

## تخمین ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفت و طلا با بهره‌مندی از روش کاپیولا- گارچ

سعید فلاح‌پور<sup>۱</sup>، احسان احمدی<sup>۲</sup>

**چکیده:** توابع کاپیولا ابزار قدرتمندی برای توصیف ساختار وابستگی متغیرهای تصادفی چندبعدی ارائه کرده‌اند و از جدیدترین ابزار مدیریت ریسک مالی به حساب می‌آیند. یکی از کاربردهای توابع کاپیولا در مدیریت ریسک، محاسبه ارزش در معرض ریسک (VaR) پرتفوی است که از پرکاربردترین معیارهای ریسک در نهادهای مالی به‌شمار می‌رود. هدف اصلی پژوهش حاضر محاسبه دقیق‌تر ریسک است. پژوهش پیش رو با ترکیب توابع کاپیولا و مدل‌های (GARCH)، از رویکردی با عنوان «کاپیولا- گارچ» برای محاسبه VaR پرتفوی متشکل از نفت خام و طلا و داده‌های سال‌های ۲۰۰۷ تا ۲۰۱۲، بهره برده است. در ادامه، نتایج به‌دست‌آمده از روش یادشده با نتایج روش‌های سنتی VaR مقایسه شدند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهد روش کاپیولا- گارچ در مقایسه با روش‌های سنتی، ریسک پرتفوی را با دقت بیشتری محاسبه می‌کند.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
رتال جامع علوم انسانی

**واژه‌های کلیدی:** ارزش در معرض ریسک، پرتفوی، کاپیولا، GARCH، GJR

۱. استادیار گروه مدیریت مالی و بیمه، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران
۲. کارشناس ارشد مدیریت مالی، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۲/۲۴

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۳/۰۲/۳۱

نویسنده مسئول مقاله: احسان احمدی

E-mail: ehsanahmadi32@yahoo.com

**مقدمه**

بحران مالی سال ۲۰۰۸ بار دیگر اهمیت روش‌های مدیریت ریسک را برای ما مشخص کرد. بحران جهانی نشان داد روش‌های قدیمی اندازه‌گیری و مدیریت ریسک در بازارهای بین‌المللی پرنوسان قرن بیست‌ویکم کارایی چندانی ندارند. استفاده از معیارهای خوش‌بینانه در اندازه‌گیری ریسک و فرض‌هایی که در بازارهای پویای مالی بسیار ساده‌انگارانه است، در نهایت به زیان‌های شدید و خارج از انتظار شرکت‌ها منجر می‌شود (هوانگ، لی و لیانگ، ۲۰۰۹).

ریسک مفهوم نامتقارنی با نتایج مورد انتظار دارد. مفهوم عدم تقارن در ریسک بدین معناست که سرمایه‌گذاران به نتایج مطلوب و نامطلوب اهمیت یکسان نمی‌دهند. برای اندازه‌گیری ریسک معقولانه باید نگاه متفاوتی به نتایج مطلوب و نامطلوب کرد. با توجه به این حقیقت، در دهه‌های اخیر شاهد شکل‌گیری روند برجسته‌تری در اندازه‌گیری ریسک با استفاده از معیارهای چارکی، از زمان معرفی ارزش در معرض ریسک<sup>۱</sup>، هستیم. در حال حاضر معیار VaR یکی از معیارهای استاندارد پذیرفته‌شده در صنعت خدمات مالی در دنیاست (هوتا، لوکاس و پارلو، ۲۰۰۸). با توجه به روند جهانی شدن بازارها و ارتباط هرچه بیشتر آنها با یکدیگر، استفاده از معیارهای استاندارد ریسک برای شرکت‌های ایرانی ضروری به نظر می‌رسد.

توابع کاپیولا<sup>۲</sup> ابزار قدرتمندی هستند که به شرکت‌ها اجازه می‌دهند ساختار وابستگی<sup>۳</sup> بین اجزای مختلف پرتفوی را مدل‌سازی کنند. مدارک و مستندات فراوانی وجود دارد که نشان می‌دهد بسیاری از متغیرهای اقتصادی توزیع نرمال ندارند و توزیع آنها نسبت به توزیع نرمال دنباله پهن‌تری<sup>۴</sup> دارند. زمانی که توزیع بازدهی‌ها نرمال نیست، ضریب همبستگی خطی دیگر برای بیان ساختار وابستگی معیار مناسبی نیست. در این پژوهش از توابع کاپیولا به‌منزله معیار جایگزین برای مدل‌سازی ساختار وابستگی استفاده شده است.

مدل‌های ناهمسانی واریانس در تحلیل سری‌های زمانی مالی، به‌ویژه زمانی که هدف تجزیه و تحلیل و تخمین واریانس است، جایگاه خود را پیدا کرده‌اند. اولین بار مشاهده شد که هرچند بسیاری از سری‌های زمانی مالی قابل پیش‌بینی نیستند، خوشه‌بندی شایان توجهی در نوسانات<sup>۵</sup> آنها وجود دارد به این معنا که نوسانات بزرگ به‌دنبال نوسانات بزرگ و نوسانات کوچک به‌دنبال نوسانات کوچک رخ می‌دهند. به این پدیده ناهمسانی شرطی گفته می‌شود؛ زیرا

- 
1. Value at Risk (VaR)
  2. Copula Functions
  3. Dependence Structure
  4. Fat Tail
  5. Volatility Clustering

فرض می‌شود سری زمانی در حالت کلی ماناست، ولی واریانس مورد انتظار شرطی آن با زمان تغییر می‌کند (انگل، ۱۹۸۲).

