (۱۹۹۵) برای معادل شدن دو مدل VEC و BEKK شرایط کافی ارائه کردند. همچنین تئوری ارائه شده آن‌ها، معادل شدن مدل‌های VEC قطری ـ که ماتریس‌های کوواریانس معین مثبت دارند ـ را امکان‌پذیر می‌کند. وقتی تعداد پارامترهای مدل BEKK از تعداد متناظر آن در مدل VEC کمتر است، پارامتریزه شدن مدل BEKK محدودیت‌هایی به‌وجود می‌آورد که مدل را نسبت به مدل VEC متفاوت می‌کند. افزایش K در رابطه ۱۳ آن محدودیت‌ها را از بین می‌برد و فراگیر بودن مدل BEKK را در همسویی با نتایج به دست آمده از مدل VEC خالص، افزایش می‌دهد. با وجود این، استفاده از K بزرگ به مشکل تشخیص منجر خواهد شد که قبلاً درباره آن توضیح داده شد.

تخمین یک مدل BEKK هنوز درگیر محاسبات سنگین، به دلیل معکوس سازی‌های ماتریسی متعدد است. تعداد پارامترها $(p + q)KN^۲ + N(N + ۱)/۲$ در مدل BEKK کامل، یا $(p + q)KN + N(N + ۱)/۲$ در مدل قطری آن، همچنان بسیار زیاد است. دست یافتن به همگرایی نیز ممکن است مشکل باشد؛ چرا که رابطه ۱۳ دارای پارامترهای خطی نیست. با این حال، مزیتی که وجود دارد این است که ساختار به شکل خودکار معین مثبت بودن H_t را تضمین می‌کند، بنابراین به اعمال جداگانه آن نیازی نخواهد بود. از آنجا که مشکلات محاسبات عددی در تخمین مدل‌های BEKK نسبتاً معمول هستند، در کاربرد رابطه ۱۳ به طور نمونه $p = q = K = ۱$ در نظر گرفته می‌شود.

در این پژوهش به منظور برازش ماتریس واریانس ـ کوواریانس شرطی برای برازش بتای متغیر با زمان، با توجه به مزیت مدل BEKK از مدل BEKK مرتبه کامل و مدل BEKK قطری بهره برده شده است.

روش‌شناسی پژوهش

برای برآورد مدل‌های تحقیق، از بازده‌های ماهانه شرکت‌های داخل نمونه، شاخص کل بازار بورس و اوراق بهادار و نرخ سود سپرده کوتاه‌مدت سه ماهه بانک‌ها به عنوان نرخ سود بدون ریسک طی سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۲ استفاده شده است. شرکت‌های داخل نمونه بر اساس فیلترهای زیر انتخاب شده‌اند:

- زیان‌ده نباشند؛
- داده‌های مورد نیاز در دوره تحقیق را داشته باشند؛
- تعداد روزهای معاملاتی آن‌ها در دوره تحقیق بیش از ۷۰ درصد باشد.

با استفاده از بازده‌های ۳۶ ماه ابتدایی دوره زمانی تحقیق (فروردین ۱۳۸۴ تا اسفند ۱۳۸۶) به تخمین ضریب بتای معادله CAPM با استفاده از مدل CAPM استاندارد، CAPM شرطی بر اساس مدل BEKK مرتبه کامل و CAPM شرطی بر اساس مدل BEKK قطری برای سال ۱۳۸۷ و برای ۳۰ شرکت داخل نمونه پرداخته شد. برازش مدل BEKK مرتبه کامل و BEKK قطری، در کدنویسی نرم‌افزار متلب انجام گرفت و تلاش شد که تعداد پارامترهای P و Q بهینه، بر اساس حداکثر درست‌نمایی انتخاب شود، سپس با استفاده از معادله CAPM و با قرار دادن میانگین بازده واقعی سه سال گذشته بازار و نرخ بازده بدون ریسک در سال ۱۳۸۷، بازده مورد انتظار سال ۱۳۸۷ را تحت هر یک از مدل‌های تحقیق محاسبه کرده و با مقایسه آن با بازده تحقق‌یافته هر یک از شرکت‌های داخل نمونه، به محاسبه مقادیر

معیارهای قدر مطلق خطا و مجذور خطا در سال ۱۳۸۷ برای ۳۰ شرکت داخل نمونه پرداختیم. در ادامه، با غلتاندن ۱۲ ماه به جلو، همین فرایند به منظور محاسبه بازده مورد انتظار و شاخص‌های دقت برای سال‌های ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۲ و با استفاده از رویکرد پیش‌بینی یک مرحله پیش رو[1] برای تمام شرکت‌های داخل نمونه آماری و تحت هر سه مدل تحقیق تکرار شد و با میانگین‌گیری از معیارهای قدر مطلق خطا و مجذور خطا برای هر یک از سال‌های ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۲، شاخص‌های میانگین قدر مطلق خطا و میانگین مجذور خطا به دست آمد. در نهایت فرضیه‌های تحقیق با اجرای آزمون‌های مقایسه زوجی برای دو معیار میانگین قدر مطلق خطا و میانگین مجذور خطا، مقایسه شدند.