### پیشینه پژوهش

مدارک و مستندات فراوانی نشان می‌دهد بسیاری از متغیرهای اقتصادی توزیع نرمال ندارند و تاریخچه آنها به مطالعات میلز (۱۹۲۷) بازمی‌گردد. از جمله مواردی که نشان می‌دهد توزیع تک‌متغیره بسیاری از متغیرهای اقتصادی نرمال نیست، کشیدگی بیش از حد و چولگی است. مطالعات اخیر حتی نشان داده است توزیع‌های چندمتغیره هم نرمال نیستند که در اصطلاح گفته می‌شود وابستگی نامتقارن دارند.

مدل‌سازی وابستگی یکی از عوامل کلیدی در تشکیل پرتفوی و مدیریت ریسک است. انتخاب مدل نامناسب به انتخاب پرتفوی غیربهبوده و اندازه‌گیری نادرست ریسک منجر می‌شود. به‌طور سنتی، از ضریب همبستگی برای توضیح وابستگی بین متغیرها استفاده شده است، ولی پژوهش‌های اخیر نشان‌دهنده برتری کاپیولاها برای مدل‌سازی وابستگی است. برای مثال می‌توان به کارهای امبرچست، مک‌نیل و استرامن (۲۰۰۲) اشاره کرد. ضریب همبستگی خطی نقص عمده‌ای دارد، اینکه تحت تبدیل غیرخطی ناوردا نیست؛ درحالی‌که معیارهای وابستگی که از کاپیولاها استنتاج می‌شوند، می‌توانند بر این مشکل غلبه کنند و کاربرد وسیع‌تری دارند.

اولین بار اسکالر (۱۹۵۹) پیشنهاد کرد که به‌منظور اندازه‌گیری وابستگی غیرخطی بین متغیرها، از کاپیولا استفاده شود. تئوری اسکالر نشان می‌دهد چگونه می‌توان یک تابع توزیع مشترک را به توابع حاشیه‌ای افراز کرد و سپس با بهره‌مندی از تابع کاپیولا به مدل‌سازی ساختار وابستگی پرداخت. کاپیولای شرطی را اولین بار پاتون (۲۰۰۱) معرفی کرد. گوبرگ و ورکر (۲۰۰۵) و همچنین هامرل و راوسچ (۲۰۰۵) کاربرد کاپیولا را در قیمت‌گذاری اختیارها بررسی کردند. منگادزو و وکچیاتو (۲۰۰۴) برای بررسی ریسک اعتباری، و نسلهوا، امبرچست و دمولین (۲۰۰۶) برای بررسی ریسک عملیاتی بانک‌ها، از کاپیولا بهره بردند.

دنگ و یانگ (۲۰۱۱) کاربرد کاپیولا را در بهینه‌سازی بررسی کردند. پارلو و هوتا (۲۰۰۶) با به‌کارگیری مدل‌های ترکیبی کاپیولای شرطی و GARCH چندمتغیره، VaR پرتفوی متشکل از شاخص‌های S&P ۵۰۰ و NASDAQ را محاسبه کردند. هوانگ و همکاران (۲۰۰۹) از روش کاپیولا-گارچ VaR پرتفوی شاخص‌های NASDAQ و TAIEX را محاسبه کردند.

در ایران هنوز پژوهشی درخصوص تخمین ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفت و طلا با استفاده از روش کاپیولا- گارچ، اجرا نشده است.

### روش‌شناسی پژوهش

این پژوهش از نظر هدف کاربردی است و با تشکیل پرتفوی متشکل از نفت خام و طلا به دنبال پاسخ این پرسش است که آیا روش کاپیولا- گارچ ریسک پرتفوی را نسبت به روش‌های دیگر، دقیق‌تر مقایسه می‌کند یا خیر؟

### مدل توزیع حاشیه‌ای

مدل‌های در نظر گرفته شده برای توزیع‌های حاشیه‌ای در این پژوهش، بر مبنای مدل‌های GARCH و GJR است که پسماندهای استاندارد شده توزیع نرمال یا تی-استیودنت دارند.

### مدل GARCH-n و GARCH-t

اگر سری زمانی بازدهی پرتفوی را با نماد  $\{X_t\}_{t=1, \dots, T}$  نشان دهیم، فرض می‌شود که (۱۱، ۱۱) GARCH با پسماندهای استاندارد شده دارای توزیع نرمال (GARCH-n) یا توزیع تی-استیودنت استاندارد شده (GARCH-t) است که به این صورت نمایش داده می‌شود:

$$x_t = \mu + a_t \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,1) \text{ or } \varepsilon_t \sim t_d$$

در اینجا  $\mu = E(x_t) = E(E(x_t | \Omega_{t-1})) = E(\mu_t)$  میانگین غیرشرطی سری زمانی است و  $\sigma_t^2 = var(x_t | \Omega_{t-1}) = var(a_t | \Omega_{t-1})$  واریانس شرطی توزیع است. محدودیت‌های مدل عبارت‌اند از  $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, \alpha_1 + \beta < 1$  و مجموعه  $\Omega_{t-1}$  اطلاعاتی ما در زمان  $t-1$  است. در زمانی که فرض می‌شود توزیع پسماندها نرمال است، شرط  $\alpha_1 + \beta < 1$  شرط کافی برای مانابودن واریانس است و ایجاب می‌کند که واریانس غیرشرطی  $a_t$  معین باشد؛ درحالی‌که واریانس شرطی آن با زمان تغییر می‌کند. در مورد غیرنرمال، شرط مدل به این صورت است  $\alpha_1 var(\varepsilon_t) + \beta < 1$ ، به علاوه در این مدل  $d$  درجه آزادی توزیع

تخمین ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفت و طلا با بهره‌مندی از روش... ۳۱۳

است. ما در این پژوهش از روش بیشترین درست‌نمایی<sup>۱</sup> برای تخمین پارامترهای مدل استفاده می‌کنیم. اگر مجموعه اطلاعاتی را به این صورت تعریف کنیم  $\Omega_{t-1} = \{a_0, a_1, \dots, a_{t-1}\}$ ، تابع چگالی مشترک را می‌توان به صورت رابطه ۲ نمایش داد:

$$f(a_1, \dots, a_t) = f(a_t | \Omega_{t-1}) f(a_{t-1} | \Omega_{t-2}) \dots f(a_1 | \Omega_0) f(a_0) \quad \text{رابطه ۲}$$

با استفاده از داده‌های  $a_1, a_2, \dots, a_t$  تابع لگاریتم درست‌نمایی به صورت رابطه ۳ نوشته می‌شود:

$$LLF = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{n-k} | \Omega_{n-k-1}) \quad \text{رابطه ۳}$$

تابع بالا را می‌توان برای هر نوع توزیع در نظر گرفته شده برای  $\varepsilon_t$  ها محاسبه کرد. می‌توان به کمک روش‌های عددی، مقدار LLF را حداکثر کرد و مقادیر تابع درست‌نمایی را به دست آورد. با استفاده از داده‌های  $(x_1, x_2, \dots, x_t)$ ، می‌توان توزیع حاشیه‌ای شرطی<sup>۲</sup> را در قالب رابطه ۴ تعریف کرد:

$$p(X_{t+1} \leq x | \Omega_t) = p(a_{t+1} \leq (x - \mu) | \Omega_t) \quad \text{رابطه ۴}$$

$$= p\left(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}} \middle| \Omega_t\right)$$

$$= \begin{cases} N\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}} \middle| \Omega_t\right) & \text{if } \varepsilon \sim N(0,1) \\ t_d\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}} \middle| \Omega_t\right) & \text{if } \varepsilon \sim t_d \end{cases}$$

### مدل GJR-t و GJR-n

در مدل GJR معادله میانگین و واریانس به صورت رابطه ۵ است که در اینجا GJR-n یعنی مدلی که پسماندی با توزیع نرمال دارد و GJR-t یعنی مدلی است که پسماندی با توزیع تی-استیودنت دارد:

- 
1. Maximum Likelihood Method
  2. Conditional Marginal Distribution

$$\begin{aligned}
 x_t &= \mu + a_t && \text{رابطه ۵)} \\
 a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\
 \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma s_{t-1} a_{t-1}^2 \\
 \varepsilon_t &\sim N(0,1) \text{ or } \varepsilon_t \sim t_d \\
 s_{t-1} &= \begin{cases} 1, & a_{t-1} < 0 \\ 0, & a_{t-1} \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

در اینجا  $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$  و  $\alpha_1 + \beta + \frac{1}{4}\gamma < 1$  یک متغیر مجازی است. زمانی که ضریب  $\gamma$  مثبت باشد، معنای آن این است که شوک‌های منفی ( $\varepsilon < 0$ ) نوسانات بیشتری از شوک‌های مثبت در دوره بعد ایجاد می‌کنند. توزیع حاشیه‌ای شرطی  $X_{t+1}$  نیز شبیه روش GARCH به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 p(X_{t+1} \leq x | \Omega_t) &= p\left(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2 + \gamma s_t a_t^2}} \middle| \Omega_t\right) && \text{رابطه ۶)} \\
 &= \begin{cases} N\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2 + \gamma s_t a_t^2}} \middle| \Omega_t\right) & \text{if } \varepsilon \sim N(0,1) \\ t_d\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2 + \gamma s_t a_t^2}} \middle| \Omega_t\right) & \text{if } \varepsilon \sim t_d \end{cases}
 \end{aligned}$$

### تئوری کاپیولا

در ادبیات آماری مفهوم کاپیولا در اوایل قرن نوزدهم میلادی در زمینه بحث در خصوص توزیع‌های چندمتغیره غیرنرمال پدیدار شد. کارهای جدید در خصوص توابع کاپیولا به ۴۰ سال قبل، زمانی که اسکالر (۱۹۵۹) چندی از ویژگی‌ها و خصوصیات بنیادی کاپیولا را تعریف کرد، بازمی‌گردد.

### تئوری اسکالر

اگر  $F$  را یک تابع توزیع  $n$  بعدی با توابع حاشیه‌ای  $F_1, F_2, \dots, F_n$  در نظر بگیریم، یک کاپیولا برای تمامی مقادیر واقعی  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  وجود دارد؛ به گونه‌ای که:

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= p(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) && \text{رابطه ۷)} \\
 &= C(p(X_1 \leq x_1), p(X_2 \leq x_2), \dots, p(X_n \leq x_n)) \\
 &= C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))
 \end{aligned}$$

تخمین ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفت و طلا با بهره‌مندی از روش... ۳۱۵

زمانی که متغیرها پیوسته باشند، تئوری اسکالر نشان می‌دهد هر تابع توزیع احتمال چندمتغیره را می‌توان به صورت تابع توزیع حاشیه‌ای و ساختار وابستگی نشان داد:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} && \text{رابطه ۸)} \\
 &= \frac{\partial C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n} \times \prod_i \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} \\
 &= c(\tilde{u}) \times \prod_i f_i(x_i)
 \end{aligned}$$

که در اینجا  $f_i$  تابع چگالی  $F_i$  است و  $u_i = F_i(x_i)$  برای تمام  $i = 1, 2, \dots, n$  تعریف می‌شود. همچنین  $\tilde{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  و  $c(\tilde{u})$  تابع چگالی کاپیولا است.