یافته‌های پژوهش

همان‌طور که بیان شد، به منظور بررسی عملکرد مدل CAPM استاندارد با دو مدل CAPM شرطی بر اساس BEKK مرتبه کامل و CAPM شرطی بر اساس BEKK قطری، از دو معیار سنجش دقت میانگین قدر مطلق خطا و میانگین مجذور خطا بهره برده شده است. نتایج به دست آمده از هر مدل بر مبنای معیارهای یاد شده در جدول‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود.

جدول ۱. مقادیر شاخص میانگین قدر مطلق خطا برای سه مدل تحقیق (۱۳۸۷-۱۳۹۲)

MAE	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲
CAPM-Standard	۰/۲۳۹۵	۰/۴۴۲	۰/۳۹۲	۰/۲۱۸	۰/۳۸۸	۰/۵۷۴
CAPM-Full BEKK	۰/۲۳۴	۰/۴۱۶	۰/۳۹۴	۰/۲۰۸	۰/۳۷۰	۰/۵۶۳
CAPM-Diagonal BEKK	۰/۲۱۳	۰/۴۰۹	۰/۳۸۹	۰/۲۱۲	۰/۳۶۳	۰/۵۳۶

جدول ۲. مقادیر معیار میانگین مجذور خطا برای سه مدل تحقیق (۱۳۸۷-۱۳۹۲)

MSE	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲
CAPM-Standard	۰/۲۳۹۵	۰/۴۴۲	۰/۳۹۲	۰/۲۱۸	۰/۳۸۸	۰/۵۷۴
CAPM-Full BEKK	۰/۲۳۴	۰/۴۱۶	۰/۳۹۴	۰/۲۰۸	۰/۳۷۰	۰/۵۶۳
CAPM-Diagonal BEKK	۰/۲۱۳	۰/۴۰۹	۰/۳۸۹	۰/۲۱۲	۰/۳۶۳	۰/۵۳۶

به منظور مقایسه عملکرد CAPM استاندارد با دو مدل CAPM شرطی بر اساس BEKK مرتبه کامل و CAPM شرطی بر اساس BEKK قطری، از آزمون مقایسه زوجی استفاده شده است. نتایج آزمون مقایسه زوجی برای هر یک از معیارهای MSE و MAE در جدول‌های زیر درج شده است.

1. One Step Ahead

جدول ۳. نتایج آزمون مقایسه زوجی معیار میانگین قدر مطلق خطا برای دو مدل CAPM استاندارد و CAPM شرطی بر اساس مدل BEKK مرتبه کامل

	CAPM-full BEKK	CAPM-Standard
میانگین	۰/۳۶۴۲	۰/۳۷۵۵
واریانس	۰/۰۱۶۹۳	۰/۰۱۷۴۷
آماره t-student	۲/۸۹-	
نقطه بحرانی یک طرفه	۲/۰۱۵-	

جدول ٤. نتایج آزمون مقایسه زوجی معیار میانگین قدر مطلق خطا برای دو مدل CAPM استاندارد و CAPM شرطی بر اساس مدل BEKK قطری

	CAPM-Diagonal BEKK	CAPM-Standard
میانگین	۰/۳۵۳۵	۰/۳۷۵۵
واریانس	۰/۰۱۵۵۲	۰/۰۱۷۴۷
آماره t-student	۳/۸۰۲-	
نقطه بحرانی یک طرفه	۲/۰۱۵-	

جدول ۵. نتایج آزمون مقایسه زوجی معیار میانگین مجذور خطا برای دو مدل CAPM استاندارد و CAPM شرطی بر اساس مدل BEKK مرتبه کامل

	CAPM-full BEKK	CAPM-Standard
میانگین	۰/۲۰۴۵	۰/۲۲۴۲
واریانس	۰/۰۱۵۶	۰/۰۱۸۷۷
آماره t-student	۲/۰۴۷۱-	
نقطه بحرانی یک طرفه	۲/۰۱۵-	

جدول ٦. نتایج آزمون مقایسه زوجی معیار میانگین مجذور خطا برای دو مدل CAPM استاندارد و CAPM شرطی بر اساس مدل BEKK قطری

	CAPM-full BEKK	CAPM-Standard
میانگین	۰/۱۹۶۷	۰/۲۲۴۲
واریانس	۰/۰۱۳۴	۰/۰۱۸۷۷
آماره t-student	۲/۵۵۳۷-	
نقطه بحرانی یک طرفه	۲/۰۱۵-	