### انواع توابع کاپیولا

توابع کاپیولا که در این پژوهش استفاده می‌کنیم عبارت‌اند از نرمال، تی-استیودنت و خانواده کاپیولاهای ارشمیدسی<sup>۱</sup> از قبیل فرانک، گامبل و کلیتون. خانواده کاپیولای ارشمیدسی را لینگ (۱۹۶۵) معرفی کرد. مهم‌ترین ویژگی کاپیولاهای ارشمیدسی این است که از نوع کاپیولای بیضی<sup>۲</sup> نیستند و اجازه می‌دهند انواع مختلفی از ساختارهای وابستگی را مدل‌سازی کنیم. پنج کاپیولای استفاده‌شده در این پژوهش به ترتیب در زیر توضیح داده می‌شود.

### کاپیولای نرمال

ابتدا  $u_i = F_i(x_i)$  تعریف می‌کنیم. کاپیولای نرمال از توابع کاپیولا با توزیع نرمال چندمتغیره است که به این صورت تعریف می‌شود:

$$C_{Gaussian}(u_1, u_2; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \quad \text{رابطه ۹)}$$

در این معادله  $\Phi_\rho$  معرف توزیع مشترک یک تابع توزیع نرمال چندبعدی با ضریب همبستگی خطی  $\rho$  و  $\Phi$  توزیع نرمال استاندارد است.

1. Archimedean Copulas  
2. Elliptical

### کاپیولای تی-استیودنت

کاپیولای تی-استیودنت نیز مانند کاپیولای نرمال، بر مبنای تابع توزیع تی-استیودنت چندمتغیره است. این کاپیولا در قالب رابطه ۱۰ تعریف می شود:

$$C_T(u_1, u_2; \varrho, d) = t_{d, \varrho} \left( t_d^{-1}(u_1), t_d^{-1}(u_2) \right) \quad \text{رابطه ۱۰}$$

چون با تغییر درجه آزادی می توان درجه وابستگی دنباله توزیع را تغییر داد، از کاپیولای تی-استیودنت در عمل بیشتر استفاده می شود.

### کاپیولای فرانک

خانواده کاپیولاهای فرانک توسط جنست (۱۹۸۷) معرفی شدند. کاپیولای فرانک به این صورت تعریف می شوند:

$$C_{Frank}(u_1, u_2; \lambda) = \frac{-1}{\lambda} \log \left( \frac{\lambda(1 - e^{-\lambda}) - (1 - e^{-\lambda u_1})(1 - e^{-\lambda u_2})}{1 - e^{-\lambda}} \right) \quad \text{رابطه ۱۱}$$

$$\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

### کاپیولای گامبل

کاپیولای گامبل در سال ۱۹۶۰ توسط گامبل معرفی شد. تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$C_{Gumbel}(u_1, u_2; \delta) = \exp \left( - \left( (-\log u_1)^\delta + (-\log u_2)^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \right) \quad \text{رابطه ۱۲}$$

$$\delta \in [0, +\infty)$$

### کاپیولای کلیتون

کاپیولای کلیتون را اولین بار کلیتون (۱۹۸۷) معرفی کرد. تابع توزیع تجمعی آن به این صورت است:

$$C_{Clayton}(u_1, u_2; \omega) = (u_1^{-\omega} + u_2^{-\omega})^{\frac{1}{\omega}} \quad \text{رابطه ۱۳}$$

$$\omega \in [-1, +\infty)$$

### روش تخمین پارامترهای توابع کاپیولا

برای تخمین پارامترهای تابع کاپیولا از روش بیشترین درست‌نمایی استفاده می کنیم.



### ارزش در معرض ریسک

VaR یک پرتفوی در زمان  $t$  (بازه زمانی  $\Delta t$  تا  $t$ ) در سطح اطمینان  $(1 - \alpha)$  در جایی که  $\alpha \in (0, 1)$ ، به این صورت تعریف می‌شود:

$$p(X_{p,t} \leq VaR_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) = \alpha \quad \text{رابطه ۱۴}$$

یعنی با احتمال  $(1 - \alpha) 100$  درصد مطمئن هستیم که زیان پرتفوی ما در بازه زمانی  $\Delta t$  از VaR بیشتر نمی‌شود.

پرتفوی استفاده‌شده در این پژوهش متشکل از نفت خام و طلاست. اوزان دارایی‌های این پرتفوی مساوی در نظر گرفته شده است، ولی نتایج به‌دست‌آمده با تغییر وزن دارایی‌ها تغییر نمی‌کنند.

### مدل کاپیولا-گارچ

برای تخمین VaR در این روش باید دو مدل برای توزیع حاشیه‌ای و یک مدل برای کاپیولا تخمین بزنیم. مدل‌هایی که برای توزیع‌های حاشیه‌ای در نظر می‌گیریم باید نشان‌دهنده ویژگی‌های توزیع‌های حاشیه‌ای باشند. توزیع‌های حاشیه‌ای در این پژوهش با استفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس مدل‌سازی شده‌اند. ما ابتدا داده‌ها را به دو گروه طبقه‌بندی می‌کنیم. گروه اول داده‌های درون‌نمونه‌ای هستند و گروه دوم داده‌های برون‌نمونه‌ای. ابتدا با استفاده از هزار مشاهده اول، توزیع‌های حاشیه‌ای را به‌دست می‌آوریم. سپس با استفاده از پسماندهای استاندارد شده توزیع‌های حاشیه‌ای، پارامترهای تابع کاپیولا را به‌دست می‌آوریم. در نهایت برای هر روز با استفاده از تابع کاپیولای تخمین زده‌شده، ۱۰ هزار بازدهی شبیه‌سازی و VaR پرتفوی را محاسبه می‌کنیم. عدد به‌دست‌آمده VaR پرتفوی در روز ۱۰۰۱ است. این عمل را تا انتهای داده‌ها تکرار می‌کنیم تا سری زمانی VaR های برآوردشده را به‌دست آوریم.

### روش‌های سنتی محاسبه VaR

برای مقایسه عملکرد روش کاپیولا-گارچ، VaR پرتفوی را با استفاده از روش‌های سنتی مختلفی مانند روش شبیه‌سازی تاریخی، روش واریانس-کوواریانس، روش میانگین موزون متحرک‌نمایی<sup>۱</sup> و رویکرد دارایی نرمال<sup>۲</sup>، محاسبه می‌کنیم.

1. Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)  
2. Asset-Normal Approach

روش شبیه‌سازی تاریخی فرض می‌کند توزیع بازدهی‌ها دوباره تکرار می‌شوند. در این روش با استفاده از بازدهی‌های تاریخی VaR پرتفوی محاسبه می‌شود. روش واریانس-کوواریانس فرض می‌کند توزیع بازدهی‌ها نرمال است و VaR پرتفوی به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{p,t}^2 = (w_1 w_2) \times \begin{pmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{12,t} & \sigma_{2,t}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \text{رابطه ۱۵}$$

$$VaR_{p,t}(\alpha) = \sigma_{p,t} \times Z_\alpha + U_{p,t}$$

در اینجا  $U_{p,t}$  و  $\sigma_{p,t}$  به ترتیب انحراف معیار و میانگین بازدهی پرتفوی در زمان  $t$  و  $Z_\alpha$  معرف معکوس تابع توزیع نرمال استاندارد شده با احتمال  $\alpha$  است.

در روش EWMA واریانس پرتفوی در زمان  $t$  را به کمک انحراف معیار و بازدهی پرتفوی به این صورت محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_{p,t|t-1}^2 = (1 - \lambda)x_{p,t-1}^2 + \lambda\sigma_{p,t-1|t-2}^2 \quad \text{رابطه ۱۶}$$

مقدار  $\lambda$  به توصیه RiskMetrics ۹۴ درصد در این پژوهش در نظر گرفته شده است. بعد از اینکه برای تمام روزها انحراف معیار پرتفوی را محاسبه شد، VaR پرتفوی مانند روش واریانس کوواریانس محاسبه می‌شود.

در رویکرد دارایی نرمال، مدل‌های GARCH و GJR را به صورت مستقیم برای بازدهی پرتفوی محاسبه می‌کنیم و پس از برآورد مدل و تخمین واریانس پرتفوی در زمان  $t$ ، VaR پرتفوی به صورت رابطه ۱۷ محاسبه می‌شود:

$$VaR_{p,t}(\alpha)|\Omega_{t-1} = (\sigma_{p,t} \times Z_\alpha + U_t)|\Omega_{t-1} \quad \text{رابطه ۱۷}$$

## یافته‌های پژوهش

### داده‌ها

هدف این پژوهش بررسی عملکرد روش کاپیولا- گارچ برای تاریخ دوم ژانویه ۲۰۰۷ تا ۲۳ اکتبر ۲۰۱۲ است که در مجموع شامل ۱۴۳۸ قیمت- مشاهده روزانه است. داده‌های این پژوهش با مراجعه به پایگاه اینترنتی اوپیک و سایت یو.اس.آ. گلد<sup>۱</sup> جمع‌آوری شده است. همچنین نرم‌افزارهای استفاده شده در این پژوهش عبارت‌اند از نرم‌افزار Excel به منظور تلخیص داده‌ها و نرم‌افزار Matlab به منظور انجام محاسبات پژوهش. برای از بین بردن همبستگی کاذب تنها

1. www.usagold.com

مشاهدات روزهایی که برای هر دو دارایی مظنه قیمت وجود داشته، استفاده شده است. برای مشاهدات این پژوهش از بازدهی لگاریتمی استفاده می‌شود.

در جدول ۱ ویژگی داده‌ها نشان داده شده است. به‌منظور بررسی خوشه‌ای بودن مشاهدات از آزمون تأثیرات آرچ<sup>۱</sup> استفاده می‌شود. نتایج آزمون تأثیرات آرچ (جدول ۱)، نشان می‌دهد اثر آرچ در هر دو سری زمانی وجود دارد. به‌علاوه کشیدگی هر دو سری زیاد است که نشان می‌دهد توزیع بازدهی دارایی‌ها دنباله پهن تری از توزیع نرمال دارند.

جدول‌های ۲ و ۳ نتایج مدل‌های GARCH-t، GARCH-n، GJR-t و GJR-n را نشان می‌دهند. نتایج آزمون لیونگ-باکس<sup>۲</sup> بر پسماندهای مدل‌های حاشیه‌ای تخمین‌زده شده نشان می‌دهد فرضیه صفر مبنی بر نبود خودهمبستگی در وقفه‌های ۱، ۳، ۵ و ۷ در سطح معناداری ۵ درصد رد نمی‌شود. همچنین آزمون تأثیرات آرچ بر توان دوم پسماندها در وقفه‌های ۴، ۶، ۸ و ۱۰ اجرا شده است و در سطح معناداری ۵ درصد فرضیه صفر رد نمی‌شود. جدول‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند مدل‌های حاشیه‌ای عملکرد خوبی دارند.