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

همان‌طور که بیان شد، پیش‌بینی نرخ بازده مورد انتظار همواره یکی از چالش‌های پیش روی فعالان بازار سرمایه بوده است؛ بنابراین هر فرایندی که بتواند دقت این پیش‌بینی را افزایش دهد، درخور توجه است. مدل قیمت‌گذاری دارایی

سرمایه‌ای یکی از معروف‌ترین مدل‌هایی است که برای پیش‌بینی بازده مورد انتظار استفاده می‌شود. برای بـرازش بتـا در این مدل از اطلاعات گذشته بازده دارایی‌ها و بازده شاخص بازار بهره برده شده است، اما آنچه از ادبیات تحقیق برمی‌آید، نشان می‌دهد سرمایه‌گذاران بر مبنای اطلاعات و داده‌های جدید، تخمین‌های تازه‌ای از میـانگین، واریـانس و کواریـانس بازده دارایی‌ها خواهند داشت. بنابراین، این ایده به ذهن خطور می‌کند که در نظر گرفتن بتای متغیر در زمان می‌تواند بـه بهبود مدل CAPM منجر شود. مدل CAPM با بتای متغیر در زمان در ادبیات مالی CAPM شرطی نامیده می‌شود. به منظور مدل‌سازی ماتریس واریانس ـ کوواریانس بازده دارایی‌ها و شاخص بازار، از دو مدل ناهمسانی واریانس چند متغیره BEKK مرتبه کامل و BEKK قطری استفاده شده است. نتایج تحقیق نشان داد که عملکرد مدل CAPM شـرطی بـر اساس هر دو مدل BEKK مرتبه کامل و BEKK قطری بر اسـاس دو معیـار MAE و MSE بهتـر از مـدل CAPM استاندارد است.

از آنجا که در این پژوهش برای مدل‌سازی ماتریس واریانس ـ کوواریانس به منظور برازش بتای متغیر بـا زمـان، از دو مدل BEKK مرتبه کامل و BEKK قطری استفاده شده است، برای تحقیقات آتی پیشـنهاد مـی‌شـود کـه عملکـرد CAPM شرطی بر اساس مدل‌های DCC، CCC، مدل‌های عاملی و سایر مدل‌هایی که می‌توانند در بـرازش مـاتریس واریانس ـ کوواریانس شرطی به کار روند، بررسی و آزمون شوند.

منابع

راعی، رضا؛ سعیدی، علی (۱۳۸۳). *مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک*. تهران: سمت

راعی، رضا؛ پویان‌فر، احمد (۱۳۸۳). *مدیریت سرمایه گذاری پیشرفته*. تهران: سمت.

References

Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2010). *Investments*. McGraw-Hill.

Bollerslev, T. & Engel, R.F. & Wooldridge, J. (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1), 116-131.

Engle, R.F. & Kroner, K.F. (1995) Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11(1), 122-150.

Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*. 50(4), 987–1007.

Ferson, W. & Kandel, S. & Stambaugh, R. (1987). Test of Asset Pricing with Time-Varying Expected Risk Premiums and Market Betas. *Journal of Finance*, 42(2), 201-220.

Hafner, C. & Herwartz, H. (1998). Time-Varying Market Price of Risk in the CAPM-Approaches, Empirical Evidence and Implications. *Finance*, 19, 93-112.

Hall, S., Miles, D. & Taylor, M. (1989). Modeling Asset Prices with Time-Varying Betas. *The Manchester School*, 57(4), 340-356.

Hansson, B. & Hordahl, P. (1998). Testing the Conditional CAPM Using Multivariate GARCH-M. *Applied Financial Economics*, 8(4), 377-388.

Harvey, C. (1989). Time-Varying Conditional Covariances in Tests of Asset Pricing Models. *Journal of Financial Economics*, 24(2), 289-317.

Huang, P. & Hueng, C. J. (2008). Conditional Risk-Return in a Time-Varying Beta Model. *Quantitative Finance*, 8(4), 381-390.

Jagannathan, R. & Wang, Z. (1996). The Conditional CAPM and Cross-Section of Expected Returns. *The Journal of Finance*, 51(1), 3-53.

Kaplan, S. & Garrick, B. J. (1981). On the quantitative definition of risk. *Risk analysis*, 1(1), 11-27.

Kroner K.F. & Ng V.K. (1998). Modeling Asymmetric Comovements of Asset Returns. *The Review of Financial Studies*, 11(4), 817–844.

Lintner J. (1965) The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47(1), 13–37.

NG, L. (1991). Test of the CAPM with Time Varying Covariances: A Multivariate GARCH Approach. *Journal of Finance*, 46(4), 1507-1521.

Raei R. & Pouyanfar A. (2005). Advanced Investment Management. SAMT. (*in Persian*)

Raei, R. & Saeidi A. (2005). *Principles of financial engineering and risk management*. SAMT. (*in Persian*)

Sharpe, W. (1995). *Investments.* Prentice Hall.