جدول ۱. آمار توصیفی داده‌های پژوهش

طلا		نفت		
۱۴۷۳		۱۴۷۳		تعداد نمونه
۰/۰۰۰۶۸		۰/۰۰۰۴۲		میانگین
۰/۰۱۴۰۱		۰/۰۲۳۴۷		انحراف معیار
-۰/۳۰۱۰۴		۰/۰۱۴۴۲		چولگی
۵/۱۶۵۱۷		۶/۴۷۹۹۳		کشیدگی
P-value	Q-statistics	P-value	Q-statistics	آزمون آرچ
.	۵۳/۵۷۶۳۴	.	۸۵/۱۵۳۱۳	LM(۴)
.	۷۷/۰۰۳۲۹	.	۹۳/۱۵۹۷۴	LM(۶)
.	۸۱/۰۹۵۴۳	.	۱۰۳/۰۲۱۶	LM(۸)
.	۸۸/۶۶۵۲۵	.	۱۱۴/۴۱۶۶	LM(۱۰)

1. ARCH Test  
2. Ljung-Box Test

جدول ۲. نتایج مدل طایفه‌ای GARCH

GARCH-I			GARCH-II		
متغیر	مقدار	P-value	متغیر	مقدار	P-value
$\mu$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	$\mu$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
$\sigma$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	$\sigma$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
$\alpha_1$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	$\alpha_1$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
$\beta$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	$\beta$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
$d$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	$d$	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
LLE	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	LLE	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
AIC	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	AIC	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
BIC	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	BIC	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰

  

GARCH-I			GARCH-II		
متغیر	مقدار	P-value	متغیر	مقدار	P-value
Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
P-value	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	P-value	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
P-value	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	P-value	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰

  

از معادله (۱)			از معادله (۲)		
متغیر	مقدار	P-value	متغیر	مقدار	P-value
Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
P-value	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	P-value	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	Q-stat	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
P-value	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	P-value	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰

جدول ۳. نتایج مدل حاشیه‌ای JGR

GJR-t					GJR-n				
طلا			نفت		طلا			نفت	
انحراف معیار	مقدار	انحراف معیار	انحراف معیار	مقدار	انحراف معیار	مقدار	انحراف معیار	مقدار	پارامتر
۰.۰۰۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱۱۶۷	۰.۰۰۰۰۳۷۸۸	۰.۰۰۰۰۳۷۸۸	۰.۰۰۰۰۹۷۸	۰.۰۰۰۰۳۰۱	۰.۰۰۰۰۹۷۸	۰.۰۰۰۰۴۲۸	۰.۰۰۰۰۷۷۰۹	$\mu$
۰.۰۰۰۰۰۰۱	۰.۰۰۰۰۰۰۲	۰.۰۰۰۰۰۰۲	۰.۰۰۰۰۰۰۲	۰.۰۰۰۰۰۰۴	۰.۰۰۰۰۰۰۱	۰.۰۰۰۰۰۰۱	۰.۰۰۰۰۰۰۱	۰.۰۰۰۰۰۰۵	$\alpha_1$
۰.۰۰۰۰۸۱۷۹۱	۰.۹۳۸۹۰۰۶	۰.۰۰۰۸۷۱۳	۰.۰۰۰۸۷۱۳	۰.۹۵۲۲۷۵	۰.۰۰۰۸۱۷۹۱	۰.۹۳۸۹۰۰۶	۰.۰۰۰۹۵۶۳۴	۰.۹۴۴۱۷۵	$\alpha_2$
۰.۰۰۰۰۷۷۱۷	۰.۰۰۰۴۳۲۴	۰.۰۰۰۰۲۶۷۱	۰.۰۰۰۰۲۶۷۱	۰.۰۰۰۰۳۷۵	۰.۰۰۰۰۳۷۱۷	۰.۰۰۰۰۴۲۷۸	۰.۰۰۰۰۹۱۹۰۶	۰.۰۰۰۰۱۳۳۲۲	$\beta$
۰.۰۰۰۰۹۵۶۳۴	۰.۰۰۰۵۸۶۷۸۰	۰.۰۰۰۱۶۱۶۸۳	۰.۰۰۰۱۶۱۶۸۳	۰.۰۰۰۴۴۴۶۸	۰.۰۰۰۹۵۶۳۴	۰.۰۰۰۱۶۱۶۸۳	۰.۰۰۰۱۶۱۶۸۳	۰.۰۰۰۰۵۵۸۲۱	$d$
۰.۰۰۰۰۱۱۱۱۱	۵/۱۸۸۵۳۲۹	۷/۸۱۲۰۰۴	۷/۸۱۲۰۰۴	۸/۵۶۳۳۲	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰۰	$\mu$
۳۳.۳	۳۵۷۸	۳۵۷۸	۳۵۷۸	۳۵۷۸	۳۵۷۸	۳۵۷۸	۳۵۷۸	۳۵۷۸	LLF
۰.۵۹۵	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	AIC
۰.۵۵۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	۰.۷۱۴۴	BIC
Q-stat	P-value	Q-stat	P-value	Q-stat	P-value	Q-stat	P-value	Q-stat	وقته
۱/۸۲۶۶۹	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۲۰۸۲۶	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۲۲۷۵۵	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۲۲۷۵۵	QW(۱)
۲/۰۵۶۳۳	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۲۱۳۹۴	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۱/۸۸۷۳	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۲۲۶۰۶	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۲۲۶۰۶	QW(۳)
۲/۲۵۱۷۵	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۱۸۹۱۴	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۲/۹۲۷۸۴	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۲/۰۷۰۶۵	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۲/۰۷۰۶۵	QW(۵)
۸/۹۸۷۲۶	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۶/۵۸۱۷۶	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۹/۱۸۹۸۳	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۶/۶۹۶۷۵	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۶/۶۹۶۷۵	QW(۷)
۷/۱۶۸۸۷	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۶۸۲۲۴	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۵/۶۳۱۲	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۰۶۶۵۹	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۰۶۶۵۹	LM(۴)
۷/۷۰۰۰۳	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۰۷۸۵	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۵/۶۴۲	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۶۳۲۸۷	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۶۳۲۸۷	LM(۶)
۸/۴۳۶۹	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۴/۳۳۵	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۶/۵۹۱۶۵	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۲/۲۷۲۱۴	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۲/۲۷۲۱۴	LM(۸)
۸/۲۲۷۴	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۷/۷۰۷۲	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۶/۶۱۶۷۵	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۲/۵۵۶۹۹	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۲/۵۵۶۹۹	LM(۱۰)

آزمون جایگزینی-بازگش

آزمون ارج

## مقایسه روش‌های مختلف

بعد از محاسبه بازدهی پرتفوی، در مجموع ۱۴۳۷ مشاهده برای بازدهی پرتفوی داریم. در تمام روش‌ها ابتدا با هزار مشاهده اول، VaR روز ۱۰۰۱ تخمین زده می‌شود و بعد به کمک داده‌های روز دوم تا ۱۰۰۱، VaR روز ۱۰۰۲ پرتفوی برآورد می‌شود. این عمل تا زمانی که برای هر روش ۴۳۷ مشاهده روزانه در هر دو سطح اطمینان ۹۵ درصد و ۹۹ درصد به دست آید، تکرار می‌شود. سپس VaR محاسبه شده با بازدهی واقعی پرتفوی در هر روز، مقایسه می‌شود. تعداد دفعاتی که VaR محاسبه شده در هر روش، از بازدهی واقعی پرتفوی بزرگ‌تر است، شمرده می‌شود. روشی که کمترین میانگین خطا را داشته باشد، روش دقیق‌تری است.

جدول ۴ نتایج مدل کاپیولا-گارچ را برای توابع مختلف کاپیولا نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود کاپیولا تی-استیودنت در هر دو سطح اطمینان کمترین میانگین خطا را دارد. جدول ۵ نتایج مقایسه روش‌های سنتی محاسبه VaR را با روش کاپیولا-گارچ با توزیع حاشیه‌ای نرمال و تابع کاپیولا تی-استیودنت نشان می‌دهد. در بین تمامی روش‌های مقایسه شده، روش کاپیولا-گارچ کمترین میانگین خطا را دارد.

جدول ۴. مقایسه کاپیولاهای مختلف

سطح معناداری ۵٪						
روزهای معاملاتی	تعداد دفعات مورد انتظار				۴۳۷	۲۲
کاپیولا	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t	میانگین قدر مطلق خطا	
Gaussian	۲۱	۱۴	۲۱	۱۵	۴/۲۵	
Student t	۲۲	۱۵	۲۱	۱۴	۴	
Gumbel	۲۴	۱۰	۱۵	۹	۸/۵	
Frank	۲۳	۹	۱۵	۸	۸/۷۵	
Clayton	۲۴	۱۲	۱۸	۹	۷/۲۵	

  

سطح معناداری ۱ درصد						
روزهای معاملاتی	تعداد دفعات مورد انتظار				۴۳۷	۵
کاپیولا	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t	میانگین قدر مطلق خطا	
Gaussian	۸	۱	۸	۱	3/5	
Student t	۶	۱	۳	۱	۲/۷۵	
Gumbel	۹	۱	۲	۱	۳/۷۵	
Frank	۹	۱	۳	۱	3/5	
Clayton	۸	۱	۲	۱	3/5	

جدول ۵. مقایسه روش‌های مختلف محاسبه VaR

میانگین خطا	۴۳۷		روزهای معاملاتی
	۱٪	۵٪	سطح معناداری
	۵	۲۲	تعداد دفعات مورد انتظار
۱	۶	۲۲	t-copula-GARCH-n
۳	۳	۲۱	t-copula-GJR-n
۱۸	۲	۷	Variance-Covariance
۱۸	۱	۸	Historical Simulation
۱۳	۱۳	۲۷	EWMA
۵	۹	۲۳	GARCH-n
۴	۹	۲۲	GARCH-t
۳	۶	۲۰	GJR-n
۳	۶	۲۰	GJR-t

افزون بر این، در این پژوهش به کمک روش پس‌آزمون<sup>۱</sup> به بررسی معنادار بودن دقت VaR محاسبه شده از روش‌های مختلف پرداخته شد. جدول ۶ آماره‌های محاسبه شده آزمون پوشش غیرشرطی<sup>۲</sup>، که توسط کوپیک (۱۹۹۵) ارائه شده است را در سطح اطمینان ۹۵ درصد و ۹۹ درصد به همراه مقادیر بحرانی مانند دو سطح اطمینان، نشان می‌دهد. فرضیه صفر در این آزمون عبارت است از اینکه تعداد دفعاتی که VaR محاسبه شده از بازدهی واقعی پرتفوی بزرگ‌تر است، برابر است با تعداد دفعات مورد انتظار در سطح اطمینان مد نظر. با توجه به مقادیر بحرانی ۳/۸۴ و ۶/۶۳ در سطح ۵ درصد و ۱ درصد و آماره‌های ۰/۰۰۱۱ و ۰/۵۵۰۱، مشاهده می‌شود در هر دو سطح اطمینان نمی‌توان فرضیه صفر را برای روش کاپیولا- گارچ رد کرد؛ یعنی روش کاپیولا- گارچ توانسته است VaR پرتفوی را با دقت محاسبه کند.

این پژوهش براساس کارهای پارلو و هوتا (۲۰۰۶) و هوانگ و همکاران (۲۰۰۹) است. نتایج این پژوهش مشابه پژوهش سال ۲۰۰۹ هوانگ و همکاران است. در هر دو پژوهش روش

1. Back Test  
2. Unconditional Coverage Test

کاپیولا- گارچ با فرض نرمال بودن توزیع پسماندها بهترین عملکرد را دارند اما در پژوهش پارلو و هوتا، روش محاسبه ریسک با استفاده از تابع کاپیولا SJC کمترین میانگین خطا را دارد.

جدول ۶. نتایج آزمون پوشش غیرشرطی

روزهای معاملاتی		۴۳۷
مقدار بحرانی ۵٪		۳/۸۴
مقدار بحرانی ۱٪		۶/۶۳
روش برآورد VaR	آماره ۵٪	آماره ۱٪
t-copula-GARCH-n	۰/۰۰۱۱	۰/۵۵۰۱
t-copula-GJR-n	۰/۰۳۵۲	۰/۴۸۷۴
Variance-Covariance	۱۲/۲۸۸۹	۱/۶۲۶۴
Historical Simulation	۱۲/۰۸۱	۳/۸۱۶۶
EWMA	۱/۱۹۲۵	۱۱/۲۵۸۱
GARCH-n	۰/۰۶۲۶۸	۳/۷۹۴
GARCH-t	۰/۰۰۱۱	۳/۷۹۴
GJR-n	۰/۱۶۹۴	۰/۵۵۰۱
GJR-t	۰/۱۶۹۵	۰/۵۵۰۱

### نتیجه گیری

این پژوهش نشان داد ترکیب تئوری کاپیولا با مدل های GARCH می تواند ابزار قدرتمندی برای محاسبه VaR ارائه کند. در این پژوهش از توابع کاپیولای مختلف و توابع توزیع حاشیه ای متفاوت استفاده شد. پس از مقایسه نتایج به دست آمده با روش های دیگر، مشخص شد VaR محاسبه شده از طریق روش کاپیولا- گارچ با تابع کاپیولای تی- استیودنت، دقیق تر از روش های دیگر، ریسک پرتفوی را محاسبه می کند.

### References

- Clayton, D. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application to a uranium exploration data set. *Technometrics*, 28 (2): 123-131.



- Deng, L. Ma, C. & Yang, W. (2011). Portfolio Optimization via Pair Copula-GARCH-EVT-CVaR Model. *Systems Engineering Procedia*, 2 (1): 171-181.
- Embrechts, P. McNeil, A. & Straumann, D. (2002). *Risk Management Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press.
- Engle, R. (1982). Auto-regressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50 (4): 987-1007.
- Frank, M. (1987). Best-poss bounds for the distribution of a sum – a problem of Kolmogorov. *Probability Theory and Related Fields*, 74 (1): 199-211.
- Genest, C. (1987). Frank's family of bivariate distribution. *Biometrika*, 74 (3): 549-555.
- Goorbergh, R. Genest, W. & Werker, B. (2005). Bivariate option pricing using dynamic copula models. *Insurance, Mathematics and Economics*, 37 (1): 101-114.
- Gumbel, E. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of American Statistical Association*, 55 (292): 698-707.
- Hamerle, A. & Rosch, D. (2005). Misspecified Copulas in Credit Risk Models: How Good is Gaussian?. *Journal of Risk*, 8 (1): 35-47.
- Hotta, L. Lucas, E. & Palaro H. (2008). Estimation of VaR using copula and extreme value theory. *Multinational Finance Journal*, 12 (3/4): 205-221.
- Huang, J. Lee, H. Liang, H. & Fu, W. (2009). Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45 (3): 315-324.
- Kupiec, P. (1998). Stress testing in a value at risk framework. *The Journal of Derivatives*, 6 (1): 7-24.
- Ling, C. (1965). Representation of associative functions. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 12 (1): 189-212.
- Meneguzzo, D. & Vecchiato, W. (2004). Copula Sensitivity in Collateralized Debt Obligations and Basket Default Swaps. *The Journal of Future Markets*, 24 (1): 37-70.
- National Bureau of Economic Research. (1927). *The Behaviour of Prices*. [Brochure]. New York : Mills, C.
- Neslehova, J. Embrechts, P. & Demoulin, C. (2006). Infinite-mean Models and the LDA for Operational Risk. *Journal of Operational Risk*, 1 (1): 3-25.
- Palaro, H. & Hotta, L. (2006). Using conditional copulas to estimate value at risk. *Journal of Data Science*, 4 (1): 93-115.

- Patton, A. (2001). Applications of Copula Theory in Financial Econometrics. (Unpublished Ph.D. dissertation). University of California, San Diego, USA.
- Schweizer, B. & Sklar, A. (1961). Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 8 (1): 169-186.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut Statistique de l'Universite de Paris*, 8 (1): 229-231.

